Акад. А. Н. Крылов

Леонард ЭЙЛЕР

Изд-во Академии Наук СССР

Ad Prototypum artificis Em: Handmanni Basil: manu pictum
Inque Honorem summi Viri Bibliothecae publicae
Amplissimi Magistratus Basileensis jussu illatum
[illegible]

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

ДОКЛАД АКАДЕМИКА
А. Н. КРЫЛОВА,

ПРОЧИТАННЫЙ НА ТОРЖЕСТВЕННОМ
ЗАСЕДАНИИ АКАДЕМИИ НАУК СССР
5 ОКТЯБРЯ 1933 г.

ЛЕНИНГРАД · 1933
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК

Напечатано по распоряжению Академии Наук СССР

Сентябрь 1933 г.

Непременный секретарь академик *В. Волгин*

Редактор издания акад. *А. Н. Крылов*

Технический редактор А. Покровский

Ученый корректор А. А. Типольт

Обложка работы худ. А. А. Ушина

Сдано в набор 5 сентября 1933 г. — Подписано к печати 26 сентября 1933 г.

Формат бум. 62×94 см. — $2^1/_2$ печ. л.

37120 тип. зн. в печ. л. — Тираж 5000 + 150

Ленгорлит № 16630. — АНИ № 260

Заказ № 1696

Типография Академии Наук СССР., В. О., 9 линия, 12

$^4/_{15}$ апреля 1707 г. в Базеле у сельского пастора Павла Эйлера родился сын, получивший имя Леонард, которому было суждено стать одним из величайших математиков когда-либо бывших.

Детство он провел в селении Риэн, приходе своего отца и от отца же получил первоначальное образование.

Его отец, сам бывший ученик Якова Бернулли, ценил и знал математику и обучал ей и своего сына, хотя предназначал его к духовному званию.

После домашнего воспитания юный Леонард был отправлен в Базель, чтобы пройти курс старших, так называемых философских классов тогдашней гимназии или семинарии, между которыми существенной разницы не было.

Благодаря изумительной памяти он легко справлялся с семинарской схоластической премудростью и в свободное время стал аккуратно посещать лекции по математике в Университете, где профессором был знаменитый Иван Бернулли, который, вскоре оценив талант своего юного ученика, даже стал с ним заниматься отдельно по субботам, предложив ему изучать самостоятельно творения знаменитейших авторов, обещая разъяснять те трудности, которые Эйлеру могли бы встретиться.

В 1723 г. шестнадцатилетний Эйлер сдал испытание на степень магистра искусств (magister artium), причем он произнес по-латыни речь, сравнивая философию Ньютона и Декарта. Затем по настоянию своего отца он стал изучать богословие и древнееврейский язык, но вскоре с согласия отца перешел исключительно на занятия математикой под руководством И. Бернулли и подружился с его сыновьями — Николаем и Даниилом.

В 1725 г. была учреждена в Петербурге Академия Наук. Молодые братья Николай и Даниил Бернулли были в нее приглашены и заняли в ней места членов, или, как тогда говорилось, профессоров. Они убеждали и Эйлера последовать их примеру, как только к тому представится случай, и так как ожидалось открытие кафедры физиологии, то посоветовали ему заняться этим предметом.

Начав ревностно заниматься медициной, молодой Эйлер не только не оставил занятий математикой, но защитил диссертацию на право выступить кандидатом на занятие кафедры физики в Базельском университете. Мало того, он представил на конкурс, объявленный Парижской Академией Наук, сочинение о расположении мачт на корабле. Это сочинение получило почетный отзыв и было напечатано Академией в собрании премированных трудов, что особенно замечательно, ибо в гористой Швейцарии, из которой до того времени Эйлер никуда не выезжал, он конечно имел случай видеть корабль не иначе, как на картинках, если не считать малых речных и озерных судов.

Университетские кафедры и вообще всякие должности замещались в то время в Базеле не по выборам, а по жеребью между кандидатами. Жеребьевка оказалась для Эйлера неблагоприятной и вскоре после этой неудачи он, по вызову братьев Бернулли, выехал в Петербург, где он был назначен адъюнктом по математике с окладом 300 руб. в год, хотя вызывался для занятия кафедры физиологии. Ему в то время едва минуло двадцать лет.

Вскоре своими статьями, помещенными в „Записках Академии“, Эйлер занял почетное место среди знаменитейших математиков того времени, которое как-раз совпадало с наибольшим развитием математического творчества, вызванного коренным преобразованием математики и переходом ее от синтеза древних геометров к анализу бесконечно-малых и приложением его к механике, физике, астрономии и пр.

Здесь полезно вспомнить о состоянии той страны, в которую Эйлер переселился. Попал он в эту страну из маленькой Швейцарии, где культура восходила до Юлия Цезаря и древних римлян, построивших в ней такие дороги и мосты, которые почти без ремонта стоят и поныне. Со времени Вильгельма Телля там безвозвратно был свергнут деспотизм императорских наместников, папских легатов и иезуитов, хотя одно время и процветало едва ли лучшее изуверство Кальвина.

Екатерина I, „непомнящая родства“, по определению Бильбасова, в самый день приезда Эйлера умерла, и началась при малолетнем Петре II борьба временщиков Меншикова и Долгоруких.

„Тайная Канцелярия“, сменившая „Преображенский Приказ“, работала не хуже, чем при князе-кесаре Ромодановском; кнутобойство шло во-всю, допросы чинились с „пристрастием“; „дыба“, „виска“, „угольки“, „подноготная“ достигли затем апогея с воцарением Анны Ивановны и ее фаворита Бирона, после чего десять лет шла „бироновщина“.

Хотя существовала сразу ставшая знаменитой Академия, но в стране не только не было науки, но даже самого этого слова не существовало в тогдашнем русском языке, и Академия именовалась „ди сиянс Академия“, а ее ученики „елевами“.

Дороги в стране были таковы, что для сколь-нибудь дальней поездки выжидали зимнего пути; о грубости нравов свидетельствует существование штата придворных шутов и шутих; было еще множество живых участников „всепьянейших“ и „всешутейших“ соборов Петра, было множество свидетелей процессий Степки-медведя „Вытащи“ и подвигов попа Битки.

Кроме рассказов очевидцев Эйлер мог ознакомиться с нравами и обычаями московитов и по книге Герберштейна, тогда еще не очень устаревшей, в которой приведены столь назидательные ответы архиепископа Нифонта на, очевидно, из жизни взятые, далеко не скромные, вопросы новгородца Кирилла.

Можно вообразить как все это действовало на юного, скромного, чинного сына благочестивого швейцарского пастора, — он замкнулся в себе и с необыкновенным рвением и творческим гением занялся наукою.

На Академию возлагалось тогда не только сочинение „ландкарт“, но и торжественных од на победы и тесоименитства императрицы, составление не только предсказаний астрономических явлений и погоды, но и гороскопов по всем правилам астрологии, составление проектов „потешных огней“, „иллюминаций“ и прочих увеселений для ражей, семипудовой, вечно полупьяной, скучающей, развратной императрицы Анны.

Батогами были биты не только академические переводчики Барков и Лебедев „за велие пьянство и дебоширство“, но и сам „элоквенции“ профессор В. К. Тредьяковский, правда своеручно кабинет-министром, которому он чем-то не угодил.

Неудивительно, что когда „коронованный философ“ Фридрих, преобразовывая в Берлине Академию, пригласил в нее

Эйлера, он в 1741 г. это предложение принял и переехал в Берлин.

Фридрих принял его с честью; его пригласили на придворный бал, королева была с ним особенно ласкова, но на все свои любезности и расспросы получала односложные ответы: „да“, „нет“.

Когда придворные спросили Эйлера, почему он так неразговорчив, он отвечал: „Я приехал из страны, где, кто разговаривает, того вешают“. — Ответ, достаточно вразумительно характеризующий и эпоху и страну.

Будучи в Берлине, Эйлер продолжал состоять членом Петербургской Академии не только номинально, но самым деятельным образом, ежегодно доставляя для ее „Записок“ примерно по десятку мемуаров по самым разнообразным вопросам сверх таких капитальных сочинений, как двухтомная „Scientia Navalis“ — „Морская наука“, изданная в 1749 г. и „Дифференциальное исчисление“, изданное в 1755 г.

В декабре 1742 г. ставшим в то время обычным способом, т. е. при помощи маленького „действа“ и прямого или через Сибирь отправления предшественника туда „иде-же несть болезни, печали ни воздыхания, но жизнь бесконечная“ воцарилась:

„Царей и царств земных отрада
Возлюбленная тишина“.

Смертную казнь отменила, но застенки с дыбой для допросов с пристрастием, батогами и кнутами сохранила и, „чтобы другим таким не повадно было“, приказала вырвать языки и бив кнутом сослать в Сибирь трех знатных, болтливых придворных дам „за изблевание хулы на Е. И. В. что ее де потому в 1730 г. не выбрали на царство, что она хотя и не замужняя, а была тогда на сносях, к тому же и рождена до брака Петра с Екатериною“, причем последние слова были выражены кратко официальным, не имеющим женского рода термином, принятым в „Уложении царя Алексея Михайловича“ (гл. X, ст. 280).

