С. Г. ГИНДИКИН

РАССКАЗЫ
О ФИЗИКАХ И МАТЕМАТИКАХ

С. Г. Гиндикин

РАССКАЗЫ О ФИЗИКАХ И МАТЕМАТИКАХ

Издание четвертое, исправленное

Москва
Издательство МЦНМО
2006

ББК 22.1
Г49

С. Г. Гиндикин.

Г49 Рассказы о физиках и математиках. — 4-е изд., исправленное. М.: МЦНМО, 2006. — 464 с.

ISBN 5-94057-251-0

В книге рассказано о жизни и творчестве двенадцати замечательных математиков и физиков (от XVI до XX века), работы которых в значительной мере определили лицо современной математической науки.

Увлекательно изложенные биографии великих ученых заинтересуют самые широкие круги читателей, от старшеклассников до взрослых; интересующиеся математикой получат удовольствие и пользу от знакомства с научными достижениями героев книги.

Настоящее издание книги С. Г. Гиндикина более чем вдвое расширено по сравнению с изданием, вышедшим в серии «Библиотечка „Квант“» в 1985 году и успевшим стать библиографической редкостью.

В оформлении обложки использована гравюра Альбрехта Дюрера.

ISBN 5-94057-251-0

Подписано к печати 21.07.2006. Формат 60 × 84/16. Печать офсетная. Объем 29 печ. л. Тираж 3000. Заказ №

Издательство Московского Центра непрерывного математического образования. 119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. 241-74-83.

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленных диапозитивов в ОАО «Дом печати — ВЯТКА». 610033, г. Киров, ул. Московская, 122.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Первое издание этой книги появилось в 1981 году в библиотечке «Квант». Оно несколько раз допечатывалось огромными тиражами вплоть до 1985 года, разошлось в общей сложности в более чем полумиллионе экземпляров, было переведено на английский, французский и японский языки. Основу книги составили статьи, которые прежде публиковались в журнале «Квант». В это издание добавлены некоторые тексты, которые уже существовали в 1981 году, но не были включены из-за очень жесткого ограничения на объем. Некоторые дополнительные главы были написаны позднее. Прошло более 20 лет с тех пор, как была написана значительная часть этой книги, и сегодня я о многом написал бы иначе, однако я предпочел ограничиться лишь исправлением замеченных ошибок и неточностей.

Из добавленных сюжетов отметим историю циклоиды — кривой необычайной судьбы, казавшейся математикам XVII века одной из величайших кривых и фигурировавшей в исследованиях крупнейших математиков, но оказавшейся в конечном счете одним из историко-математических курьезов. Рассказ о XVII веке — героическом веке математического анализа — дополнен главой о Лейбнице — одной из самых удивительных фигур в истории науки.

Следующий XVIII век представлен тремя наиболее значительными математиками столетия: Эйлером, Лагранжем и Лапласом (два последних работали и в XIX веке). По стандартной логике истории науки это должен был бы быть относительно спокойный век упорядочения неотшлифованных фактов, накопленных в предыдущий революционный век дифференциального и интегрального исчислений. Однако великий гений Эйлера, которому было тесно в естественных рамках, навязываемых современной ему математикой, поломал все правила и пришел к удивительным открытиям, необычайно опередившим время. В конце века ученые оказались объектом острого исторического эксперимента: французская революция соблазнила некоторых из них возможностью принять непосредственное участие в управлении государством, и этот соблазн стоил многим из них жизни. Судьбы Лапласа и Лагранжа — два примера поведения ученых в этих условиях. XIX и XX века представлены, помимо Гаусса, рассказами о Клейне, Пуанкаре и Рамануджане. Конечно эта выборка достаточно случайна, но их истории, на наш взгляд, поучительны. Наконец, мы вынесли в дополнение две статьи об истории проективной геометрии и ее связях с одной из современных теорий математической физики — теорией твисторов Пенроуза. Математическая часть этой драматической истории предполагает более высокий уровень подготовки, чем остальная часть книги.

Я хочу еще раз напомнить читателю, что перед ним не систематически написанная книга, а сборник статей, которые первоначально предназначались для школьников и студентов, интересующихся математикой, а потому я всюду, где это возможно, старался включить детальные математические фрагменты в исторические рассказы. Со временем оказалось, что круг читателей книги значительно шире. Я не без удивления обнаружил, что в ней нашли что-то для себя и некоторые профессиональные математики и физики, а с другой стороны, были читатели, которые опускали при чтении всю математику и все же обнаруживали нечто поучительное в остатке. Хотелось бы также предостеречь от восприятия этой книги как серьезной книги по истории математики: я не работал с первоисточниками, не проверял тщательно детали, не снабдил текст, включая цитаты, ссылками. Я лишь хотел поделиться с читателем, который, как и я, любит математику и физику, картиной, которая сложилась у меня после знакомства со значительным историко-научным материалом в ассоциации с моими профессиональными математическими знаниями. Идеалом для меня было изложение истории не в серьезных исторических книгах (которые, несомненно, важны), а, скорее, в романах Дюма.

Хотя эта книга не дает систематической картины развития математики, она содержит значительный материал для размышления об удивительных путях ее развития. Я уже отмечал в первом предисловии некоторые повторяющиеся сюжеты. Добавленные главы доставляют несколько новых важных примеров (упомянем, скажем, апокалиптические мысли о скором конце математики у Лейбница и Лагранжа). Непознанные законы управляют математической модой! Как понять, почему Ферма, достаточно уважаемый его современниками, не смог никого из серьезных математиков XVII века заинтересовать своими арифметическими работами? Лишь в результате удачного совпадения его деятельность была продолжена в следующем веке Эйлером, который передал эстафету Лагранжу и Гауссу, обеспечив непрерывность развития теории чисел. Напротив, проективную геометрию — одно из величайших достижений человеческой мысли, — открытую в том же XVII веке Дезаргом и Паскалем, немедленно забыли и переоткрыли лишь в XIX веке.

Я не пытаюсь объяснять в этой книге законы развития математики: я не знаю их. Я лишь с интересом наблюдаю этот процесс, пытаясь вовлечь читателя в поиски скрывающейся в нем логики. Существует ли естественная эпоха для создания математической теории? Можно привести много аргументов в пользу этого предположения. Построение дифференциального и интегрального исчисления было начато сразу несколькими математиками XVII столетия и в конечном счете завершено независимо Ньютоном и Лейбницем; аналитическую геометрию независимо построили Декарт и Ферма. Некоторые проблемы, которые по много лет оставались нерешенными, были решены на коротком промежутке времени сразу несколькими математиками (по странному совпадению, часто тремя): неевклидову геометрию независимо открыли Гаусс, Лобачевский, Бойяи; теорию эллиптических функций независимо построили Гаусс, Абель, Якоби. С другой стороны, были великие ученые, которые сильно опередили свое время и сделали открытия, не следовавшие естественной логике развития науки. Иногда такие открытия в конечном счете воспринимались современниками (в случае Архимеда или Эйлера), а иногда забывались (как в случае Николая Орезмского, который в XIV веке пользовался координатами и рассматривал за 250 лет до Галилея равноускоренное движение; см. также выше примеры с арифметикой и проективной геометрией). Богатейшую информацию о законах математического творчества мы получаем из истории удивительной жизни Рамануджана.

Какую роль играют личности в истории математики? Например, насколько решающей в судьбе математики была непримиримая позиция Платона по вопросу о предмете математики при его неограниченном влиянии на современную ему науку? Было ли предрешено развитие геометрии как аксиоматической науки, или она могла развиваться при других обстоятельствах как наука скорее экспериментальная? Пользу или вред принесло почти экстремистское требование Платона использовать в геометрических построениях только циркуль и линейку? Как были бы открыты в противном случае неразрешимые геометрические задачи, алгебраические уравнения, неразрешимые в радикалах, трансцендентные числа?

Я принадлежу к поколению математиков, которых иногда посещает двусмысленная ностальгия по времени расцвета математики на фоне всех ужасов советской действительности (слово «несмотря» было бы неуместным в этом контексте). Математика была престижной профессией, которая привлекала многих талантливых молодых людей, стремившихся к интеллектуальной деятельности, относительно свободной от влияния господствующей марксистской идеологии. Этот феномен много обсуждался последние годы, и мы не будем здесь пытаться продолжить эту важную дискуссию. Сегодня положение математики значительно изменилось. Я имею возможность наблюдать значительное снижение приоритета математики и науки вообще в жизни США. Я не вижу трагедии в том, что большинство талантливых молодых людей предпочитают профессии ученого другие профессии, часто открывающие несравненно лучшие перспективы на финансовый успех, но меня пугает излишне утилитарный взгляд на роль математики в образовании, решительное непонимание ее уникальной роли для общего интеллектуального развития личности. Можно вспомнить, что в Академии Платона изучали геометрию не будущие ученые, но, в первую очередь, будущие цари (впрочем, в Спарте не разделяли этот пиетет перед математикой, да и римляне не включили ее в число ценностей, унаследованных у греческой цивилизации). Выпускники математических школ в бывшем Советском Союзе были успешны далеко за пределами математики. Сегодня многие молодые профессиональные математики решают оставить математику ради карьеры в бизнесе. Часто они успешны, и не благодаря каким-то конкретным математическим знаниям, но благодаря интеллектуальному тренингу, который они получили при подготовке к математической профессии.

В современной России условия жизни изменились, и математика переживает трудные времена. Математики сталкиваются с прозаическими проблемами, неведомыми их западным коллегам. Просматривая некоторые российские газеты, я подумал однажды, что, может быть, напрасно в XVIII веке математики с радостью исключили составление гороскопов из своих профессиональных обязанностей: сегодня это могло бы оказаться удачным дополнением к нашей профессии.

Скоро 50 лет как я занимаюсь математикой, и я не перестаю восхищаться этой удивительной наукой. Мне приятно ощущать, что все еще много людей, включая молодых, разделяют эту мою любовь. Им в первую очередь и адресована эта книга.

11 февраля 2001 года, Принстон, США.

Предисловие к первому изданию

Эта книга написана на основе статей, публиковавшихся в журнале «Квант» в течение ряда лет. Этим объясняется некоторый элемент случайности в выборе людей и событий, которым посвящены рассказы, собранные в книге. Однако нам кажется, что в книге идет речь о принципиальных явлениях в истории науки, достойных внимания любителей математики и физики.

Мы захватываем промежуток в четыре века и начинаем в очень важный для европейской математики XVI век, когда ей, собственно, предстояло заново родиться, через тысячу лет после заката античной математики. Наш рассказ начинается в тот момент, когда европейские математики после трех веков ученичества смогли получить результаты, которых не знали ни математики Древней Греции, ни математики Востока: была найдена формула для решения уравнений третьей степени. События следующей серии рассказов начинаются на рубеже XVI и XVII веков, когда Галилей, исследуя свободное падение, заложил фундамент и для развития новой механики, и для развития анализа бесконечно малых. Параллельное формирование этих двух теорий — одно из самых знаменательных научных явлений XVII века (от Галилея до Ньютона и Лейбница). Мы рассказываем также о замечательных астрономических открытиях Галилея, прервавших его занятия механикой, о его драматической борьбе за утверждение учения Коперника. Наш следующий герой — Гюйгенс — непосредственный продолжатель Галилея в науке. Избранный нами сюжет — это продолжавшаяся сорок лет работа Гюйгенса над созданием и совершенствованием маятниковых часов. Значительная часть достижений Гюйгенса и в области физики, и в области математики непосредственно стимулировалась этой деятельностью. XVII век представлен у нас также Паскалем — одним из самых удивительных людей в истории человечества. Паскаль начинал как геометр, и его юношеская работа знаменовала, что европейская математика уже способна состязаться с великими греческими математиками на их собственной территории — в геометрии. Со времени первых успехов европейской математики в алгебре прошло сто лет.

К концу XVIII века математика неожиданно оказалась без опорных задач, вокруг которых концентрировались бы усилия ведущих ученых. Математический анализ в некотором приближении был построен; ни алгебра, ни геометрия не выдвинули к тому времени подходящих проблем. Положение «спасла» небесная механика. Построение теории движения небесных тел на основе закона всемирного тяготения потребовало величайших усилий крупнейших математиков, начиная с Ньютона. Долгое время почти все крупные математики считали делом чести продемонстрировать свои возможности на какой-нибудь задаче небесной механики. Не был исключением и Гаусс, которому посвящена последняя часть книги. Но к этим задачам Гаусс пришел уже будучи зрелым ученым, а дебютировал он беспрецедентным образом. Он решил задачу, стоявшую 2000 лет: доказал возможность построения циркулем и линейкой правильного 17-угольника (древние умели строить правильные n-угольники при $n = 2^k$, $3 \cdot 2^k$, $5 \cdot 2^k$, $15 \cdot 2^k$ и много сил потратили на безуспешные попытки придумать построение для других n). Технически это открытие Гаусса основывалось на арифметических рассмотрениях. Работы Гаусса подводили итог полуторавековой деятельности по превращению арифметики из набора удивительных фактов о конкретных числах, накапливавшихся с глубокой древности, в науку. Этот процесс начался с работ Ферма и был продолжен Эйлером, Лагранжем, Лежандром. Поразительно, что Гаусс в юности, не имея доступа к математической литературе, самостоятельно воспроизвел большинство результатов своих великих предшественников.

