М. А. ЕВДОКИМОВ

От задачек к задачам

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО ЦЕНТРА
НЕПРЕРЫВНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКВА • 2004

УДК 51(023)
ББК 22.1
Е15

Евдокимов М. А.

Е15 Задачки против задач. — М.: МЦНМО, 2004. — 72 с.: ил. — ISBN 5-94057-158-1.

Книга содержит 80 необычных задач с подробными решениями и комментариями. Для решения большинства задач первой части «Задачки» не требуется специальных знаний по математике. Это так называемый «математический фольклор», который будет интересен всем любителям поразмышлять над занимательной проблемой. Вторая часть «Задачи» состоит из авторских задач, предлагавшихся на различных математических олимпиадах (Московской, Всероссийской, олимпиадах МГУ и др.). Для удобства читателей книга снабжена тематическим путеводителем.

Для школьников, руководителей математических кружков и всех любителей математики.

ББК 22.1

ISBN 5-94057-158-1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Этот необычный сборник математических задач предназначен для всех любителей поразмышлять над интересной и непростой проблемой.

Книга разделена на две основные части. В первой части, озаглавленной «Задачки», собраны 40 замечательных задач с подробными решениями, большинство из которых является «математическим фольклором». Уровень сложности задачек в среднем возрастает по мере роста номера от сравнительно простых (1—6), до весьма сложных (35—40). Однако отличительной их чертой является то, что для решения большинства задачек не требуется никаких специальных знаний по математике. Именно поэтому им и было присвоено уменьшительное название «задачки», хотя некоторые из них довольно сложны. По этой же причине читателю рекомендуется начать знакомство с книгой с данного раздела, выбрав наиболее понравившиеся задачки.

Вторая часть озаглавлена «Задачи» и представляет собой собрание задач, предлагавшихся на различных олимпиадах (Московской, Всероссийской, олимпиаде МГУ и др.). Для их решения требуется знакомство со школьной программой по математике. Как и в первой части сложность задач возрастает по мере роста номера.

Книга снабжена тематическим путеводителем (с. 67), в котором указана примерная разбивка задач по темам. Он может быть полезен для учителей и руководителей математических кружков, а также для школьников, самостоятельно готовящихся к математическим олимпиадам.

Желаю успехов в решении и задачек, и задач!

Июнь 2004 года. *Автор.*

УСЛОВИЯ ЗАДАЧЕК

1 «Три охотника»

Три охотника сварили кашу. Первый дал две кружки крупы, второй — одну, третий — ни одной, но он расплатился пятью патронами. Как должны поделить патроны первые два охотника?

2 «Охрана»

Можно ли расставить охрану вокруг небольшого объекта так, чтобы ни к объекту, ни к часовым нельзя было незаметно подкрасться? (Каждый часовой стоит неподвижно и видит на 100 м строго вперёд.)

3 «Сказка»

В некотором царстве, в некотором государстве есть десять источников с мёртвой водой (№№ 1, 2, . . . , 10), которая по вкусу не отличается от обычной, но является сильным ядом (смертельным даже для Кащея Бессмертного). Противоядием для воды из любого источника является вода из источника с бóльшим номером (для воды из источника № 10 противоядия нет). Источники №№ 1, . . . , 9 общедоступны, источник № 10 доступен лишь Кащею.

Иван вызвал Кащея на дуэль, предложив обменяться стаканами с мёртвой водой и выпить её. Кащей, конечно, согласился, предложив Ивану воды из источника № 10 и рассчитывая принять её в качестве противоядия. Однако Иван остался жив, а Кащей умер. Как Ивану это удалось?

4 «Торт»

Как тремя прямолинейными разрезами разделить круглый торт на а) семь, б) восемь частей?

5 «Нарушитель»

В городе Запрещаевске в метро строго запрещено провозить предметы, длина, ширина или высота которых превосходит 1 м. Тем не менее первокласснику Васе удалось провезти лыжи длиной 1,5 м. Как?

6 «Средняя скорость»

Дорога между двумя горными сёлами A и B идёт то в гору, то под гору. Автобус, который развивает среднюю скорость 30 км/ч в гору и 60 км/ч под гору, проехал из A в B и обратно. Какова была его средняя скорость на всём пути?

7 «Три мудреца»

Король решил устроить экзамен трём придворным мудрецам A, B и C. Он сообщил, что у него имеются два белых и три чёрных колпака. После этого король завязал глаза мудрецам и надел каждому чёрный колпак. Развязав глаза, король спросил: «Может ли кто-нибудь из вас определить цвет своего колпака?».

Мудрецы ответили:

A: «Нет, так как могу ошибиться».

B: «Нет, так как могу ошибиться».

C: «Да, на мне чёрный колпак!».

Как мудрецу C это удалось?

8 «День рождения»

На свой день рождения Маша испекла торт, имеющий форму правильного шестиугольника $ABCDEF$. Разрезав его так, как показано на рис. 1 (M и K — середины сторон AF и FE соответственно), она отдала два выделенных на рис. 1 куска своим гостям: треугольный — Васе, а четырёхугольный — Пете. Кому из Машиных гостей достался больший кусок торта?

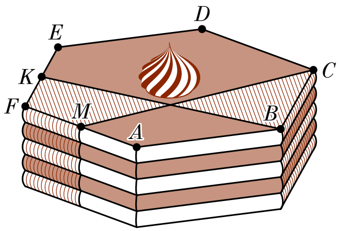


Рис. 1

9 «Волейбольный турнир»

В волейбольном турнире, проходившем в один круг (каждая команда играет с каждой ровно один раз) 20% всех команд не одержали ни одной победы. Сколько команд участвовало в этом турнире?

10 «Автобус»

Следователь Иванов хочет установить по фотографии (рис. 2), куда ехал автобус. Как это сделать?

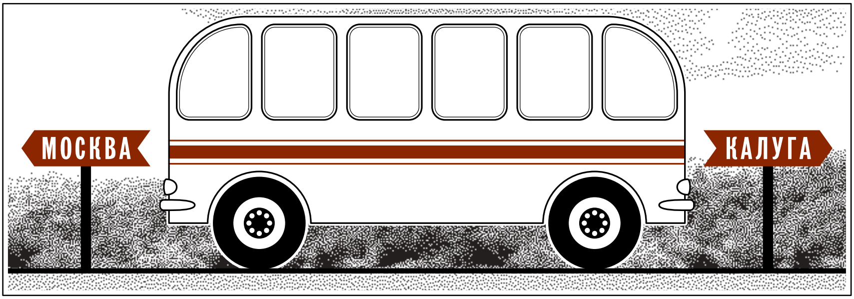


Рис. 2

11 «Али-Баба и сокровище»

Али-Баба пытается проникнуть в пещеру с сокровищем. У входа в пещеру стоит барабан с четырьмя отверстиями по бокам. Около каждого отверстия внутри поставлен переключатель, имеющий два положения: «вверх» и «вниз». Разрешается засунуть руки в любые два отверстия, пощупать, как стоят переключатели и переключить их произвольным образом (в частности, можно не переключать). После этого барабан вращается и после остановки нельзя установить, какие именно переключатели переключали в прошлый раз. Разрешается проделать эту операцию до 10 раз. Дверь в пещеру открывается, когда все переключатели в одном положении. Как Али-Бабе попасть в пещеру?

12 «Побег из тюрьмы»

Территория тюрьмы окружена рвом постоянной ширины 2 м (рис. 3). Заключённый оказался на границе этого рва. Он имеет в своём распоряжении две доски длиной 1,9 м каждая. Как ему перебраться через ров?

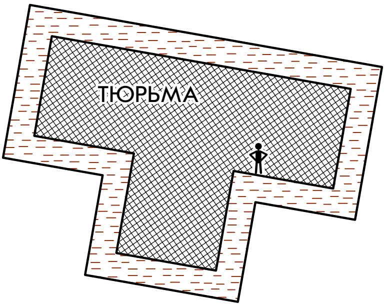


Рис. 3

13 «Гирьки»

На шесть внешне одинаковых гирь, массы которых составляют 1 г, 2 г, . . . , 6 г, наклеены таблички с надписями «1 г», «2 г», . . . , «6 г». Как на чашечных весах за два взвешивания определить, правильно ли наклеены таблички?

14 «Волк и собаки»

В центре поля, имеющего форму квадрата, находится волк, а в вершинах квадрата — четыре собаки. Волк может бегать по всему полю, а собаки — только по его сторонам. Известно, что волк задирает собаку, а две собаки задирают волка. Максимальная скорость каждой собаки в полтора раза больше максимальной скорости волка. Докажите, что собаки имеют возможность не выпустить волка за пределы поля.

15 «Переправа»

Ночь. Мальчик, папа, мама и бабушка находятся на одном берегу реки и хотят перейти по мосту на другой берег. Они имеют при себе один фонарик. По мосту могут идти максимум двое (обязательно с фонариком). Папа способен преодолеть мост за 1 минуту, мальчик — за 2, мама — за 5, бабушка — за 10 минут. За какое наименьшее время все они смогут переправиться на другой берег?

16 «Бурьян»

Участки садового товарищества занимают площадь 100×100 м, причём размер каждого участка равен одной сотке (10×10 метров). Девять участков нерадивых садоводов поросли бурьяном. Если для некоторого участка в какой-то момент оказалось, что два или более соседних по стороне участка поросли бурьяном, то на следующий год порастает и он. Докажите, что, тем не менее, все участки садового товарищества бурьяном не зарастут.

17 «Гномы»

За круглым столом сидят семь гномов. Перед каждым стоит кружка. В некоторые из этих кружек налито молоко. Один из гномов разливает всё своё молоко в кружки остальных поровну. Затем его сосед справа делает то же самое. Затем то же самое делает следующий сосед справа и т. д. После того, как последний, седьмой гном разлил всем остальным своё молоко, в каждой кружке оказалось столько же молока, сколько в ней было вначале. Во всех кружках вместе 3 литра молока. Сколько молока было первоначально в каждой кружке?

18 «Обиженная мать»

Молодой человек живёт в Москве возле станции метро. Когда он едет к девушке, то садится в поезд, подходящий к платформе со стороны центра города. Когда же едет к матери, то садится в поезд, идущий в центр. Молодой человек приходит на станцию каждый день в разное время и садится на первый попавшийся поезд. По каждому из направлений поезда ходят с одинаковым интервалом 3 минуты. Тем не менее, молодой человек бывает в гостях у девушки примерно в 10 раз чаще, чем в гостях у матери. Почему?

19 «Авиалинии»

В некотором государстве система авиалиний устроена таким образом, что любой город соединён авиалиниями не более, чем с тремя другими, и из любого города в любой другой можно долететь, сделав не более одной пересадки. Какое наибольшее число городов может быть в этом государстве?

20 «Коням тесно»

Какое наибольшее число коней можно расставить на шахматной доске так, чтобы никакие два не били друг друга?

21 «Упрямый жучок»

Вы держите один конец очень эластичного резинового шнура длиной 1 м. От второго его конца, который закреплён, к вам со скоростью 1 см/с ползёт жук. Каждый раз, когда он проползает 1 см, вы удлиняете резинку, отступая на 1 метр. Доползёт ли жук до вашей руки?

22 «Замощение уголками»

Из клетчатой доски размером $2^n \times 2^n$ клеток $(n \geqslant 1)$ вырезали одну из клеток. Докажите, что оставшуюся часть можно замостить уголками из трёх клеток.

23 «Парламент»

В парламенте у каждого депутата не более трёх врагов. Докажите, что парламент можно разбить на два комитета так, что у каждого парламентария в его комитете будет не более одного врага. (Считается, что если B — враг A, то и A — враг B.)

24 «1000 привидений»

В одной школе есть 1000 шкафов для одежды с номерами 1, 2, . . . , 1000, которые на ночь запираются. В этой школе живёт 1000 привидений. Ровно в полночь 1-е привидение открывает все шкафы; затем 2-е закрывает шкафы с номерами, делящимися на 2; затем 3-е меняет состояние (открывает, если шкаф закрыт и наоборот) тех шкафов, номер которых делится на 3 и т. д. 1000-е меняет состояние шкафа с номером 1000, после чего привидения исчезают. Сколько шкафов останутся открытыми?

25 «Треугольный замок»

План замка имеет форму равностороннего треугольника со стороной 100 м. Он разделён на 100 треугольных залов (рис. 4). Все стены залов имеют одинаковую длину — 10 метров. В середине каждой стены между залами сделаны двери. Докажите, что если турист захочет пройти по замку, побывав в каждом зале не более одного раза, то он сможет осмотреть не более 91 зала.

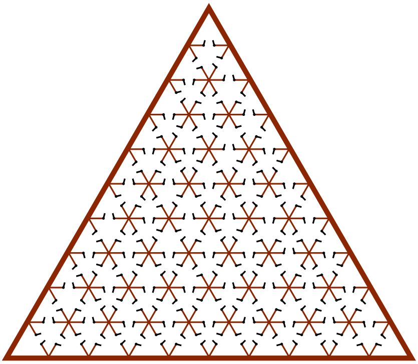


Рис. 4

26 «Арбитраж»

В забеге участвуют три лошади: Алла, Бэлла и Виола. Ставки на их победу принимаются с соотношениями 1:1, 1:2 и 1:6 соответственно. Это означает, что если вы, например, поставили на Бэллу, и она пришла первой, то вы получаете назад свои деньги плюс удвоенную начальную ставку. В противном случае вы теряете деньги. Игрок имеет в кармане 205 долларов. Может ли он гарантированно выиграть какую-либо сумму? Если да, то какую?

27 «Сложите квадрат!»

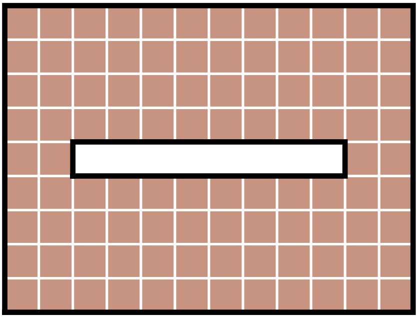


Рис. 5

Разрежьте фигуру, показанную на рис. 5, на две части и сложите из них квадрат.

28 «Раскулачивание»

У нескольких крестьян есть 128 овец. Если у кого-то из них оказывается не менее половины всех овец, остальные сговариваются и раскулачивают его: каждый берёт себе столько овец, сколько у него уже есть. Если у двоих по 64 овцы, то раскулачивают кого-то одного из них. Произошло ровно семь раскулачиваний. Докажите, что после этого все овцы собрались у одного крестьянина.

29 «Экспертиза»

Имеется 100 кучек по 100 монет. Одна из кучек состоит из фальшивых монет, которые на один грамм легче настоящих. Вес настоящей монеты составляет 10 граммов. Какое наименьшее число взвешиваний на больших пружинных весах со стрелкой необходимо, чтобы отыскать кучку из фальшивых монет?

30 «Одинокая восьмёрка», самая популярная задача «Американского математического ежемесячника»

Восстановите деление!

```
*********  | ***
 ***       |------
-----      | **8**
  ****
   ***
  -----
    ****
    ****
   -----
        0
```

31 «Два сторожа и обезьяна»

В маленьком зоопарке из клетки убежала обезьяна. Её ловят два сторожа. И сторожа, и обезьяна бегают только по дорожкам. Всего в зоопарке шесть узких дорожек одинаковой длины, четыре из которых идут по сторонам квадрата, и две — по его средним линиям (рис. 6). В каждый момент времени обезьяна и сторожа видят друг друга. Могут ли сторожа поймать обезьяну, если обезьяна бегает в три раза быстрее сторожей?

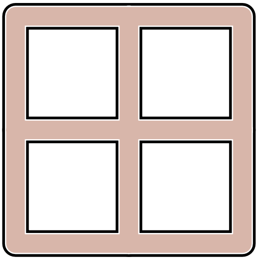


Рис. 6

32 «Как повесить картину?»

Профессор математики взял верёвку подлиннее, прикрепил её к картине и повесил картину на два гвоздя так, что она висит, но если выдернуть любой гвоздь, то картина упадёт. Сможете ли вы сделать то же самое? А повесить картину таким же образом на три гвоздя?

33 «14 монет»

На суде в качестве вещественного доказательства предъявлено 14 монет. При этом суд знает, что фальшивые монеты весят одинаково, настоящие монеты весят одинаково, и что фальшивые монеты легче настоящих. Эксперт обнаружил, что монеты с 1-й по 7-ю — фальшивые, а с 8-й по 14-ю — настоящие. Как ему с помощью трёх взвешиваний на чашечных весах без гирь убедить в этом суд?

34 «Деды»

В Простоквашинской начальной школе учится 20 детей. У любых двух из них есть общий дед. Докажите, что у одного из дедов в этой школе учится не менее 14 внуков. (Замечание: любой ребёнок не может иметь более двух дедушек.)

35 «100 мудрецов»

Король решил устроить проверку своим ста мудрецам и сообщил, что на следующий день он выстроит всех с завязанными глазами в очередь и наденет каждому чёрный или белый колпак.

После того, как глаза будут развязаны, каждый, начиная с последнего в очереди, назовёт предполагаемый цвет своего колпака. Если он при этом не угадает, то будет казнён. У мудрецов ещё есть время договориться, как они будут действовать завтра. Скольким мудрецам наверняка удастся спастись?

36 «Раздел страны»

В игре «Десант» две армии захватывают страну. Они ходят по очереди, каждым ходом занимая один из свободных городов. Первый свой город армия захватывает с воздуха, а каждым следующим ходом она может захватить любой город, соединённый дорогой с каким-нибудь уже занятым этой армией городом. Если таких городов нет, армия прекращает свои боевые действия (при этом, возможно, другая армия свои действия продолжает). Найдётся ли такая схема городов и дорог, что армия, ходящая второй, сможет захватить более половины всех городов, как бы ни действовала первая армия? (Число городов конечно, каждая дорога соединяет ровно два города.)

37 «Эпидемия», или «Вредные прививки»

Коротышки, живущие в Цветочном городе, вдруг стали болеть гриппом. В один день несколько коротышек простудились и заболели, и хотя потом уже никто не простужался, здоровые коротышки заболевали, навещая своих больных друзей. Известно, что каждый коротышка болеет гриппом ровно день, причём после этого у него по крайней мере ещё один день есть иммунитет — т. е. он здоров и заболеть опять в этот день не может. Несмотря на эпидемию, каждый здоровый коротышка ежедневно навещает своих больных друзей. Когда началась эпидемия, коротышки забыли о прививках и не делают их. Докажите, что

а) если за день до эпидемии какие-нибудь коротышки сделали прививку и имели в первый день иммунитет, то эпидемия может продолжаться сколь угодно долго;

б) если же в первый день иммунитета ни у кого не было, то эпидемия рано или поздно кончится.

38 «100 узников»

В тюрьму поместили 100 узников. Надзиратель сказал им: «Я дам вам вечер поговорить друг с другом, а потом рассажу по отдельным камерам, и общаться вы больше не сможете. Иногда я буду одного из вас отводить в комнату, в которой есть лампа (вначале она выключена). Уходя из комнаты, вы можете оставить лампу как включенной, так и выключенной. Если в какой-то момент кто-то из вас скажет мне, что вы все уже побывали в комнате, и будет прав, то я всех вас выпущу на свободу. А если неправ — скормлю всех крокодилам. И не волнуйтесь, что кого-нибудь забудут — если будете молчать, то все побываете в комнате, и ни для кого никакое посещение комнаты не станет последним».

Придумайте стратегию, гарантирующую узникам освобождение.