Ответ Эйлера немецким камергерам получил скорое и наглядное подтверждение.

Своего из церковных певчих с громоподобным басом фаворита Алексея Разумовского возвела в графы, одарила чуть не сотней тысяч душ крестьян, обратив их этим из свободных в крепостные, и сделала его своим законным супругом.

У Разумовского был 16-летний брат Кирилл. Приставил он к нему в наставники какого-то доку-чиновника по фамилии Теплов, дал неограниченный кредит и отправил в учение заграницу. За два года Кирилл объездил чуть ли не дюжину столичных и университетских городов, изучил в них самым обстоятельным образом все вертепы, публичные и игорные дома и, снабженный пачками дипломов и свидетельств, выданных щедро оплаченными из данного братом неограниченного кредита профессорами, вернулся в Россию.

Малограмотная Елизавета, которая, может быть, и в самом деле верила, что Кирилл „все науки произошел", назначила его в возрасте 18 лет президентом Академии Наук, которую он и начал реформировать, поучая знаменитейших академиков тому, что им следует делать и как истинно научно работать.

Определив в службу некоего немца Шумахера конференц-секретарем, а того же Теплова правителем дел, мудровал Кирилл над Академией 20 лет.

Эйлеру, бывшему в Берлине, не пришлось поучаться у Кирилла, но зато его поучал „коронованный философ", который также считал, что он все знает и все может.

Но Фридриха отвлекали от Академии почти беспрерывные войны, по его собственным словам, „с тремя блудницами" (mit die drei Huren) — Марией Терезией, Елизаветой и маркизой Помпадур, правившей Францией за Людовика XV.

В одну из этих войн русские войска заняли Берлин, пограбили его окрестности в том числе и мызу Эйлера, которую к тому же сожгли, но уважение к Эйлеру было столь велико, что фельдмаршал Салтыков приказал возместить все понесенные им убытки, когда же об этом доложили Елизавете, то она приказала добавить громадную по тогдашнему времени сумму в 4000 рублей.

В Берлине Эйлер пробыл ровно двадцать пять лет. За это время он поместил в „Записках Берлинской Академии" сотни статей как по чистой математике, так главным образом прикладной, издал три тома отдельных статей, не вошедших в журналы и „Записки Академии", три тома писем к немецкой принцессе „о физических и философских материях", два тома введения в анализ, том о вариационном исчислении и том о теории Луны.

Хотя по временам он навлекал на себя неудовольствие Фридриха, но Фридрих его весьма высоко ценил и, когда в 1766 г. Екатерина II пригласила Эйлера вернуться „на любых условиях“ в Петербург, Фридрих не хотел его отпустить, но должен был уступить настояниям Екатерины.

Самому Эйлеру вместо штатного содержания профессора в 1200 руб. было положено 3000 руб., его сын Иван Альберт был определен профессором физики с жалованием в 1000 руб., другой сын был назначен лейб-медиком Екатерины, третий определен в артиллерию и вскоре назначен начальником Сестрорецкого оружейного завода. Кроме того, Екатерина приказала выдать Эйлеру не в зачет на постройку дома 8000 руб.

Фридрих выразил свою досаду на отъезд Эйлера в известном письме Даламберу, в котором имеется такая острота: „говорят, что корабль, на котором Эйлер отправил свое имущество, потонул и на нем погиб сундук, набитый его *XX* и его *KK*, так что мир будет некоторое время лишен столь занимательного чтения“.

Через Даламбера письмо получило огласку, чем Эйлер был не на шутку огорчен и обижен.

Эйлер в то время справедливо считался первым математиком в мире и, живя в Петербурге и пользуясь всеобщим уважением и почетом, начиная от самой царицы, продолжал неустанно работать, проявляя поразительную производительность.

Необходимо при этом заметить, что в 1736 г. Эйлер, исполнив в три дня, какую-то громадную вычислительную работу, на которую прочие академики требовали три месяца, от перенапряжения заболел и лишился правого глаза.

В 1766 г., едва вернувшись в Россию, он снова заболел и совершенно лишился зрения и на левый глаз, но такова была сила его гения и воображения, что ученая его производительность не только не иссякла, но продолжалась с неизменною силою до самой его смерти.

С 1766 г. по 1783 г. им продиктовано его сыну Ивану Альберту и ученикам, членам Академии, Крафту, Лекселю, Фуссу сотни статей и 10 громадных томов отдельных сочинений по самым разнообразным вопросам чистой и прикладной математики, как о том будет сказано ниже.

18 сентября 1783 г. он в перерыве между занятиями шутил со своим пятилетним внуком, почувствовал себя сразу дурно и, по словам Кондорсе: „прекратил вычислять и жить“.

Как видно не внешними проявлениями богата жизнь Эйлера, но зато его творчество изумительно и в науке беспримерно.

Отдельных сочинений им издано 43 тома, главнейшие из которых вы можете видеть на этом столе; отдельных статей им написано 783, а может быть окажется и больше.

Издание полного собрания его сочинений, предпринятое 25 лет назад по международной подписке Швейцарским обществом естествоиспытателей, по первоначальному предположению должно было заключать 40 томов, а теперь, когда их издано 23, выяснилось, что потребуется еще 46 томов, а может быть, и более.

На этом столе вы можете наглядно видеть сколько эти 69 томов составят.

Само собою разумеется, что нет никакой возможности дать сколько-нибудь полное обозрение этих сочинений, поэтому мы ограничимся лишь главнейшими, причем я постараюсь охарактеризовать те сочинения Эйлера, которые он предназначал служить учебными руководствами или же те, в которых предмет излагается полностью, начиная от самых элементов, так что может быть по этим сочинениям изучаем.

I

Уже было сказано, что по совету Ив. Бернулли Эйлер изучал математику по подлинным творениям великих авторов—создателей науки. Нетрудно видеть почему Бернулли дал такой совет: во-первых, сразу оценив необыкновенные способности Эйлера, он видел в нем будущего творца науки, и указанный им путь вел наилучшим образом к развитию именно творчества в науке, во-вторых, в то время не было руководств, по которым можно было бы изучать преобразуемую тогда анализом бесконечно-малых математику.

Но ясно, что метода, применимая к Эйлеру, была неприменима не только к заурядным, но даже к способным ученикам, но необладающим гением Эйлера.

Было также указано, что Эйлер еще в юные годы решил посвятить себя научной и профессорской деятельности; он конечно сразу увидал отсутствие руководств, по которым было бы возможно изучать с достаточною полнотою „новую математику", т. е. анализ бесконечно-малых, чтобы применять его в других областях науки — механике, физике, астрономии, и вот он решил восполнить этот недостаток.

Он начал с механики, но мы в нашем обзоре не будем в точности следовать хронологическому порядку и начнем с анализа.

4 июля 1744 г. Эйлер писал Гольдбаху: „... после того, как я составил себе план полного трактата об исчислении бесконечно-малых, я заметил, что необходимо ему предпослать весьма много такого, что собственно к этому исчислению не относится, но изложения чего нигде нельзя найти, отсюда возникло это сочинение как введение в исчисление бесконечно-малых“.

Намеченный грандиозный план он выполнил, не только создав необыкновенного достоинства руководства, но дав в них и новое систематическое развитие самой науки.

Эти руководства по анализу следующие:

1. Введение в анализ бесконечно-малых. 2 тома, 1748 г.
2. Дифференциальное исчисление. 1 том, 1755 г.
3. Интегральное исчисление. 3 тома, 1768—1770 г.
4. Дополнения к интегральному исчислению. 1 том, 1794 г.

Кроме того, будучи совершенно слепым, он продиктовал Алгебру 1 том, 1770 г., но это далеко не все: сюда надо прибавить: Механику — 2 тома, 1736 г.; „О движении твердых тел — 1 том, 1765 г,; Теорию корабля или как он ее назвал „Морская Наука“ — 2 тома, 1749 и ее сокращенное изложение — 1 том 1773, затем сюда же надо присовокупить „Арифметику для гимназий“ — 2 тома, 1738 г.; Диоптрику — 3 тома, 1769—1771 г., переработанную им при переводе Артиллерию Робинса — 1 том, 1745; Теорию движения планет и комет“ — 1 том, 1744; Теорию движения Луны — 1 том, 1753; Новую теорию движения Луны — 1 том, 1772; Теорию музыки — 1 том, 1739 и мы получим те 23 тома, которые собраны на этом столе.

Я ограничусь обозрением руководств по анализу, „Механикой“ и „Теорией движения Луны“.

Введение в анализ бесконечно-малых — Introductio in Analysin infinitorum, вышло в Лозанне в 1748 г. и заключает 2 тома in 4°, первой в 312 стр., второй в 398 стр.