Наблюдение над историей науки из сравнительно случайно выбранных точек оказывается во многом поучительным: например, бросаются в глаза многочисленные связи, выявляющие единство науки в пространстве и времени. Связи разного характера иллюстрируются рассматриваемым в книге материалом: непосредственная преемственность у Галилея и Гюйгенса; идеи Тартальи о траектории брошенного тела, доведенные Галилеем до точного результата; сослужившее пользу тому же Галилею предложение Кардано пользоваться пульсом для измерения времени; задачи Паскаля о циклоиде, оказавшиеся кстати Гюйгенсу, работавшему над изохронным маятником; теория движения спутников Юпитера, открытых Галилеем, в которую ученые нескольких поколений старались внести хоть небольшой вклад, и т. д.

Можно подметить много ситуаций в истории науки, которые часто повторяются с небольшими вариациями (по словам французского историка Токвиля, «история — это картинная галерея, в которой мало оригиналов и много копий»). Обратим внимание, например, как трансформируется оценка ученого с течением веков. Кардано не сомневался, что его главные заслуги относятся к медицине, а не к математике; похоже, что Кеплер считал своим главным достижением «открытие» мифической связи между орбитами планет и правильными многогранниками; ни одно свое открытие Галилей не ценил так, как ошибочное утверждение, что приливы и отливы доказывают истинное движение Земли (в значительной степени ради его публикации он пожертвовал своим благополучием); Гюйгенс считал своим важнейшим результатом применение циклоидального маятника в часах, который оказался полностью бесполезен на практике, да и вообще Гюйгенс мог считать себя неудачником, так как не смог решить главной своей задачи — создать морской хронометр (очень многое из того, что сегодня рассматривается как его основные заслуги, было лишь средством для построения морских часов). Самые великие люди не защищены от ошибок в прогнозах. А ведь иногда ученому приходится принимать критическое решение — прервать одни исследования в пользу других. Так, Галилей отказывается от доведения до публикации результатов своих двадцатилетних исследований по механике, вначале отвлекшись на год для астрономических наблюдений, а затем он на двадцать лет вообще, по существу, прекратил научные исследования в собственном смысле слова ради популяризации гелиоцентрической системы. Через полтора века опять-таки ради астрономии оставляет неопубликованными свои исследования по эллиптическим функциям Гаусс. Вероятно, оба они не предвидели, сколь долгим будет перерыв, и оба не видели кругом никого, кто мог бы угрожать их приоритету. Галилей все же успел (через 30 лет!) опубликовать свои работы по механике, когда приговор инквизиции закрыл для него возможности для других занятий (и лишь сообщение Кавальери о параболичности траектории брошенного тела, хотя и не посягавшее на приоритет Галилея, заставило его немного поволноваться). Гаусс опять-таки 30 лет не находил времени завершить свои результаты, и они были переоткрыты Абелем и Якоби.

Отбор материала и характер изложения диктовался тем, что книга и предшествующие ей статьи адресованы любителям математики и физики, в первую очередь, школьникам. Мы всегда отдавали приоритет точному изложению конкретных достижений ученых (работы Галилея по механике, математические и механические исследования Гюйгенса в связи с маятниковыми часами, две первые математические работы Гаусса). К сожалению, это не всегда возможно, даже если речь идет о давних работах. Нет большего удовольствия, чем следить за полетом мысли гения, как бы давно он ни жил. Дело не только в том, что любителю физики или математики это недоступно в отношении современных работ. Уметь почувствовать революционный характер старого достижения — важный элемент культуры. Высокомерие по отношению к давно жившим людям — опасная черта. Рассказывая детям о великих открытиях, мы часто не учим их этим открытиям удивляться.

Мы хотим подчеркнуть, что собранные в книге рассказы не носят характер историко-научных текстов. Это проявляется в сильной адаптации исторических реалий. Мы свободно модернизируем рассуждения ученых: пользуемся алгебраической символикой в доказательствах Кардано, вводим ускорение свободного падения в выкладки Галилея и Гюйгенса (чтобы не мучить читателя бесконечными пропорциями), работаем с натуральными логарифмами вместо неперовых при рассказе об открытии Непера, пользуемся поздними высказываниями Галилея, чтобы реконструировать логику его ранних исследований по механике. Всюду мы сознательно пренебрегали деталями, уместными в работе по истории науки, с тем чтобы выпукло изложить небольшое число основных идей.

«ВЕЛИКОЕ ИСКУССТВО»

В 1545 г. вышла книга Джероламо Кардано, название которой начиналось этими словами (по латыни «Ars magna»). В основном она была посвящена решению уравнений 3-й и 4-й степеней, однако ее значение для истории математики выходило далеко за пределы этой конкретной задачи. Уже в XX веке Феликс Клейн, оценивая книгу, писал: «Это в высшей степени ценное произведение содержит зародыш современной алгебры, выходящей за пределы античной математики».

XVI век был веком возрождения европейской математики после средневековой спячки. На тысячу лет были забыты, а частично безвозвратно утрачены, труды великих греческих геометров. Из арабских текстов европейцы узнавали не только о математике Востока, но и об античной математике. Характерно, что в распространении математики в Европе большую роль сыграли купцы, для которых поездки были средством и получения информации, и ее распространения. Особенно выделяется фигура Леонардо из Пизы (1180 – 1240), более известного как Фибоначчи (сын Боначчи). Его имя увековечено в названии замечательной числовой последовательности (числа Фибоначчи). Наука может утратить высочайший уровень очень быстро. Для его восстановления могут потребоваться века. Три века европейские математики оставались учениками, хотя у того же Фибоначчи были, безусловно, интересные наблюдения. Лишь в XVI веке в Европе появились математические результаты принципиального значения, которых не знали ни античные, ни восточные математики. Речь идет о решении уравнений 3-й и 4-й степеней.

Характерно, что достижения новой европейской математики относятся к алгебре, новой области математики, пришедшей с Востока и, по существу, делавшей только первые шаги. По крайней мере еще сто лет математикам Европы будет не по силам не только сделать в геометрии что-нибудь сопоставимое с достижениями Евклида, Архимеда, Аполлония, но даже усвоить до конца результаты великих геометров.

Легенда приписывает Пифагору фразу: «Все есть число». Но после Пифагора в греческой математике постепенно все подчинила геометрия. В геометрической форме имелись у Евклида и элементы алгебры. Например, квадрат разрезался прямыми, параллельными сторонам, на два меньших квадрата и два равных прямоугольника. Из сопоставления площадей получалась формула $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. Но, разумеется, символики не было, и формулировка с площадями оставалась окончательной. Формулировки получались очень громоздкими. Задачи на построение циркулем и линейкой по существу приводили к решению квадратных уравнений и рассмотрению выражений, содержащих квадратные корни (квадратичных иррациональностей). Например, у Евклида (на другом языке) подробно исследуются выражения вида $\sqrt{a+\sqrt{b}}$. В определенной степени греческие геометры понимали связь классических неразрешимых задач на построение (удвоение куба и трисекция угла) с кубическими уравнениями.

У арабских математиков алгебра постепенно отрывается от геометрии. Впрочем, как мы увидим ниже, решение кубического уравнения было получено геометрическим путем (алгебраический вывод формул для решения даже квадратного уравнения появился лишь в 1572 г. у Бомбелли). Алгебраические утверждения появляются у арабских математиков как рецепты для решения однотипных арифметических задач, обычно с «житейским» содержанием (например, задачи на раздел наследства). Правила формулируются на конкретных примерах, но с таким расчетом, чтобы можно было решить похожую задачу. До последнего времени так иногда формулировались правила решения арифметических задач («тройное правило» и т. д.). Формулировка правил в общем виде почти неминуемо требует развитой символики, до которой было еще далеко. Арабские математики не пошли дальше решения квадратных уравнений и некоторых специально подобранных кубических.

Проблема решения кубических уравнений волновала как арабских математиков, так и их европейских учеников. Удивительный результат в этом направлении принадлежит Леонардо Пизанскому. Он показал, что корни уравнения $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ не могут быть выражены через евклидовские иррациональности вида $\sqrt{a + \sqrt{b}}$. Поразительная для начала XIII века постановка задачи, предвещавшая проблему разрешимости в радикалах, осмысленную значительно позже. Путей же к решению общего кубического уравнения математики не видели.

Состояние математики на рубеже XV – XVI веков было подытожено в книге Луки Пачоли (1445 – 1514) «Сумма арифметики» (1494 г.), одной из первых печатных книг по математике, написанной к тому же не на латыни, а на итальянском языке. В конце книги говорится, что для решения кубических уравнений «искусством алгебры еще не дан способ, как не дан способ квадратуры круга». Сравнение звучит внушительно, а авторитет Пачоли был настолько велик, что большинство математиков (как мы увидим, среди них поначалу были и наши герои) считало, что кубические уравнения в общей ситуации решить вообще нельзя.

Сципион Дель Ферро. Нашелся человек, которого мнение Пачоли не остановило. Это был профессор математики в Болонье Сципион дель Ферро (1465 – 1526); он нашел способ решать уравнения

$$x^3 + ax = b. \tag{1}$$

Отрицательными числами тогда еще не пользовались, и, например, уравнение

$$x^3 = ax + b \tag{2}$$

воспринималось как совсем другое! Об этом решении известны лишь косвенные сведения. Дель Ферро сообщил его своему зятю и преемнику по кафедре Аннибалу делла Наве и ученику Антонио

Никколо Тарталья (единственный известный портрет).

Марио Фиоре. Последний решил после смерти учителя воспользоваться доверенной ему тайной, чтобы стать непобедимым в поединках по решению задач, которые были тогда очень распространены. 12 февраля 1535 г. его жертвой едва не стал Никколо Тарталья — один из главных героев нашего рассказа.

Никколо Тарталья. Тарталья родился около 1500 г. в Брешии в семье бедного конного почтальона Фонтане. В детстве, когда его родной город был захвачен французами, он был ранен в гортань и с тех пор говорил с трудом. Отсюда и его прозвище «Тарталья» («заика»). Он рано остался на попечении матери, которая попыталась учить его в школе. Но деньги кончились, когда в классе письма дошли до буквы «к». Тарталья покинул школу, не научившись писать свою фамилию. Он продолжает заниматься самостоятельно и становится «магистром абака» (что-то вроде учителя арифметики в частном коммерческом училище). Он много ездит по Италии, пока в 1534 г. не попадает в Венецию. Здесь его научные занятия стимулировались общением с инженерами и артиллеристами из знаменитого венецианского арсенала. Тарталью спрашивают, например, как надо наклонить орудие, чтобы оно стреляло дальше всего. Он дает ответ, который показался спрашивавшим удивительным, — под углом 45°. Ему не верят, что надо поднять ствол так высоко, но «несколько частных опытов» доказали его правоту. Хотя Тарталья говорит, что у него были «математические доводы» для этого утверждения, скорее это было эмпирическое наблюдение (а доказательство дал лишь Галилей).

Тарталья публикует две книги, служащие продолжением одна другой: «Новая наука» (1537 г.) и «Проблемы и различные изобретения» (1546 г.), где читателю обещаются «новые изобретения, не краденные ни у Платона, ни у Плотина, ни у какого иного грека и латинянина, а полученные лишь искусством, измерением и разумом». Книги написаны на итальянском языке, в форме диалога, которую позднее перенял Галилей. В ряде вопросов Тарталья был предшественником Галилея. Хотя в первой из указанных книг он повторял вслед за Аристотелем, что брошенное под углом тело вначале летит по наклонной прямой, затем по дуге окружности и, наконец, по вертикали падает вниз, во второй книге он пишет, что траектория «не имеет ни одной части, которая была бы совершенно прямой». Тарталья интересовался равновесием тел на наклонной плоскости, свободным падением тел (его ученик Бенедетти убедительно показал, что характер падения тела не должен зависеть от веса). Важную роль сыграли выполненные Тартальей переводы Архимеда и Евклида на итальянский язык (Тарталья называет его «народным» в отличие от латыни), его подробные комментарии. По своим человеческим качествам Тарталья был далеко не безупречен, очень труден во взаимоотношениях. Бомбелли (правда, человек не беспристрастный; о нем ниже) писал, что «этот человек по натуре своей был так склонен говорить только дурное, что даже хуля кого-либо считал, что дает ему лестный отзыв». По другим свидетельствам (Нуньес) «он временами бывал так возбужден, что казался умалишенным».