39 «Мартышка и кокос»

Мартышка поднимается на один из 100 этажей небоскрёба и бросает вниз кокос. Она пытается выяснить, с какого наименьшего этажа нужно бросить кокос, чтобы тот разбился. Каково минимальное число попыток, достаточное для этого, если у мартышки всего два кокоса?

40 «Три шкатулки»

Ведущий игры «Чудесное поле» предлагает игроку указать на одну из трёх шкатулок, в которой, по его мнению, находятся деньги. После чего хитрый ведущий открывает одну из оставшихся шкатулок (пустую, так как ведущий знает в какой из трёх шкатулок деньги) и предлагает игроку изменить свой выбор. Стоит ли игроку это делать?

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1 «Расстановка коней»

Расставьте на шахматной доске 32 коня так, чтобы каждый из них бил ровно двух других.

(*Московская математическая олимпиада*, 1998.)

2 «Как считать очки?»

Турнир по футболу проходил в один круг (каждая команда играет с каждой ровно один матч). Могло ли так случиться, что команда, занявшая первое место по новой системе подсчёта очков (за победу 3 очка), по старой системе (за победу 2 очка) была бы последней? (*Соросовская олимпиада*, 1997/1998.)

3 «Торт на кусочки»

Торт, имеющий форму правильного многоугольника, разрезали по всем диагоналям на маленькие кусочки. Может ли среди них оказаться кусочек, имеющий форму правильного а) треугольника; б) шестиугольника? (*Олимпиада мехмата МГУ*, 1999.)

4 «Головоломка»

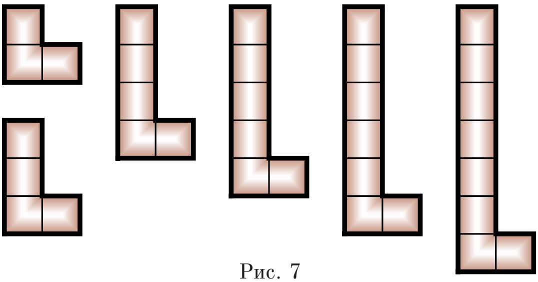


Рис. 7

Как из набора «уголков» (рис. 7) сложить прямоугольник?

5 «Пловец-математик»

Пловец знает, что он плывёт не по прямой, а по дуге окружности радиуса 1 км (так как правая и левая руки делают неодинаковые гребки). Под каким углом к стенке бассейна он должен отплывать, чтобы кратчайшим путём доплыть до противоположной стенки, находящейся на расстоянии 100 м?

(*Олимпиада мехмата МГУ*, 2000.)

6 «Кресты»

Таблица $n \times n$ заполнена числами. Оказалось, что сумма чисел в любом «кресте» (объединении некоторой вертикали и некоторой горизонтали) равна нулю. Верно ли, что все числа в таблице равны нулю?

7 «Четыре окружности»

Три окружности проходят через точку O и попарно пересекаются в точках A, B и C. Докажите, что если окружность, описанная около треугольника ABC, содержит центры двух данных окружностей, то она содержит центр третьей.

8 «Новое неравенство о средних»

Для двух положительных чисел a и b рассмотрим следующие средние:

$$H = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}} = \frac{2ab}{a+b} \qquad \text{(среднее гармоническое),}$$

$$G = \sqrt{ab} \qquad \text{(среднее геометрическое),}$$

$$A = \frac{a+b}{2} \qquad \text{(среднее арифметическое),}$$

$$Q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \qquad \text{(среднее квадратическое).}$$

Известны «неравенства о средних»: $H \leqslant G \leqslant A \leqslant Q$. А что больше: HQ или AG?

(*Олимпиада мехмата МГУ*, 1999.)

9 «Отношения»

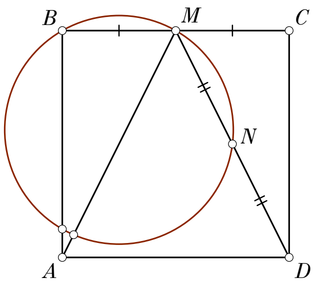


Рис. 8

Точка M — середина стороны BC квадрата $ABCD$, точка N — середина отрезка MD (рис. 8). В каком отношении окружность, описанная около треугольника BMN, делит а) сторону AB квадрата, б) отрезок AM?

10 «Борьба с радикалами»

Олег заменяет звёздочки в выражении

$$\underbrace{\sqrt{*\sqrt{*\sqrt{\ldots\sqrt{*}}}}}_{n \text{ радикалов } (n>1)}$$

числами из набора $2^1, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n$, используя каждое ровно один раз. Найдите наибольшее ц е л о е число, которое он может при этом получить. (*Олимпиада мехмата МГУ*, 1999.)

11 «Фишки»

1997 фишек расположены на плоскости в вершинах выпуклого 1997-угольника. За один ход можно разбить их на две группы и фишки первой группы сдвинуть на какой-нибудь вектор, а остальные фишки оставить на месте. Может ли случиться, что после а) 9; б) 10 ходов все фишки окажутся на одной прямой?

(*Отбор на Всероссийскую олимпиаду*, 1997.
Задачник «Кванта», M1602.)

12 «Трёхчлены»

Миша составляет различные квадратные трёхчлены x^2+ax+b, выбирая коэффициенты a и b из множества $\{1, 2, 3, \ldots, 1997\}$. Каких трёхчленов окажется больше: тех, которые имеют целые корни или тех, которые вовсе не имеют (действительных) корней?

(*Всероссийская олимпиада*, 1997.)

13 «Параллельные прямые»

Вписанная в треугольник ABC окружность с центром O касается сторон AB, BC и AC в точках E, F и G соответственно (рис. 9). Точка H симметрична G относительно O. Прямые EG и HF пересекаются в точке D. Докажите, что прямые BD и AC параллельны.

(*Всероссийская олимпиада*, 1999.)

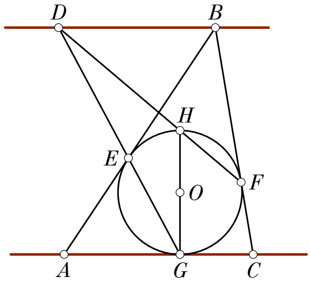


Рис. 9

14 «Ладьи»

Какое наибольшее число ладей можно расставить на доске $m \times n$ так, чтобы каждая била не более двух других? (Если три ладьи стоят на одной горизонтали или вертикали, то крайние не бьют друг друга.)

(*Олимпиада мехмата МГУ*, 1999.)

15 «Параболический стакан»

Внутри параболы $y = x^2$ расположены окружности ω_1, ω_2, ω_3, ... так, что при каждом $n > 1$ окружность ω_n касается ветвей параболы и окружности ω_{n-1} (рис. 10). Найдите радиус окружности ω_{1998}, если известно, что радиус ω_1 равен $\frac{1}{2}$, и она касается параболы в её вершине.

(*Всероссийская олимпиада*, 1998.)

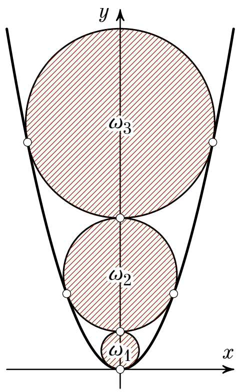


Рис. 10

16 «Оцените число»

На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 200. Вася стирает произвольные два числа и записывает на доску их сумму, делённую на $\sqrt{2}$. И продолжает так до тех пор, пока на доске не останется одно число. Докажите, что оно меньше 2000.

17 «Ломаная»

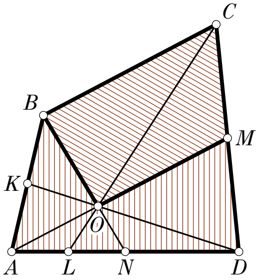


Рис. 11

Точки K, M, N — середины сторон AB, CD, AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ соответственно; L — середина отрезка AN (рис. 11). Оказалось, что прямые AM, BN, CL и DK пересекаются в одной точке O. Докажите, что ломаная BOM делит четырёхугольник на две равные по площади фигуры.

18 «Задача на экстремум»

Пусть O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, M — середина стороны AC. Оказалось, что треугольник BOM равнобедренный с углом при вершине γ. Найдите наименьшее возможное значение γ. (*Соросовская олимпиада*, 1998/1999.)

19 «Биссектриса»

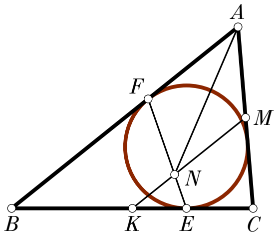


Рис. 12

F и E — точки касания вписанной в треугольник ABC окружности и сторон AB и BC соответственно, K и M — середины сторон BC и AC (рис. 12). Отрезки FE и KM пересекаются в точке N. Докажите, что AN — биссектриса угла A треугольника. (*Московская математическая олимпиада*, 1999.)

20 «Невыпуклый многогранник»

Можно ли в сферу вписать невыпуклый многогранник? (Напомним, что вписанным является многогранник, все вершины которого лежат на сфере.)

21 «Две прямые и гипербола»

Докажите, что точки пересечения прямых $x+2y=19$ и $y+2x=98$ с гиперболой $y=1/x$ лежат на одной окружности. (*Олимпиада мехмата МГУ*, 1998.)

22 «Прямой угол»

Точки M, H и O — середина стороны AB, основание высоты AH и центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC соответственно. Прямые CO и HM пересекаются в точке K. Докажите, что $\angle AKC = 90^\circ$. (*Всероссийская олимпиада*, 2000.)

23 «α-множество»

Конечное множество M точек плоскости обладает следующим свойством: для любых точек A и B, принадлежащих M, существует такая точка C из M, что $\angle ACB = \alpha$. При каких α это возможно? Докажите, что существует α-множество M, состоящее из сколь угодно большого числа точек. (*Соросовская олимпиада*, 1995.)

24 «Композиция функций»

Пусть $f(x) = x^2 + 12x + 30$. Решите уравнение

$$f(f(f(f(f(x))))) = 0.$$

(*Московская математическая олимпиада*, 1999.)

25 «Три прямые»

E, F, G — точки касания вписанной в треугольник ABC окружности и сторон AB, BC и AC соответственно; O_1, O_2, O_3 — центры вневписанных окружностей (рис. 13). Докажите, что прямые O_1E, O_2F и O_3G проходят через одну точку.

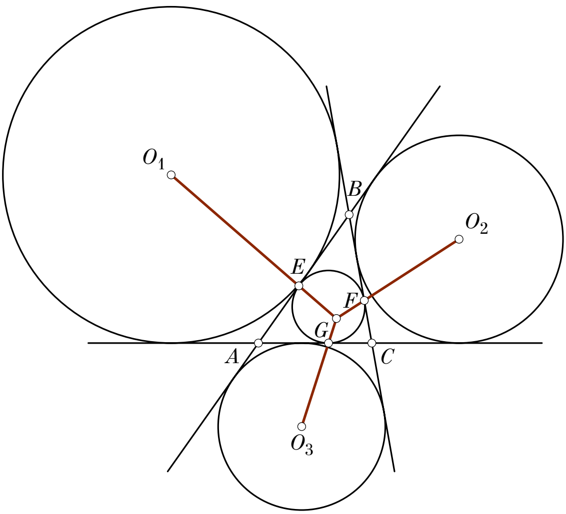


Рис. 13

26 «14 точек и плоскость»

У куба отметили все вершины и центры всех граней (всего 14 точек). Оказалось, что расстояние от любой из этих точек до некоторой плоскости принимает лишь два различных значения, меньшее из которых равно 1. Найдите длину ребра куба.

(*Соросовская олимпиада*, 1998/1999.)

27 «Две параболы»

Даны две параболы $y = a(x - b)^2$ и $y = c(x - d)^2$ (*парабола* — это геометрическое место точек, равноудалённых от точки, называемой *фокусом*, и прямой, называемой *директрисой*). Докажите, что если фокус первой параболы лежит на второй параболе, то фокус второй лежит на первой.

28 «Уголки»

Можно ли клетчатый прямоугольник 5×7 покрыть «уголками» из трёх клеток так, чтобы все клетки были покрыты одним числом слоёв?

(*Всероссийская олимпиада*, 1996. *Задачник «Кванта»*, М1562.)

29 «Тетраэдр и октаэдр»

Найдите длину ребра наибольшего правильного октаэдра, который можно поместить внутрь правильного тетраэдра с ребром длины 1.

30 «Два многоугольника»

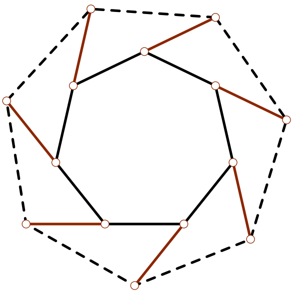


Рис. 14

Каждую сторону выпуклого n-угольника в процессе обхода по часовой стрелке продолжили на её длину (рис. 14). Оказалось, что концы построенных отрезков являются вершинами правильного n-угольника. Докажите, что исходный n-угольник правильный.

(*Московская математическая олимпиада*, 1997.)

31 «Игра с функциями»

На доске написаны три функции: $f_1(x) = x + 1/x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = (x - 1)^2$. Разрешается складывать, вычитать и перемножать эти функции, умножать на произвольное число и прибавлять произвольное число, а также проделывать эти операции с полученными выражениями. Получите таким образом функцию $1/x$. Докажите, что если стереть с доски любую из функций f_1, f_2, f_3, то получить $1/x$ невозможно.

(*Московская математическая олимпиада*, 1997.)

32 «Футбольный турнир»

В футбольном турнире, проходившем в один круг (каждая команда играет с каждой ровно один раз), участвовало 16 команд, каждые две из которых набрали различное число очков (победа — 3 очка, ничья — 1 очко). Оказалось, что команда «Зубило» проиграла всем командам, набравшим в итоге меньшее число очков. Какого наилучшего результата она могла добиться? (Укажите место.)

(*Соросовская олимпиада*, 1997/1998.)

33 «Неравенство о площадях»

На сторонах единичного квадрата вне его как на гипотенузах построены прямоугольные треугольники. Пусть A, B, C, D — вершины при прямых углах, а O_A, O_B, O_C, O_D — центры вписанных окружностей этих треугольников (рис. 15). Докажите, что а) площадь четырёхугольника $ABCD$ не превосходит 2; б) площадь четырёхугольника $O_AO_BO_CO_D$ не превосходит 1.

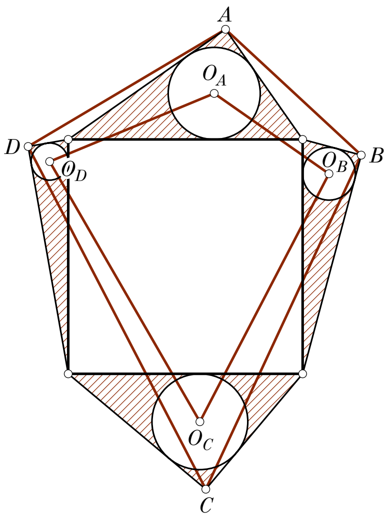


Рис. 15

34 «Точный квадрат»

Сумма целых чисел x, y, z, t равна нулю. Докажите, что число $\frac{x^4+y^4+z^4+t^4}{2}+2xyzt$ является квадратом целого числа.

35 «Сумасшедший футболист»

Рис. 16

а) Каждый день футболист выбирает по клетке футбольного мяча, который сшит из 12 чёрных правильных пятиугольников и 20 белых правильных шестиугольников (рис. 16), и изменяет цвет всех её соседей. Он хочет добиться того, чтобы мяч стал полностью чёрным. Какое наименьшее число дней необходимо для этого? б) Может ли он действовать так, что мяч станет полностью белым?

36 «Многочлен»

При каких натуральных n существует такой многочлен $P(x)$, что $P(P(x))=x^n-1$? (*Отбор на Всероссийскую олимпиаду*, 1998.)

37 «Большие грани»

Назовём грань описанного около шара многогранника б о л ь ш о й, если она содержит ортогональную проекцию шара на плоскость этой грани. Докажите, что в любом многограннике больших граней не более шести. (*Всероссийская олимпиада*, 1999.)

38 «Шкаф»

В комнату с высотой потолка 2 м 10 см основанием вперёд вносят шкаф размером $0{,}7\times1{,}5\times2$ м. Удастся ли его поставить? (Основание шкафа — $0{,}7\times1{,}5$ м.)

(*Олимпиада мехмата МГУ*, 1999.)

39 «Особые многогранники»

Каждая грань выпуклого многогранника является либо правильным треугольником, либо правильным шестиугольником, причём тех и других поровну. Найдите все такие многогранники.

40 «Октаэдр в кубе»

Найдите длину ребра наибольшего правильного октаэдра, который можно поместить внутрь куба с ребром длины 1.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧЕК

1. На каждого охотника приходится по одной кружке крупы. Получается, что первый охотник одну из своих кружек крупы отдаёт третьему. Взамен он должен получить все пять патронов!

2. Ответ: да, можно. На рис. 17 показан пример расположения восьми часовых, удовлетворяющий условию. Кружочками обозначены часовые, каждая из стрелок указывает направление, в котором смотрит часовой.

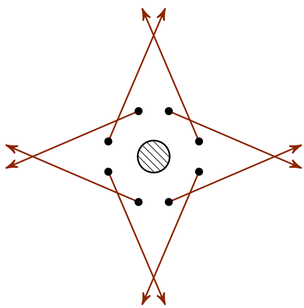


Рис. 17

3. Иван дал Кащею обычной воды, которую тот не отличил от мёртвой и запил водой из источника № 10. Сам же Иван перед дуэлью выпил воды из источника № 1. Тогда вода из источника № 10, предложенная Кащеем, оказалась противоядием, и Иван остался жив!

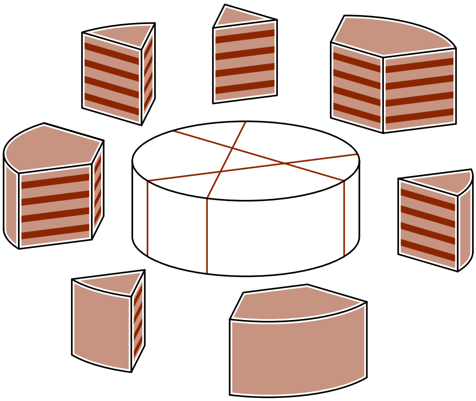
4. Решение изображено на рис. 18, *а* и *б*. Восемь частей образуется с помощью двух вертикальных разрезов и одного горизонтального.

5. Вася взял пустую коробку размером $1\times1\times1$ м и положил туда лыжи. Поскольку диагональ коробки равна $\sqrt{3}>1{,}5$ м, лыжи можно поместить в коробке. С другой стороны, правила не будут нарушены.

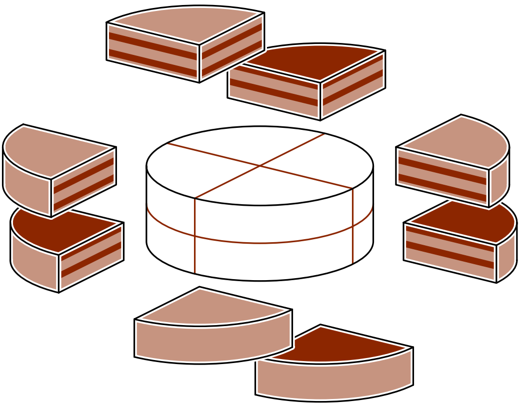
6. Обозначим через s расстояние между сёлами. Заметим, что автобус проехал в гору такое же расстояние s, что и под гору, поскольку один и тот же участок дороги он проехал дважды в разных направлениях. Теперь легко вычислить среднюю скорость по формуле

$$v=\frac{\text{(весь путь)}}{\text{(всё затраченное время)}}=\frac{2s}{s/30+s/60}=40\text{ км/ч}.$$

Итак, средняя скорость на всём пути составляет 40 км/ч.