Вот что пишет сам Эйлер в предисловии к этому едва ли не самому знаменитому и в наше время из его руководств:

„Я часто замечал, что те трудности, которые задерживают начинающих при изучении исчисления бесконечно-малых, происходят оттого, что они хотят получить познания в этой высшей отрасли анализа, обладая лишь весьма малыми познаниями в элементарной алгебре. От этого происходит, что они не только встречают препятствия с первых же шагов, но что у них образуется ложное представление о бесконечности, тогда как истинное истолкование этого понятия должно бы направлять их при изучении этого предмета.

„Строго говоря, анализ бесконечно-малых не требует глубоких познаний в обыкновенном анализе и не требует усвоения всех тех остроумных способов, которые предложены для его усовершенствования, но нельзя отрицать, что есть много вопросов, развитие которых способствует подготовке к изучению сказанной высшей науки, но которые было бы тщетно искать в большей части руководств по элементарной алгебре, а если они там и встречаются, то в изложении недостаточно точном.

„Я не сомневаюсь, — продолжает Эйлер, — что изложенное в двух томах, составляющих это сочинение, с избытком покроет указанный недостаток“.

Первый том рассматриваемого сочинения содержит чистый анализ, второй — аналитическую геометрию, и так как первый том особенно замечателен, то я остановлюсь на нем несколько подробнее.

Эйлер начинает изложение с установления основных понятий о постоянной, переменной, функции и классификации функций. Затем переходит к изучению: целых функций и разложению их на множители, дробных рациональных функций и разложению их на простые дроби; после чего изучает функции иррациональные и здесь дает те подстановки, которые затем в интегральном исчислении применяются при интегрировании иррациональных функций, здесь же они служат ему для упрощения изучения их. В заключение он показывает решение некоторых буквенных уравнений при помощи простейших подстановок.

Следующая глава (IV), хотя и носит общее название „О разложении функций в ряды“, но Эйлер ограничивается разложением в ряд рациональной дроби и некоторыми разложениями, следующими из бинома Ньютона, совершенно не касаясь вопроса о сходимости получаемых рядов, рассматривая эти ряды как способ *представления функций, а не как способ вычисления* численных их значений. Мы укажем при обзоре его дифференциального исчисления к какого рода результатам его привело не вполне осторожное обращение с рядами.

В последующих главах Эйлер изучает важнейшие трансцендентные функции: показательную, логарифмы, тригонометрические прямые и введенные им самим обратные, устанавливает связь между показательной и тригонометрическими функциями, распространяя понятие о них на случай мнимого и комплексного аргумента, дает разложения всех этих функций в ряды, бесконечные произведения, частные дроби и попутно получает свои знаменитые формулы сумм обратных четных степеней натуральных чисел через четные степени числа π, а также множество сумм других рядов.

Все эти формулы получаются, если не с тою строгостью, которая теперь обычно требуется, то с удивительною последовательностью и простотою, пользуясь средствами только элементарной алгебры.

Развив в гл. XV связь между бесконечными произведениями и рядами, он между прочим в § 274 получает то знаменитое бесконечное произведение равное $\frac{\pi^2}{6}$, которое встречается при решении Чебышевской задачи о вероятности того, что наудачу взятая дробь несократима.

Первый том заканчивается учением о так называемом „разбиении чисел“ и учением о непрерывных дробях.

Из этого краткого перечня видно, что за малыми исключениями в с е, что содержится в этом первом томе, и что ц е л и к о м принадлежит Эйлеру стало классическим и теперь входит в любой сколь-нибудь полный курс анализа.

Второй том, как уже сказано, содержит изложение аналитической геометрии, но это изложение весьма своеобразно и оригинально. Надо помнить, что сочинение Эйлера носит название: „Введение в анализ бесконечно-малых“, поэтому он видит цель второго тома не в исследовании при помощи анализа свойств линий по их геометрическому определению, а как бы наоборот в пользовании линиями и их свойствами для наглядного представления функций определяемых алгебраическими уравнениями первой, второй, третьей, четвертой и т. д. степени. Поэтому он не пользуется геометрическими свойствами линий, чтобы находить их уравнения, а по уравнениям изучает эти свойства.

Уравнение первой степени дает ему прямую линию, уравнение второй степени: пучок двух пересекающихся или двух параллельных прямых, круг, эллипс, гиперболу и параболу, как это делается и теперь.

Рассмотрев общий характер бесконечных ветвей кривых и ассимптоты их, он переходит к кривым третьего порядка, классифицируя их по характеру бесконечных ветвей и сводит таким образом 72 вида этих кривых, указанных Ньютоном, к 16 родам.

Затем он применяет ту же методу к кривым четвертого порядка, которых насчитывает 146 родов.

Дает общее учение о касательных к кривым, соприкасающемся круге или круге кривизны, рассматривает затем свойства некоторых трансцендентных кривых, например, циклоиды и в заключение переходит к геометрии пространства трех измерений и первый дает классификацию поверхностей второго порядка.

Изложение Эйлера везде отличается изумительною простотою и ясностью, причем он пользуется исключительно средствами элементарной алгебры и тригонометрии; на этой основе он сумел вложить в свою книгу столь богатое и интересное по общности методов и последовательности их развития содержание. Этим его книга особенно выгодно отличается от многих теперешних французских чудищ, порожденных экзаменными требованиями в Ecole Polytechnique и в Ecole Normale, где для первой из 2500 кандидатов надо отобрать 250, а для второй из 700 или 750 отобрать 18, а остальных признать „неприемлемыми“. Эйлер своими руководствами учил для дела, а не для экзаменов.

II

Дифференциальное исчисление — „Institutiones Calculi Differentialis“ издано нашей Академией в 1755 г. и представляет большой том in 4° в 676 страниц.

По своему содержанию и изложению это руководство Эйлера наиболее отличается от теперешних руководств, и его можно было бы назвать устарелым, если бы это слово было вообще приложимо к творениям Эйлера.

Даже при беглом просмотре обращает на себя внимание, что здесь отсутствует понятие о пределе, нет ни одного чертежа, нет никаких геометрических приложений.

Невольно возникает вопрос, что могло заставить Эйлера принять столь своеобразный способ изложения, и приходится вспомнить о той ожесточенной войне, которая шла между школою Ньютона и школою Лейбница.

Школу Лейбница возглавлял его столь талантливый сотрудник, учитель Эйлера, Ив. Бернулли; его сыновья, рано умерший Николай и Даниил, были друзьями Эйлера, ясно что и Эйлер принадлежал к школе Лейбница столь же полно и столь же убежденно, как семья Бернулли.

Ньютон открыл и дал основы исчисления бесконечно-малых, исходя из понятий механических и геометрических. Он всегда применял при своих рассуждениях геометрические представления и был абсолютно строг в них, и абсолютно точен в языке и выражениях, поэтому он сперва устанавливает то понятие о пределе переменной величины, которым пользуются и сейчас, и все свое учение о „флюксиях", или по теперешней терминологии „производных", основывает на разыскании предела отношения двух бесконечно-малых величин, находящихся в определенной взаимной зависимости и изменяющихся совместно. Он, ставя как основную задачу интегрального исчисления нахождение „флюенты" по данной ее „флюксии", т. е. первообразной функции по данной ее производной, пользуется все время геометрическими представлениями и самое свое сочинение называет: „De Quadratura Curvarum".

Иначе поступил Лейбниц, — вместо исчезающего в пределе приращения переменной или ее функции, рассматриваемого Ньютоном, он ввел новый термин „бесконечно-малое". Он не дал этому понятию точного и строгого математического определения, а в некоторых своих пояснениях, он как бы даже не различает математических понятий „бесконечно-малое" от „весьма малое" и „бесконечно-большое" от „весьма большое", уподобляя для примера одно земному шару, другое пылинке. Более того, он связывает понятие о бесконечно-малом с философскими понятиями о „конечной или бесконечной делимости материи", о „неделимом атоме", о „монаде" и пр., которые весьма далеки от чистой математики, имеющей дело не с самими величинами а с числами, служащими им мерою.

Стремление Эйлера следовать всецело за Лейбницем может быть даже далее того, куда бы зашел сам Лейбниц, придало „Дифференциальному исчислению“ Эйлера тот столь не привычный для нас облик, игнорирование же ньютоновой строгости и ньютонова понятия о пределе завлекло его даже в дебри ошибочных рассуждений и привело его к таким выводам и формулам, которые нам кажутся более чем странными, как то будет видно из дальнейшего.

Сочинение Эйлера состоит из двух частей: в первой он излагает основания или теорию дифференциального исчисления, во второй его аналитические приложения, оговорив в предисловии, что он не касается геометрических приложений, ибо по этому предмету имеется достаточно сочинений.