Вернемся к предстоящему поединку. Тарталья был опытным бойцом и надеялся одержать над Фиоре легкую победу. Он не испугался и тогда, когда обнаружил, что все 30 задач Фиоре содержат уравнения (1) при разных a и b. Тарталья думал, что Фиоре не умеет сам решать предложенные задачи, и надеялся разоблачить его: «Я думал, что ни одна из них не может быть решена, потому что брат Лука (Пачоли — С. Г.) уверяет в своем труде, что такого рода уравнения невозможно решить общей формулой». Когда уже почти истекли 50 дней, после которых надлежало сдать решения нотариусу, до Тартальи дошли слухи, что Фиоре обладает таинственным способом решения уравнения (1). Перспектива угощать парадным обедом друзей Фиоре в количестве, равном числу задач, решенных победителем (таковы были правила!), не привлекала Тарталью. Он прилагает титанические усилия, и счастье улыбается ему за восемь дней до назначенного срока (срок истекал 12 февраля 1535 г.): желанный способ найден! За два часа Тарталья решил все задачи. Противник его не решил ни одной. Странным образом он не справился с одной задачей, которую можно было решить по формуле дель Ферро (Тарталья дал задачу, имея в виду искусственный прием). Впрочем, мы увидим, что формулой воспользоваться нелегко. Через день Тарталья нашел способ решать уравнения (2).

О поединке Тарталья – Фиоре знали многие. В этой ситуации секретное оружие могло не помочь, а помешать Тарталье в дальнейших поединках. Кто согласится состязаться с ним, если исход предрешен? Все же Тарталья отвергает несколько просьб раскрыть его способ решать кубические уравнения. Но нашелся проситель, который добился своего. Это был Джероламо Кардано, второй герой нашего рассказа.

Джероламо Кардано. Он родился 24 сентября 1501 г. в Павии. Его отец — Фацио Кардано, образованный юрист с широкими интересами, упоминается у Леонардо да Винчи. Он был первым учителем сына. Окончив университет в Падуе, Джероламо решает посвятить себя медицине. Он был незаконнорожденным ребенком, и это закрыло ему доступ в коллегию врачей Милана. Кардано долго практиковал в провинции, пока в августе 1539 г. его все же не приняли в коллегию, специально изменив для этого

Джероламо Кардано

правила. Кардано был одним из самых знаменитых врачей своего времени, вероятно, вторым после Андрея Везалия, его друга. На склоне лет Кардано написал автобиографию («О моей жизни»). В ней считанные упоминания о занятиях математикой, зато подробно описываются исследования по медицине. Он утверждал, что описал приемы излечения до пяти тысяч трудноизлечимых болезней, что число разрешенных им проблем и вопросов доходит до сорока тысяч, а более мелких указаний — до двухсот тысяч. Конечно, к этим цифрам следует относиться с должной долей скептицизма. Все же слава Кардано-врача была несомненной. Он описывает случаи из своей медицинской практики, делая нажим на лечение знатных особ (шотландского архиепископа Гамильтона, кардинала Марона и т. д.), утверждая, что его постигли лишь три неудачи. По-видимому, если прибегнуть к современной терминологии, он был выдающимся диагностом, но не обращал большого внимания на анатомические сведения, как это делали Леонардо да Винчи и Везалий. В автобиографии Кардано сопоставляет себя с Гиппократом, Галеном, Авиценной (мысли последнего были ему особенно близки).

Однако занятия медициной не поглощали Кардано полностью. В свободное время он занимался всем на свете. Например, составлял гороскопы живых и мертвых (Христа, английского короля Эдуарда VI, Петрарки, Дюрера, Везалия, Лютера). Эти занятия сильно повредили Кардано в глазах потомков (по одной недоброй легенде он покончил жизнь самоубийством, чтобы подтвердить собственный гороскоп). Но следует помнить, что в те времена занятия астрологией считались вполне респектабельными (астрономия воспринималась как часть астрологии — натуральная астрология в отличие от юдициарной). Услугами Кардано-астролога пользовался папа.

В своей научной деятельности Кардано был энциклопедистом, однако энциклопедистом-одиночкой, что характерно для эпохи Возрождения. Лишь через полтора века появились первые академии, в которых ученые специализировались в более или менее узких областях. Только в таких коллективах можно было создавать подлинные энциклопедии. Энциклопедист-одиночка не в состоянии в достаточной степени проконтролировать все сообщаемые им сведения. В случае Кардано большую роль играли особенности его личности, его психического склада. Он верил в чудеса, предчувствия, демонов, в свои собственные сверхъестественные возможности. Он подробно описывает события, убедившие его в этом (при любых столкновениях в его присутствии не проливалась кровь ни у людей, ни у животных, даже на охоте; о всех событиях, кончившихся гибелью его сына, он узнавал заранее по приметам и т. д.). Кардано считал, что он обладал даром озарения (гарпократическим чувством, как он его называл), который позволял ему угадывать пораженный орган у больного, кости, которые выпадут в игре, видеть печать смерти на лице у собеседника. Большую роль в жизни Кардано играли сновидения, которые он запоминал с мельчайшими деталями и подробно описывал. По этим описаниям современные психиатры пытались определить болезнь Кардано. Кардано пишет, что постоянно повторяющиеся сновидения вместе с желанием увековечить свое имя служили основными поводами для написания книг. В энциклопедиях Кардано «О тонких материях», «О разнообразии вещей» описанию снов автора и его отца уделено много места.

Но в этих книгах содержится и много собственных наблюдений и тщательно продуманных сообщений других. Готовность обсуждать фантастические теории, своеобразная доверчивость играют не только отрицательную роль; благодаря им он обсуждает вещи, о которых его более осторожные коллеги решились говорить на много лет позже (см. ниже о комплексных числах). Не всегда удается проследить авторство. Неясно (это относится и к другим итальянским авторам XVI века), в какой мере Кардано был знаком с трудами Леонардо да Винчи (широкой публике они стали известны лишь в самом конце XVIII века). Книга «О тонких материях», переведенная во Франции, служила популярным учебником по статике и гидростатике в течение всего XVII века. Галилей пользовался указанием Кардано об использовании собственного пульса для измерения времени (в частности, при наблюдении над качанием люстры в соборе). Кардано утверждал, что невозможен вечный двигатель, некоторые его замечания можно интерпретировать как принцип возможных перемещений (так считает известный историк физики Дюэм), он рассматривал расширение водяного пара. Кардано разделял созданную еще в III веке до н. э. теорию, объяснявшую приливы и отливы действием Луны и Солнца. Он впервые четко провел различие между притяжениями магнитным и электрическим (разумеется, имеются в виду явления типа наблюдавшегося еще Фалесом притяжения соломинок натертым янтарем).

Кардано был не чужд и экспериментальным исследованиям и конструированию практических механизмов. На склоне лет он при помощи опыта установил, что отношение плотности воздуха к плотности воды равно 1/50. Когда в 1541 г. император Карл V триумфально вошел в завоеванный Милан, ректор коллегии врачей Кардано шел рядом с балдахином. В ответ на оказанную честь он предложил снабдить королевский экипаж подвеской из двух валов, качение которых не выведет карету из горизонтального положения (в империи Карла V дороги были дальние и плохие). Ныне такая система подвески называется карданом (карданный подвес, карданный вал, карданное сочленение) и применяется в автомобилях. Справедливость требует отметить, что идея такой системы восходит к античности и что, по крайней мере, в «Атлантическом кодексе» Леонардо да Винчи имеется рисунок судового компаса с карданным подвесом. Такие компасы получили распространение в первой половине XVI века, по-видимому, без влияния Кардано.

Кардано писал огромное число книг, часть из которых была напечатана, часть осталась в рукописи, а часть была уничтожена им в Риме в ожидании ареста. Только описание книг составило объемистую книгу «О собственных сочинениях». Многие годы были популярны книги Кардано по философии и этике. Книга «Об утешении» была переведена на английский язык и оказала влияние на Шекспира. Некоторые шекспироведы утверждают даже, что Гамлет произносит монолог «Быть или не быть», держа эту книгу в руках.

Можно много говорить о личности Кардано. Он был страстен, вспыльчив, много играл в азартные игры. Сорок лет играл Кардано в шахматы («я никогда не мог выразить в кратких словах, сколько ущерба, без всякого за него возмещения, причинили они моим домашним делам»), двадцать пять лет играл он в кости («но еще более шахмат повредили мне кости»). Ради игры он временами бросал все занятия, попадал в неприятные ситуации. Побочным продуктом этой страсти Кардано была «Книга об игре в кости», написанная в 1526 г., но напечатанная лишь в 1663 г. Эта книга содержит начала теории вероятностей, включая предварительную формулировку закона больших чисел, некоторые вопросы комбинаторики, наблюдения над психологией игроков.

Несколько слов о характере Кардано. Он сам пишет: «среди моих пороков исключительным и крупным является тот, который заставляет меня не говорить ни о чем с таким удовольствием, как о том, что, как я знаю, окажется неприятным моим слушателям. И я сознательно и упорно коснею в этом $\langle\ldots\rangle$ Я допустил много ошибок, на которые подбивала меня моя наклонность всюду кстати и некстати сообщать обо всем мне известном $\langle\ldots\rangle$ К этому меня побуждало не только опрометчивое легкомыслие и незнакомство с делами, но и пренебрежительное отношение к тем приличиям, которые в большинстве случаев соблюдаются между людьми благовоспитанными и которые я усвоил только впоследствии». Для друзей и учеников он умел быть и другим. Бомбелли писал, что Кардано имел «скорее божественный, чем человеческий облик».

Кардано и Тарталья. К 1539 г. Кардано заканчивает свою первую математическую книгу «Практика общей арифметики»; она была призвана заменить книгу Пачоли. Услышав о секрете Тартальи, он загорелся желанием украсить им свою книгу. По его просьбе книготорговец Жуано Антонио встретился с Тартальей в Венеции 2 января 1539 г. Он просит от имени «честного человека, врача города Милана, по имени Джероламо Кардано» передать правило решения уравнения (1) или для опубликования в книге, или под обещание держать сообщенное в секрете. Ответ был отрицательным: «Передайте его светлости, чтобы он простил меня, но если я захочу опубликовать свое открытие, то я сделаю это в моем собственном труде, а не в книге другого». Тарталья отказался передать также решения 30 задач Фиоре, передав лишь условия (впрочем, их можно было получить у нотариуса), а также решить 7 задач, посланных Кардано. Тарталья подозревает, что Кардано — подставное лицо, за которым скрывается математик Жуане да Кои, пытающийся узнать секрет. 12 февраля Кардано посылает Тарталье критические замечания по поводу книги «Новая наука» и повторяет свою просьбу. Тарталья неумолим, соглашаясь решить лишь две задачи Кардано. 13 марта Кардано приглашает Тарталью к себе, выражает заинтересованность в его артиллерийских приборах, обещает представить его маркизу дель Васто, испанскому губернатору Ломбардии. Повидимому, эта перспектива прельстила Тарталью, он принял приглашение, и решительное объяснение состоялось 25 марта в доме Кардано.

Вот отрывок из записи этой беседы (следует иметь в виду, что запись сделана Тартальей; ученик Кардано Феррари утверждает, что она не вполне соответствует действительности):

Н и к к о л о. Я говорю вам: я отказал вам не из-за одной только этой главы и сделанного в ней открытия, но из-за тех вещей, которые можно открыть, зная его, так как это ключ, отмыкающий путь для исследования бесчисленного количества других разделов. Я бы уже давно нашел общее правило для многих других проблем, если бы не был в настоящее время занят переводом Евклида на народный язык (в настоящее время я довел перевод до конца 13-й книги). Но когда эта работа, которую я уже начал, будет закончена, я собираюсь издать труд для практического применения вместе с новой алгеброй ⟨...⟩ Если я выдам ее какому-нибудь теоретику (каким является ваша светлость), то он легко может с помощью этого объяснения найти другие главы (ибо это объяснение легко приложить к другим вопросам) и опубликовать плоды моего открытия под собственным именем. Этим будут разбиты все мои планы.

Мессер Джероламо. Я клянусь вам Святым Евангелием Господа Бога и не только даю вам слово честного человека никогда не опубликовать этого вашего открытия, если вы мне его доверите, но обещаю, и да будет моя совесть истинного христианина вам порукой, зашифровать его так, что после моей смерти никто не сможет прочитать написанное. Если я, по вашему мнению, заслуживаю доверия, то сделайте это, если нет, то оставим этот разговор.

Никколо. Если бы я не поверил этой вашей клятве, то, конечно, заслужил бы того, чтобы меня самого сочли неверующим.

Итак, Тарталья дал уговорить себя. Он сообщил свое решение в форме латинского стихотворения. Не правда ли, трудно понять по приведенной записи, что заставило Тарталью изменить решение. Неужели его так потрясли клятвы Кардано? Происходящее дальше малопонятно. Сообщив тайну, взволнованный Тарталья немедленно уезжает, отказавшись от свидания с маркизом, ради которого он предпринимал путешествие. Уж не загипнотизировал ли его Кардано? Очень правдоподобно, что запись Тартальи неточна.