а)



б)

Рис. 18

7. Третий мудрец мог рассуждать так: «На мне белого колпака быть не может, поскольку иначе второй бы мудрец смог определить цвет своего колпака (см. (*)). Но он этого не сделал. Значит, на мне чёрный колпак!».

(*) Рассуждения второго при дополнительном предположении, что на C белый колпак: «На мне белого колпака быть не может, поскольку иначе первый мудрец A, увидев два белых колпака (на мне и на C) и зная, что белых колпака всего два, сразу сказал бы цвет своего колпака. Но он этого не сделал! Значит, на мне чёрный колпак».

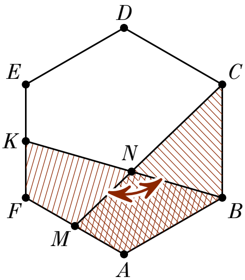


Рис. 19

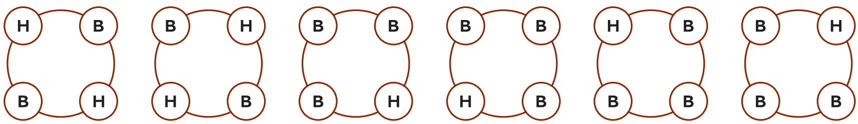
8. Покажем, что Васе и Пете достанется поровну. Для этого убедимся в том, что площади фигур $FKNM$ и BCN равны. «Добавим» к каждой из них четырёхугольник $ABNM$ (рис. 19). Образовавшиеся фигуры $FABK$ и $ABCM$ равны: одна из них переходит в другую при повороте на 60° вокруг центра торта. Значит, площади этих фигур равны. При этом площади фигур, получающихся после удаления общей части $ABNM$, также равны.

9. Команд, не имеющих в своём активе побед, не может быть больше одной! Ведь если предположить, что таких команд по крайней мере две, то возникает противоречие, ведь в их встрече кто-то одержал победу (в волейболе ничьих не бывает). Итак, одна команда составляет 20% от их общего числа. Значит, в турнире участвовало пять команд.

10. Автобус ехал в Москву. Поскольку двери не видны (находятся с другой стороны), а движение правостороннее, направление движения однозначно определяется (рис. 20).

11. Предположим, что отверстия находятся в вершинах квадрата. Алгоритм таков.

1 шаг. Засовываем руки в два диагональных отверстия и ставим оба переключателя в положение «вверх» (буква «**в**» на рисунках, положение «вниз» обозначено буквой «**н**»). После первого шага положение переключателей может быть одним из таких:



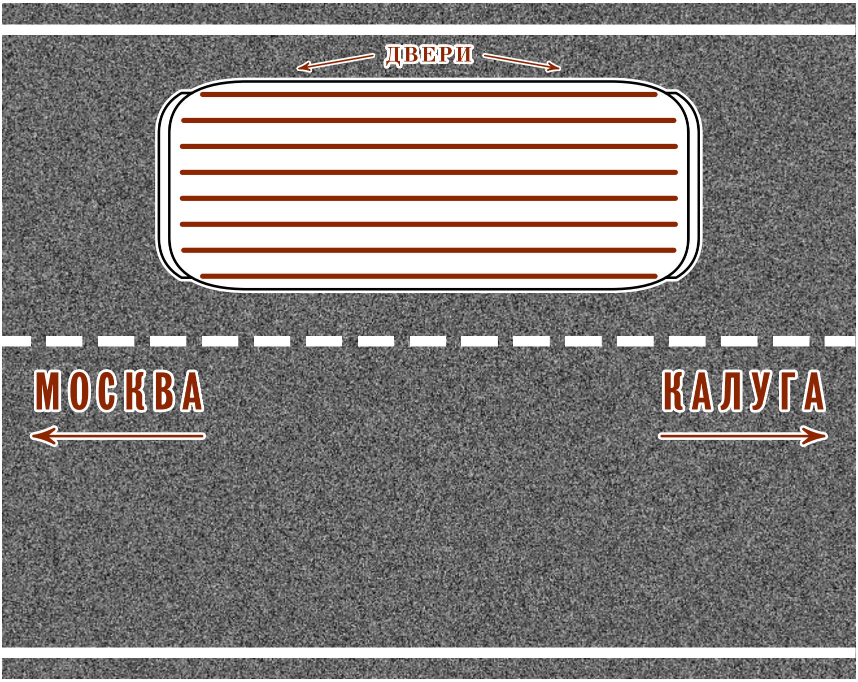
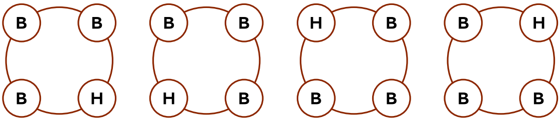
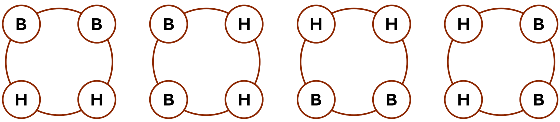


Рис. 20

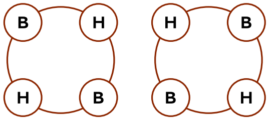
2 шаг. После того, как барабан остановится, засовываем руки в соседние отверстия и ставим оба переключателя в положение «вверх». Если после этого пещера остаётся закрытой, то среди переключателей ровно один имеет положение «вниз»:



3 шаг. Снова засовываем руки в два диагональных отверстия. Если один из переключателей находится в положении «вниз», то, изменив его положение, мы откроем пещеру. Иначе оба переключателя имеют положение «вверх». Переключим один из них. После этого положение переключателей может быть одним из следующих:



4 ш а г. Снова засовываем руки в два соседних отверстия. Если оказалось, что переключатели находятся в одинаковых положениях, то, изменив их одновременно, мы откроем пещеру. Если же в разных, — то снова одновременно меняем положение обоих переключателей, добиваясь одной из следуюших конфигураций:



5 ш а г. Теперь засовываем руки в два диагональных отверстия и меняем состояние обоих переключателей. Пещера откроется!

12. Решение изображено на рис. 21. Длины досок хватит для построенной конструкции, поскольку

$$1{,}9\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)>2\sqrt{2}.$$

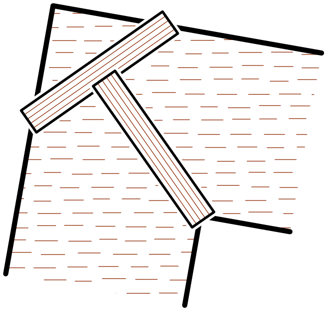


Рис. 21

13. 1 - е в з в е ш и в а н и е: гири с надписями 1, 2, 3 на одной чаше, 6 — на другой. Если весы не находятся в равновесии, таблички наклеены неправильно. Если же они в равновесии, то мы знаем гирю массой 6 г и набор гирь 1, 2 и 3, однако внутри этого набора таблички могут быть перепутаны. Чтобы проверить это необходимо второе взвешивание.

2 - е в з в е ш и в а н и е: гири с надписями 1 и 6 на первой чаше, 3 и 5 — на второй. Заметим, что вторая чаша перевесит лишь тогда, когда таблички не перепутаны!

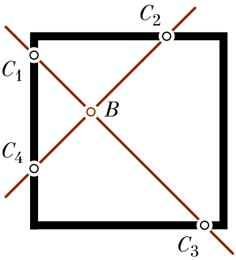


Рис. 22

14. Пусть v — максимальная скорость волка. Проведём через точку B, в которой находится волк, две прямые, параллельные диагоналям квадрата. Пусть эти прямые пересекают контур квадрата в точках C_1, C_2, C_3 и C_4 (рис. 22). Поскольку скорость перемещения каждой из точек C_1, C_2, C_3 и C_4 не больше чем $v\sqrt{2}<1{,}5v$, то собаки смогут в каждый момент времени находиться в этих четырёх точках и, следовательно, не выпустят волка за пределы поля.

15. Простейший и естественный способ, при котором папа поочерёдно переводит всех, каждый раз возвращаясь назад с фонариком, не является оптимальным! При таком способе затраченное на переправу время составляет 19 минут. Ключевым же соображением является то, что надо отправить двоих самых медленных вместе. Тогда способ переправы выглядит следующим образом.

1) Идут мальчик и папа, папа возвращается с фонариком (3 минуты).

2) Далее идут мама и бабушка, мальчик возвращается с фонариком (ещё 12 минут).

3) Затем папа и мальчик переходят на другой берег (ещё 2 минуты).

Итого затраченное время составляет 17 минут!

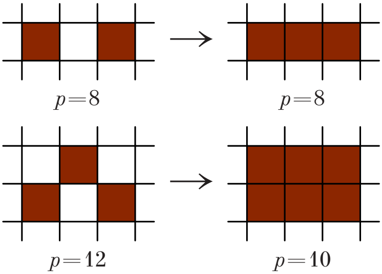


Рис. 23

16. Представим себе поле в виде квадрата 10×10, клетки которого — участки. Будем закрашивать клетки, которые соответствуют участкам, заросшим бурьяном. Заметим, что в то время, как всё новые и новые участки порастают бурьяном, периметр фигуры из закрашенных клеток не увеличивается! Это иллюстрирует рис. 23. Вначале фигура состоит из девяти закрашенных клеток и её периметр не более 36. Значит, в дальнейшем периметр закрашенной области не превосходит 36, тогда как периметр всего поля равен 40. Поэтому всё поле бурьяном не зарастёт.

17. Ответ: 6/7, 5/7, 4/7, 3/7, 2/7, 1/7, 0 литров.

Легко показать, что указанные числа служат ответом. Дело в том, что после разливания молока первым гномом (по 1/7 каждому из остальных) получается точно такое же распределение, но со сдвигом на одного гнома, а сумма $\dfrac{1+2+\ldots+6}{7}$ как раз равна 3. Осталось доказать, что нет других ответов. Пусть x — наибольшее количество молока, оказавшееся за всё время переливаний у какого-либо гнома Γ. Тогда после очередного цикла из семи «разливаний» (их можно неограниченно продолжать, так что Γ можно считать первым в цикле) у Γ накопится не более чем $6\cdot x/6=x$ литров молока; причём равенство возможно, лишь если каждый из шести других гномов наливает в кружку Γ ровно $x/6$ литров молока. Таким образом, из условия следует, что каждый гном разливает одно и то же количество x молока и после получения k порций у него в кружке налито $kx/6$ литров ($k=1,\ 2,\ \ldots,\ 6$). Зная из условия, что $\frac{x+2x+\ldots+6x}{6}=\frac{7}{2}x=3$, находим единственный ответ.

18. Всё дело в расписании движения поездов. Так, например, если поезда из центра приходят в 1 час 3 мин., 1 час 6 мин., . . . , а поезда, идущие в центр, приходят в 1 час 3 мин. 10 сек., 1 час 6 мин. 10 сек., . . . , то молодой человек, скорее всего, придёт в больший временной промежуток между отправлением поездов и уедет к девушке.

19. Ответ: 10 городов.

Из любого города A можно добраться не более чем до трёх городов, а из каждого из них не более, чем до двух (не считая A). Таким образом, всего городов не более $1+3+3\cdot 2=10$. Пример на рис. 24 показывает, что нужная система авиалиний в государстве с 10 городами существует.

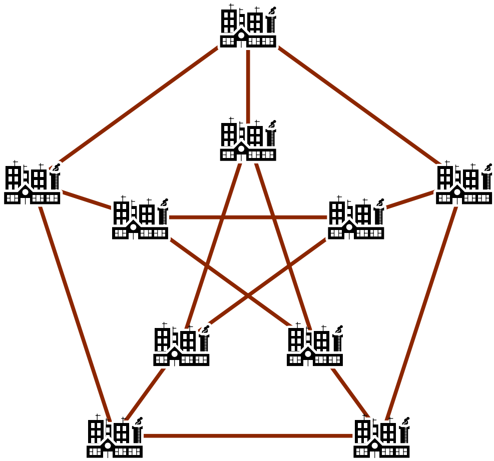


Рис. 24

20. Ответ: 32.

Заметим, что конь, стоящий на белой клетке бьёт лишь чёрные, и наоборот. Значит, поставив коней на все 32 белые клетки доски (рис. 25), мы получим требуемое расположение. То, что число 32 максимально, следует из того факта, что шахматную доску можно обойти ходом коня, побывав на каждом поле ровно один раз (рис. 26). Поэтому кони не могут стоять на полях, являющихся соседями в этой цепочке ходов, т. е. коней не может быть более 32.

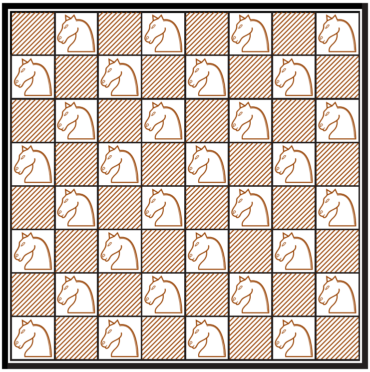


Рис. 25

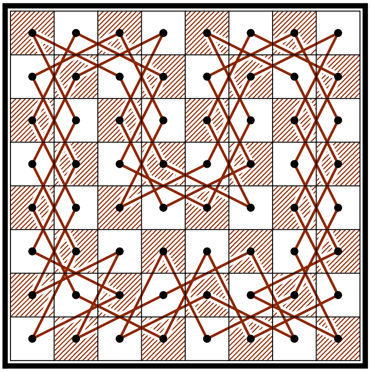


Рис. 26

21. Ответ: да (теоретически).

Правильный ответ в этой задаче кажется неправдоподобным, а вопрос нелепым. Ведь мы забываем, что когда резинка мгновенно растягивается, жучок смещается относительно земли. Посмотрим, какую долю $d(n)$ резинки проползёт жук через n секунд:

$$d(1)=\frac{1}{100},\quad d(2)=\frac{1}{100}+\frac{1}{200},\quad \ldots,\quad d(n)=\frac{1}{100}+\frac{1}{200}+\ldots+\frac{1}{100n}.$$

Найдется ли такое n, что сумма $d(n)$ превзойдёт 1? (Это и будет означать, что жук прополз всю резинку.) Достаточно сравнить

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\quad \text{и}\quad 100.$$

Но сумма в левой части может быть сколь угодно большой. Для $n=2^k$:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^k}\right)>$$

$$>1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}}_{k\ \text{раз}}=\frac{k}{2}+1.$$

Выбрав $k=200$ и $n=2^k=2^{200}$, в частности, получим:

$$100d(n)=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}>100,$$

т. е. $d(2^{200})>1$ и жук доползёт до руки!

22. База индукции $n=1$: если из доски 2×2 удалить клетку, то как раз уголок и останется, и утверждение при $n=1$ очевидно.

Индукционный переход $n=k \to n=k+1$: Рассмотрим доску размером $2^{k+1}\times 2^{k+1}$. Тогда выброшенная клетка принадлежит одной из четырёх частей размера $2^k\times 2^k$, образованных средними линиями большой доски. Пусть для определённости это правая верхняя часть. Вырежем дополнительно уголок так, как показано на рис. 27. Тогда окажется, что в каждой из четырёх частей большой доски вырезано по клетке, и можно применить предположение индукции. Замостив каждую из этих частей и вернув на место вырезанный уголок, мы получим искомое замощение большой доски. Теперь, основываясь на принципе математической индукции, можно утверждать, что искомое замощение существует для любой доски вида $2^n\times 2^n$, произвольная клетка которой вырезана.

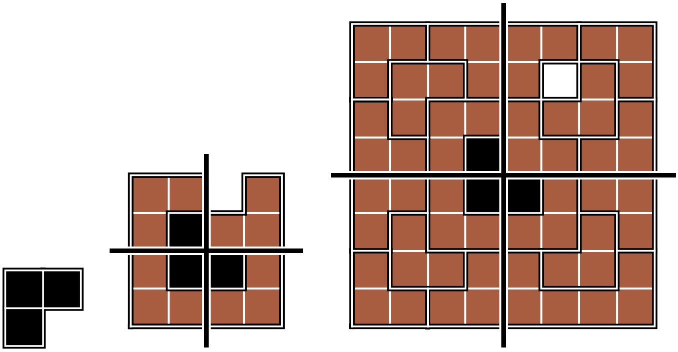


Рис. 27

23. Распределим сначала парламентариев по двум комитетам произвольным образом. Если в каком-то комитете у его члена A не менее двух врагов, то в другом комитете у A не более одного врага. Переместим A в другой комитет; при этом суммарное количество S пар врагов и в том, и в другом комитетах уменьшается. Поскольку S — целое неотрицательное число, такое уменьшение S может быть проделано лишь конечное число раз, и в результате получится требуемое разбиение на комитеты.

24. Посмотрим, шкафы с какими номерами останутся открытыми: 1, 4, 9, 16, ... Возникает предположение, что шкаф окажется открытым, если его номер — квадрат натурального числа. Покажем, что это действительно так. Заметим, что шкаф с номером n меняет состояние столько раз, сколько делителей у числа n. При этом шкаф окажется в итоге открытым, если n имеет нечётное число делителей. Однако делители образуют пары: если d — делитель числа n, то n/d — также делитель. Поэтому количество делителей нечётно лишь тогда, когда для какого-то d выполнено равенство $d=n/d$. Отсюда $n=d^2$, т. е. число n является полным квадратом. Квадраты, не превосходящие 1000, – это $1^2, 2^2, \ldots, 31^2$ (всего 31 число). Значит, всего 31 шкаф останется открытым.

25. Раскрасим треугольные залы на схеме замка так, как показано на рис. 28. Закрашенных треугольников получилось на 10 больше, чем незакрашенных (всего 45 незакрашенных и 55 закрашенных). Поскольку закрашенные и незакрашенные

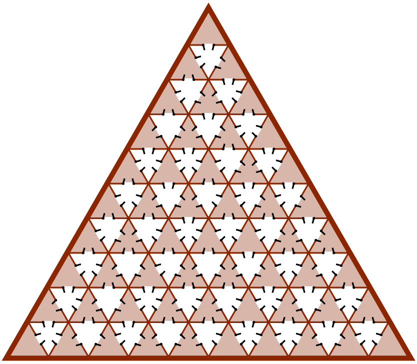


Рис. 28

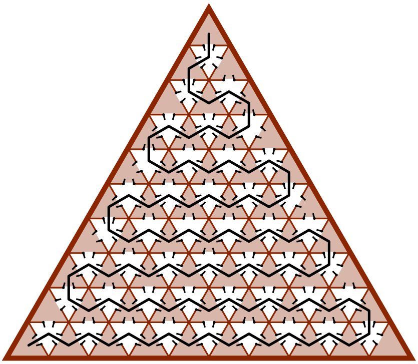


Рис. 29

треугольники при любом обходе чередуются, всего треугольников в такой цепочке не более чем $45\cdot 2+1=91$. Маршрут, изображённый на рис. 29, позволяет посетить ровно 91 из треугольных залов.

26. Пусть игрок поставил a, b и c долларов на лошадей Алла, Бэлла и Виола соответственно. Если Алла придёт первой, его выигрыш (или проигрыш) составит $a-b-c$. Если Бэлла придёт первой — $2b-a-c$, если Виола — $6c-a-b$. Приравнивая возможные выигрыши, получаем $2a-(a+b+c)=3b-(a+b+c)=7c-$ $-(a+b+c)$, т. е.

$$2a=3b=7c. \tag{1}$$

Кроме того,

$$a+b+c=205. \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) находим $a=105$, $b=70$, $c=30$. Распределив так ставки, игрок получит чистую прибыль $105-30-70=5$ долларов независимо от того, какая лошадь придёт первой.