Он начинает свою книгу превосходным изложением учения об исчислении конечных разностей и его приложений к нахождению сумм данного числа n первых членов разного рода рядов, в том числе сумм целых степеней натуральных чисел, и получает таким образом бернуллиевы функции, дает таблицу первых 16 из них и общую формулу, по которой можно составить их до 29-й, указывает их применение к нахождению суммы n членов таких рядов, у которых общий член выражается целою функцией числа n.

Третья глава носит заглавие „О бесконечных и бесконечно-малых“. Эйлер говорит, что в этой главе он имеет в виду устранить все неясности, сопряженные со словом бесконечность как по отношению к бесконечно-большому так и бесконечно-малому, но он не только не достигает этой цели, а как-раз обратной.

Причина этому та, что он нигде не дает достаточно точных определений математических понятий о переменной величине и ее пределе, как бы опасаясь впасть в „ньютонианство“. Вместо точных определений, занимающих по несколько строк, он предпочел излагать на многих страницах многословные философские рассуждения, не поясняющие, а затуманивающие дело.

Стоило только вникнуть в ньютоново определение предела и в то, каким образом переменные величины вводятся в исчисление, чтобы высказать такое определение: *переменною величиною называется такая, которая в данном вопросе принимает бесчисленное множество различных значений, этим вопросом вполне определяемых и расположенных в определенном порядке.*

Каждое из этих значений называется частным значением переменной.

Переменная величина вводится в исчисление, обозначая одно из частных ее значений, *не указывая, которое именно*, буквою и производя по правилам алгебры над этою буквою необходимые по роду вопроса действия.

Ньютоново же определение предела таково: *пределом переменной величины называется такая постоянная, абсолютное значение разности между которой и частными значениями переменной, начиная с некоторого из них, становится и для всех дальнейших остается меньше любой наперед назначенной величины.*

Бесконечно-малою величиною называется такая переменная величина, предел которой равен нулю.

Иными словами: *бесконечно-малою называется такая переменная величина, в ряду частных значений которой находится такое, которое само и все за ним следующие по абсолютной величине меньше любой наперед назначенной величины.*

Заменив в этом последнем определении слово „малою" словом „большою" и слово „меньше" словом „больше", мы имеем определение бесконечно-большой величины.

Отсюда ясно, что бесконечно-большая величина предела не имеет, но для сокращения речи вводят знак ∞ — бесконечность и говорят, что предел бесконечно-большой величины есть бесконечность.

Как видно, никакой тут философии нет, в особенности если вспомнить, что математический анализ имеет дело не с самими величинами, а исключительно с числами, являющимися мерою величин.

Вместо этих простых и ясных определений Эйлер для переменной величины дает тавтологическое определение: *переменная величина есть такая, которая при рассмотрении данного вопроса, увеличиваясь или уменьшаясь, изменяется.*

Понятия о пределе он совершенно не вводит, поэтому под бесконечно-малою разумеет не переменную величину, а как бы такую постоянную, которая меньше любой величины, а под бесконечно-большою такую постоянную, которая больше любой величины, ясно что последней не существует, а для первой он получает нуль.

В самом деле он говорит: „нет никакого сомнения, что всякая величина может быть столько раз уменьшена делением, что совершенно исчезает и обращается в ничто. Бесконечно-малая величина есть величина исчезающая и следовательно на самом деле она равна нулю. Это определение“, продолжает Эйлер, „согласуется с тем, в котором под бесконечно-малою величиною разумеют такую, которая меньше любой наперед назначенной величины“. „Ибо, если величина меньше всякой величины, которую можно назначить, то она по необходимости равна нулю, так как в противном случае можно было бы задать величину ей равную, что противно предположению, поэтому на вопрос, что есть в математике бесконечно-малая величина, мы отвечаем, что таковая на самом деле равна нулю“ (§ 83).

Отсюда ясно стремление Эйлера, избегая понятия о пределе, рассматривать бесконечно-малую величину не как переменную, а как постоянную, которая была бы меньше всякой другой постоянной, а бесконечно-большую, которая была бы больше всякой другой постоянной.

Это приводит его к тому, что он дифференциал всякой переменной величины считает равным нулю, но в то же время указывает, что отношение дифференциалов разных переменных может равняться любому числу, что подтверждает равенством $n \cdot 0 = 0$, из которого следует пропорция $n : 1 = 0 : 0$, т. е. что отношение нуля к нулю может равняться всякому числу.

Вся глава занята пояснениями в этом роде, мы их приводить не будем, хотя они служат наилучшим примером того, куда может завести предвзятое преклонение перед какою-либо доктриною даже такого гения как Эйлер и даже в таком ясном и определенном предмете как математика.

В последних параграфах этой главы Эйлер дает основные понятия о бесконечных рядах, рассматривая сперва для примера разложение

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

Он обращает внимание, что сумма первых n членов этого ряда отличается от $\frac{1}{1-x}$ на величину $\frac{x^n}{1-x}$ и, значит, при увеличении числа n взятых членов лишь в том случае приближается к значению $\frac{1}{1-x}$, когда остаток $\frac{x^n}{1-x}$ приближается к нулю, т. е.

когда x меньше 1. Лишь в этом случае, приписав x какое-либо частное численное значение, мы по соответствующему значению $\frac{1}{1-x}$ получим истинное значение суммы ряда.

Обращаясь затем к знакопеременному ряду

$$\frac{1}{1-x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\ldots$$

он полагает последовательно $x=1, 2, 3, \ldots$ и указывает, что при отбрасывании в ряде остатка получаются такие равенства

$$1-1+1-1+1-1+\ldots=\frac{1}{2}$$
$$1-2+4-8+16-32+\ldots=\frac{1}{3}$$
$$1-3+9-27+81-243+\ldots=\frac{1}{4}$$

и справедливо замечает, что „эти равенства очевидно не верны, ибо например во втором ряду сумма первых членов тем более отличается от $\frac{1}{3}$, чем больше членов в ней будет взято, тогда как сумма ряда должна быть тем пределом (limes), к которому мы тем более приближаемся, чем больше членов берем“. Здесь надо еще заметить, что ряд, члены которого убывают, Эйлер называет сходящимся, а члены которого возрастают расходящимся в отличие от теперешних понятий. Затем в § 109 он продолжает: „Отсюда некоторые заключили, что ряды, называемыя расходящимися, не имеют определенной суммы, ибо при действительном сложении их членов, мы не приближаемся к пределу, который можно было бы принимать за сумму ряда. Это мнение вполне правильно, ибо сказанные суммы вследствие отбрасывания остатка совершенно неверны“. „Однако“, продолжает Эйлер, „сказанные суммы при всем их отклонении от истины никогда не приводят к ошибке и дозволяют находить множество предложений, которые, не пользуясь этими суммами, было бы трудно получить, поэтому если бы эти суммы были неверны, то они не могли бы приводить к верным результатам, вот это затруднение и надо разъяснить“.

„По моему мнению“, говорит далее Эйлер, „вся трудность лежит в слове с у м м а, ибо если приписывать слову сумма его обыкновенное значение, т. е. совокупность всех действительно вошедших в ее состав членов, то несомненно, что можно представлять лишь суммы таких рядов, которые сходятся, и сумма первых членов ряда по мере увеличения числа взятых членов приближается все более и более к определенному постоянному значению. Напротив того, расходящиеся ряды, члены которых не убывают, будь они поочередно со знаками $+$ и $-$ или нет, не имеют определенной суммы, если этому слову придавать вышеуказанное значение. В тех же случаях, когда, исходя от этих неверных сумм, получаются верные результаты, то это происходит не потому, что например конечное выражение $\frac{1}{1-x}$ есть сумма ряда $1+x+x^2+x^3+\ldots$, а потому что этот ряд получается как результат разложения указанного выражения по степеням буквы x. Таким образом, можно бы обойтись и без слова сумма. Мы устраним все трудности и кажущиеся противоречия, приписывая слову сумма смысл отличающийся от того, который этому слову обычно придают, и будем называть выражение, из которого при разложении следует заданный ряд, суммою его“.

Высказав такое условное определение, Эйлер продолжает: „при таком определении выражение $\frac{1}{1-x}$ есть сумма ряда $1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots$, ибо этот ряд происходит от разложения сказанной дроби, каково бы число x ни было.

Когда ряд сходящийся, то значение „суммы“, так определенной при заданном значении x, представляет сумму ряда в обыкновенном смысле, что же касается рядов расходящихся, то, введя выше указанное понятие „суммы“, мы устраним все возникающие по отношению к ним трудности. Наконец, при помощи этого понятия является возможность подтвердить пользу расходящихся рядов и предотвратить всякие против них нарекания“.