Тарталья несколько успокоился, когда получил 12 мая свеженапечатанную «Практику общей арифметики» без своего рецепта. В сопроводительном письме Кардано пишет: «Я проверил формулу и считаю, что она имеет общее значение».

Кардано получил от Тартальи готовый способ решения уравнения (1) без всяких намеков на доказательство. Он затратил много сил на тщательную проверку и обоснование правила. С нашей колокольни нелегко понять, в чем проблема: подставь в уравнение и проверь! Однако отсутствие развитой алгебраической символики делало то, что сегодня автоматически выполняет любой школьник, доступным лишь избранным. Не познакомившись с подлинными текстами того времени, нельзя оценить, насколько алгебраический аппарат «экономит» мышление. Читатель должен все время иметь это в виду, чтобы не заблуждаться относительно «тривиальности» проблем, вокруг которых кипели страсти в XVI веке.

Кардано затрачивает годы напряженной работы, пытаясь полностью разобраться с решением кубических уравнений. Он получил рецепты (ведь формул писать не умели!) для решения уравнений (1), (2), а также

$$x^3 + b = ax \tag{3}$$

и уравнений, содержащих x^2. Он наверняка сильно опередил Тарталью. Все это происходило на фоне упрочения положения Кардано; в 1543 г. он становится профессором в Павии. «Мои познания в астрологии, — писал Кардано, — приводили меня к заключению, что я не проживу более сорока лет и уж, во всяком случае, не достигну сорокапятилетнего возраста ⟨...⟩ Наступил тот год, который должен был стать последним в моей жизни и который, напротив, оказался ее началом, — а именно сорок четвертый год».

Луиджи Феррари. В математических занятиях Кардано с некоторых пор ему помогал Луиджи Феррари (1522 – 1565) . В составленном Кардано списке его 14 учеников Феррари фигурирует как второй в хронологическом порядке и один из трех наиболее выдающихся. Кардано, веривший приметам, пишет, что 14 ноября 1536 г., когда 14-летний Луиджи с братом прибыли в Болонью, «во дворе так долго вопреки обычаю стрекотала сорока, что мы все ждали чьего-нибудь приезда». Феррари был человеком феноменальных способностей. Он обладал таким бурным темпераментом, что даже Кардано боялся временами с ним говорить. Известно, что в семнадцать лет Феррари вернулся после одной прогулки без единого пальца на правой руке. Он был безоговорочно предан учителю, долгое время был его секретарем и поверенным. Вклад Феррари в математические работы Кардано очень велик.

В 1543 г. Кардано вместе с Феррари предпринял поездку в Болонью, где делла Наве позволил им познакомиться с бумагами покойного дель Ферро. Они убедились, что последнему уже было известно правило Тартальи. Интересно, что о формуле дель Ферро, по-видимому, почти не знали. Вряд ли Кардано так энергично атаковал бы Тарталью, знай он, что ту же информацию можно получить у делла Наве (до 1543 г. он к нему не обращался). Сейчас почти все соглашаются, что у дель Ферро была формула, что Фиоре знал ее, а Тарталья переоткрыл ее, зная, что у Фиоре она есть. Однако ни один из шагов в этой цепочке строго не доказан! Кардано говорил об этом, но Тарталья писал в конце своей жизни: «я могу заверить, что эта описанная теорема не была еще доказана ни Евклидом, ни кем-либо другим, а одним лишь Джероламо Кардано, которому мы ее показали ⟨...⟩ В 1534 г. (в другом месте написано, что 4 февраля 1535 г. — *С. Г.*) я нашел в Венеции общую формулу уравнения». Трудно свести концы с концами в этой запутанной истории.

«Великое Искусство». Знакомство ли с бумагами дель Ферро, сильное ли давление со стороны Феррари или, скорее всего, нежелание похоронить результаты многолетней работы привели к тому, что Кардано включил все известное ему о кубических уравнениях в вышедшую в 1545 г. книгу «Великое искусство или о правилах алгебры». Ее стали называть коротко «Великое искусство».

В предисловии Кардано излагает историю вопроса: «в наше время Сципион дель Ферро открыл формулу, согласно которой куб неизвестного плюс неизвестное равен числу. Это была очень красивая и замечательная работа. Так как это искусство превосходит всю человеческую ловкость и всю ясность ума смертного, то его нужно рассматривать как подарок небесного происхождения, а также как способность силы ума, и это настолько славное открытие, что от того, кто мог его достигнуть, можно ждать, что он достигнет всего. Соревнуясь с ним, Никколо Тарталья из Брешии, наш друг, будучи вызван на состязание с учеником дель Ферро по имени Антонио Марио Фиоре, решил, дабы не быть побежденным, ту же самую проблему и после долгих просьб передал ее мне. Я был введен в заблуждение словами Луки Пачоли, который говорит, что нет общего решения такого рода уравнений, и, хотя я обладал уже многими мною самим сделанными открытиями, я все же не отчаивался найти то, чего я не смел искать. Однако когда я получил эту главу и добрался до ее решения, то я увидел, что с ее помощью можно многое сделать еще; и уже с повышенной уверенностью в своих делах я, при исследовании, открыл дальнейшее, частью сам, частью с Луиджи Феррари, моим бывшим учеником».

В модернизированном виде способ, которым Кардано находит решение уравнения (1), можно изложить следующим образом. Будем искать решение уравнения (1) в виде $x = \beta - \alpha$. Тогда $x + \alpha = \beta$ и

$$x^3 + 3x^2\alpha + 3x\alpha^2 + \alpha^3 = \beta^3. \tag{4}$$

Поскольку $3x^2\alpha + 3x\alpha^2 = 3x\alpha(x+\alpha) = 3x\alpha\beta$, равенство (4) можно переписать в виде

$$x^3 + 3\alpha\beta x = \beta^3 - \alpha^3. \tag{5}$$

Попытаемся по паре (a, b) так подобрать пару (α, β), чтобы (5) совпало с (1). Для этого необходимо, чтобы пара (α, β) была решением системы

$$3\alpha\beta = a, \qquad \beta^3 - \alpha^3 = b,$$

или равносильной ей системы

$$\beta^3 \cdot (-\alpha^3) = -\frac{a^3}{27}, \qquad \beta^3 + (-\alpha^3) = b.$$

По теореме Виета[1] β^3 и $-\alpha^3$ будут корнями вспомогательного квадратного уравнения

$$y^2 - by - \frac{a^3}{27} = 0.$$

[1] Сам Виет (1540 – 1603) жил позже Кардано, но тот частный случай его теоремы, который в школе называют теоремой Виета, был, по существу, известен Кардано.

Поскольку мы ищем *положительные* корни уравнения (1), $\beta > \alpha$. Значит,

$$\beta^3 = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}, \qquad -\alpha^3 = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}.$$

Следовательно,

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} - \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}.$$

При положительных a и b корень x также положителен.

Приведенная выкладка лишь в идейном отношении следует ходу рассуждений Кардано. Сам он рассуждает на геометрическом языке: если куб со стороной $\beta = \alpha + x$ разрезать плоскостями, параллельными граням, на куб со стороной α и куб со стороной x, получатся, кроме двух кубов, три прямоугольных параллелепипеда со сторонами α, α, x и три — со сторонами α, x, x; соотношение между объемами дает (4); для перехода к (5) параллелепипеды разных типов попарно объединяются. «Так как я сознавал, что тот отдел, который передал мне Тарталья, был открыт им при помощи геометрического доказательства, то я думал, что это и есть царский путь, ведущий ко всем другим отделам». Возможно, Кардано было известно аналогичное рассуждение для квадратного уравнения, принадлежащее Ал-Хорезми.

Уравнение (2) можно решить при помощи подстановки $x = \beta + \alpha$, но здесь уже может возникнуть случай, когда исходное уравнение имеет три действительных корня, а вспомогательное квадратное уравнение не имеет действительных корней. Это так называемый *неприводимый* случай. Он доставил много хлопот Кардано (и, вероятно, Тарталье).

Кардано решил уравнение (3), проведя смелое по тем временам рассуждение, обыгрывающее отрицательность корня. Никто до него не пользовался так решительно отрицательными числами, хотя и Кардано еще далек от свободного обращения с ними: уравнения (1) и (2) он рассматривает отдельно!

Кардано полностью разобрался и с общим кубическим уравнением $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, заметив, говоря на современном языке, что подстановка $x = y - a/3$ уничтожает член с x^2.

Кардано решается рассматривать не только отрицательные числа (он называет их «чисто ложными»), но и комплексные (их он называет «поистине софистическими»). Он замечает, что если с ними оперировать по некоторым естественным правилам, то квадратному уравнению, не имеющему действительных корней, можно приписать комплексные корни. Возможно, к комплексным числам Кардано пришел в связи с неприводимым случаем. (Это предполагает, например, Н. Бурбаки.) Если в этом случае «не пугаясь» выполнить все действия над возникающими в процессе вычислений комплексными числами, то в результате получатся правильные значения вещественных корней. Но нет никаких указаний на то, что Кардано вышел в своих рассмотрениях за пределы квадратных уравнений. Однако приведенное рассуждение о кубическом уравнении вскоре появилось — у Рафаэля Бомбелли (1526–1573), последователя Кардано — инженера-гидравлика из Болоньи и автора знаменитой «Алгебры» (1572 г.).

Кардано понимал, что кубическое уравнение $x^3+ax^2+bx+c = 0$ может иметь три вещественных корня, и что тогда их сумма равна $-a$. В такого рода общих утверждениях у Кардано не было предшественников. В алгебре в отличие от геометрии почти не приводили доказательств (в школьной математике следы этого сохранились по сей день!). Вот еще одно наблюдение Кардано: если в уравнении (с положительными коэффициентами) все члены в левой части имеют большую степень, чем все члены в правой, то имеется единственный положительный корень. От «Великого искусства» идет целый ряд важных для алгебры понятий, например, кратность корня. Вообще, значение Кардано в истории математики определяется в первую очередь не конкретными достижениями (которых у него не очень много), а тем, что в «Великом искусстве» он увидел путь, по которому будет развиваться алгебра.

Замечание о формуле Кардано. Проанализируем формулу для решения уравнения $x^3+px+q=0$ в вещественной области. В отличие от Кардано мы можем себе позволить не следить за знаками p и q. Итак,

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

При вычислении x нам приходится извлекать вначале квадратный корень, а затем кубический. Мы сможем извлечь квадратный корень, оставаясь в вещественной области, если $\Delta=27q^2+4p^3>$ >0. Два значения квадратного корня, отличающиеся знаком, фигурируют в разных слагаемых для x. Значение кубического корня в вещественной области единственно и получается единственный вещественный корень x при $\Delta>0$.

Исследуя график кубического трехчлена x^3+px+q, нетрудно убедиться, что он в самом деле имеет единственный вещественный корень при $\Delta>0$. При $\Delta<0$ имеются три вещественных корня. При $\Delta=0$ имеются двукратный и однократный вещественные корни, а при $p=q=0$ — трехкратный корень $x=0$.

Продолжим исследование формулы при $\Delta>0$ (случай одного вещественного корня). Оказывается, что если при этом уравнение с целыми коэффициентами имеет целочисленный корень, при вычислении его по формуле могут возникнуть промежуточные иррациональности. Например, уравнение $x^3+3x-4=0$ имеет единственный вещественный корень $x=1$. Формула Кардано дает для этого единственного вещественного корня выражение

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}.$$

Значит,

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1,$$

но попробуйте это доказать непосредственно! Возможно, вы найдете искусственный путь, но при прямых преобразованиях будут возникать неистребимые кубические радикалы.

Быть может, это обстоятельство объясняет, почему Фиоре не смог решить предложенное Тартальей кубическое уравнение. Вероятно, его можно было решить, угадав ответ (что имел в виду Тарталья), а рецепт дель Ферро приводил к промежуточным иррациональностям.

Еще запутаннее ситуация в случае трех вещественных корней. Этот случай называется неприводимым. Здесь $\Delta = 27q^2+4p^3 < 0$, и под знаками кубических корней получаются комплексные числа. Если извлечь кубические корни в комплексной области, то после сложения мнимые части уничтожаются и получатся вещественные числа. Но как свести все к операциям над вещественными числами? Например, извлечение квадратного корня $\sqrt{a+ib}$ можно свести к чисто вещественным операциям над a и b. Если бы так обстояло дело с вычислением $\sqrt[3]{a+ib} = u+iv$, то все было бы в порядке. Но при выражении u, v через a, b возникают снова кубические уравнения, причем в неприводимой ситуации. Получается заколдованный круг! В результате в неприводимом случае нельзя найти выражение для корней через коэффициенты, не выводящие за пределы вещественной области. В этом смысле кубическое уравнение с тремя вещественными корнями неразрешимо в радикалах в вещественной области (в отличие от квадратного). На это обстоятельство часто не обращают должного внимания.