27. Ответ показан на рис. 30.

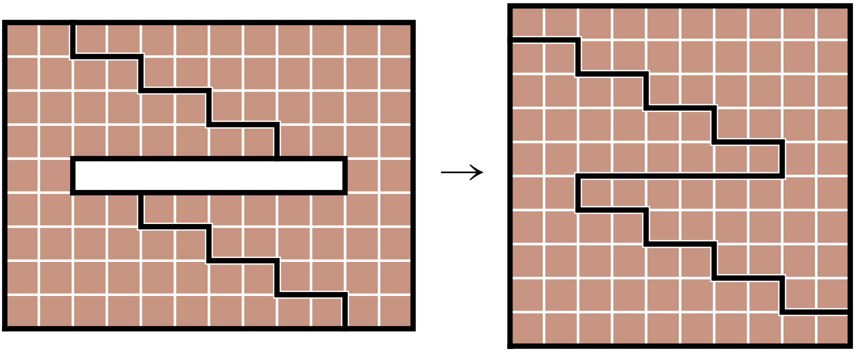


Рис. 30

28. Заметим, что количество овец у каждого крестьянина после первого раскулачивания делится на 2, после второго раскулачивания — делится на 4, . . . , после седьмого — делится на $2^7=128$. Но всего овец 128. Единственный набор чисел, удовлетворяющий этим условиям $\{128, 0, 0, 0, \ldots, 0\}$. Поэтому все овцы собрались у одного крестьянина.

29. Ответ: достаточно одного взвешивания!

Положим на весы одну монету из первой кучки, две из второй, . . . , 100 из сотой. Если бы все монеты были настоящими, то суммарный вес образовавшейся кучи составил бы

$$(1+2+\ldots+100)\cdot 0{,}01=\frac{100\cdot 101}{2}\cdot 0{,}01=50{,}5 \text{ кг.}$$

Поскольку одна из кучек состоит из фальшивых монет, то на самом деле весы покажут на n граммов меньше, чем 50,5 кг. Это число n и есть номер кучки с фальшивыми монетами.

30. Во-первых, рядом с восьмёркой должны стоять нули, так как мы два раза «сносили» цифры делимого.

Во-вторых, ряд цифр сразу восстанавливается, так как соответствующие уменьшаемое, вычитаемое и разность имеют разное число разрядов).

$$\begin{array}{r|l}
10{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*} & xyz \\ \cline{2-2}
\underline{9ab\phantom{{*}{*}{*}{*}{*}}} & c080d \\
10{*}{*}\phantom{{*}{*}{*}} & \\
\underline{9{*}{*}\phantom{{*}{*}{*}}} & \\
{*}{*}{*}{*} & \\
\underline{{*}{*}{*}{*}} & \\
0 &
\end{array}$$

В-третьих, произведение первой цифры частного c и трёхзначного числа $\overline{xyz}$ является трёхзначным и начинается с 9, как и произведение $8\cdot\overline{xyz}$, а произведение $d\cdot\overline{xyz}$ четырёхзначно. Поэтому $c=8$, $d=9$.

Далее, сумма $\overline{9ab}$ и 10 четырёхзначна. Значит, $a=9$. Кроме того, $\overline{99b}$ делится на 8, поэтому $b=2$. При этом $\overline{xyz}=\dfrac{992}{8}=124$. Теперь, перемножив 124 и 80809, полностью восстанавливаем деление:

```
10020316 | 124
 992     |-----
 ----    | 80809
  1003
   992
  ----
    1116
    1116
    ----
       0
```

31. Ответ: могут.

Сначала первый сторож занимает центр квадрата — точку O, а второй бегает по контуру по часовой стрелке. Тогда обезьяна также вынуждена перемещаться по контуру и, в частности, окажется в вершине A квадрата (рис. 31). Теперь первый сторож смещается по отрезку OB в точку C такую, что $OC=\frac{1}{3}OB$. Наблюдая за дви-

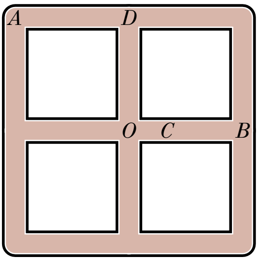


Рис. 31

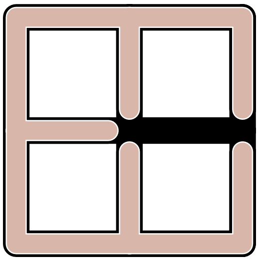


Рис. 32

жением обезьяны, он сможет котролировать отрезок OB и следить за тем, чтобы обезьяна не проскочила ни через O, ни через B. Это возможно, поскольку расстояния от D до O и B ровно в три раза больше соответствующих расстояний от C до этих точек. Тогда второй сторож сможет загнать обезьяну в один из тупиков (рис. 32), и она будет поймана.

32. Решение для двух гвоздей понятно из рис. 33 (A и $Б$ — гвозди). Решим теперь задачу для трёх гвоздей A, $Б$, $В$. Проведём из A вертикальный луч вверх (рис. 34). Если, двигаясь от левого конца верёвки к правому, мы пересечём этот луч слева направо, будем считать, что проведена операция $A^{(+)}$; если же справа налево — операция $A^{(-)}$. Ясно, что операции $A^{(+)}$ и $A^{(-)}$, выполненные последовательно, взаимно уничтожатся, и картина соскользнёт с гвоздя. Такие же операции введём для двух других гвоздей. В этих обозначениях способ закрепления картины на двух гвоздях (см. рис. 33) записывается так: $A^{(+)}Б^{(+)}A^{(-)}Б^{(-)}$. В случае трёх гвоздей можно предложить следующий способ: $A^{(+)}Б^{(+)}A^{(-)}Б^{(-)}В^{(+)}Б^{(+)}A^{(+)}Б^{(-)}A^{(-)}В^{(-)}$. При удалении любого гвоздя (т. е. всех операций с соответствующей буквой), все оставшиеся операции взаимно уничтожаются.

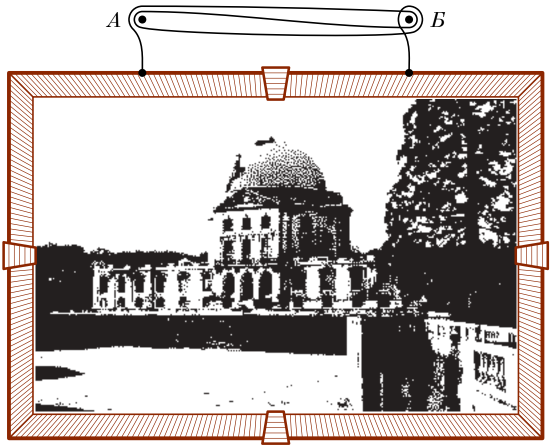


Рис. 33

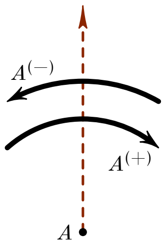


Рис. 34

33. 1-е взвешивание: эксперт кладёт на левую чашку 1-ю монету, на правую — 8-ю. Так как правая чашка перевешивает, суд убеждается, что 1-я монета фальшивая, а 8-я — настоящая.

2-е взвешивание: на левую чашку кладутся монеты с номерами 1, 9, 10, на правую — с номерами 8, 2, 3. Левая чашка перевешивает. Это возможно лишь в случае, когда монеты 9, 10 настоящие, а 2, 3 — фальшивые.

3-е взвешивание: наконец, на левую чашку кладутся монеты с номерами 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, а на правую — остальные. Правая чашка перевешивает, и суд видит, что на ней больше настоящих монет, чем на левой. В то же время, на левой чашке фальшивых монет больше, чем на правой. Это и доказывает суду, что монеты с номерами 4, 5, 6, 7 фальшивые, а с номерами 11, 12, 13, 14 — настоящие.

З а м е ч а н и е. Аналогично показывается, что проверку 2^n-1 настоящих монет и 2^n-1 фальшивых можно осуществить за n взвешиваний.

34. Рассмотрим граф, вершины которого обозначают дедов, чьи внуки учатся в этой школе, а рёбра — внуков (всего 20 рёбер). Пусть A и B — деды одного из внуков. Выделим также остальных внуков этих дедов (кратные рёбра, соединяющие вершины A и B). По условию любые два ребра имеют общий конец, следовательно, каждое из остальных рёбер выходит либо из вершины A, либо из B. Если все они выходят из одной вершины, то утверждение задачи очевидно. Иначе же существует третья вершина C, где сходятся все эти рёбра. А это означает, что всего имеется ровно три деда! Ясно, что найдутся две вершины из этих трёх, соединеные ребром кратности не более шести (в противном случае граф должен иметь по крайней мере $3\cdot7=21$ ребро). Тогда у оставшегося деда по крайней мере $20-6=14$ внуков.

35. О т в е т: 99 мудрецам наверняка удастся спастись.

Опишем стратегию, которой должны придерживаться мудрецы. Последний в очереди смотрит вперёд, считает число чёрных колпаков и говорит «чёрный», если это число чётно. При этом он не может спастись наверняка. Однако, 99-й, 98-й, . . . , 1-й в очереди получают очень важную информацию. Так, 99-й снова считает число чёрных колпаков на впереди стоящих мудрецах и если чётность этого числа изменилась, то на нём чёрный колпак, и он говорит «чёрный». Затем 98-й считает число чёрных колпаков на впереди стоящих и, зная чётность числа чёрных колпаков на впереди стоящих без него и вместе с ним, однозначно определяет цвет своего колпака и т. д. Мудрецы с 99-го по 1-го остаются в живых!

36. О т в е т: да, найдётся.

Рассмотрим страну, карта которой изображена на рис. 35 (точки — города, отрезки — дороги). Покажем, что второй армии всегда удастся захватить хотя бы два города A_i. Действительно, если первая армия первым ходом занимает город на одной из «веток», вторая армия должна занять соответствующий этой «ветке» город A_i; если первая армия занимает A_l, то вторая — B_l; если первая выбирает город B_l, то вторая — один из городов A_j, соединённый дорогой с B_l. Дальнейшие действия очевидны.

Итак, после прекращения боевых действий вторая армия занимает хотя бы два города A_i, а значит, и две соответствующие «ветки», и город B_j между занятыми городами A_i, всего по крайней

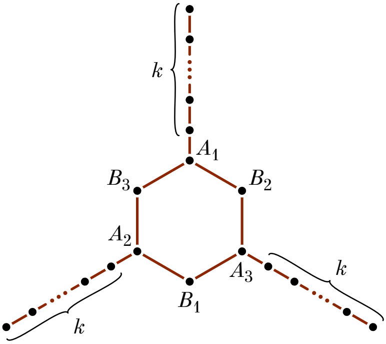


Рис. 35

мере $2k+3$ городов. Поэтому доля городов, захваченных второй армией, не менее $\dfrac{2k+3}{3k+6}$. Уже при $k=1$ это число больше $\dfrac{1}{2}$. Заметим, что в условии задачи вместо доли $\dfrac{1}{2}$ можно взять любое число $\alpha<\dfrac{2}{3}$, поскольку $\dfrac{2k+3}{3k+6}>\alpha$ при достаточно больших k.

37. а) Эпидемия не кончится, если для трёх друзей A, B, C в первый день у A иммунитет после прививки, B болен, а C здоров.

б) Рассмотрим граф, вершины которого соответствуют коротышкам, а любые два друга соединены рёбрами. Назовём расстоянием между вершинами графа (коротышками) наименьшее количество рёбер в соединяющей их цепочке. Пусть несколько коротышек заболели в первый день (очаг эпидемии). Тогда на следующий день заболеют коротышки, находящиеся на расстоянии 1 от очага, во второй — на расстоянии 2 и только они и т. д. Дело в том, что в n-й день у коротышек, находящихся на расстоянии $n-1$ от очага, иммунитет, и это означает, что волна эпидемии будет распространяться всё дальше от очага, и всё новые и новые коротышки будут заболевать. Но коротышек конечное число. Поэтому в какой-то момент все переболеют по разу и эпидемия закончится.

38. Узники выбирают одного человека (назовём его «счетоводом»), который будет действовать следующим образом. «Счетовод» включает свет, когда входит в комнату первый раз. Далее, если один из обычных узников входит и видит, что свет горит, он выключает лампу и в дальнейшем выключателя не касается. Через какое-то время счетовод снова будет вызван. Он опять включит лампу и т. д. В определённый момент счетовод выяснит, что лампу выключали ровно 99 раз. Тогда он будет точно знать, что все уже побывали в комнате.

39. Решим сначала следующую задачу: какой наибольшей высоты может быть здание, чтобы для него за k бросаний можно было выяснить то, что спрашивается в исходной задаче. Наибольший этаж, который соответствует первой попытке, равен k. Ведь если кокос разобьётся, у нас останется всего один кокос и $k-1$ попыток. В этих условиях мы вынуждены проверять последовательно все этажи, начиная с первого. Если же первый кокос не разбился, то бросаем его с этажа $k+(k-1)$. По аналогии с предыдущим проверяется, что это наибольший возможный этаж, ведь если теперь первый кокос разобьётся, у нас останется всего $k-2$ попыток, и мы вынуждены будем проверять этажи последовательно по возрастанию, начиная с $(k+1)$-го этажа. Если же первый кокос не разбился при бросании с этажа $k+(k-1)$, то бросаем его с этажа $k+(k-1)+(k-2)$ и т. д. Поэтому наибольшая высота здания для нашего «эксперимента» с k попытками равна $k+(k-1)+\ldots+1=\frac{k(k+1)}{2}$. Для решения исходной задачи достаточно найти наименьшее натуральное k, для которого $\frac{k(k+1)}{2} \geqslant 100$. Отсюда получаем, что выяснить наименьший этаж, с которого кокос разбивается, можно минимум за 14 попыток.

40. Ответ: игроку стоит изменить своё мнение!

Придерживаясь такой стратегии (менять первоначальный выбор), игрок получит выигрыш, если деньги лежат в любой из двух шкатулок, не выбранных им вначале. В среднем (т. е. при многократном повторении этой игры) игрок получит выигрыш в двух случаях из трёх. Тогда как если игрок придерживается первоначального выбора, он выиграет в среднем всего лишь в одном случае из трёх.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. См. рис. 36.

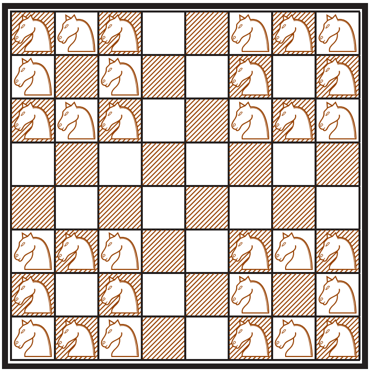


Рис. 36

2. Ответ: такое могло случиться.

Пусть, например, в турнире участвовало 13 команд. Одна из них (команда A) выиграла 5 матчей и 7 проиграла, а все остальные игры закончились вничью. Команда A по новой системе набирает $5 \cdot 3 = 15$ очков. У каждой из оставшихся команд по $3 + 11 = 14$ очков. По новой системе подсчёта очков команда A занимает первое место. По старой системе у команды A было бы $5 \cdot 2 = 10$ очков, а у каждой из оставшихся — по 11 очков. В этом случае команда A была бы последней.

3. а) Ответ: да. Рассмотрим правильный девятиугольник и проведём три его диагонали как показано на рис. 37. Можно убедиться, что ни одна из остальных диагоналей не пересекает образовавшийся правильный треугольник.

б) Ответ: нет. Предположим, что в результате разрезания образовался правильный шестиугольник $ABCDEF$. Пусть M — конец диагонали AF, расположенный левее A, N — конец диагонали CD, расположенный правее D (рис. 38). Но тогда диагональ MN пересекает наш шестиугольник. Противоречие.

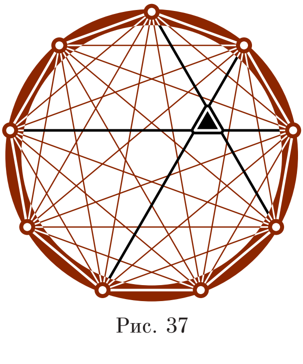


Рис. 37

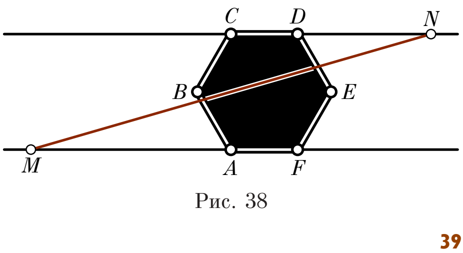


Рис. 38

4. Суммарная площадь уголков равна $3+4+\ldots+8=33$. Значит, размер прямоугольника может быть лишь 3×11. Способ сложить этот прямоугольника показан на рис. 39.

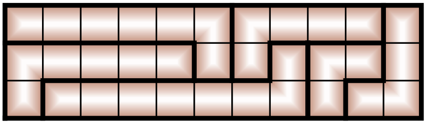


Рис. 39

5. Так как возможные траектории — дуги окружности одного и того же радиуса 1 км, длина такой дуги тем меньше, чем меньше

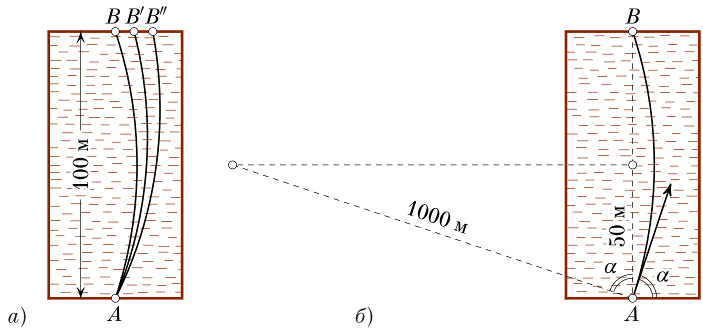


Рис. 40

длина стягивающей её хорды (рис. 40, *а*). Следовательно, для искомой траектории хорда AB должна быть перпендикулярна стенке бассейна. А искомый угол α определяется соотношением $\cos\alpha=\frac{1}{20}$ (рис. 40, *б*), откуда $\alpha\approx 87^\circ\ 8'$.

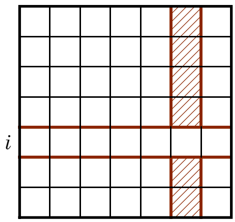


Рис. 41

6. Ответ: да, верно.

Рассмотрим произвольную строку i с суммой чисел s_i и все «кресты», которые её содержат. Тогда сумма чисел в заштрихованной на рис. 41 части равна $-s_i$, а сумма всех чисел в таблице равна $s_i-ns_i=-(n-1)s_i$. Отсюда следует, что сумма чисел в каждой строке одна и та же (обозначим её s). Аналогично можно показать, что суммы чисел в каждом столбце все одинаковы и равны s. Далее, для произвольного «креста», содержащего строку i и столбец j по условию имеем:

$$s+s-a_{ij}=0,$$

где a_{ij} — число, стоящее на пересечении i-й строки и j-го столбца. Следовательно, $a_{ij} = 2s$, т. е. все элементы в таблице равны между собой (обозначим их через a). Наконец, рассматривая произвольный «крест», считаем сумму записанных там чисел:

$$(2n-1)a=0,$$

значит, $a=0$.