Здесь Эйлер как бы забывает сказанное им же четырьмя параграфами выше о необходимости рассматривать остаток ряда, вместе с тем он не достаточно отчетливо указал, что если верные результаты и получаются при замене ряда „суммою“ в ее условном смысле, то для рядов буквенных, а для численных, лишь когда остаток их стремится к нулю, и значит ряд сходящийся. При буквенных же рядах как бы неявно предполагается, что ряд взят вместе со своим остатком в буквенной его форме. Все же численные формулы вроде приведенных выше не представляют истинных равенств, и значит, вводя указанное условное понятие суммы, надо было ввести и какоенибудь условное обозначение вместо знака равенства; в том же виде, в котором вышеприведенные формулы написаны, они представляют ряд нелепостей, которые должны бы служить предостережением против пользования введенным Эйлером условным понятием „сумма“, когда ряд расходящийся не только в смысле, придаваемом этому слову Эйлером, но и в теперешнем.

Все эти формулы в математике совершенно бесполезны, и сам Эйлер, хотя и привел их и множество других им подобных, но ни в каких приложениях ими не пользуется, этим самым оттеняя их бесполезность.

В дальнейшем последователи Эйлера, преклоняясь перед его авторитетом, как бы старались преумножать число этих нелепых равенств, зачастую забыв об условном их смысле, придаваемом Эйлером, и таким образом создали тот скандал в математике, который продолжался 75 лет.

В него впало множество авторов в том числе не только „Тредьяковский от математики“, т. е. труженик а не творец — Лакруа, и надо ему отдать справедливость труженик почтенный и добросовестнейший, но и знаменитый астроном сэр Джон Гершель.

Скандал этот был прекращен Гауссом, Коши и Абелем, изгнавшими из строгой математики пользование рядами без исследования их сходимости.

Здесь необходимо, однако, заметить, что если отвлеченная чистая математика и может обойтись без рядов расходящихся или без таких, сходимость которых не доказана, то прикладная математика, начиная с астрономии, без них обойтись не может и до сих пор практически пользуется тем понятием „сходящийся ряд“, которым пользовался Эйлер, именно, что для практики тот ряд „сходящийся“, у которого члены вначале так быстро убывают, что можно ограничиться, взяв самое малое их число, но здесь, чтобы не впасть в ошибку, надо обращаться затем к тем уравнениям, которым разлагаемая функция должна удовлетворять и посмотреть, подставив в них полученные первые члены разложений, в какой мере эти уравнения удовлетворяются и заключаются ли получаемые погрешности в пределах тех „допусков“, которые относятся к самим уравнениям, ибо в прикладных вопросах сами эти уравнения не точные, а лишь приближенные. Отсюда видно, что для практики важно уметь разлагать в ряды и находить достаточное число первых их членов, а этому как-раз и учит Эйлер на множестве бесподобно подобранных примеров.

Дальнейшие главы сочинения Эйлера заключают уже превосходное изложение дифференциального исчисления и его аналитических приложений, лишь в статье о рядах опять частенько попадаются отмеченные выше недостатки, которые и делают то, что в современном смысле это сочинение Эйлера является как бы устарелым, тем не менее оно остается в высшей степени поучительным по превосходному подбору примеров, по изяществу многих выводов и преобразований и по оригинальности и богатству содержания.

III

Интегральное исчисление, „Institutiones Calculi Integralis" состоит из трех основных томов, изданных нашей Академией в 1768—1770 гг. и дополнительного тома, изданного ею же в 1794 г. Полный объем всех четырех томов 2040 стр. in 4^0.

Этим сочинением Эйлер завершил тот цикл сочинений, которыми он по своему плану, намеченному еще в 1744 г., хотел дать полное учение об исчислении бесконечно-малых. Оно, по справедливости, заслуживает своего названия „Institutiones" — установление, ибо, являясь первым полным руководством по интегральному исчислению, оно не только охватывает предмет в его полном объеме, и систематизирует все тогда известное, в значительной части принадлежащее самому Эйлеру, но многие вопросы развиваются заново, так что самое сочинение заключает много совершенно нового. Все изложено с таким совершенством, что стало классическим, перешло во множество последующих руководств и изучается и по днесь в форме, приданной Эйлером, начиная от самого начертания формул.

В отличие от предыдущих своих сочинений, в которых предмет излагается связным текстом с подразделением на главы и параграфы, он здесь придерживается образца, выработанного в средние века, перешедшего от древних авторов, где каждому предложению дается соответствующее заглавие: лемма, теорема, проблема, следствие, поучение и пр. В типографском смысле это значительно увеличивает объем книги, но зато придает изложению предмета особенную отчетливость и доставляет удобство при ссылках.

Задачу интегрального исчисления Эйлер ставит в самом общем виде такими словами: „Интегральное исчисление есть метод нахождения по данному соотношению между дифференциалами соотношения между самими количествами; действие, которым это достигается, называется интегрированием“.

Указав постановку задачи, он дает перечень и пояснение возникающих при этом вопросов, в порядке их возрастающей общности и сложности, и затем характеризует содержание всего сочинения таким обозрением:

Обозрение полного трактата по „Интегральному исчислению“

1. Книга предыдущая содержит изложение методов исследования функций одной переменной по данному соотношению между дифференциалами и заключает две части:

1) часть первая, когда заданное соотношение содержит дифференциалы только первого порядка;

2) часть вторая, когда сказанное соотношение содержит дифференциалы второго и высших порядков.

2. Книга последующая содержит изложение методов исследования функций двух и нескольких переменных по данному соотношению между дифференциалами и заключает две части:

1) часть первая, когда сказанное соотношение содержит дифференциалы только первого порядка;

2) часть вторая, когда сказанное соотношение содержит дифференциалы второго и высших порядков.

Дав это обозрение предмета, он прямо переходит к интегрированию функций одной переменной и устанавливает те классы, когда оно выполняется в конечном виде. Все здесь приведено в такую стройную и законченную систему и последовательность, что изложение Эйлера целиком сохранилось и поныне, причем в этой области к созданному Эйлером ничего существенного за 150 лет не прибавлено.

Указав вкратце способ приближенного вычисления определенных интегралов, он дает ряд примеров таких интегралов, которые находятся лишь при некоторых частных значениях пределов, все эти интегралы стали также классическими. Этим заканчивается первая часть первого тома.

Вторая часть этого тома содержит учение об интегрировании дифференциальных уравнений первого порядка, и здесь вся практическая часть до сих пор сохранилась в том виде, который ей придан Эйлером. Сюда вошло всецело принадлежащее Эйлеру учение об интегрирующем множителе и о сложении трансцендентных функций, и здесь он приводит свое знаменитое интегрирование уравнения, приводящее к формулам сложения эллиптических интегралов. Изложив методу приближенного численного интегрирования, он в заключение на ряде примеров поясняет способы интегрирования уравнений первого порядка, содержащих производную неизвестной функции в степени выше первой или даже под знаками функций трансцендентных.

Второй том содержит учение об обыкновенных дифференциальных уравнениях второго и высших порядков. Было бы слишком долго перечислять его содержание, достаточно сказать, что все, что в этом томе изложено стало классическим; подбор примеров и остроумие методов, примененных для интегрирования их, во многих случаях можно назвать изумительными и за 150 лет если что с практический стороны к изложенному в этом томе прибавлено, то по отношению к некоторым уравнениям, приводящим к функциям специальным, как например Бесселя, Лежандра и т. п., и кроме того развито учение об интегрировании систем уравнений, которого Эйлер не касался. О чисто теоретической части мы не говорим, — ее у Эйлера почти нет и она всецело создана трудами авторов, живших после Эйлера.

Третий том заключает учение об интегрировании уравнений в частных производных как первого, так и высших порядков и в заключение вариационное исчисление.

Здесь Эйлер для уравнений первого порядка дает ряд частных методов, поясняемых на множестве частных примеров, но так как он не рассматривал систем уравнений обыкновенных и ему недоставало понятия об интеграле такой системы, то ясно, что он не связал вопрос об интегрировании уравнений в частных производных первого порядка с интегрированием систем уравнений обыкновенных и не дал этому отделу той законченности, которая затем была ему придана трудами Лагранжа, Коши и Якоби и множеством математиков второй половины XIX века и до наших дней.

Само собою разумеется, что по отношению к уравнениям в частных производных высших порядков Эйлер ограничивается рядом частных примеров, в применении к уравнениям частного вида.

Вариационное исчисление, можно сказать, было создано Эйлером, и основное здесь уравнение и до сих пор носит его имя.

Надо помнить, что все, что есть в третьем томе всецело принадлежит Эйлеру, ему не у кого было что-либо заимствовать или по своему излагать что-либо существующее — ему все пришлось создавать заново, и тогда сила его гения становится очевидной, проявляясь на каждой странице, можно сказать, в каждой строчке.

Третий том „Интегрального исчисления" вышел в 1770 г. В последующие годы до самой своей смерти Эйлер написал целый ряд статей, в которых развивает и дополняет отдельные главы „Интегрального исчисления". Статьи эти он помещал в изданиях нашей Академии Наук. Таких статей им составлено 11. В 1794 г. они были собраны и переизданы Академией в одном томе, составившем дополнительный четвертый том „Интегрального исчисления" Эйлера. Перечислять их содержания не будем.