Уравнение 4-й степени. В «Великом искусстве» был отражен и личный вклад Феррари — решение уравнения 4-й степени.

На современном языке метод Феррари решения уравнения

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{6}$$

(полное уравнение четвертой степени легко сводится к уравнению (6)) состоит в следующем.

Введя вспомогательный параметр t, перепишем уравнение (6) в равносильной форме:

$$\left(x^2 + \frac{a}{2} + t\right)^2 = 2tx^2 - bx + \left(t^2 + at - c + \frac{a^2}{4}\right). \tag{7}$$

Подберем теперь значение параметра t так, чтобы квадратный (относительно x) трехчлен, стоящий в правой части уравнения (7), имел два совпадающих корня. Для этого нужно, чтобы дискриминант этого трехчлена равнялся нулю:

$$b^2 - 4 \cdot 2t\Big(t^2 + at - c + \frac{a^2}{4}\Big) = 0.$$

Мы получили вспомогательное кубическое уравнение для t. Найдем по формуле Кардано какой-нибудь его корень t_0. Уравнение (7) можно теперь переписать так:

$$\Big(x^2 + \frac{a}{2} + t_0\Big)^2 = 2t_0\Big(x - \frac{b}{4t_0}\Big)^2 \tag{8}$$

Уравнение (8) распадается на пару квадратных уравнений, дающих четыре искомых корня.

Таким образом, согласно методу Феррари, решение уравнения четвертой степени сводится к решению вспомогательного кубического уравнения и двух квадратных уравнений.

Феррари и Тарталья. После встречи в 1539 г. Кардано и Тарталья переписывались мало. Однажды ученик сообщил Тарталье, что, по слухам, Кардано пишет новую книгу. Тарталья сразу пишет Кардано предостерегающее письмо, но получает успокаивающий ответ. В другой раз Кардано захотел получить разъяснения, натолкнувшись на неприводимый случай, но ничего содержательного в ответ не получил. Нетрудно себе представить, какое впечатление произвел на Тарталью выход в свет «Великого искусства» (1545 г.). В последней части своей книги «Проблемы и различные изобретения» (1546 г.) Тарталья публикует переписку и записи бесед, относящихся к взаимоотношениям с Кардано, и обрушивается на него с бранью и упреками. Кардано не реагирует на выпад, но 10 февраля 1547 г. Тарталье отвечает Феррари. Он возражает против упреков Тартальи, указывает на недочеты в его книге, в одном случае упрекает его в присвоении чужого результата, в другом находит повторения, свидетельствующие о плохой памяти (похоже, что по тем временам это тяжелое обвинение). В заключение Тарталья вызывается на публичный диспут по «геометрии, арифметике или связанным с ними дисциплинам таким, как Астрология, Музыка, Космография, Перспектива, Архитектура и др.». Он готов дискутировать не только о том, что написано в этих областях греческими, латинскими или итальянскими авторами, но и о работах самого Тартальи, если тот, в свою очередь, согласится обсуждать работы Феррари.

По традиции в ответ на «картель» (вызов) посылались «вопросы». Они и появились 19 февраля. Тарталья хочет втянуть в перепалку самого Кардано: «Я писал Вам в таком горячем и оскорбительном тоне для того, чтобы заставить его светлость (а не Вас) собственноручно написать кое-что, ибо у меня с ним старые счеты». Обсуждение условий поединка затягивается. Тарталья начинает понимать, что Кардано останется в стороне. Тогда он начинает подчеркивать несамостоятельность Феррари, именуя его «созданием (креатурой) Кардано», как тот сам назвал себя в первом картеле. Все вопросы адресованы им обоим: «Вы, мессер Джероламо, и Вы, мессер Луиджи». В переписке содержится много интересного. Например, во втором картеле воспроизводится якобы услышанный Феррари разговор Кардано и Тартальи: «так что Вам нужно еще? — Я не хочу, чтобы мое открытие было распространено. — А почему? — Для того чтобы никто не мог им воспользоваться. — В самом деле почему, если мы рождены не только для нас самих, но и для нашей родины и всего человечества, почему ты не хочешь, если уж тебе удалось сделать нечто ценное, чтобы этим могли воспользоваться и другие?».

Полтора года продолжалась переписка, и вдруг Тарталья решительно согласился на поединок в Милане. В чем дело? Тем временем он получил лестное приглашение в родную Брешию (март 1548 г.), где он должен был читать публичные лекции (чего раньше ему не доводилось) и вести частные занятия, «в которых будут принимать участие лишь некоторые доктора и люди с определенным весом». Дела шли не слишком успешно, и есть мнение, что Тарталью заставили принять вызов его покровители в надежде, что победа упрочит его положение. Диспут состоялся 10 августа 1548 г. в Милане в присутствии многих знатных особ, в том числе губернатора Милана, но в отсутствие Кардано. О диспуте сохранились лишь короткие записи Тартальи, по которым почти невозможно восстановить истинную картину. Похоже, что Тарталья потерпел сокрушительное поражение. Но не следует заблуждаться — диспут не имел никакого отношения к проблеме, из-за которой возник спор, да и вообще диспуты имели столь же малое отношение к выяснению истины, как дуэли. Трудно было косноязычному Тарталье противостоять перед публикой блестящему молодому Феррари.

Дальнейшая судьба героев. Тарталья не удержался в Брешии; через полтора года он вернулся в Венецию, не получив даже гонорара за лекции. Поражение в диспуте очень повредило ему. В конце жизни (он умер в 1557 г.) начал выходить «Общий трактат о числе и мере», издание которого закончилось уже после смерти Тартальи. В трактате очень мало говорится о кубических уравнениях, а никаких следов большого трактата по новой алгебре, о котором Тарталья говорил всю жизнь, не было обнаружено в его тщательно сохраненном наследстве.

Напротив, Феррари получил после поединка большую известность. Он читает публичные лекции в Риме, руководит налоговым управлением в Милане, получает приглашение на службу к кардиналу Мантуи, участвует в воспитании сына короля. А вот следов в науке он больше не оставил! Умер Феррари в 43 года (1565 г.); по легенде его отравила сестра. Говоря о его смерти, Кардано вспоминает стихи римского поэта Марциала:

> Необычайным дан век короткий и изредка старость.
> То, что ты любишь, желай, чтобы не нравилось так[1].

Дольше их обоих прожил Кардано. Но конец его жизни был нелегким. Один его сын (врач Джамбаттиста, на которого Кардано возлагал большие надежды) отравил из ревности жену и был казнен в 1560 г. От этого удара Кардано долго не мог оправиться. Другой его сын — Альдо — стал бродягой и ограбил собственного

[1] Перевод А. А. Фета.

отца. В 1570 г. сам Кардано был посажен в тюрьму, а его имущество было конфисковано. Причина его ареста неизвестна — возможно, инициатива принадлежала инквизиции. В ожидании ареста Кардано уничтожил 120 своих книг. Кончил свои дни Кардано в Риме, на положении «частного человека» (его выражение), получающего скромную пенсию от папы. Последний год своей жизни Кардано посвятил составлению автобиографической книги «О моей жизни». Последний упоминаемый в ней факт датируется 28 апреля 1576 г., а 21 сентября Кардано умер.

В автобиографии Кардано четыре раза вспоминает Тарталью. В одном месте он одобрительно приводит его мысль, что «никто не знает всего, а тем более не знает ничего тот, кто сам не подозревает, что многого не знает». В другом месте говорится, что Тарталья предпочел иметь в нем «соперника и победителя, а не друга и человека, обязанного благодеяниями». Еще Тарталья оказывается в списке критиков Кардано, которые «не вышли за пределы грамматики». И, наконец, на самых последних страницах мы читаем: «Сознаюсь, что в математике кое-что, но в самом деле ничтожное количество, я заимствовал у брата Никколо». Похоже, что неспокойно было у Кардано на душе!

Эпилог. О проблеме «Кардано – Тарталья» надолго забыли. Формулу для решения кубического уравнения связывали с «Великим искусством» и постепенно стали называть *формулой Кардано,* хотя какое-то время фигурировало имя дель Ферро, авторство которого подчеркивал сам Кардано. Такого рода несправедливость в присвоении имени — вещь нередкая (можно вспомнить, например, аксиому Архимеда, на открытие которой он не претендовал).

К проблеме авторства формулы для кубического уравнения вернулись в начале XIX века. Обнаружилось существование обиженного Тартальи, который к тому времени был практически забыт. Почти забытая история получила огласку, и за честь Тартальи были готовы сражаться не только профессионалы, но и любители. Уж очень привлекательным был детективный компонент истории. Сколько лет должно было действовать обещание

Кардано? Является ли шесть лет достаточным сроком давности? Почему Тарталья десять лет не публиковал своей формулы? Впрочем, при многократных передачах и проникновении в популярную литературу история сильно упростилась, и Кардано порой превращался в авантюриста и злодея, укравшего у Тартальи его открытие и давшего этому открытию свое имя. Как мы видели, дело обстояло сложнее и такая интерпретация по меньшей мере огрубляет картину.

Дело было не только в желании восстановить истинную картину событий в ситуации, когда их участники несомненно не говорили всей правды. Для многих было важно установить степень вины Кардано. Этот вопрос наталкивается на вечно злободневный вопрос о праве собственности на научное открытие. Что касается сегодняшней практики, то бросается в глаза разница между правами ученого и изобретателя. Ученый не может контролировать дальнейшее использование опубликованных результатов, он может претендовать лишь на упоминание его имени. Это одна из причин засекречивания открытий. На рубеже Средних веков и Возрождения поводом к засекречиванию математических результатов было их использование в поединках.

К концу XIX века часть дискуссии стала носить характер серьезных историко-математических исследований. Некоторые оригинальные материалы были впервые опубликованы («Картели» и «Вопросы»). Математики поняли, какую большую роль в науке XVI века сыграли работы Кардано. Стало ясно то, что еще раньше отмечал Лейбниц: «Кардано был великим человеком при всех его недостатках; без них он был бы совершенством».

Крупнейший историк математики Мориц Кантор (1829 – 1920; не путать с создателем теории множеств Георгом Кантором), автор многотомной истории математики, очень высоко ценил Кардано, не без сожаления констатируя, что его человеческие качества оставляли желать лучшего («гений, но не характер»). Кантор высказал предположение, имевшееся уже у Феррари, что Тарталья не переоткрыл правило дель Ферро, а узнал его в готовом виде из вторых рук. Он отмечал, что у Тартальи не было сколько-нибудь значительных математических работ, а по поводу кубических уравнений в публикациях и оставшихся рукописях, кроме самого правила и фактов, которые могли быть заимствованы из ранее вышедшего «Великого искусства», имеются лишь элементарные замечания. Разумеется, это не доказательство, к тому же у Тартальи были безусловные заслуги за пределами математики. Кантору казалось также подозрительным, что решения Тартальи и дель Ферро похожи друг на друга, как две капли воды. Кантору возражал Энестрем, который даже провел что-то вроде следственного эксперимента, показывавшего, что такое совпадение возможно. Многое сделал для выяснения неясных мест Бортолетти: он привел рассуждения, которые могли бы подкрепить ряд высказываний Тартальи, казавшихся безответственными.

Полтора века то утихают, то вновь разгораются страсти. Не угасает желание получить однозначный ответ на вопрос, у которого такого ответа, может быть, просто не существует. А за формулой для решения кубического уравнения прочно укоренилось название «формула Кардано».

Добавление. По страницам книги Джероламо Кардано «О моей жизни»

За четыре месяца до смерти Кардано закончил автобиографию, которую он напряженно писал весь последний год и которая должна была подвести итог его сложной жизни. Он чувствовал приближение смерти. По некоторым сведениям его собственный гороскоп связывал его кончину с 75-летием. Он умер 21 сентября 1576 г. за два дня до годовщины. Имеется версия, что он покончил с собой в ожидании неминуемой смерти или даже чтобы подтвердить гороскоп. В любом случае Кардано-астролог относился к гороскопу серьезно. В своей книге он описывает ожидание смерти в 44 года, как предвещал предыдущий гороскоп.

Кардано волнует, удалась ли его жизнь. С одной стороны, он живет на скромную папскую пенсию в Риме, в вынужденном удалении от городов, где прошла лучшая часть его жизни, недавно побывал в тюрьме, несчастлив в детях. С другой стороны, Кардано уверен в своей значительности. Он критически оценивает многое из своего прошлого, хотя нетрудно обнаружить места, где ему удается убедить себя в своей правоте. Ведущая идея Кардано — предопределенность его жизни. Отсюда подробный анализ влияния звезд, взаимоотношений с «гением-хранителем», скрупулезный учет примет и предзнаменований, мелких событий, позволяющих построить логически стройную картину жизни. В некотором смысле цель Кардано — пользуясь искусством ученого и астролога, подробно проанализировать самого себя как объект воздействия высших сил. В науке устанавливался новый стиль, когда выводы делались исходя из предъявляемых фактов. Поэтому Кардано снабжает читателя подробными сведениями о своих физических особенностях, режиме питания, привычках и т. д., чтобы автор и читатель имели равные возможности для выводов. Книга Кардано — замечательный литературный памятник XVI века, она позволяет узнать очень много о том, как воспринимал жизнь один из умнейших людей своего времени.