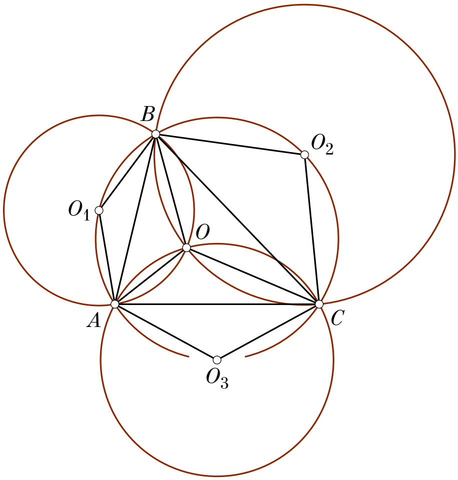


Рис. 42

7. Пусть окружность ω, описанная около треугольника ABC, содержит центры O_1, O_2 двух данных окружностей (рис. 42). Точки O_1 и O_2 лежат на окружности ω, следовательно,

$$\angle AO_1B = 180^\circ - \angle C,$$
$$\angle BO_2C = 180^\circ - \angle A$$

(где $\angle A$ и $\angle C$ — величины углов треугольника ABC). Далее,

$$\angle AOB = 90^\circ + \frac{\angle C}{2}, \quad \angle BOC = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}.$$

Поэтому

$$\angle AOC = 360^\circ - \angle AOB - \angle BOC = 180^\circ - \frac{\angle C}{2} - \frac{\angle A}{2}.$$

Отсюда следует, что $\angle AO_3C = \angle A + \angle C$. Так как $\angle ABC + \angle AO_3C = \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$, точка O_3 тоже лежит на окружности ω.

8. Имеем:

$$AG = \frac{a+b}{2}\cdot\sqrt{ab} \ \vee \ \frac{2ab}{a+b}\cdot\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = HQ,$$
$$\frac{(a+b)^2}{2} \ \vee \ \sqrt{2ab(a^2+b^2)}$$

$\left(\text{умножили обе части на положительное число } \dfrac{a+b}{\sqrt{ab}}\right)$,

$$(a+b)^4 \ \vee \ 8ab(a^2+b^2)$$

(возвели обе части в квадрат и умножили на 4), но

$(a+b)^4-8ab(a^2+b^2)=$
$$=(a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4)-8a^3b-8ab^3=$$
$$=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4=(a-b)^4\geqslant 0.$$
Поэтому $(a+b)^4\geqslant 8ab(a^2+b^2)$, и $AG\geqslant HQ$.

Ответ: $AG\geqslant HQ$, причём $AG=HQ$ лишь при $a=b$.

9. а) Пусть E — точка пересечения окружности со стороной AB, отличная от B. Заметим, что $\angle ENM=180^\circ-\angle EBM=90^\circ$. Поэтому в треугольнике MED отрезок EN является медианой и высотой. Следовательно, треугольник MED является равнобедренным: $EM=ED$ (рис. 43). Пусть $AB=1$, обозначим длину отрезка AE через x. Тогда, поскольку $EM=ED$, имеем:
$$(1-x)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=EM^2=ED^2=x^2+1.$$
Решая полученное уравнение, находим, что $x=\dfrac{1}{8}$ и $AE:EB=1:7$.

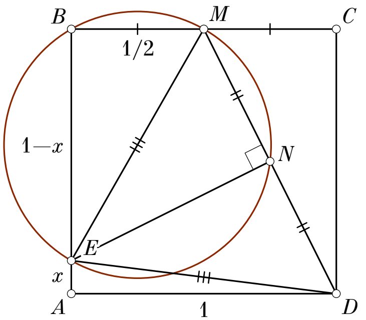


Рис. 43

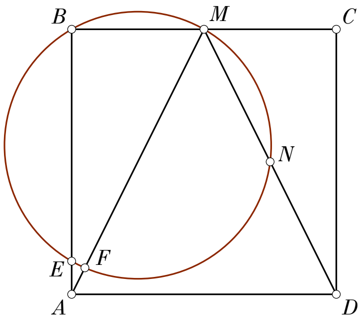


Рис. 44

б) Пусть F — точка пересечения построенной окружности с отрезком AM, отличная от M (рис. 44). По теореме о произведении секущей на её внешнюю часть имеем: $AE\cdot AB=AF\cdot AM$. Используя пункт а), получаем: $\dfrac{1}{8}\cdot 1=AF\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, т. е. $AF=\dfrac{1}{4\sqrt{5}}$ и $AF:AM=\dfrac{1}{4\sqrt{5}}:\dfrac{\sqrt{5}}{2}=1:10$. Значит, $AF:FM=1:9$.

10. Заметим, что целое число K, которое получается в результате такой замены, может быть лишь степенью двойки. Иначе, возведя $K=\sqrt{*\sqrt{*\sqrt{\ldots\sqrt{*}}}}$ в степень 2^n, получим противоречие с основной теоремой арифметики.

Заметим также, что K представимо в виде

$$2^{\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\ldots+\frac{a_n}{2^n}},$$

где a_1, a_2, ..., a_n — некоторая перестановка чисел 1, 2, ..., n, т. е.

$$K<2^{\frac{n}{2}+\frac{n}{2^2}+\ldots+\frac{n}{2^n}}<2^n.$$

Значит, получить целое число, большее 2^{n-1} нельзя. Покажем, как получить 2^{n-1}.

Для $n=2$: $\sqrt{2\sqrt{2^2}}=2$.

Для $n=3$: $\sqrt{2^3\sqrt{2\sqrt{2^2}}}=2^2$.

Для $n=4$: $\sqrt{2^4\sqrt{2^3\sqrt{2\sqrt{2^2}}}}=2^3$.

Это наводит на мысль, что

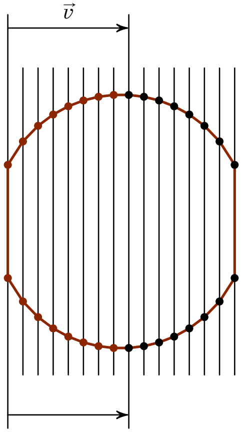


Рис. 45

$$\sqrt{2^n\sqrt{2^{n-1}\sqrt{\ldots\sqrt{2^3\sqrt{2\sqrt{2^2}}}}}}=2^{n-1}.$$

Проверим это равенство методом математической индукции. Базой являются равенства для $n=2$, 3, 4. Переход от n к $n+1$: если

$$\sqrt{2^n\sqrt{2^{n-1}\sqrt{\ldots\sqrt{2^3\sqrt{2\sqrt{2^2}}}}}}=2^{n-1},$$

то

$$\sqrt{2^{n+1}\sqrt{2^n\sqrt{2^{n-1}\sqrt{\ldots\sqrt{2^3\sqrt{2\sqrt{2^2}}}}}}}=\sqrt{2^{n+1}\cdot 2^{n-1}}=2^n.$$

О т в е т: 2^{n-1}.

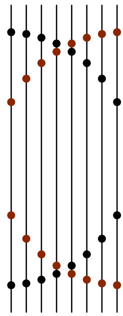


Рис. 46

11. О т в е т: а) не может; б) может.

а) Пусть число n таково, что $2^n<N\leqslant 2^{n+1}$ (N — число фишек). На каждой прямой лежит не более двух вершин выпуклого N-угольника (фишек). После первого хода на каждой прямой может оказаться не более четырёх фишек, после второго — не более 8, после $(n-1)$-го — не более 2^n. Таким образом, собраться на одной прямой фишки могут не менее чем через n ходов. При $N=1997$ можно взять $n=10$ ($1024=2^{10}<1997\leqslant 2^{11}=2048$).

б) Построить пример можно так. Пусть $N\leqslant 2^{n+1}$ (в частности, для $N=1997$ можно взять $n=10$). Проведём 2^n параллельных прямых на равных расстояниях друг от друга и расположим на них фишки в вершинах выпуклого N-угольника, как показано на рис. 45. Сдвинув все фишки, лежащие на левой половине прямых на вектор

$\overrightarrow{v}$ так, чтобы эти прямые совпали соответственно с прямыми правой половины (рис. 46), мы соберём все фишки на 2^{n-1} прямых, а через n аналогичных шагов (со сдвигами на векторы $\overrightarrow{v}/2$, $\overrightarrow{v}/4$ и т. д.) все они соберутся на одной прямой.

12. Пусть $m \leqslant n$ — целые корни уравнения $x^2+ax+b=0$. Тогда из равенств $m+n=-a$, $mn=b$ (теорема Виета) следует, что m, $n<0$, $1 \leqslant |n| \leqslant |m| \leqslant 1997$, $0<mn \leqslant 1997$. Рассмотрим уравнение $x^2-nx+mn=0$. Его коэффициенты — целые числа от 1 до 1997, и оно не имеет корней, так как $D=n^2-4mn=n(n-4m)<0$.

Итак, среди рассматриваемых уравнений любому уравнению с целыми корнями можно поставить в соответствие единственное уравнение, не имеющее корней. Кроме того, все квадратные трёхчлены x^2+cx+d, где c — чётно, d — нечётно, $D<0$, не представимы в виде $x^2-nx+mn$. Значит, уравнений, не имеющих корней, больше.

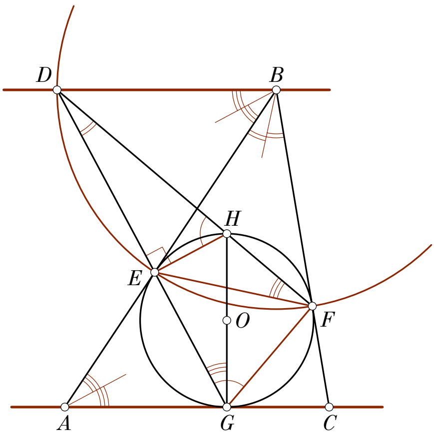


Рис. 47

13. Заметим, что $\angle EHD=\angle EGF=\dfrac{\angle EOF}{2}=\dfrac{180^\circ-\angle B}{2}=90^\circ-\dfrac{\angle B}{2}$ (рис. 47). Угол DEH — прямой, поскольку смежный с ним угол GEH опирается на диаметр HG вписанной окружности. Из прямоугольного треугольника DEH, получаем: $\angle EDF=\dfrac{\angle B}{2}$. Поэтому точка D лежит на окружности с центром B и радиусом $BE=BF$. Отсюда $\angle DBE=2\angle DFE=2\angle EGH=\angle EAG$, т. е. прямые DB и AC параллельны.

14. Первое решение. Посчитаем общее число ладей, которых бьёт ладья, обходящая доску по периметру (рис. 48). Их не более чем $2(m+n)$. При этом каждую из стоящих на доске ладей мы посчитали по крайней мере дважды. Поэтому число ладей на доске не более $m+n$.

Пример расстановки $m+n$ ладей показан на рис. 49.

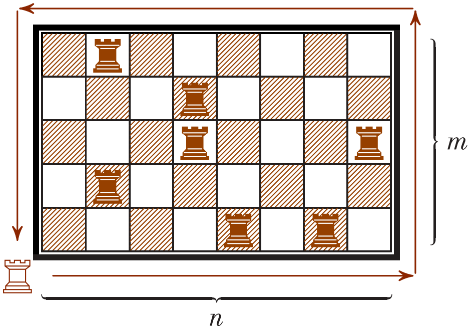


Рис. 48

В т о р о е р е ш е н и е. Докажем индукцией по $k=m+n$, что на доске размера $m\times n$ можно расставить не более $m+n$ ладей, чтобы каждая из них била не более двух других.

Б а з а и н д у к ц и и. Для досок размера $1\times n$ и 2×2 это утверждение не вызывает сомнений.

И н д у к ц и о н н ы й п е р е х о д. Предположим, что мы уже доказали утверждение для досок $m\times n$ с $m+n\leqslant k$. Возьмём теперь некоторую доску $m\times n$ (m строк и n столбцов) с $m+n=k+1$. Для определённости будем считать, что $m\leqslant n$.

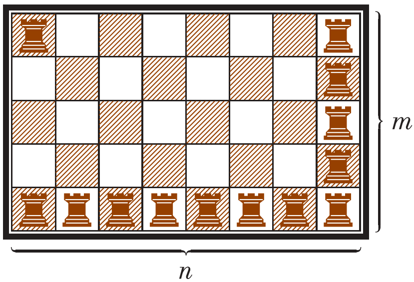


Рис. 49

Выберем строку, в которой стоят по крайней мере три ладьи (такая строка обязательно существует, поскольку иначе общее число ладей не превосходило бы $2m\leqslant m+n$). Рассмотрим столбец, содержащий среднюю из этих ладей (или одну из средних), рис. 50. В этом столбце не может стоять более ни одной ладьи, поскольку в противном случае одна из ладей била бы более двух ладей. Удалим этот столбец, «схлопнув» доску. Мы получим доску размером $m\times(n-1)$, на которой, согласно предположению индукции, стоит не более $m+n-1$ ладей. Значит, на исходной доске их было не более $m+n$.

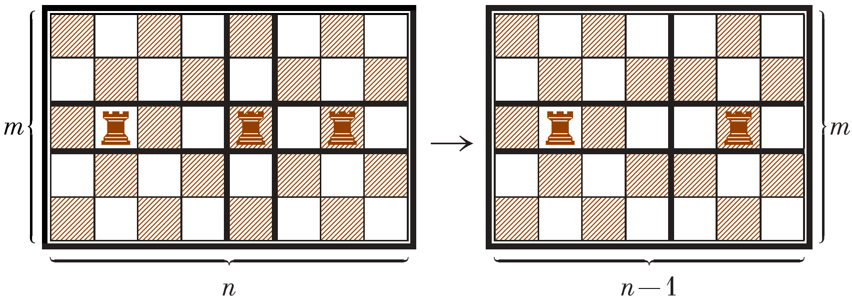


Рис. 50

15. Ответ: 1997,5.

Пусть r_n — радиус окружности ω_n; $S_n = r_1 + r_2 + \ldots + r_n$. Тогда уравнение окружности ω_{n+1} имеет вид

$$x^2 + (y - (2S_n + r_{n+1}))^2 = r_{n+1}^2.$$

Условие касания окружности ω_{n+1} и параболы $y = x^2$ означает, что уравнение

$$y + (y - (2S_n + r_{n+1}))^2 = r_{n+1}^2,$$

$$y^2 - y(4S_n + 2r_{n+1} - 1) + 4S_n(S_n + r_{n+1}) = 0,$$

имеет один корень, т. е. его дискриминант

$$(4S_n + 2r_{n+1} - 1)^2 - 16S_n(S_n + r_{n+1}) = 16S_n^2 + 8S_n(2r_{n+1} - 1) + \\ + (2r_{n+1} - 1)^2 - 16S_n^2 - 16S_n r_{n+1} = (2r_{n+1} - 1)^2 - 8S_n$$

равен нулю. Значит, $r_{n+1} = \dfrac{\sqrt{8S_n} + 1}{2}$. Подставляя $n = 1$, $r_1 = \dfrac{1}{2}$, $S_1 = \dfrac{1}{2}$, находим, что $r_2 = \dfrac{3}{2}$. Далее, подставляя $n = 2$, $S_2 = 2$, получаем, что $r_3 = \dfrac{5}{2}$. Аналогично получаем, что $r_4 = \dfrac{7}{2}$. Это наводит на мысль, что $r_n = n - \dfrac{1}{2}$. Проверим это, используя индукцию: если $r_k = k - \dfrac{1}{2}$ при $k \leqslant n$, то

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \ldots + \frac{2n-1}{2} = \frac{n^2}{2},$$

$$r_{n+1} = \frac{\sqrt{8S_n} + 1}{2} = \frac{\sqrt{4n^2} + 1}{2} = \frac{2n+1}{2} = (n+1) - \frac{1}{2}.$$

Поэтому для любого n справедлива формула $r_n = n - \dfrac{1}{2}$. В частности, $r_{1998} = 1997{,}5$.

16. Заметим, что в результате указанной операции сумма квадратов чисел, записанных на доске, не увеличивается, поскольку

$$\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2 \leqslant a^2+b^2.$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно умножить обе части на 2, получив неравенство $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$, которое сводится к верному неравенству $0 \leqslant (a-b)^2$.

Число x, которое в конце концов останется на доске, удовлетворяет неравенству

$$x^2 \leqslant 1^2+2^2+\ldots+200^2=\frac{200\cdot 201\cdot 401}{6}<2000^2 \ ^{*)}.$$

17. Заметим, что DK и BN — медианы треугольника ABD. Следовательно, AM также является медианой, точка F (середина BD) лежит на AM (рис. 51). Медианы делят треугольник на шесть треугольников равной площади $2S$. Пусть точка E симметрична O относительно L. Тогда $EN \| AO \| BC$, так как $AONE$ — параллелограмм, FM — средняя линия треугольника DBC. Отсюда следует, что треугольники OBC и ONE подобны с коэффициентом подобия $\frac{OB}{ON}=2$. Поэтому

$$S_{OBC}=4S_{ONE}=8S=S_{ABOD}. \qquad (*)$$

Кроме того,

$$S_{COM}=S_{DOM} \qquad (**)$$

(поскольку M — середина CD). Складывая равенства (*) и (**), получаем утверждение задачи.

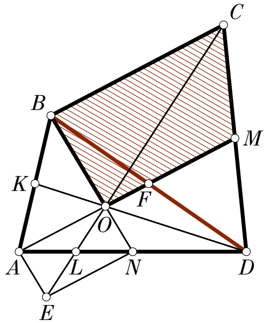


Рис. 51

18. Без ограничения общности будем считать, что $\angle A > \angle C$. Пусть E и F — точки касания вписанной окружности со сторонами AB и AC соответственно (рис. 52), $AF < AM$ в силу предположения $\angle A > \angle C$. Поскольку $OB=OM$ (по условию), а $OE=OF$ (как

---

*) Здесь мы использовали формулу $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, которую легко доказать по индукции следующим образом. Предположим, что она верна при $n=k$ и покажем, что тогда она верна и при $n=k+1$:

$$1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=(1^2+2^2+\ldots+k^2)+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=$$
$$=\frac{k+1}{6}(k(2k+1)+6(k+1))=\frac{k+1}{6}(2k^2+7k+6)=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Значит, согласно принципу математической индукции, данная формула верна для любого натурального n.

радиусы), прямоугольные треугольники OEB и OFM равны. Отсюда следует, что $EB=FM$. Далее, $AE=AF$ (как касательные),

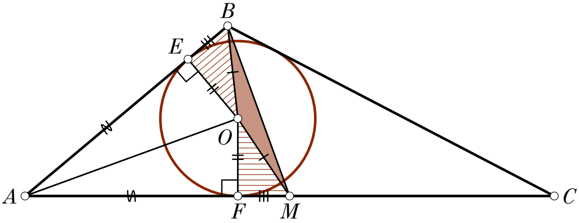


Рис. 52

поэтому $AB=AE+EB=AF+FM=AM=\dfrac{AC}{2}$. Заметим, что $\angle BOM=$ $=360^\circ-2\angle AOB=360^\circ-2\left(90^\circ+\dfrac{\angle ACB}{2}\right)=180^\circ-\angle ACB$. Поэтому наименьшему значению $\gamma=\angle BOM$ соответствует наибольшее значение угла ACB. Отношение $\dfrac{AC}{AB}=2$ неизменно, так что при фиксированной длине отрезка AC точка B расположена на окружности с центром A. Поэтому значение угла ACB максимально, когда BC — касательная к этой окружности, т. е. когда $AB\perp BC$ (рис. 53). Катет AB вдвое меньше гипотенузы AC, значит, $\angle ACB=30^\circ$.