Из этого беглого обзора видны оригинальность содержания, обилие совершенно нового материала и таких открытий, как учение об интегрирующем множителе, сложение трансцендентных функций и пр., совершенство и законченность изложения, поэтому неудивительно, что появление „Интегрального исчисления" Эйлера произвело на современных ему математиков не только глубокое, но, можно сказать, ошеломляющее впечатление, недаром Даламбер в одном из своих писем Лагранжу называет Эйлера „ce diable d'homme", „этот диавол", как бы желая высказать этим, что сделанное Эйлером превышает силы человеческие.

Не надо однако думать, что Эйлер исчерпал всю науку и что после него в ней искать и делать больше ничего не оставалось. Напротив, создав новые методы, показав их приложения к решению новых вопросов, Эйлер, так сказать, проложил новые пути для быстрого движения науки вперед. За ним идут такие великие математики как: Лагранж, Лаплас, Лежандр, Гаусс, Коши, Пуассон, Якоби, Абель и множество других, а в какой мере они высоко ставили Эйлера можно судить по словам Лапласа: „Читайте Эйлера, читайте, — он учитель всех нас".

IV

Механика Эйлера под заглавием: „Mechanica sive motus Scientia analytice exposita", т. е. механика, или наука о движении, изложенная аналитически, издана нашей Академией в 1736 г.

Таким образом, по времени это сочинение вышло через 98 лет после „бесед“ Галилея, ровно через 50 л. после первого издания „Начал“ Ньютона и в год рождения Лагранжа, который через 52 года изданием своей „Аналитической механики“ придал этой науке тот окончательный облик, который она сохранила и поныне.

В своем предисловии после краткого обзора существовавших сочинений по механике, т. е. „Статики“ Вариньона, „Форономии“ Германа и „Начал“ Ньютона, изложенных пользуясь геометрическим синтезом, Эйлер говорит: „однако все относящееся до сочинений, составленных без применения анализа, приложимо еще в большей мере к механике. Читатель получает убеждение в справедливости даваемых предложений, но он не получает достаточно точного и отчетливого их познания, так что стоит немного изменить вопрос, и он не будет в состоянии на него ответить, если не прибегнет к анализу и не разовьет его аналитически. Так по крайней мере было со мной, когда я начал изучать „Начала“ Ньютона и „Фороономию“ Германа. Мне часто казалось, что я вполне овладел решением многих задач, однако стоило слегка изменить задания, и я не мог более этих задач решить.

„Уже тогда я попытался, поскольку умел, вместо синтетических методов ввести аналитические и рассматривать вопросы помощью анализа, что способствовало их усвоению. Подобным же образом я рассматривал и другие сочинения по этой науке, перерабатывая их для себя однообразным и упрощенным методом, и привел их в определенный порядок. При этих занятиях мне не только представлялись многие задачи ранее не решенные, которые мне посчастливилось разрешить, но я получил и несколько особенных методов, благодаря которым не только механика, но и самый анализ, как мне кажется, получили значительное приращение. Таким образом возникло это сочинение по механике, в котором как найденное мною о движении тел у других авторов, так и придуманное мною самим изложено аналитически в удобной последовательности“.

Затем Эйлер указывает, что в изданных двух томах его сочинения излагается учение о движении бесконечно-малых тел, или точек, а в дальнейшем он обещает рассмотреть движение тел конечных размеров, что он через 29 лет исполнил, издав свое знаменитейшее сочинение: „Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum“, т. е. „Теория движения твердых тел“.

Я ограничусь кратким обозрением „Механики точки“, так как более полное обозрение совокупности работ Эйлера по механике будет сделано проф. Ю. А. Крутковым в отдельном докладе.

В первом томе Эйлер рассматривает движение свободной точки, во втором точки несвободной, каждый том в свою очередь подразделен на две части, причем в первой рассматривается движение в пустоте, во второй в сопротивляющейся среде.

В первой главе первого тома Эйлер устанавливает основные определения и основные понятия о движения тела, разумея под этим словом, как уже сказано, тело бесконечно-малых размеров, т. е. то, что теперь зовется материальною точкою. Таким образом эта первая глава составляет как бы параллель вступительной главе „Начал“ Ньютона, третье издание которых вышло за 10 лет перед книгой Эйлера.

Ньютон с железною, непреклонною логикой строит всю механику на своих трех „аксиомах или законах движения“ и на установленном им понятии масса или мера количества материи, причем он непосредственным опытом над маятником показывает, что масса, так им определенная, пропорциональна *весу* тела. Аксиомам же он дает пояснения, чтобы они были ясно поняты, но не дает и не пытается их доказывать, считая что умозрительного доказательства быть не может, и что доказательство справедливости этих аксиом может быть лишь физическое по согласию наблюденных явлений с предвычисленными на основании этих аксиом.

Таким образом механика Ньютона есть наука о природе, часть физики и основание физики.

Далеко не так поступает Эйлер. Его логика гораздо растяжимее, гораздо мягче и уступчивее ньютоновой, он, можно сказать, постоянно стремится не пояснить, а доказать недоказуемое, прибегая к так называемым рассуждениям „о достаточном основании“ или „об отсутствии преимущественной причины, по которой нечто могло бы произойти“, а значит оно не происходит, когда причина отсутствует. Но еще за четыреста лет до Эйлера Буриданов осел подох с голоду между двумя стогами сена, поэтому все такие рассуждения Эйлера не представляют истинных доказательств, а представляют более или менее искусственную маскировку отсутствия таковых, может быть тут сказалась семинарско-богословская школа, которую в юные годы проходил Эйлер.

На основании этих видоизмененных или, если можно так выразиться, разжиженных ньютоновых аксиом, конечно не по сути, а по форме изложения, устанавливается соотношение между силою, массою и ускорением точки и механическим вопросам о ее движении придается математическая формулировка, а раз это сделано, то все дальнейшее у Эйлера идет безукоризненно.

Сперва он рассматривает прямолинейное движение точки под действием разного рода сил. Ясно, что здесь все дело состоит в интегрировании одного дифференциального уравнения второго порядка, порядок которого понижается, и в сущности все задачи, рассматриваемые Эйлером, за исключением свободного падения тяжелого тела и гармонического движения, являются не столько задачами механическими, сколько примерами на интегрирование уравнений и функций. Однако, обратим здесь внимание на задачу 38 о движении точки, притягиваемой к данному неподвижному центру обратно пропорционально квадрату расстояния. Оказывается, что здесь время падения выражается тем знаменитым интегралом, при бесконечных пределах равным $\sqrt{\pi}$, который был найден Эйлером. Функция, выражаемая этим интегралом при переменном верхнем пределе, получила впоследствии множество самых разнообразных применений как то: в руках Крампа в теории астрономической рефракции, в руках Гаусса как основание учения о распределении случайных ошибок и методы наименьших квадратов, в руках Лапласа и Пуассона в одном из основных вопросов теории вероятностей, у Максвелла в кинетической теории газов, у Пирсона в генетике, биологии и статистике и пр.

Затем Эйлер рассматривает прямолинейное движение в сопротивляющейся среде. Весь этот отдел в еще большей степени, нежели предыдущий, представляет чисто математический интерес.

Два последние отдела первого тома заключают учение о криволинейном движении свободной точки в пустоте, а затем в среде сопротивляющейся.

Чтобы привести рассмотрение этого движения к математическому вопросу, Эйлер разлагает действующую на точку силу по касательной и по нормали к траектории (при плоском движении), первую слагающую уравнивает произведению массы на слагающую ускорения по касательной, вторую на слагающую ускорения по нормали, выражения которых у него были выведены в первой главе и все исследование проводит, исходя из двух уравнений таким образом составленных.

Здесь необходимо отметить отдел о движении точки под действием центральной силы, представляющий превосходную аналитическую переработку соответствующего отдела ньютоновых „Начал“ и как бы род введения в „Небесную механику“, для которой столь много сделано Эйлером, как будет отмечено дальше в нашем докладе.

В отделе о движении точки в среде сопротивляющейся необходимо отметить задачи, относящиеся к движению под действием силы тяжести, т. е. к задачам внешней баллистики, которые затем послужили Эйлеру при переработке сочинения Робинса, как было сказано выше.

Второй том „Механики“ — учение о несвободном движении точки за исключением теории маятника представляет также только чисто математический интерес как сборник множества задач на интегрирование дифференциальных уравнений, задач, относящихся к вариационному исчислению, тогда еще не существовавшему и наконец, задач, приводящих к тем уравнениям, которые теперь зовутся интегральными. Здесь необходимо также отметить последнюю главу о движении точки по данной поверхности, где Эйлер попутно дает основания так называемой дифференциальной геометрии поверхностей и составляет в прямолинейных прямоугольных координатах как выражение кривизны, данной на поверхности линии в данной ее точке, так и общее дифференциальное уравнение геодезических, т. е. кратчайших линий по данной поверхности.