Книга Кардано была переведена на русский язык в 1938 г. и издана в Гослитиздате.

Посмотрим, что рассказывает Кардано о себе. Кое-что уже приводилось в основном тексте. «Имея в виду, что из всего того, что может быть достигнуто человеческим умом, нет ничего отраднее и достойнее познания истины, и что ни одно из созданий смертных людей не может быть завершено, не подвергнувшись хотя бы в малой степени клевете, — мы, по примеру мудрейшего и, без сомнения, совершеннейшего мужа Антонина Философа решили написать книгу о собственной жизни. Мы заверяем, что ничего не внесли в нее ради хвастовства или из желания что-нибудь приукрасить» — так начинается эта книга. Кардано подробно говорит о своей родине (Милане), своих предках. Сообщает о своем рождении: «я родился 24 сентября 1500 г. (по-видимому, здесь описка: Кардано родился в 1501 г. — *С. Г.*) на исходе первого часа ночи, когда прошло уже более его половины, но шла еще последняя его треть $\langle \ldots \rangle$, я родился с курчавыми волосами и без признаков жизни; меня привели в чувства лишь ванной из теплого вина, что для другого могло оказаться гибельным». Подробно описывается положение Марса, Меркурия и Луны, которое предвещало, что он «непременно должен был родиться уродом ⟨...⟩, чего едва не произошло». Положение «зловещих планет» — Венеры и Меркурия — предвещало, что ему «будут присущи некоторая хитрость и отсутствие свободы духа, а вместе с тем склонность к опрометчивым и необдуманным решениям».

В отдельной главе описываются родители: «Мой отец, вопреки обычаям нашего города, одевался в красную суконную одежду, хотя сохранил черный цвет для своего исподнего платья. Он был косноязычен; лицо у него было румяное, а глаза белесоватые ⟨...⟩; с пятидесятилетнего возраста лишился всех своих зубов[1]. Особенное предпочтение отдавал он сочинениям Евклида; ходил, согнув спину». Удивительные подробности! «Мать моя была вспыльчива, обладала очень хорошей памятью и даровитостью, была невысокого роста, скорее тучная, и отличалась благочестием».

Далее дается краткое описание жизни Кардано, после чего наступает черед его наружности. Вот несколько деталей: «Я среднего роста, с короткими и широкими у основания ступнями ног и с настолько высоким подъемом, что я никогда не мог найти для себя обуви ⟨...⟩ Грудь у меня несколько впалая, руки довольно тонкие, правая рука потолще ⟨...⟩ Шея довольно длинная и худая; подбородок раздвоен, нижняя губа толстая и отвислая. Глаза мои очень невелики и как бы прищурены, исключая те случаи, когда я что-нибудь пристально рассматриваю ⟨...⟩ Волосы на голове и бороде были прежде белокурые ⟨...⟩ Старость изменила бороду, а волосы на голове — мало» и т. д. Кардано описывает болезни, которыми он страдал, и сообщает: «Теперь у меня осталось здоровых четырнадцать зубов и один больной, но я думаю, что и он долго еще сохранится благодаря лечению». Всего у него десять недугов, десятый — бессонница, от которой он лечится воздержанием от пищи.

[1] В другом месте сказано, что после попытки отравления.

Кардано сообщает, что он от природы труслив, но приобрел мужество благодаря телесным упражнениям, что он остается в кровати десять часов, а спит — восемь, что он предпочитает рыбу мясу, перечисляет 21 сорт рыбы, которые он употребляет в пищу, причем у крупной рыбы он ест «голову и брюхо, а у мелкой — спину и хвост».

«Желание увековечить свое имя возникло во мне столь же рано, сколь поздно я оказался в состоянии выполнить свое намерение ⟨...⟩ ожидая чего-то от будущего, мы презираем настоящее», — читаем мы. Случайности, козни противников да собственные астрологические изыскания, утверждавшие, что он не доживет до 45 лет, мешали стремлению Кардано увековечить свое имя. Все изменилось, когда оказалось, что предсказания не сбываются. Кардано решительно меняет образ жизни. Он читает лекции рано утром. «После того я шел гулять в тени за городской стеной, обедал и затем занимался музыкой; после этого я шел удить рыбу ⟨...⟩; потом я занимался научной работой и писал, проводя свои вечера дома». Кардано объясняет, почему он предпочел медицину профессии юриста, как того хотел отец: «медицина одинакова и пригодна для всего земного шара и для всех веков; она опирается на доказательства более ясные и менее зависящие от мнения отдельных людей». Он рассказывает об успехах в преподавании и диспутах: «в Болонье я освоился с импровизационной речью, так как почти всегда читал лекции без подготовки ⟨...⟩ И хотя это порождало очень высокое мнение обо мне, однако в моей речи отсутствовало изящество и не было истинного красноречия в изложении мыслей».

Своеобразен перечень добродетелей: «Как бы меня иной раз ни соблазняла благосклонность судьбы и многочисленные мои успехи, я тем не менее никогда не изменял своего поведения ⟨...⟩ Точно так же я не изменял своего платья на более богатое ⟨...⟩ Более чем в чем-нибудь ином я был постоянен в занятиях, в особенности в писании книг ⟨...⟩ Я никогда не порывал уз дружбы, и если их приходилось порывать, то никогда не выдавал тайн своих бывших друзей». Подробно описываются друзья и покровители, но демонстративно не перечисляются враги и соперники.

Впрочем, они неоднократно появляются на страницах книги, в том числе уже в следующей главе «Клеветы, сплетни и козни».

Кардано начинает с козней и испытывает некоторые затруднения при выборе примеров: он хотел бы говорить о больших и скрытых кознях, но козни, которые уже обнаружились, нельзя считать скрытыми, а большие козни трудно скрыть. Пофилософствовав, он выбирает случай при получении профессорского места в Болонье, когда распустили слухи, что он «читает перед пустыми скамьями, что он человек дурных нравов и для всех неприятен; отличается тупоумием и весьма развратен; также мало сведущ в искусстве врачевания и не имеет никакой практики». Всему бы поверили, если бы папский легат в Болонье не вспомнил, что Кардано вылечил его мать. Это подорвало доверие к остальной информации. Впрочем козни продолжались и в Болонье, и Кардано в конечном счете от должности отказался, хотя и успокаивал себя: «все это закончилось в угоду тем, кто этого так добивался, но совсем не в их пользу». Что касается «клевет и лживых поношений», то Кардано не останавливается на конкретных случаях, считая, что «они больше мучили совесть их распространителей», а ему доставили больший досуг для написания книг, «способствовали приобретению многих тайных знаний», и он не питает «ненависти к своим обвинителям».

Коротко перечисляются увлечения: перочинные ножи (на них истрачено больше двадцати золотых дукатов), различного рода перья (более двухсот дукатов), драгоценные камни, посуда, шарики из расписного стекла, редкие книги, плавание, рыбная ловля, философия Аристотеля и Плотина, мистика, стихи Петрарки и т. д.. Одиночество он предпочитал компании, не только из-за преданности науке, а из нежелания терять время. О пристрастии к игре в шахматы и кости уже говорилось.

Отдельная глава посвящена одежде. Кардано находит у Горация описание, очень его напоминающее. Достаточно длинные рассуждения со ссылками кончаются констатацией, что надо иметь «по четыре пары платья: пару теплого, пару самого теплого, пару легкого и пару самого легкого. Таким образом, получится четырнадцать различных сочетаний». Описывается походка, указывается, что причиной ее неровности являются постоянные размышления. Обсуждаются взаимоотношения с религией и философией, подчеркивается влияние Платона, Аристотеля, Плотина и особенно Авиценны. Перечисляются «особые правила», усвоенные в течение жизни: благодарить Бога и просить его о помощи, не ограничиваться возмещением потерь и убытков, беречь время, почтительно относиться к старикам, «по возможности предпочитать верное неверному», «не упорствовать в проведении того, что идет дурно» и т. д. Кардано перечисляет дома, в которых он жил, красочно описывает свою бедность и потерю отцовского наследства.

Кардано подробно пишет о жене и детях. Он пишет, что видел будущую жену во сне до того, как с нею познакомился, и сон предвещал несчастный брак. Уже говорилось о судьбе его детей. Описываются путешествия, в основном в связи с врачебной деятельностью, объясняется польза путешествий.

Самая большая глава посвящена опасностям и случайностям. Кардано подробно описывает их, видимо, внушая читателю, что за этим могут стоять более глубинные явления. («Эти события не должны были бы возбуждать удивления, если бы у нас не было налицо частых примеров».) Почти в одном и том же месте он чудом трижды избежал опасности: от упавшего со стены камня, от огромного куска штукатурки и от перевернувшейся повозки, дважды он чуть не утонул при очень романтических обстоятельствах. Кардано подвергался нападению бешеных собак, проваливался в яму, падал с повозки на полном ходу, подвергался опасности заражения чумой. Эти истории читаются как детективные рассказы. После этого доходит очередь до страшных козней, которые придумывали конкуренты-врачи в Павии: тут и клевета, в которую вовлекли мужа дочери, и бревно, которое могло упасть при входе в Академию, и попытка отравить, предварительно удалив мальчиков, которые пробовали пищу. Однако все неожиданно кончалось болезнью или даже смертью врагов. В Риме Кардано преследуют опасности из-за незнания улиц и «варварских обычаев римских жителей». Но, наконец, он решает, что его охраняет провидение и перестает бояться опасностей. И вот итог: «кто не увидит в этом предвестия или некоторого рода обеспечения моей будущей славы?».

Кардано включает в книгу этюд о счастье с примерами из жизни. Он перечисляет оказанные ему почести, в основном лестные приглашения. С другой стороны, перечисляются неприятные эпизоды в его врачебной практике, обсуждается их связь со снами. Неожиданно речь заходит о родовом гербе Кардано, в который он в день ареста решил добавить ласточку: «ибо считал ее во многих отношениях олицетворяющей мой собственный нрав и привычки». Спорное сравнение! Кардано перечисляет своих учителей и учеников.

И опять Кардано повествует об удивительных своих свойствах и происшествиях: в детстве его посещали видения из воздушных колечек; у него не могли согреться ноги ниже колен; в его присутствии не проливалась кровь (он стал даже нарочно вмешиваться в драки и ни разу не был ранен); события, предвещавшие гибель старшего сына; и, наконец, многочисленные сновидения, которые предшествовали истинным событиям. Очень красочны описания снов, содержащие многочисленные подробности.

Далее перечисляются десять наук, которые постиг Кардано, и описываются сорок избранных случаев из его медицинской практики. А затем идет глава: «Явления, по-видимому, естественные, но поразительные». И вот первое из этих явлений: «я родился в век, когда был открыт весь земной шар, тогда как в древности было известно лишь немного более одной трети». Кроме того, обрушился его дом, но уцелела спальня, дважды загоралась его постель и т. д. Подробно анализируется дар предсказания, постоянно проявлявшийся в его жизни, от медицины до карточной игры.

В заключительной части книги опять идет речь о сверхъестественных случаях, обсуждаются научные достижения, перечисляются его книги. Кардано вновь говорит о себе самом, о своем духе-хранителе, перечисляет отзывы о себе, рассуждает «о делах мира сего», несколько страниц занимают изречения, которыми следует руководствоваться. Вот примеры: «Друзья в несчастии подают помощь, льстецы — совет», «Знаменитому человеку следует жить там, где имеет пребывание его государь», «Когда ты хочешь мыться, сначала приготовь полотенце, чтобы вытереться», «Зло должно лечить добром, а не злом». За изречениями следует «Плач об умершем сыне». В конце речь снова идет о недостатках автора, о переменах, связанных с возрастом, и об «особенностях обхождения».