Ответ: минимальное значение γ равно 150°.

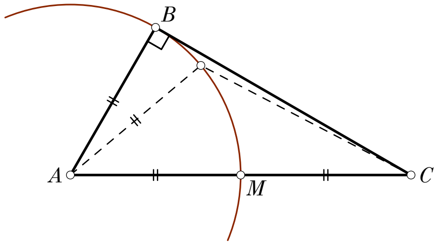


Рис. 53

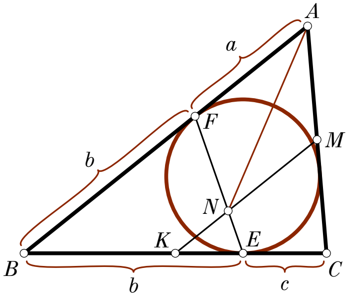


Рис. 54

19. Введём обозначения для длин отрезков касательных (рис. 54): $AF=a$, $BF=BE=b$, $CE=c$ $(b>c)$. Тогда $KE=b-\dfrac{b+c}{2}=$ $=\dfrac{b-c}{2}$. Поскольку KM — средняя линия, треугольники KNE и BFE подобны. Поэтому $KN=KE=\dfrac{b-c}{2}$, $KM=\dfrac{a+b}{2}$. Рассмотрим треугольник AMN. Этот треугольник является равнобедренным, поскольку

$$NM = KM - KN = \frac{a+b}{2} - \frac{b-c}{2} = \frac{a+c}{2} = AM.$$

Следовательно, $\angle NAM = \frac{1}{2}\angle NMC = \frac{1}{2}\angle BAC$, т. е. AN — биссектриса угла A треугольника ABC.

20. Ответ: можно.

Рассмотрим какую-нибудь большую окружность сферы («экватор») и правильный треугольник ABC, вписанный в эту окружность. Возьмём на сфере две точки D и D', симметричные относительно плоскости ABC, такие, что отрезок DD' не пересекает треугольник ABC: для этого достаточно, чтобы проекции точек D и D'

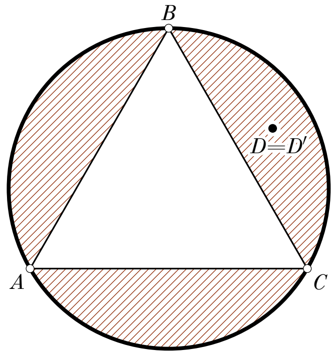


Рис. 55

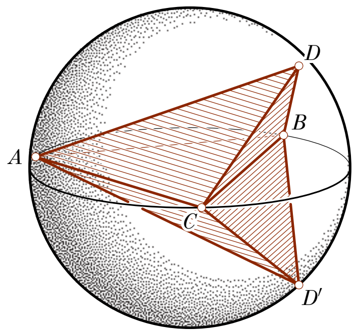


Рис. 56

на плоскость ABC «попадали» в один из сегментов, заштрихованных на рис. 55. Многогранник $ABCDD'$ (два «склеенных» тетраэдра $ABCD$ и $ABCD'$) служит искомым примером (рис. 56).

21. Пусть A, B, C и D — точки пересечения наших прямых с гиперболой $y=1/x$. Тогда координаты (x, y) этих точек удовлетворяют уравнению

$$(x+2y-19)(y+2x-98)=0,$$

которое задаёт объединение прямых. Преобразуем его, учитывая, что точки A, B, C и D лежат на гиперболе, т. е. для них $xy=1$:

$$2x^2+5+2y^2-98(x+2y)-19(y+2x)+19\cdot 98=0.$$

А это уравнение является уравнением окружности, так как его можно привести к виду $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

22. С одной стороны,

$$\angle ACK=\angle ACO=\frac{180^\circ-\angle AOC}{2}=\frac{180^\circ-2\angle B}{2}=90^\circ-\angle B$$

(рис. 57). С другой стороны, поскольку треугольник AHM равнобедренный ($AM=HM$),

$$\angle AHK=\angle HAM=90^\circ-\angle B.$$

Значит, $\angle ACK=\angle AHK$, и поэтому точки A, C, H и K лежат на одной окружности. Отсюда следует, что $\angle AKC=\angle AHC=90^\circ$.

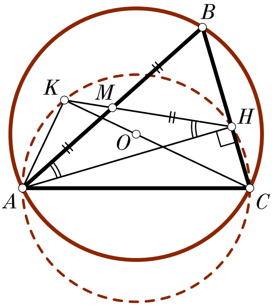


Рис. 57

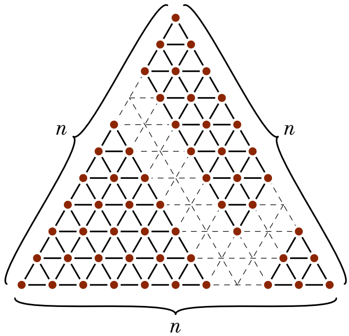


Рис. 58

23. Возьмём две наиболее удалённые друг от друга точки A и B. Тогда $\angle ACB\geqslant 60^\circ$. Если же расстояние между A и B наименьшее, то $\angle ACB\leqslant 60^\circ$. Отсюда $\alpha=60^\circ$. Примером такого множества являются вершины правильного треугольника.

Построить α-множество из сколь угодно большого числа точек можно, например, так. Разделим каждую сторону правильного треугольника на n равных частей и проведём через эти точки прямые, параллельные сторонам треугольника (рис. 58). Проверьте, что все вершины получившихся маленьких правильных треугольничков составляют α-множество из $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ точек.

24. Перепишем выражение для $f(x)$ в виде $(x+6)^2-6$. Имеем:

$$f(f(f(f(f(x)))))=(x+6)^{32}-6.$$

Значит, исходное уравнение равносильно уравнению $(x+6)^{32}=6$, откуда $x=-6\pm\sqrt[32]{6}$.

Ответ: $x=-6\pm\sqrt[32]{6}$.

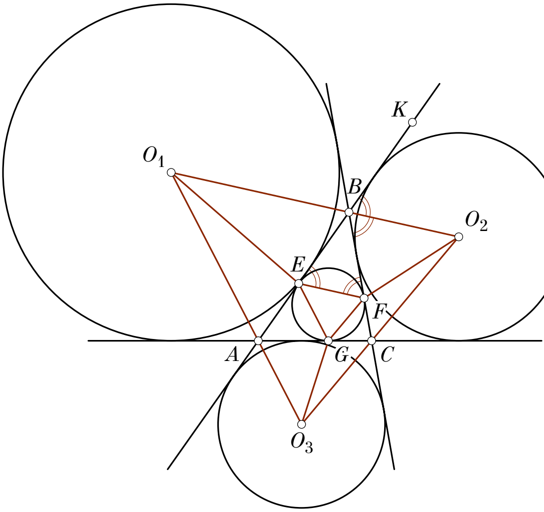


Рис. 59

25. Поскольку BO_1 и BO_2 — биссектрисы вертикальных углов, точки B, O_1 и O_2 лежат на одной прямой (рис. 59). При этом $\angle EFB = \frac{1}{2}\angle FBK = \angle FBO_2$, т. е. прямые O_1O_2 и EF параллельны. Аналогично доказывается, что $FG \| O_2O_3$, $EG \| O_1O_3$. Итак, стороны треугольников EFG и $O_1O_2O_3$ попарно параллельны. Поэтому прямые O_1E, O_2F и O_3G пересекаются в центре гомотетии, переводящей один треугольник в другой (рис. 60).

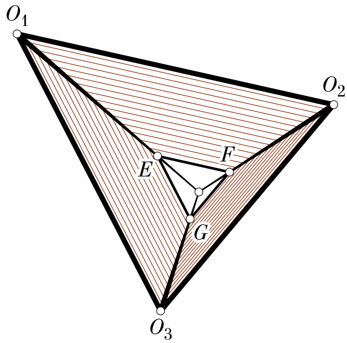


Рис. 60

26. Рассмотрим три диагонали граней куба, выходящие из одной вершины. Хотя бы одна из них непараллельна заданной плоскости. Пусть это диагональ AC, O — её середина (рис. 61). Тогда заданная плоскость должна пересекать AC, причём она должна проходить через середину одного из отрезков AO или CO. В противном случае все расстояния от A, O и C до этой плоскости различны. (Поскольку минимальное расстояние равно 1, плоскость не может проходить ни через одну из этих точек.) И вообще, любую диагональ любой грани заданная плоскость либо пересекает указанным образом, либо параллельна ей. Теперь нетрудно прийти к выводу, что возможны только два случая:

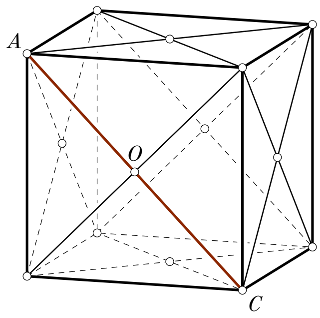


Рис. 61

1) заданная плоскость параллельна двум граням куба и делит перпендикулярные ей рёбра куба в отношении 1:3 (рис. 62, *а*);

2) заданная плоскость пересекает куб по правильному шестиугольнику, вершинами которого являются середины соответствующих рёбер куба (рис. 62, *б*).

В первом случае ребро куба равно 4, во втором — $2\sqrt{3}$.

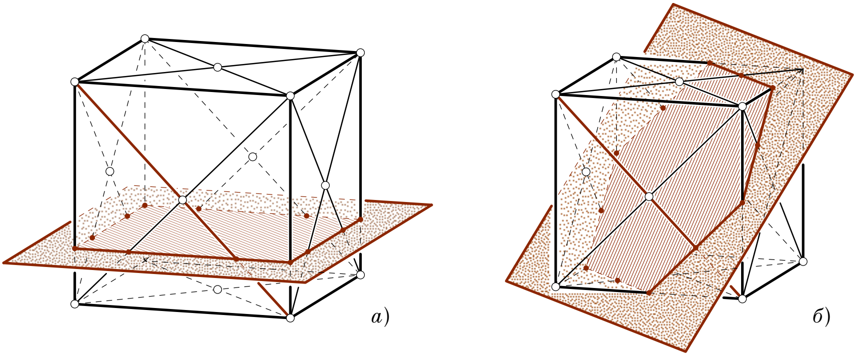


Рис. 62

27. Эту задачу можно решить путём несложных вычислений. Мы же приведём изящное геометрическое решение.

Пусть окружность ω с центром в точке O касается прямой l. Тогда множество центров окружностей, касающихся ω и l образует параболу с фокусом O (по геометрическому определению параболы), рис. 63.

Рассмотрим теперь две параболы с фокусами O_1 и O_2, касающиеся прямой l (пусть ω_1 и ω_2 — ассоциированные с ними окружности). Так как точка O_2 лежит на первой параболе, окружности ω_1 и ω_2 касаются друг друга, а это и означает, что точка O_1 лежит на второй параболе (рис. 64).

28. Запишем в клетки прямоугольника 5×7 числа 1 и -2 так, как показано на рис. 65. Предположим, что для некоторого натурального числа k существует покрытие прямоугольника уголками в k слоёв. Теперь заметим, что для каждого уголка сумма чисел в клетках, которые он покрывает, неотрицательна, поэтому и общая сумма для всех уголков тоже неотрицательна. С другой стороны, эта общая сумма в k раз больше суммы чисел на рис. 65, т. е. она равна

$$(23\cdot 1+12\cdot(-2))\cdot k=-k<0.$$

Противоречие. Следовательно, такого покрытия не существует.

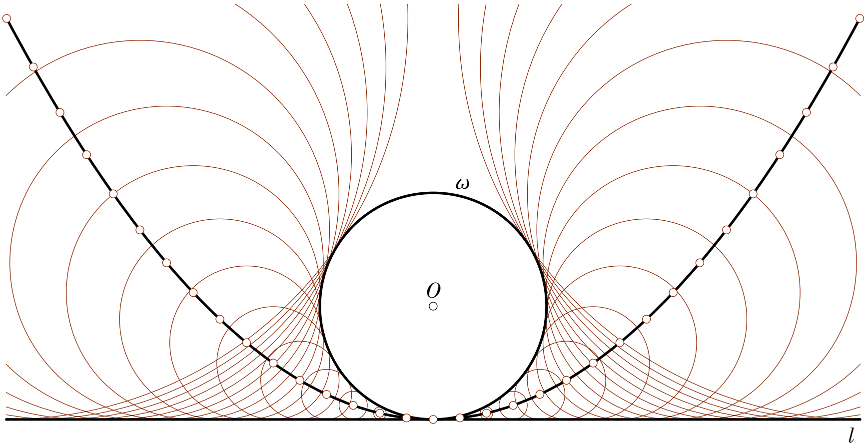


Рис. 63

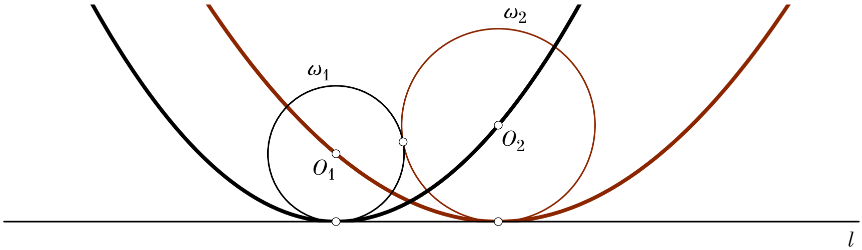


Рис. 64

З а м е ч а н и е. Интересно, что клетчатые прямоугольники «почти всех размеров» можно покрыть описанным в задаче образом, так как большинство из них можно составить из фигур 2×2 (покрываются уголками в два слоя), 2×3 (покрываются уголками в один слой) и уголков. Исключение составляют прямоугольники вида $1\times n$, $3\times(2n+1)$, а также прямоугольники 5×5 и 5×7.

Например, на рис. 66 показано разбиение клетчатого квадрата 7×7 на фигуры указанного типа. Невозможность покрыть прямоугольники $3\times(2n+1)$ уголками в некоторое число слоёв доказывается так же, как и для прямоугольника 5×7.

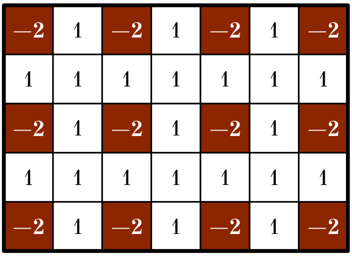


Рис. 65

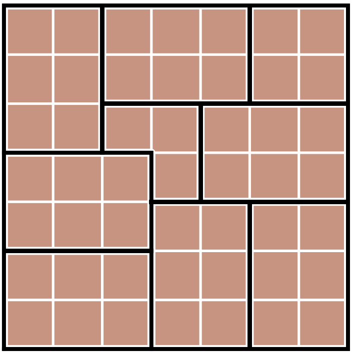


Рис. 66

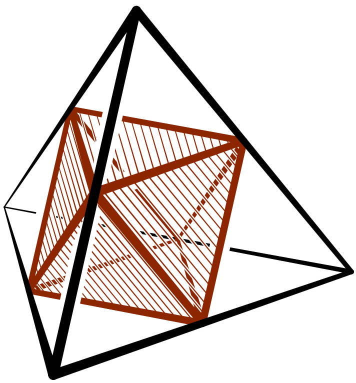


Рис. 67

29. Довольно просто построить искомый октаэдр. Соединим середины рёбер тетраэдра. Получится в п и с а н н ы й правильный октаэдр, длина его ребра равна 1/2. Только расположен он не совсем «привычно» — он лежит на боковой грани (рис. 67).

Сложнее доказать, что нельзя поместить больший октаэдр. Приведём наиболее эффектное доказательство. Заметим, что вписанная сфера тетраэдра является одновременно и вписанной сферой построенного нами октаэдра (радиус этой сферы равен $h/4$, расстояние между противоположными гранями октаэдра равно $h/2$, где h — высота тетраэдра). Но если предположить, что можно поместить в тетраэдр больший октаэдр, то получается, что можно поместить в него и сферу, бóльшую вписанной! Противоречие.

О т в е т: 1/2.

З а м е ч а н и е. Более интересный и неожиданный результат получается при рассмотрении наибольшего октаэдра, помещённого в данный куб (см. задачу 40).

30. Очевидно, что из правильного многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ после продолжения сторон получится правильный многоугольник $B_1B_2\ldots B_n$. Поскольку все правильные n-угольники подобны, то любой из них можно получить такой процедурой из некоторого правильного n-угольника. Осталось доказать, что по многоугольнику $B_1B_2\ldots B_n$ многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ определяется однозначно.

Пусть многоугольник $B_1B_2\ldots B_n$ получен указанным способом из многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$, и при этом точка A_2 — середина отрезка A_1B_1, точка A_3 — середина отрезка A_2B_2, ..., точка A_1 — середина отрезка A_nB_n.

Докажем, что ни из какого другого многоугольника, кроме $A_1A_2\ldots A_n$, многоугольник $B_1B_2\ldots B_n$ не мог получиться описанным в задаче способом. Поместим в точки B_1, B_2, ..., B_n грузики массами 1, 2, ..., 2^{n-1} и покажем, что точка A_1 — центр масс этой системы. Для этого поместим в точку A_1 грузик массы 1. Теперь центр масс точек A_1 и B_1 находится в точке A_2. Поэтому можно убрать грузики из точек A_1 и B_1, поместив грузик массы 2 в точку A_2. Аналогично, заметим, что центр масс точек A_2 и B_2 находится в точке A_3, и уберём грузики из точек A_2 и B_2, поместив грузик массы 4 в центр масс — точку A_3. В конце концов центр масс оказывается в точке A_1. Значит, и центр масс исходной системы находится там же. Поскольку центр масс определяется по системе масс однозначно, точка A_1 определена однозначно. Следовательно, и весь многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ однозначно определён многоугольником $B_1B_2\ldots B_n$.

Единственность можно доказать и по-другому. При гомотетии с центром B_1 и коэффициентом $1/2$ точка A_1 переходит в A_2. При гомотетии с центром B_2 и коэффициентом $1/2$ точка A_2 переходит в A_3, и т. д. При гомотетии с центром B_n и коэффициентом $1/2$ точка A_n перейдёт в A_1. Значит, точка A_1 переходит в себя при композиции гомотетий. Как известно, композиция n гомотетий с коэффициентом $1/2$ является гомотетией с коэффициентом $1/2^n$ и центром, однозначно определяемым центрами этих гомотетий. Значит, точка A_1 определена однозначно.

31. Поскольку $f_2(x)-f_3(x)=2x-1$, и поскольку мы можем прибавить 1 и умножить полученное выражение $2x$ на $1/2$, можно получить функцию x. Вычитая её из $f_1(x)$, как раз получим

$$\frac{1}{x}=f_1(x)-\frac{1}{2}(f_2(x)-f_3(x)+1).$$

Поскольку операция деления не дозволена, выразить $1/x$ только через функции f_2 и f_3 невозможно: никак нельзя получить x в знаменателе.

Интереснее доказательство того, что нельзя обойтись без функции f_2: вычислим производные функций f_1 и f_3

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)'=1-\frac{1}{x^2},\qquad ((x-1)^2)'=(x^2-2x+1)'=2x-2$$

в точке $x=1$. Обе оказываются равны нулю. То же справедливо и для любой их разрешённой комбинации. А производная функции $1/x$ в точке $x=1$ отлична от нуля.

Необходимость функции f_3 следует из того, что если подставить $x=i=\sqrt{-1}$ в функции f_1 и f_2, получаются вещественные числа: $f_1(i)=i+\frac{1}{i}=i-i=0$, $f_2(i)=i^2=-1$. А только через вещественные числа выразить мнимое число $\frac{1}{i}=-i$ нельзя.