Из этого общего обзора видно, что Эйлер не только приложил математический анализ к решению механических вопросов, но сделал свою механику из науки физической, т. е. из науки, которая должна исследовать явления, совершающиеся в природе, науку чисто математическую, исследующую движение воображаемой точки, под действием воображаемых в природе не существующих сил.

Поступая так, Эйлер как пионер в этом деле был прав — ему надо было дать примеры перевода механических вопросов на математический язык, дать примеры решения полученных уравнений с доведением этого решения до конца, развивая самый анализ, тогда также только что зародившийся, и в этом смысле его „Механика“ бесподобна и служит лучшим свидетельством его гениальности. Но что было хорошо двести лет назад не может быть одобрено теперь, и аналитическая механика не должна представлять собою многотомных сборников отвлеченных чисто математических задач, она должна быть сближена с физикой, сближена с природой, сближена с действительностью, а не витать в эмпиреях.

V

В числе астрономических работ Эйлера видное место занимает: „Теория движения Луны“, к которой он возвращался дважды, издав два сочинения по этому предмету.

Первое из этих сочинений вышло в 1753 г. под заглавием „Theoria Motus Lunae“, второе в 1772 под заглавием „Theoria Motuum Lunae, nova methodo pertractata“. Я ограничусь лишь возможно кратким обозрением этого второго сочинения, но укажу сперва то важное практическое значение, которое в то время придавалось изучению движения Луны.

После открытия на рубеже XVI века Америки, пути в Индию кругом мыса Доброй Надежды, наконец кругосветного плавания Магелана, мореходство было выведено из бассейна Средиземного моря и от побережий Европы на простор океанов; явилась настоятельная надобность в способах астрономического определения как места корабля на море, так и географического положения вновь открываемых земель, островов, неведомых ранее городов и пр.

Одна из географических координат — широта места определялась весьма просто или по полуденной высоте Солнца, или по высоте Полярной звезды, для определения же второй координаты — долготы, можно сказать, никаких методов не было, если не считать наблюдений таких редких явлений как лунные затмения, которыми для этой цели пользовались еще древние.

С развитием мореплавания и торговых сношений с Индией и Китаем задача об определении долготы корабля на море становилась все более и более настоятельной, так что в 1714 г. по предложению Ньютона английский парламент издал постановление о выдаче премии в 20 000 фн. ст. тому, кто изобретет способ определения долготы на море с точностью до полуградуса, причем были подробно оговорены условия выдачи этой премии, по тогдашним ценам равнозначной теперешним 200 000 фн. ст., т. е. 2 миллионам рублей золотом.

Сам Ньютон изобрел важнейший для астрономических наблюдений на море инструмент октант, или секстан, но не публиковал этого изобретения, которое вновь было сделано Гадлеем в 1730 г. Оно придало наблюдениям высот светил гораздо большую точность, нежели давал градшток, бывший в употреблении до того времени, так что например широта места корабля на море при наблюдении секстаном могла быть определена примерно с точностью до 1′.

Приблизительно тогда же была указана теоретическая возможность определения долготы по так называемым „Лунным расстояниям“.

Определение долготы места основано, как известно, на сличении в один и тот же момент времени местного и времени в Гриниче, от меридиана коего считаются долготы. Местное время определяется легко по наблюдению, скажем, Солнца, главнейшая трудность состояла в определении времени в Гриниче.

Луна при своем месячном видимом движении описывает по небу полный круг в 27 дней, а по отношению к Солнцу в 29 дней, проходя таким образом в среднем около $^1/_2{}^\circ$ в час.

В каждый момент времени она занимает на небе определенное место по отношению к другим светилам, а значит, и наоборот, определив это место можно найти соответствующее всеобщее время, скажем гриничское, место же Луны на небе определяется ее видимым угловым расстоянием до других светил.

Таким образом, явилась задача о предвычислении на несколько лет вперед таблиц показывающих угловые расстояния от Луны до Солнца или до других легко наблюдаемых светил, скажем через каждые три часа гриничского времени, ибо за такой промежуток движение Луны можно считать равномерным и тогда, сличая наблюденное расстояние с показанным в таблицах, является возможность находить гриничское время в момент наблюдения.

Ясно, что для этого надо было знать точный закон движения Луны. Но движение это оказывается весьма сложным и далеко не равномерным и подверженным множеству отступлений от равномерности, или так называемых неравенств. Главнейшее из них на основании наблюдений было открыто еще Гиппархом примерно за 200 лет до нашей эры, другое важное неравенство было открыто в конце XVI века Тихо де Браге, тем не менее, на основании одних только наблюдений составить таблицы движения Луны не удавалось, погрешности в ее месте доходили до $^1/_2{}^\circ$, что соответствовало бы погрешности в долготе в целый час, т. е. примерно 1000 километров в средних широтах.

Ньютон, открыв закон всемирного тяготения, приложил его к теоретическому установлению законов движения Луны. Он указал причины главнейших неравенств, но когда для проверки их стал сличать вычисленные и наблюденные места Луны, то обнаружил значительное расхождение между теоретическою и выведенною из наблюдений величиною одного из этих неравенств. Лишь через 150 лет после его смерти при разборе сохранившихся его рукописей оказалось, что он открыл причину этого расхождения, происходившего от недостаточной точности его вычислений и устранил его, но этого не опубликовал.

Первая полная теория движения Луны, основанная на ньютоновом законе тяготения, принадлежит Клеро, который так же и по той же причине, как и Ньютон, получил то же расхождение между теорией и действительностью, но затем нашел эту причину и устранил ее влияние. Сочинение Клеро было издано в 1752 г. нашей Академией.

Затем Эйлер переработал и видоизменил теорию Клеро и придал ей более удобный для составления таблиц движения Луны вид и опубликовал свою теорию в 1753 г. Его формулами, дополнив их несколькими неравенствами, выведенными из наблюдений, воспользовался гетингенский астроном Тобиас Майер и составил таблицы, по которым можно было предвычислять место Луны с достаточною точностью, но конечно эти вычисления были слишком сложны для мореплавателей.

В 1761 г. происходило прохождение Венеры через диск Солнца. Это редкое явление давало возможность определять расстояние от Земли до Солнца, поэтому для его наблюдения было образовано множество экспедиций, в одну из которых на о. Св. Елены был командирован астроном Маскелин. Во время плавания он, пользуясь таблицами Майера, определял долготу корабля по лунным расстояниям и убедился в практической пригодности этого способа.

Став вскоре директором Гриничской обсерватории, или как их титулуют королевским астрономом, он при содействии английского Ад-ва с 1767 г. начал издание „Nautical Almanac“ — „Морской месяцеслов“, продолжающееся и поныне. В нем через каждые три часа гриничского времени показаны те угловые расстояния от Луны до Солнца и четырех или пяти наиболее ярких и удобных для наблюдений на море светил, которые усматривались бы из центра Земли. Почти одновременно с этим Sheppard и Mathews издали громадный том в 1800 страниц in 4° таблиц, упрощающих вычисление тех поправок, которые надо присовокуплять к наблюденным с поверхности Земли видимым угловым расстояниям Луны для перевода их в „истинные“, т. е. относящиеся к центру Земли, для сличения их с показанными в „Almanac'е“. После этого способ определения долгот по лунным расстояниям вошел во всеобщее употребление и удерживался в практике мореплавания примерно сто лет или несколько более, т. е. пока изобретенный Гаррисоном в 1761 г. морской хронометр был настолько удешевлен и усовершенствован, что вошел во всеобщее употребление, да и продолжительность переходов с развитием пароходства значительно сократилась. С 1915 г. в „Almanac'е“ лунные расстояния более не показываются, а подача сигналов времени по радио сделала то, что на корабле гриничское время и по плохому хронометру всегда с точностью известно.

После долгих испытаний премия в 20 000 фн. ст. была выдана Гаррисону, 3000 фунтов было выдано наследникам Майера и 300 фн. ст. Эйлеру за его формулы, послужившие Майеру для составления таблиц движения Луны.

Вернемся теперь к Эйлеру и его „Новой теории Луны“.

В астрономической практике с глубокой древности, т. е. за несколько столетий до нашей эры, для определения места Луны сперва находили положение той орбиты, по которой Луна вокруг Земли движется, причем сперва считали эту орбиту кругом с центром в центре Земли, а затем вне его, и определяли место Луны на ее орбите. Так дело продолжалось до Кеплера, который показал, что в месячном своем движении Луна обращается вокруг Земли по эллипсу, в одном из фокусов которого находится центр Земли и вместе с Землею в годовом ее движении переносится по эллипсу же вокруг Солнца.

Не только движение Луны по ее орбите вокруг Земли весьма сложное, ибо под действием притягательной силы Солнца оно не следует в точности простым законам Кэплера, а значительно отступает от них, но кроме того самая орбита Луны в переносном ее движении изменяется.

Таким образом, для предвычисления места Луны надо сперва вычислить мгновенное положение ее воображаемой орбиты, а затем ее место на этой орбите. Этому порядку следовал Ньютон, за ним Клеро и Эйлер в первой своей теории.