ДВА РАССКАЗА О ГАЛИЛЕЕ

1. Открытие законов движения

> Первые основы динамики были заложены Галилеем. Действие сил до него рассматривали исключительно в случае их равновесия; и хотя ускоренное движение свободно падающих тел и криволинейное движение брошенных тел также приписывали постоянно действующей силе тяжести, но никому не удалось установить законов указанного обыденного явления, зависящего от столь простой причины. Галилей первый сделал этот шаг и открыл новую и безграничную область для развития механики. Это открытие $\langle\ldots\rangle$ составляет теперь наиболее значительную и непререкаемую часть заслуг этого великого человека. В самом деле, чтобы открыть спутники Юпитера, фазы Венеры, солнечные пятна и т. д., требуется не только телескоп и наблюдательность, но нужен исключительный гений, чтобы установить законы природы на явлениях, которые всегда были у всех перед глазами и тем не менее ускользали от внимания философов.
>
> *Лагранж*

Пролог. Винченцо Галилей, известный во Флоренции музыкант, долго размышлял над тем, какое поприще выбрать для своего старшего сына Галилео. Сын, безусловно, был способен к музыке, но отец предпочитал что-нибудь более надежное. В 1581 г., когда Галилео исполнилось семнадцать лет, чаша весов склонилась в сторону медицины. Винченцо понимал, что расходы по обучению будут велики, зато будущее сына будет обеспечено. Местом обучения был выбран Пизанский университет, быть может, несколько провинциальный, но хорошо знакомый Винченцо. Он долго жил в Пизе, там же родился Галилео.

Галилео Галилей

Путь к профессии врача был нелегок. Перед тем как приступить к изучению медицины, надо было выучить, а точнее — вызубрить философию Аристотеля. В его учении говорится буквально обо всем. По мнению Галилея, «нет, кажется, ни одного достойного внимания явления, мимо которого он (Аристотель) прошел бы, не коснувшись его». Философия Аристотеля в то время преподавалась в чудовищной форме: в виде набора высказываний, считавшихся истинами в последней инстанции, лишенных мотивировок и доказательств. О несогласии с Аристотелем не могло быть и речи. Более всего интересует Галилея то, что пишет Аристотель о физике окружающего мира, но он не хочет слепо верить каждому слову великого философа; он усвоил это, изучая его логику: «Сам Аристотель научил меня удовлетворять свой разум только тем, в чем убеждают меня рассуждения, а не только авторитет учителя». Он читает и других авторов, среди которых наибольшее впечатление на него производят Архимед и Евклид.

Тайны движения. Из всего, что происходит в окружающем мире, наибольший интерес Галилея вызывали разнообразные движения. Он по крупицам собирает все, что написано о движении у древних, но с сожалением констатирует: «В природе нет ничего древнее движения, но именно относительно него написано весьма мало значительного». А вопросы возникают у пытливого юноши на каждом шагу...

«В 1583 г., имея около двадцати лет от роду, Галилей находился в Пизе, где, следуя совету отца, изучал философию и медицину.

Однажды, находясь в соборе этого города, он, со свойственной ему любознательностью и смекалкой, решил наблюдать за движением люстры, подвешенной к самому верху, — не окажется ли продолжительность ее размахов, как вдоль больших дуг, так и вдоль средних и малых, одинаковой; ибо ему казалось, что продолжительность прохождения большой дуги может сократиться за счет большей скорости, с которой, как он видел, движется люстра на более высоких и наклонных участках. И пока люстра размеренно двигалась, он сделал грубую прикидку — его обычное выражение — того, как происходит движение взад и вперед, с помощью биения собственного пульса, а также темпа музыки, в которой он тогда уже был искушен с немалою от того для себя пользой. И ему на основании таких подсчетов показалось, что он не заблуждается, подсчитав, что времена одинаковы, но не удовлетворенный этим, вернувшись домой, он, чтобы надежнее в этом удостовериться, решил сделать следующее. Он привязал два свинцовых шара на нитях совершенно одинаковой длины так, чтобы они могли свободно раскачиваться ⟨...⟩ и, отклоняя их от вертикали на разное число градусов, например один шар на 30, другой на 10, он отпускал их в одно и то же мгновение. С помощью товарища он наблюдал, что, пока один маятник делал такое-то число колебаний по большим дугам, другой делал в точности столько же по малым.

Сверх того он сделал два сходных маятника, только достаточно разной длины. Он наблюдал, что, пока малый маятник делал какое-то число колебаний, например 300, по большим дугам, большой за то же время делал всегда одно и то же число колебаний, скажем 40, как по своим большим дугам, так и по совсем маленьким, и повторив это несколько раз ⟨...⟩, он заключил отсюда, что вполне одинакова продолжительность размахов одного и того же маятника, будут ли они весьма велики или весьма малы, и что почти нет при этом заметных различий, каковые надо приписать помехе со стороны воздуха, который больше противится быстрее движущемуся тяжелому телу, чем медленнее движущемуся.

Он видел также, что ни различие в абсолютном весе, ни разный удельный вес шаров не вызывали заметного изменения —

все шары, лишь бы они были на нитях равной длины от их центров до точек подвеса, сохраняли достаточно постоянно равенство (времени) прохождения по всяким дугам; лишь бы не был взят легчайший материал, движению которого в воздухе легче препятствовать, так что оно быстрее сводится к покою».

Приведенный рассказ принадлежит ученику Галилея Винченцо Вивиани (1622 – 1703), который в 1639 г. в семнадцатилетнем возрасте прибыл на виллу Арчетри близ Флоренции, где находился Галилей после приговора инквизиции. Через два года там появился Эванджелиста Торричелли (1608 – 1647). Оба они помогали ослепшему ученому завершать его замыслы; ряд результатов они получили под влиянием Галилея (знаменитые барометрические опыты, исследование циклоиды). По-видимому, Вивиани был особенно близок Галилею, который охотно беседовал с ним на разные темы, часто вспоминая о далеком прошлом. Потом Вивиани по разным поводам пересказывал услышанное им в те дни. Эти рассказы не считаются достаточно достоверными, причем не всегда ясно, кто явился источником неточностей: рассказчик или слушатель. Увековечение памяти учителя было главной целью жизни Вивиани.

Вернемся к рассказу Вивиани. В нем речь идет об открытии изохронного свойства маятника: при фиксированной длине период колебаний маятника не зависит от их амплитуды. Поучительно, как Галилей следил за временем: при помощи музыки и пульса (кажется, на этот способ первым указал Кардано). Нам, людям XX века, привыкшим к ручным часам, не следует забывать об этих трудностях. Достаточно точные часы были сконструированы как раз на основе открытого Галилеем свойства маятника (мы еще будем иметь возможность говорить о маятниковых часах). Кстати, в своих лабораторных экспериментах, о которых пойдет речь ниже, Галилей пользовался для измерения времени медленно вытекающей струей воды (вариантом водяных часов).

Галилей обнаруживает связь между длиной маятника и частотой его колебаний: квадраты периодов колебаний относятся как их длины. Вивиани пишет, что Галилей получил этот результат, «руководствуясь геометрией и своей новой наукой о движении», но никто не знает, каким мог быть такой теоретический вывод, Быть может, все же Галилей подметил закономерность экспериментально. Галилей, по-видимому, не знал, что колебания маятника изохронны лишь для малых углов отклонения. При больших углах период начинает зависеть от угла отклонения, и для 60°, например, период заметно отличается от периода для малых углов. Галилей мог бы заметить это в серии опытов, описанных Вивиани. Неточность утверждения Галилея об изохронности математического маятника обнаружил Гюйгенс.

Занятия медициной шли не очень успешно, хотя Галилео стремился оправдать надежды и затраты отца. Все же в 1585 г. он возвращается во Флоренцию, не получив диплома доктора. Во Флоренции Галилей продолжает заниматься математикой и физикой, вначале втайне от отца, а потом при его согласии. У Галилео появляются контакты с учеными, в том числе с маркизом Гвидо Убальдо дель Монте. Благодаря поддержке последнего тосканский герцог Фердинандо Медичи в 1589 г. назначил Галилея профессором математики Пизанского университета. В Пизе Галилей находился до переезда в 1592 г. в Падую. Восемнадцать лет, прожитых в Падуе, Галилей считал самым счастливым периодом в своей жизни. С 1610 г. и до конца жизни он — «философ и первый математик светлейшего великого герцога тосканского». И в Пизе, и в Падуе изучение движений — главное дело Галилея.

Свободное падение. Галилея интересует прежде всего свободное падение — одно из самых распространенных естественных движений. Как и полагалось в то время, начать нужно с того, что по этому поводу говорил Аристотель. «Тела, имеющие большую силу тяжести или легкости, если в остальном они имеют одинаковую фигуру, скорее проходят равное пространство в том пропорциональном отношении, в каком указанные величины относятся друг к другу». Значит, по Аристотелю скорости падающих тел пропорциональны их весу. Второе утверждение состоит в том, что скорости обратно пропорциональны «густоте среды». С этим утверждением возникли сложности, поскольку в пустоте, «густота» которой равна нулю, скорость должна была бы быть бесконечной. На это Аристотель заявил, что в природе пустоты не бывает («природа боится пустоты»).

Первое утверждение Аристотеля оспаривалось иногда уже в Средние века. Но особенно убедительной была критика Бенедетти, ученика Тартальи и современника Галилея, с трактатом которого Галилей познакомился в 1585 г. Вот как выглядит основное опровержение. Пусть имеются два тела — тяжелое и легкое: первое должно падать быстрее. Теперь соединим их. Естественно предположить, что легкое тело притормозит тяжелое и скорость падения должна стать промежуточной между скоростями падения составляющих тел. Но по Аристотелю скорость должна стать больше, чем скорость каждого тела! Бенедетти решает, что скорость падения зависит от удельного веса и даже прикидывает, что для свинца она в 11 раз больше, чем для дерева. В существование зависимости скорости от удельного веса долго верил и Галилей.

Он приступил к изучению свободного падения еще в Пизе. Вот что пишет Вивиани: «Галилей целиком отдался размышлениям, и к великому смущению всех философов им была показана, посредством опытов, солидных доказательств и рассуждений, ложность множества заключений Аристотеля, касающихся движения, считавшихся до этого совершенно очевидными и несомненными. Сюда относится положение, что движущиеся тела, состоящие из одного и того же вещества, но имеющие разный вес, находясь в одной и той же среде, не обладают скоростями, пропорциональными их весу, как полагал Аристотель, но все движутся с одинаковой скоростью. Это он доказывал неоднократными экспериментами, производившимися с высоты Пизанской башни, в присутствии других лекторов и философов и всей ученой братии». Галилея до сих пор часто рисуют кидающим шары с Пизанской башни. Эта легенда обросла многими пикантными подробностями (например, о кабатчике, распускавшем слухи, что профессор Галилей будет прыгать с башни). Заметьте, что пока речь идет только о телах из одного и того же вещества.

Галилея занимает наблюдение Бенедетти, что скорость свободного падения увеличивается по мере движения тела. И Галилей решает найти математически точное описание этого изменения скорости. Здесь следует сказать, что первоначально Галилей видел свою задачу в том, чтобы математизировать физику Аристотеля: «Философия написана в величайшей книге, которая постоянно открыта нашим глазам (я говорю о Вселенной); но нельзя ее понять, не научившись сперва понимать язык и различать знаки, которыми она написана. Написана же она языком математическим, и знаки ее суть треугольники, круги и другие математические фигуры». Однако скоро стало ясно, что математизация требует систематического пересмотра всех фактов.

Как же найти закон изменения скорости свободного падения? Эксперимент только начинал входить в практику научного исследования. Для Аристотеля и его последователей он считался лишним и недостойным занятием как при установлении истины, так и при ее проверке. Галилей мог бы попытаться проделать серию экспериментов со свободно падающими телами, провести тщательные измерения и искать закономерность, которая их объясняет. Так современник Галилея Кеплер, обрабатывая многочисленные наблюдения Тихо Браге, обнаружил, что планеты движутся по эллипсам. Но Галилей выбирает другой путь. Он решает вначале угадать закон из общих соображений, а уже затем проверить его экспериментально. Раньше никто так не поступал, но постепенно такой план исследований станет одним из ведущих при установлении научных истин.

Теперь о том, как Галилей попытался угадать закон. Он решает, что природа «стремится применять во всех своих приспособлениях самые простые и легкие средства», а значит, и закон нарастания скорости должен происходить «в самой простой и ясной для всякого форме». Но раз скорость растет с ростом пройденного пути, то что может быть проще предположения о том, что скорость пропорциональна пути: $v = cs$, c — постоянное число. Это предположение испугало его поначалу: ведь получается, что падение начинается с нулевой скоростью, а кажется, что скорость с самого начала велика. Но вот какое рассуждение убедило его, что противоречия нет: «Если груз, падающий на сваю с высоты четырех локтей, вгоняет последнюю в землю приблизительно на четыре дюйма, — при падении с высоты двух локтей он вгоняет ее в землю меньше и, конечно, еще меньше при падении с высоты одного локтя или одной пяди, и когда, наконец, груз падает с высоты не более толщины пальца, то производит ли он на сваю больше действия, чем если бы он был положен без всякого удара? Еще меньшим и совершенно незаметным будет действие груза, поднятого на толщину листа. Так как действие удара находится в зависимости от скорости ударяющего тела, то кто может сомневаться в том, что движение чрезвычайно медленно и скорость минимальна, если действие удара совершенно незаметно?»