32. Пусть команда «Зубило» заняла k-е место, набрав m очков. Заметим, что

$$m\leqslant 3(k-1). \qquad (*)$$

Ведь эта команда могла получить очки лишь играя с командами, занявшими места с 1-го по $(k-1)$-е. Оценим теперь общее число очков q, набранное командами, занявшими места с $(k+1)$-го по 16-е. С одной стороны,

$$q\leqslant(m-1)+(m-2)+\ldots+(m-(16-k))=$$
$$=m(16-k)-\frac{1}{2}(16-k)(17-k).$$

С другой стороны, $q\geqslant 3(16-k)+(16-k)(15-k)$, ведь все эти команды выиграли у команды, занявшей k-е место, и в каждом матче друг с другом $\left(\text{а таких матчей } \frac{1}{2}(16-k)(15-k)\right)$ набрали в сумме не менее 2 очков. Итак,

$$3(16-k)+(16-k)(15-k)\leqslant q\leqslant m(16-k)-\frac{1}{2}(16-k)(17-k).$$

Отсюда получаем

$$m\geqslant\frac{1}{2}(53-3k). \qquad (**)$$

Объединяя неравенства (*) и (**), получим

$$\frac{1}{2}(53-3k)\leqslant m\leqslant 3(k-1),$$

откуда $9k\geqslant 59$, $k\geqslant 7$. Таким образом, команда «Зубило» не могла занять места выше седьмого. Пример, показывающий, что седьмое место эта команда могла занять, показан на рис. 68.

33. а) Заметим, что точки A, B, C, и D лежат на полуокружностях, построенных на сторонах квадрата как на диаметрах. Пусть ω — окружность, которая касается внутренним образом построенных дуг в точках M, N, P и Q (эти четыре точки являются серединами полуокружностей). Полученный четырёхугольник $MNPQ$ является квадратом площади 2, вписанным в окружность ω (рис. 69). Продолжим стороны AB и CD четырёхугольника $ABCD$ до пересечения

Место		Очки																
1	. . . . . .	42	•	3	3	3	3	3	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2	. . . . . .	39	0	•	3	3	3	3	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	. . . . . .	36	0	0	•	3	3	3	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	. . . . . .	33	0	0	0	•	3	3	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3
5	. . . . . .	30	0	0	0	0	•	3	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3
6	. . . . . .	23	0	0	0	0	0	•	0	3	1	3	1	3	3	3	3	3
7	«Зубило»	18	3	3	3	3	3	3	•	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	. . . . . .	17	0	0	0	0	0	0	3	•	1	1	1	1	1	3	3	3
9	. . . . . .	16	0	0	0	0	0	1	3	1	•	1	1	1	1	1	3	3
10	. . . . . .	15	0	0	0	0	0	0	3	1	1	•	1	1	1	1	3	3
11	. . . . . .	14	0	0	0	0	0	1	3	1	1	1	•	1	1	1	1	3
12	. . . . . .	13	0	0	0	0	0	0	3	1	1	1	1	•	1	1	1	3
13	. . . . . .	11	0	0	0	0	0	0	3	1	1	1	1	1	•	1	1	1
14	. . . . . .	10	0	0	0	0	0	0	3	0	1	1	1	1	1	•	1	1
15	. . . . . .	8	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	1	1	1	1	•	1
16	. . . . . .	6	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	1	1	1	•

Рис. 68

с ω в точках A', B', C' и D' (см. рис. 69). Имеем:

$$S_{ABCD} \leqslant S_{A'B'C'D'} \leqslant S_{MNPQ} = 2.$$

Последнее неравенство выполняется, поскольку среди всех четырёхугольников, вписанных в окружность ω, наибольшую площадь имеет квадрат $MNPQ$.

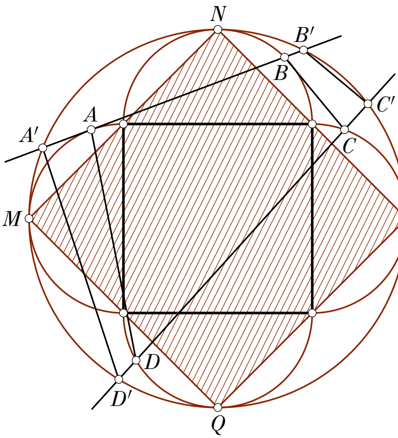


Рис. 69

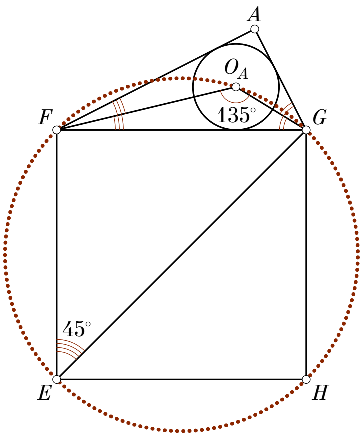


Рис. 70

б) Обозначим вершины исходного квадрата через E, F, G, H (рис. 70). Поскольку FO_A и GO_A — биссектрисы соответствующих углов, то $\angle FO_AG=135^\circ$. Следовательно, $\angle FO_AG+\angle FEG=135^\circ+45^\circ=$ $=180^\circ$, т. е. точка O_A лежит на окружности, описанной около квадрата $EFGH$. Аналогично доказывается, что и точки O_B, O_C и O_D лежат на этой окружности. Но из всех четырёхугольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет квадрат. Поэтому

$$S_{O_AO_BO_CO_D}\leqslant S_{EFGH}=1.$$

34. Рассмотрим приведённый многочлен четвёртой степени $P(u)=u^4+\ldots$, корнями которого являются числа x, y, z, t. По теореме Виета, коэффициент при u^3 равен нулю, так как $x+y+z+t=0$, т. е. $P(u)=u^4+au^2+bu+c$. Подставляя вместо u последовательно x, y, z, t и складывая полученные равенства, имеем:

$$x^4+y^4+z^4+t^4+a(x^2+y^2+z^2+t^2)+b(x+y+z+t)+4c=0.$$

Откуда, учитывая, что

$$a=xy+yz+zt+tx+xz+yt=$$
$$=\frac{1}{2}(x+y+z+t)^2-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2+t^2)=-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2+t^2),$$

$$c=xyzt,$$

получаем:

$$x^4+y^4+z^4+t^4+4xyzt=2\left(\frac{x^2+y^2+z^2+t^2}{2}\right)^2.$$

35. а) Ответ: 12 дней. Если футболист последовательно выберет каждый из 12-ти чёрных пятиугольников и поменяет цвет соседей, то каждый шестиугольник поменяет цвет трижды, и в итоге через 12 дней мяч станет полностью чёрным.

Докажем теперь, что 12 — минимальное количество дней. Если это не так, то футболист не перекрашивал соседей одного из чёрных пятиугольников, обозначим этот пятиугольник через A. Положим мяч на плоскость α так, чтобы пятиугольник A оказался снизу. Выберем точку O чуть выше мяча и спроецируем из неё поверхность мяча на плоскость α*) (рис. 71). Заметим, что при выборе любой из клеток, кроме A, чётность числа чёрных клеток среди отмеченных буквой B на рис. 72 не меняется. Значит, не выбирая A, футболист

*) Такая проекция является аналогом стереографической проекции, при которой сфера проецируется на плоскость. Для этого точка O должна лежать на сфере и быть диаметрально противоположной точке касания сферы и плоскости α.

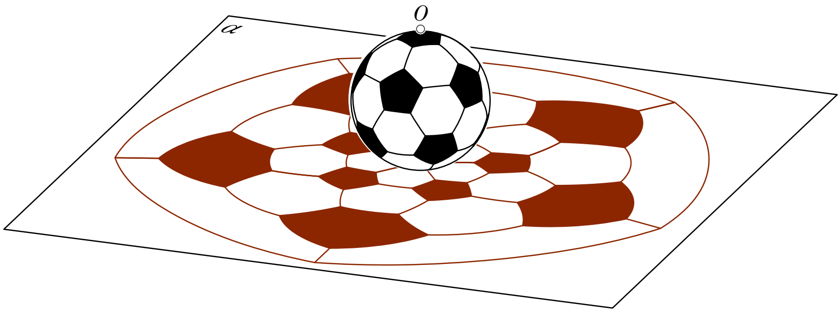


Рис. 71

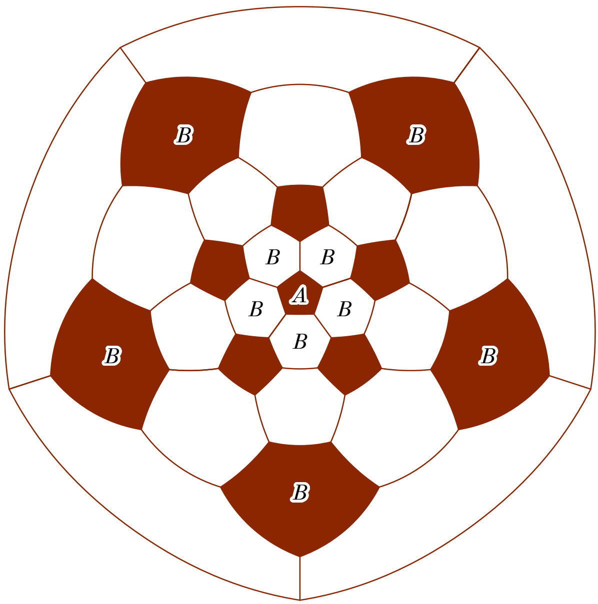


Рис. 72

не может добиться даже того, чтобы все клетки B стали чёрными. Противоречие.

б) Ответ: да, может. Для этого достаточно сначала сделать мяч полностью чёрным (см. п. а)). Затем последовательно выбрать каждый шестиугольник; при этом каждый пятиугольник поменяет цвет пять раз, а каждый шестиугольник — три раза. В итоге мяч станет полностью белым. Для этого потребуется 32 дня.

36. Обозначим через Q производную P' многочлена P, тогда по правилу дифференцирования сложной функции $(P(P(x)))' = P'(x)\,P'(P(x)) = Q(x)\,Q(P(x)) = nx^{n-1}$. Значит, $Q(x)$ — одночлен, т. е. $Q(x) = a_k x^k$; $Q(P(x))$ — также одночлен. При $k > 0$ это означает, что $P(x)$ — одночлен и равенство $P(P(x)) = x^n - 1$ невозможно. Противоречие. Значит, $k = 0$, $Q(x) = a$ и $P(x) = ax + b$, $n = 1$. Определим теперь значения a и b:

$$P(P(x)) = a(ax+b) + b = a^2x + (ab+b) = x - 1,$$

откуда $a = 1$, $b = -\frac{1}{2}$, $P(x) = x - \frac{1}{2}$.

37. Рассмотрим центральную проекцию поверхности многогранника на вписанную сферу (с центром проекции в центре сферы), рис. 73. Заметим, что, поскольку многогранник выпуклый, проек-

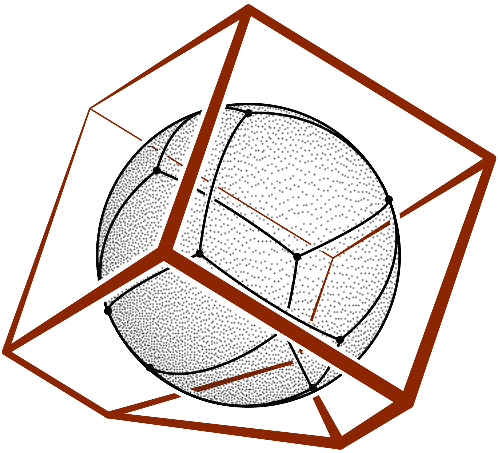


Рис. 73

ции разных граней не имеют общих внутренних точек. Кроме того, площадь проекции «большой» грани больше площади сферической «шапочки», выделенной на рис. 74. Воспользуемся тем фактом, что площадь сферического слоя между двумя параллельными плоскостями зависит лишь от ширины слоя и не зависит от положения

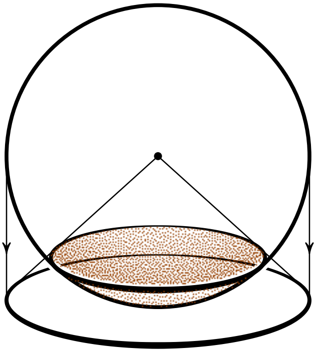


Рис. 74

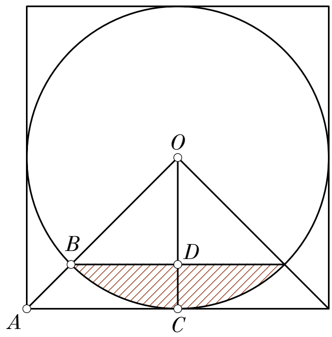


Рис. 75

плоскостей, поэтому площадь «шапочки», как следует из рис. 75, составляет

$$\frac{CD}{2OC}=\frac{AB}{2AO}=\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}>\frac{1}{7} \text{ площади сферы.}$$

Значит, «больших» граней не может быть больше шести, иначе их центральные проекции пересекались бы по внутренним точкам.

38. Докажем, что поставить шкаф не удастся. Предположим, что это возможно за время T. Рассмотрим отображение, которое в каждый момент времени $0\leqslant t\leqslant T$ ставит в соответствие точке O (центру шкафа) точку $F(t)$ на его поверхности такую, что отрезок $OF(t)$ перпендикулярен плоскости пола (точка $F(t)$ расположена ближе к полу, чем O). Другими словами, мы «поместили» в точку O «краник» с чернилами и открыли его. При всевозможных перемещениях шкафа на его поверхности будет вырисовываться непрерывная кривая γ (рис. 76).

$F(0)=A$ — центр боковой грани шкафа, $F(T)=B$ — центр основания шкафа. Контур основания делит поверхность шкафа на две области так, что A лежит в одной области, B — в другой. Отсюда следует, что кривая γ пересекает контур основания в некоторой точке C (луч OC перпендикулярен плоскости пола). Однако для любой точки C на контуре основания

$$OC\geqslant\frac{1}{2}\sqrt{2^2+0{,}7^2}>\frac{1}{2}\cdot 2{,}1 \text{ м},$$

и в этот момент шкаф не помещается в комнате. Противоречие.

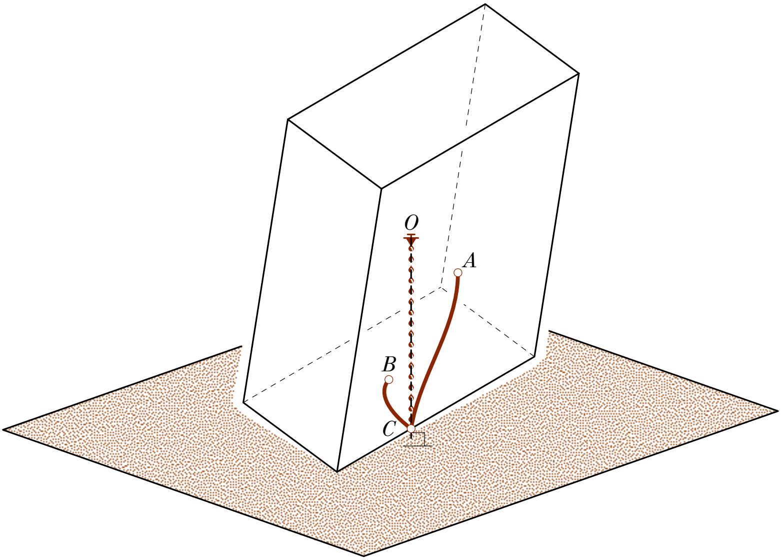


Рис. 76

З а м е ч а н и е 1. Это объясняет разумность привычного способа: поставить шкаф на наибольшее ребро основания и поднимать.

З а м е ч а н и е 2. Здесь мы воспользовались т е о р е м о й Ж о р д а н а, утверждение которой кажется очевидным, но доказать её нелегко. Формулировка этой теоремы выглядит так. Если на «хорошей»*) поверхности нарисовать непрерывную замкнутую кривую γ, то она разделит поверхность на две области: любая непрерывная кривая с концами в разных областях пересекается с γ.

В данном случае можно обойтись и без теоремы Жордана, сведя задачу к использованию теоремы о промежуточном значении функции f одного аргумента. Для этого отобразим параллелепипед на описанный цилиндр непрерывным отображением φ и возьмём в качестве функции f угол между лучом $O\varphi(F(t))$ и вертикалью.

39. Пусть у многогранника всего x шестиугольных граней. Заметим, что в одной вершине не может сходиться более двух шестиугольных граней, поскольку сумма плоских углов при вершине должна быть меньше 360°. Поэтому число треугольных граней y удовлетворяет неравенству $y \geqslant \frac{3x}{3} = x$, причём равенство достигается лишь если каждая треугольная грань граничит ровно с тремя

*) Не будем уточнять, что значит «х о р о ш а я» поверхность, чтобы не усложнять формулировку теоремы. «Хорошими», например, являются плоскость, сфера, поверхность параллелепипеда (т. е. шкафа).

шестиугольными, а каждая шестиугольная — с тремя треугольными и тремя шестиугольными. Значит, число вершин многогранника равно $B=\frac{3x+6x}{3}=3x$ (в каждой вершине сходятся три ребра), число граней равно $\Gamma=2x$, число рёбер — $P=\frac{6x+3x}{2}=\frac{9}{2}x$. Подставляя эти выражения в формулу Эйлера $B+\Gamma-P=2$ (доказательство которого приведено ниже), получаем:

$$3x+2x-\frac{9}{2}x=\frac{1}{2}x=2.$$

Значит, $x=4$, т. е. у многогранника всего четыре треугольные и четыре шестиугольные грани. Теперь конструкция однозначно восстанавливается. Искомый многогранник — это правильный тетраэдр с ребром a, у каждой из вершин которого отсечён правильный тетраэдр с ребром $\frac{a}{3}$ (рис. 77).

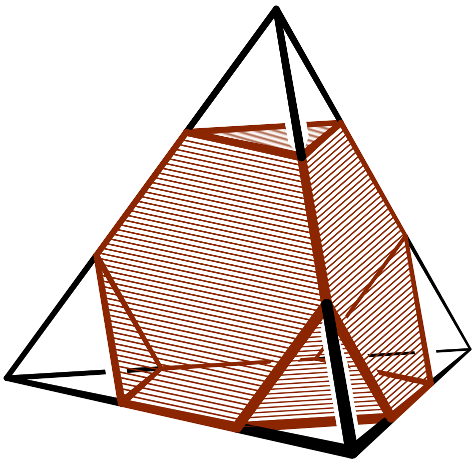


Рис. 77

Докажем, что верна теорема Эйлера для многогранников: для выпуклого многогранника, у которого B вершин, P рёбер и Γ граней, справедливо равенство

$$B+\Gamma-P=2. \qquad (*)$$

Чтобы доказать её, необходимо выбрать какую-нибудь грань a, точку O вблизи этой грани и рассмотреть центральную (с центром в точке O) проекцию многогранника на плоскость a', параллельную a и удалённую от неё (рис. 78, *а*). Полученная проекция является графом, вершины многогранника соответствуют вершинам графа, рёбра многогранника — рёбрам графа, а грани (кроме a) — его простым циклам (рис. 78, *б*).