Совершенно иной путь принял Эйлер в „новой" своей теории, которая под его диктовку была записана его учениками-академиками: его сыном Иваном Альбертом Эйлером, Крафтом и Лекселлем, ими же произведены все выкладки и численные вычисления в этом громадном томе, заключающем 770 стр. in 4°.

В этой теории Эйлер применяет совершенно отличный от предыдущих метод, он определяет движение Луны в прямолинейных прямоугольных координатах, сделав весьма удачный выбор таких координат. Он берет две системы таких координат — неподвижную и подвижную, первая служит ему для определения переносного движения всей системы, состоящей из Земли и Луны, вторая для определения движения Луны по отношению к Земле.

В неподвижной системе он начало берет в центре Солнца S, ось SX направляет в точку весеннего равноденствия, ось SZ — перпендикулярно к плоскости эклиптики и ось SY — в точку, долгота которой 90°.

В плоскости SXY движется по законам Кеплера общий центр тяжести O Земли и Луны.

Если на эту плоскость проектировать место Луны, то получится линия, извивающаяся приблизительно тринадцать раз за год около эллипса, описываемого точкою O, причем наибольшее отступление от этого эллипса составляет около $\frac{1}{400}$ его большой оси, т. е. среднего расстояния от Земли до Солнца, вместе с тем прямая, соединяющая проекцию Луны с центром Солнца имеет около этого центра вращательное движение, немногим отличающееся от равномерного, представляющего так называемое среднее движение Луны по долготе.

Воспользовавшись этими обстоятельствами, Эйлер и принимает за начало координат O_1 подвижной системы то положение, которое занимала бы точка O_1, двигаясь не по кэплерову эллипсу, а равномерно по кругу; ось O_1X он берет параллельно вышеупомянутой равномерно вращающейся прямой, ось O_1Z — перпендикулярно к плоскости эклиптики, направляя ее в северное полушарие, ось O_1Y — перпендикулярно к O_1X в плоскости эклиптики на 90° вправо от O_1X, если из точки O_1 смотреть на Солнце.

При таком выборе этих равномерно вращающихся подвижных осей проекция Луны будет все время оставаться близко к точке O_1 — началу подвижных осей координат, и все три координаты X, Y, Z будут выражаться малыми числами, принимая за единицу среднее расстояние от Земли до Солнца, т. е. радиус круга, описываемого равномерно точкою O_1 около точки S.

Так как координаты X, Y, Z выражаются малыми числами, то по степеням этих чисел удобно разлагать в ряды, ибо в этих рядах можно будет ограничиваться немногими первыми членами, это и делает Эйлер.

Кроме того, в эти разложения входят следующие также малые величины: эксцентриситет средней орбиты Луны, равной 0.05445; наклонность орбиты Луны, равная 0.08964 в числовой мере; эксцентриситет орбиты Земли, равный 0.01679 и отношение среднего расстояния Луны до Земли к среднему расстоянию от Земли до Солнца, равное кругло $\frac{1}{400}$.

Сперва Эйлер составляет дифференциальные уравнения движения луны, отнесенного к вышеуказанным неподвижным координатным осям, затем преобразует их к подвижным осям, после чего разлагает входящие в эти уравнения выражения расстояний от Луны до Солнца и от Луны до Земли по степеням малых величин X, Y, Z, ограничиваясь в этих разложениях сравнительно небольшим числом членов, соответствующим требуемой точности.

Получив эти уравнения, Эйлер с изумительною простотою, последовательностью и ясностью излагает общий способ приближенного решения их, разлагая величины неизвестных X, Y, Z в ряды по степеням вышеприведенных малых постоянных параметров и по синусам и косинусам различных углов, пропорционильных времени, которые сами собою войдут при этих разложениях. Эти пропорциональные времени углы представляют среднее движение по долготе Луны и Земли и различные линейные сочетания кратностей этих углов.

Он всякий раз указывает сколько членов надо брать в этих разложениях, чтобы погрешность не превышала нескольких дуговых секунд в видимом месте Луны, которое он стремится получить с точностью примерно до $\frac{1}{2}$ дуговой минуты, что вполне соответствовало тогдашней практической потребности.

По выяснении общего метода, установления вида разложений, зависимости между коеффициентами при последовательном переходе от одного порядка или степени малых величин к следующему, в указанном сочинении приведены подробно самые вычисления и наконец дана общая сводка формул и ряд вспомогательных таблиц, по которым вычисляется в обычных астрономических координатах видимое место Луны.

Благодаря ясности, последовательности и простоте изложения, изучение этого сочинения Эйлера, кроме неизбежной длинноты выкладок, не представляет особенных затруднений, если ограничиться первой его частью, занимающей 127 страниц, в которой излагается общая метода составления и приближенного решения дифференциальных уравнений движения Луны.

Но как известно, при применении методы последовательных приближений, составляющих сущность метода Эйлера, возникает то затруднение, что появляются так называемые вековые члены, т. е. такие, где время t входит вне знаков синусов и косинусов, так что эти члены с течением времени неопределенно возрастают и полученные ряды становятся непригодными.

Эйлер не счел нужным исследовать это обстоятельство и изыскивать способы к его устранению, он ограничился следующим замечанием, составляющим § 88 его книги: „однако подобного случая (появления вековых членов) в движении Луны и в других существующих движениях появиться не может, что следует из того, что, если бы величины x, y содержали бы какой-либо угол ω (вне знаков синуса и косинуса), то с течением времени эти члены возрастали бы беспредельно; кроме того от них произошли бы члены, содержащие вторую, третью и вообще все высшие степени этого угла в самих выражениях x и y, что представляется совершенно нелепым“.

Возникает опасение не проявил ли здесь Эйлер, подобно тому как это было в его дифференциальном исчислении, если можно так выразиться, излишнее доверие к могуществу формального анализа, которое и могло ввести его в заблуждение.

В самом деле Тиссеран в III томе своей „Небесной Механики“ (стр. 87) указывает, что как-раз при форме разложений, принятой Эйлером, неизбежно появляются вековые члены, если составлять общие интегралы уравнений движения, Эйлер же их не встретил, ибо составлял лишь частные решения. Этим замечанием и ограничивается знаменитый французский астроном, оставляя открытым вопрос верна ли теория Эйлера или нет.

Ведь все, что нужно Эйлеру и практике это не общие интегралы уравнений движения Луны, а такие их частные решения, которые удовлетворяют начальным условиям, причем выбор начальных условий остается произвольным. Более того, Эйлер, чтобы избавиться от вековых членов взял движение перигея, не определяя его из общих уравнений движения Луны, а взял его, как он сам говорит, „ex coelo“, т. е. „с неба“, введя его истинное даваемое наблюдениями значение в сами уравнения движения, таким образом он, как бы не составляя того уравнения, к которому через сто лет пришел Гилль, взял „ex coelo“ его решение.

Это тем более вероятно, если сопоставить слова Тиссерана, III том „Небесной Механики“ которого вышел в 1894 г., с следующими словами знаменитого американского астронома Симона Ньюкомба, сказанными им в 1908 г. на математическом конгрессе в Риме, где он делал обзорный доклад о теории движения Луны.

Охарактеризовав теории Лапласа, Дамуазо, Ганзена, Делоне и др., Ньюкомб продолжает: „я перехожу теперь к ряду исследований, которые, как мне кажется, приводят к результатам, обладающим всею точностью, требуемой теперешней астрономией.

„Этот ряд начинается сочинением Эйлера „Theoria Motuum Lunae nova methodo pertractata“. Весьма замечателен тот факт, что прошло целое столетие и ни один математик не заметил превосходства теории, изложенной в этом сочинении Эйлера. Оно было издано в 1772 г., а знаменитый мемуар Гилля о движении лунного перигея появился в 1878 г. Затем Адамс и

Кауэлль подобно Гиллю рассмотрели движение узлов и наконец Э. Браун довел теорию Луны до полной точности. Подобно Эйлеру Гилль и Браун исследуют движение Луны в прямолинейных прямоугольных координатах".

К этим словам Ньюкомба следует добавить, что А. М. Ляпунов доказал сходимость тех рядов, которыми пользуется Гилль, во всяком случае они заставляют думать, что в этом сочинении, как и во многом другом, Эйлер опередил свой век на сто лет.

Это сочинение Эйлера представляется настолько замечательным, что первую общую его часть Академии Наук следовало бы издать в переводе на русский язык, ибо вид дифференциальных уравнений, рассмотренных Эйлером, настолько общий, что подобного рода уравнения, но гораздо более простые встречаются во множестве прикладных и технических вопросов и сделать методы Эйлера доступными техникам и инженерам вполне соответствует задачам Издательства Академии Наук. В этом издании можно будет, занявшись вопросом и о том, кто прав Эйлер или Тиссеран, притти к заключению, что прав Эйлер и что его теория служит первообразом теории Гилля, как это и указывает Ньюкомб.

Цена 75 коп.