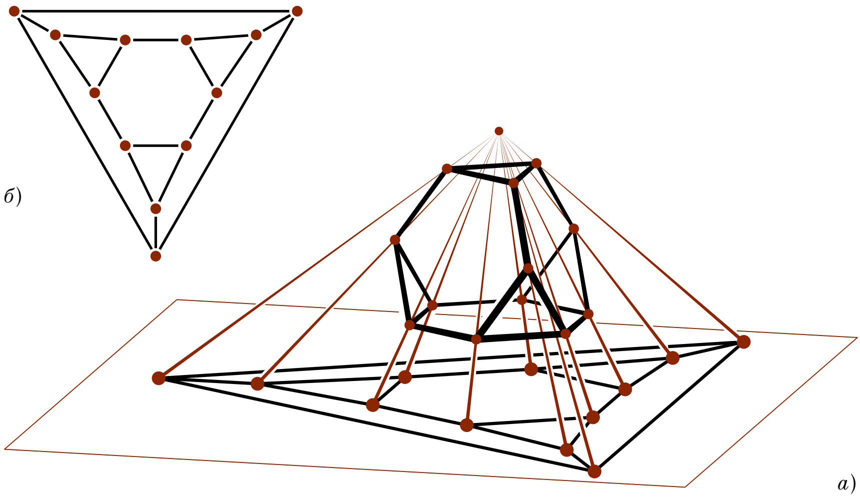


Рис. 78

Осталось воспользоваться аналогом теоремы Эйлера для многогранников — теоремой Эйлера для графов: для любого графа справедливо соотношение между числом его вершин B, рёбер P и простых циклов $Ц$:

$$B+Ц=P+1.$$

Доказательство. Докажем это утверждение методом математической индукции по числу простых циклов графа.

База индукции: $Ц=0$, т. е. граф не содержит циклов (такие графы называются *деревьями*). Для них справедливо утверждение

$$B=P+1. \qquad (**)$$

Доказательство формулы (**) проводится индукцией по числу рёбер дерева.

База: при $P=1$ имеется лишь одно единственное дерево, у него одно ребро и две вершины; соотношение $B=P+1$, очевидно, верно.

Индукционный переход от $P-1$ к P ($P>1$). Заметим, что для любого дерева найдётся «концевая» вершина (вершина, из которой выходит ровно одно ребро). Для нахождения таковой стартуем с произвольной вершины графа и смещаемся по ребру в соседнюю вершину. Если вершина, в которой мы оказались, — не концевая, то из неё выходит ещё одно ребро. Смещаемся по этому ребру и т. д. Поскольку вершин конечное число, и мы оказываемся во всё новых и новых вершинах (циклов в дереве нет по определению), этот процесс остановится. Та вершина, где мы в итоге окажемся, и будет концевой. Удалим у исходного дерева концевую вершину и выходящее из неё ребро. Получившееся дерево имеет ровно $P-1$ рёбер и $B-1$ вершин. По предположению индукции для него справедливо соотношение $B-1=(P-1)+1$. Поэтому $B=P+1$.

Итак, база индукции ($Ц=0$) доказана.

Индукционный переход от $Ц-1$ к $Ц$ ($Ц>0$). Возьмём один из простых циклов и удалим одно из рёбер этого цикла. В новом графе ровно $Ц-1$ циклов, $P-1$ рёбер и B вершин. По предположению индукции, $B+(Ц-1)=(P-1)+1$. Поэтому $B+Ц=P+1$, а значит, утверждение теоремы Эйлера справедливо для исходного графа.

Теперь, используя формулу Эйлера для графов и тот факт, что грани *a* исходного многогранника не соответствует никакой простой цикл (т. е. граней на единицу больше, чем простых циклов), получаем формулу Эйлера для многогранников (*).

40. Рассмотрим октаэдр, вписанный в куб так, как показано на рис. 79 (ось октаэдра проходит через середины B и B' противоположных рёбер куба). Сместим точку B в положение A (а точку B' —

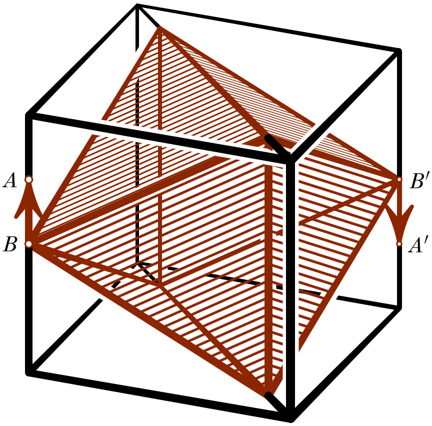


Рис. 79

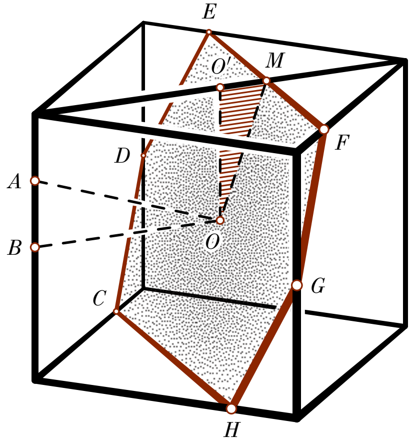


Рис. 80

в положение A') и проведём через центр куба O плоскость $\alpha \perp OA$. Сечением куба плоскостью α является шестиугольник $CDEFGH$ (рис. 80, 81). Рассмотрим такое положение точки A, при котором $CEFH$ — квадрат (обозначим длину его стороны через x). Из прямоугольного треугольника $OO'M$ (заштрихованного на рис. 80) имеем:

$$OO'^2 = OM^2 - O'M^2,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{x}{2}\right)^2,$$

откуда $x = 3\sqrt{2}/4$. При этом

$$OA = OB \cdot \frac{OM}{OO'} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4},$$

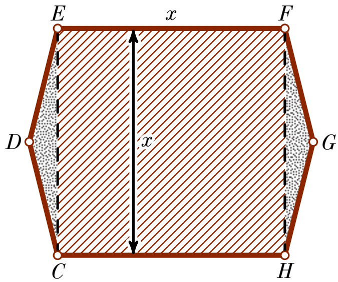


Рис. 81

т. е. $ACEFHA'$ — вписанный октаэдр (длина его ребра равна $3\sqrt{2}/4$, радиус описанной сферы — $3/4$).

Докажем, что построенный октаэдр является наибольшим. Можно считать, что центр O' октаэдра $\mathscr{M}$ совпадает с центром куба O, так как октаэдр $\mathscr{M}$, смещённый на вектор $\overrightarrow{O'O}$, принадлежит выпуклой оболочке октаэдров $\mathscr{M}$ и $\mathscr{M}'$ (центрально-симметричного $\mathscr{M}$ относительно O), т. е. принадлежит кубу. Пусть

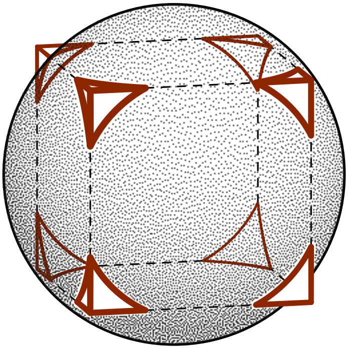


Рис. 82

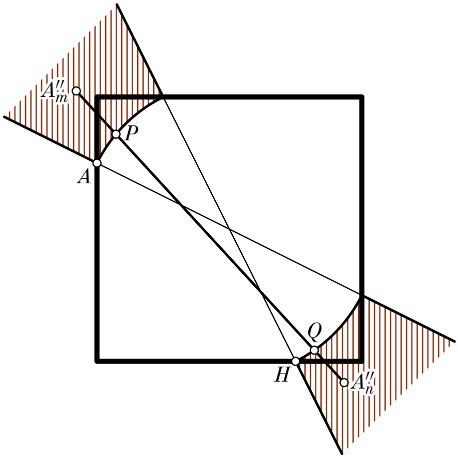


Рис. 83

A_1, ..., A_6 — вершины $\mathscr{M}$. Продолжим OA_i ($i=1$, ..., 6) до пересечения с гранями куба. Получим точки A'_1, ..., A'_6. Предположим, что $OA_i>3/4$ ($i=1$, ..., 6). Тогда точки A'_i принадлежат «шапочкам», ограниченным гранями куба и сферой с центром O радиуса 3/4 (рис. 82). Причём если точка A'_k находится внутри некоторой «шапочки», то некоторая другая точка A'_l находится внутри центрально-симметричной «шапочки». Поэтому можно выбрать две «шапочки», прилегающие к двум противоположным вершинам одной грани куба, содержащие точки A'_m и A'_n. Спроецируем точки A'_m и A'_n на плоскость этой грани из точки O, получим точки A''_m и A''_n, принадлежащие области, заштрихованной на рис. 83. Тогда

$$90^\circ=\angle A_mOA_n=\angle A''_mOA''_n>\angle POQ\geqslant\angle AOH$$

(так как $OP=OQ=OA=OH$ и $AH\leqslant PQ$). Но $\angle AOH=90^\circ$, так как A и H — вершины построенного нами октаэдра. Противоречие.

Ответ: $\frac{3}{4}\sqrt{2}$.

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПУТЕВОДИТЕЛЬ

Метод математической индукции

Часто при доказательстве различных утверждений помогает метод математической индукции, который заключается в следующем. Пусть имеется бесконечная последовательность утверждений P_1, $P_2, \ldots, P_n, \ldots$, занумерованных натуральными числами, причём 1) утверждение P_1 истинно (база индукции); 2) если некоторое утверждение P_k истинно, то следующее за ним утверждение P_{k+1} тоже истинно. Тогда все утверждения последовательности истинны.

Например, если в очереди первой стоит женщина и известно, что за каждой женщиной стоит женщина, то все в очереди — женщины.

Задачка: **22.**
Задачи: **14, 15.**

Алгебра

Данный раздел содержит задачи на уравнения, неравенства, различные свойства функций. Большинство используемых фактов входит в школьную программу. Из менее традиционных тем упомянем обобщённую теорему Виета (используется в задаче 34). Пусть уравнение $a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0=0$ имеет n действительных корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда сумма корней, сумма их попарных произведений, $\ldots$, произведение корней равны, соответственно, $-\frac{a_{n-1}}{a_n}$, $\frac{a_{n-2}}{a_n}, \ldots, (-1)^n\frac{a_0}{a_n}$. Для доказательства достаточно воспользоваться представлением

$$a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0=a_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

и, раскрыв скобки в последнем выражении, приравнять соответствующие коэффициенты.

Задачки: **6, 26, 39.**
Задачи: **6, 8, 10, 12, 15, 16, 21, 24, 27, 31, 32, 34, 36.**

Графы

Условия многих задач можно интерпретировать, рассмотрев конечное множество точек на плоскости, некоторые из которых соединены отрезками (*граф*). При этом точки называют *вершинами*, а отрезки — *рёбрами* графа.

Дадим несколько определений.

Граф называется *связным*, если любые его две вершины можно соединить «цепочкой» рёбер так, что соседние рёбра цепочки имеют общую вершину.

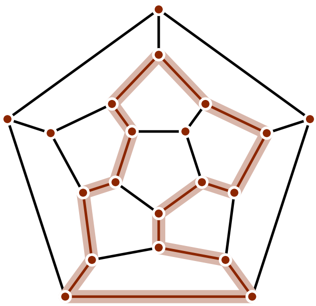


Рис. 84

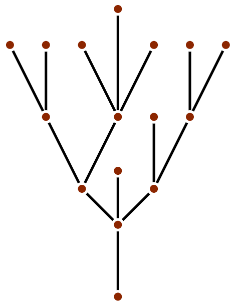


Рис. 85

Циклом графа называется замкнутая «цепочка», состоящая из его рёбер (рис. 84). Граф без циклов называют *деревом* (не правда ли, рис. 85 напоминает дерево?). Можно доказать, что число вершин любого дерева на единицу больше числа его рёбер.

Задачки: 19, 34, 36, 37.

Планиметрия

К этой категории отнесены задачи, использующие свойства углов, вписанных в окружность, свойства площадей фигур на плоскости и т. п.

Упомянем лишь некоторые из утверждений, знакомство с которыми необходимо при решении приведённых задач.

— Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны (рис. 86).

— Вписанный угол в два раза меньше центрального, опирающегося на ту же дугу (рис. 87).

— Четырёхугольник является вписанным в окружность тогда и только тогда, когда сумма двух его противоположных углов равна 180° (рис. 88).

— Четырёхугольник является описанным около окружности тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны (рис. 89).

— Медианы треугольника делят его на шесть треугольников равной площади (рис. 90).

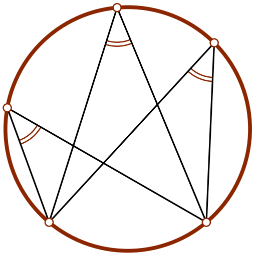


Рис. 86

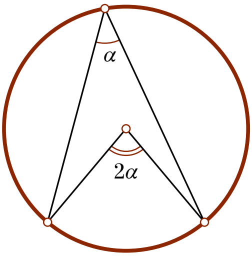


Рис. 87

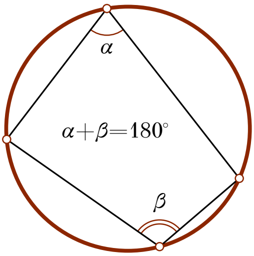


Рис. 88

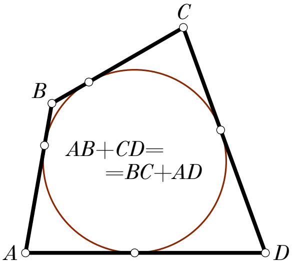


Рис. 89

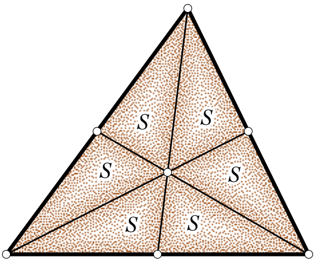


Рис. 90

— Из всех четырёхугольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет квадрат.

Задачка: **8.**
Задачи: **5, 7, 9, 13, 17, 18, 19, 22, 25, 30, 33.**

Необычные конструкции и разрезания фигур

В данных задачах обычно не требуется что-либо доказывать, а лишь привести пример. Построить его, однако, бывает весьма сложно. Несколько задач посвящены разрезанию и складыванию фигур.

Задачки: **2, 4, 5, 12, 20, 25, 27, 29, 32, 36.**
Задачи: **1, 2, 3, 4, 23.**

Стереометрия

Стереометрия изучает свойства тел и поверхностей в пространстве. Для решения задач необходимо знакомство с основными понятиями: плоскость, пространство, сфера, многогранник. В большинстве задач фигурируют правильные многогранники — выпуклые многогранники, в которых из каждой вершины выходит одно и то же число рёбер, а все грани являются равными правильными

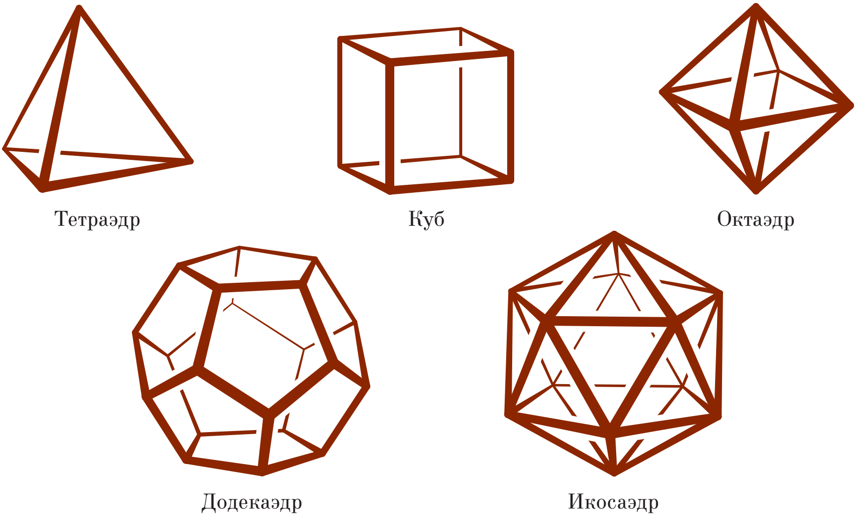


Рис. 91

многоугольниками. Всего существует пять правильных многогранников: правильный тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр (рис. 91). Доказательство этого факта использует формулу Эйлера: для выпуклых многогранников выполнено равенство $В+Г-Р=2$, где $В$, $Г$, $Р$ — количество, соответственно, вершин, граней и рёбер данного многогранника. (Краткое доказательство формулы Эйлера содержится в решении задачи 39.)

Задачи: **20, 26, 29, 37, 38, 39, 40.**

Стратегии и операции

К этой серии отнесены задачи, в которых требуется придумать некоторую оптимальную последовательность действий. Это или правила, по которым игроку стоит реагировать на действия соперника (выигрышная стратегия), или набор операций, которые позволяют добиться нужного результата (например, определить более лёгкую фальшивую монету из девяти внешне одинаковых за два взвешивания на чашечных весах).

Задачки: 11, 13, 14, 15, 17, 31, 33, 35, 38, 39, 40.
Задача: 11.

Инварианты и полуинварианты

В противоположность предыдущему пункту, иногда требуется доказать, что с помощью определённых операций нельзя добиться желаемого результата. При этом часто помогает рассмотрение некой вспомогательной величины, которая соответствует каждому состоянию. Если данная величина не изменяется в результате производимых операций, она называется *инвариантом*. Если же изменяется монотонно (не возрастает или не убывает), то её называют *полуинвариантом*.

Рассмотрим пример. Пусть на доске написано число 500. За один ход можно или увеличить его на 15, или уменьшить на 3. Можно ли таким образом получить 1000?

Ответ: нельзя, поскольку остаток от деления на 3 числа, записанного на доске не меняется (инвариантен). Однако остаток от деления 500 на 3 равен 2, а остаток от деления 1000 на 3 равен 1.

Задачки: 16, 23.
Задачи: 16, 28, 31, 35.

Делимость чисел

Пусть a и b — натуральные числа. Говорят, что a делится на b, если существует натуральное число k такое, что $a=bk$. При этом b и k называются *делителями* числа a. Натуральное число p, не имеющее других натуральных делителей, кроме 1 и самого себя, называется *простым*.

Сформулируем основную теорему арифметики: любое натуральное число представляется в виде произведения простых сомножителей единственным образом с точностью до порядка сомножителей (т. е., например, разложения $12=2\cdot2\cdot3$ и $12=2\cdot3\cdot2$ считаются одинаковыми).

Разделить одно натуральное число a на другое b с остатком означает представить a в виде $a=bq+r$, где a и b — целые числа, причём $0\leqslant r<b$.

Часто в задачах на делимость натуральных чисел оказывается полезным использование признаков делимости на 8 и 9:

— число делится на 9, если сумма его цифр делится на 9;

— число делится на 8, если число, образованное тремя его последними цифрами, делится на 8.

Задачки: 24, 28, 30.

Михаил Александрович Евдокимов.

От задачек к задачам

Редактор *Р. О. Алексеев.*
Техн. редактор *М. Ю. Панов.*

Лицензия ИД № 01335 от 24/III 2000 года.
Подписано в печать 11/VI 2004 года.
Формат бумаги 60×88 1/16. Бумага офсетная № 1.
Печать офсетная. Физ. печ. л. 4,50. Уч.-изд. л. 4,39.
Усл. кр.-отт. 8,80. Гарнитура обыкновенная новая.
Тираж 5000 экз. Заказ 7906.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования. 119002, Москва, Г-2, Бол. Власьевский пер., 11. Тел. 241 05 00, 241 72 85.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ФГУП «Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ». 140010, г. Люберцы Московской обл.,
Октябрьский пр-т, 403. Тел. 554 21 86.