Галилей долго исследовал различные следствия из сделанного предположения и неожиданно обнаружил, что... *по такому закону движение вообще происходить не может!* Давайте и мы попытаемся понять, в чем дело. Коэффициент пропорциональности зависит от выбора единицы времени. Будем считать для простоты, что $c = 1$, путь измеряется в метрах, а время в секундах. Тогда во все моменты времени $v = s$.

Рассмотрим точку A, находящуюся на расстоянии $1\,м$ от начала O. Прикинем, через какое время от начала движения тело окажется в этой точке. В точке A скорость равна $1\,м/с$. Возьмем точку A_1, лежащую посередине между началом O и A. На отрезке A_1A мгновенная скорость будет меньше $1\,м/с$, и на отрезок длиной $1/2\,м$ потребуется больше $1/2\,с$. Возьмем теперь точку A_2 — посередине между O и A_1. На отрезке A_2A_1 мгновенная скорость будет меньше $1/2\,м/с$ (все точки находятся от O на расстоянии, меньшем $1/2\,м$), и на отрезок A_2A_1 длиной $1/4\,м$ уйдет опять более $1/2\,с$. Вы уже, конечно, догадались, как мы будем рассуждать дальше: точка A_3 — середина отрезка OA_2, на отрезок A_3A_2 длиной $1/8\,м$ при скорости, меньшей $1/4\,м/с$, опять-таки уйдет более $1/2\,с$ и т. д. Процесс деления можно продолжать неограниченно, и мы можем набрать любое число отрезков, на прохождение которых уходит больше $1/2\,с$, так и не добравшись до O. Значит, тело из O попасть в A вообще не может!

Мы предположили, что A находится на расстоянии 1 *м* от O. Но аналогично показывается, что вообще ни в какую точку тело из O попасть не может. Вот с какого замечательного рассуждения началась классическая механика!

Впрочем сам Галилей публикует по этому поводу неубедительное рассуждение. Он пытается прийти к противоречию, считая, что раз скорость пропорциональна пути, то любые отрезки от начала должны проходиться за одно и то же время, что неверно. То ли Галилей еще не привык работать с мгновенной скоростью, то ли первоначально у него было другое рассуждение, которое он уже не смог восстановить, когда после долгого перерыва записывал эти результаты в преклонном возрасте (мы увидим, почему это получилось). От него осталось немало утверждений, либо лишенных мотивировок, либо снабженных сомнительными рассуждениями.

Ну что же, у Галилея были все основания обидеться на коварство природы, которая не выбрала самого простого пути. Однако вера в разумность природы у Галилея не угасла. Он рассматривает не менее простое предположение, что нарастание скорости происходит пропорционально времени: $v = at$. Такое движение он назвал естественно ускоренным, но прижился термин «равномерно ускоренное движение». Галилей рассматривает график скорости на отрезке времени от 0 до t и замечает, что если взять моменты времени t_1, t_2, равноотстоящие от $t/2$, то насколько в t_1 скорость меньше $at/2$, настолько в t_2 она больше. Отсюда он делает вывод, что в среднем скорость равна $at/2$, а пройденный путь равен $at/2 \cdot t = at^2/2$ (не слишком строгое рассуждение!). Значит, *если рассмотреть равноотстоящие отрезки времени* $t = 1, 2, 3, 4, \ldots$, *то отрезки пути, пройденные от начала, будут относиться как квадраты натуральных чисел* $1, 4, 9, 16 \ldots$, *а отрезки, пройденные между соседними моментами отсчета, — как нечетные числа* $1, 3, 5, 7, \ldots$

Еще раз проследим за логикой Галилея. Прежде всего он разделяет вопросы «как» и «почему». Для последователей Аристотеля ответ на первый вопрос должен быть непосредственным следствием ответа на второй. Галилей же, трезво оценив свои возможности, не разбирается в природе возникновения ускоренного движения при свободном падении, а пытается лишь описать закон, по которому оно происходит. Принципиальное значение имеет поиск простого общего принципа, из которого этот закон можно вывести. Он ищет «принцип, совершенно несомненный, который можно принять за аксиому». Высказывания Галилея из письма Паоло Сарпи (осень 1604 г.) можно интерпретировать так, что он уже знал закон изменения пути при свободном падении, но не был удовлетворен тем, что не может вывести его из казавшегося несомненным принципа: «Тело, испытывающее естественное движение, увеличивает свою скорость в той же пропорции, что и расстояние до исходного пункта».

Здесь важно было выбрать основную независимую переменную, относительно изменений которой рассматриваются изменения всех величин, характеризующих движение. Очень естественно, что первоначально в качестве такой переменной выбирается пройденный путь: ведь наблюдатель видит, как нарастает скорость по мере увеличения пройденного расстояния. Сказывалось, что измерение времени еще не играло значительной роли в жизни людей, не было точных, доступных часов. Мы не всегда отдаем себе отчет, насколько постепенно ощущение постоянно текущего времени внедрялось в человеческую психологию. Галилей проявил большую гибкость, сравнительно быстро переориентировавшись с пути на время. В 1609 – 1610 гг. он открыл верный принцип равноускоренности свободного падения (относительно времени!).

Не следует переоценивать окончательный характер понятий скорости и ускорения у Галилея. Понятие мгновенной непрерывно меняющейся скорости нелегко ощутить, и оно медленно завоевывало права гражданства. Трудно было удостовериться, что отказ от скачкообразного изменения скорости не приводит к противоречиям, которыми были переполнены рассуждения о непрерывных процедурах. Нам сегодня трудно оценить смелость Галилея, так решительно оперирующего с переменной скоростью. Ему не поверили такие мастера аналитических рассуждений, как Кавальери, Мерсенн, Декарт. Последний категорически не принимал движения с нулевой начальной скоростью, при котором тело «проходит через все стадии медленности». Еще более сложен процесс вычисления пути при переменной скорости, который требует интегрирования. Галилей владел им лишь в варианте, близком к технике Архимеда или к «неделимым» Кавальери. В рассматриваемом случае он применяет искусственный прием, делая не вполне обоснованный переход к средней скорости, а затем пользуется привычной формулой для равномерного движения. От открытия закона свободного падения отсчитывает свою историю не только новая механика, но и новый математический анализ. Что касается ускорения, то, поскольку Галилей ограничился только равноускоренным случаем, он не нуждался в общем понятии. Ускорение свободного падения как универсальная константа у Галилея еще не появляется.

Что касается роли силы в возникновении неравномерного движения, то здесь высказывания Галилея лишены полной ясности. Он отвергает принцип Аристотеля, что скорость пропорциональна действующей силе, утверждая, что при отсутствии сил сохраняется равномерное прямолинейное движение. Закон инерции (первый закон Ньютона) носит имя Галилея. Галилей постоянно обращается к примеру со снарядом, который летел бы по прямой, если бы не испытывал земного притяжения. Он пишет, что «степень скорости, обнаруживаемая телом, нерушимо лежит в самой его природе, в то время как причины ускорения или замедления являются внешними», «движение по горизонтали является вечным, ибо если оно является равномерным, то оно ничем не ослабевается, не замедляется и не уничтожается». Галилей в «Послании к Инголи» поэтически описывает разнообразные явления на борту равномерно прямолинейно движущегося корабля, которые не позволяют обнаружить это движение: капли воды попадают точно в горлышко подставленного сосуда, камень с мачты падает вертикально вниз, вверх поднимается дым, бабочки летают с одинаковой скоростью во всех направлениях и т. д. Создается ощущение, что Галилей уверенно придерживался принципа инерции в «земной» механике, но не был столь последователен в небесной (об этом речь впереди).

Ньютон приписывал Галилею не только первый закон механики, но и второй, хотя это и было преувеличением: четкой связи между силой и ускорением (когда они отличны от нуля) у Галилея не было. В том, что касается свободного падения, Галилей дал исчерпывающий ответ на вопрос «как», но не дал ответа на вопрос «почему».

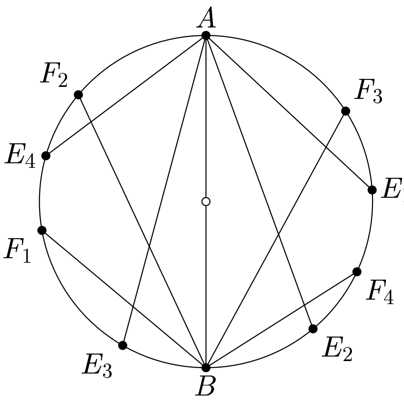


Рис. 1.

Движение по наклонной плоскости. Своим основным выводом Галилей считал утверждение, что падающее тело проходит в последовательные равные промежутки времени отрезки, пропорциональные последовательным нечетным числам. Он хочет проверить это. Но как это сделать? Нельзя же продолжать кидать шары с Пизанской башни, да он и жил уже в Падуе. В лаборатории же падение происходит очень быстро. Но Галилей находит остроумный выход: он заменяет свободное падение более медленным движением тел по наклонной плоскости. Он заметил, что из предположения о равноускоренности свободного падения следует равноускоренность движения тяжелой точки по наклонной плоскости. По существу, это привычное сегодня рассуждение с разложением сил, показывающее, что тяжелая точка скатывается по наклонной плоскости с постоянным ускорением $g\sin\alpha$, где α — угол наклона к горизонтали (g — ускорение свободного падения). Рассуждения Галилея более громоздки: он не вводит ускорение свободного падения, а манипулирует, как это было принято тогда, с большим числом пропорций. Он выводит целый ряд следствий из равноускоренности движения точки по наклонной плоскости, которые уже удобны для лабораторной проверки (если угол наклона мал, то время скатывания велико). Центральное место занимает утверждение, что если наклонные плоскости имеют одинаковую высоту, то времена скатывания относятся как пройденные пути (почему?). Движение по наклонной плоскости представляет для Галилея самостоятельный интерес. Он делает целый ряд наблюдений. Например, если точки двигаются по хордам окружности AE_i, BF_j, AB — вертикальный диаметр, то все времена скатывания равны времени свободного падения по AB (докажите!). Довольно сложное рассуждение приводит Галилей в доказательство того, что если A, B, C — последовательные точки на окружности, то точка по ломаной ABC скатывается быстрее, чем по хорде AC. С этим связана известная ошибка Галилея: он считал, что быстрее всего точка скатывается по четверти окружности, в то время как этим свойством обладает дуга циклоиды.

Движение брошенных тел. Такое движение Галилей называл принужденным (в отличие от свободного падения). Аристотель считал, что тело, брошенное под углом к горизонту, движется вначале по наклонной прямой, затем по дуге окружности и, наконец, по вертикальной прямой. Возможно, Тарталья был первым, кто утверждал, что траектория брошенного тела «не имеет ни одной части, которая была бы совершенно прямой».

Теорию «принужденного» движения Галилей построил сразу же за теорией свободного падения. Путь, по которому он двигался, был прежним: теория (модель явления) предшествовала экспериментам. Догадка Галилея была гениально простой: движение тела, брошенного под углом к горизонту, складывается из равномерного прямолинейного движения, которое имело бы место, не будь силы тяжести, и свободного падения. В результате тело движется по параболе. Отметим, что в этом рассуждении существенно используется закон инерции — закон Галилея.

В рассмотрении сложного движения у Галилея был гениальный предшественник, служивший для него образцом: «я хочу трактовать и рассматривать это явление в подражание Архимеду в его „Спиральных линиях“, где, заявив, что под движением по спирали он понимает движение, слагающееся из двух равномерных, одного — прямолинейного, а другого — кругового, он непосредственно переходит к демонстрации выводов». Речь идет о так называемой спирали Архимеда, которую описывает точка, движущаяся по радиусу вращающегося круга (муха к центру граммофонной пластинки).

Пользуясь свойствами параболы, Галилей составил «таблицу для стрельбы, имеющую важное практическое значение». Недаром Падуя принадлежала Венецианской республике, и Галилей поддерживал постоянные контакты с венецианским арсеналом. Ряд утверждений Галилея, полученных теоретическим путем, допускает экспериментальную проверку. Он доказал утверждение Тартальи о том, что угол в 45° отвечает наибольшей дальности полета, и показал, что для углов, дающих в сумме 90°, дальности полета одинаковы (при фиксированной величине скорости).

Галилей и Кеплер. Открытия Галилея должны были поразить его современников. Конические сечения (эллипсы, параболы, гиперболы) — вершина греческой геометрии — казались плодом математической фантазии, не имеющим отношения к действительности. И вот Галилей доказал, что параболы неминуемо возникают в совершенно «земной» ситуации. (Еще в XIX веке Лаплас приводил применение конических сечений как самое неожиданное применение чистой математики.) Замечательно, что буквально в те же самые годы конические сечения возникли совсем в другой задаче и не менее удивительным образом. В 1604–1605 гг. Иоганн Кеплер (1571–1630) обнаружил, что Марс движется по эллипсу, у которого в фокусе находится Солнце (через десять лет Кеплер распространил это утверждение на все планеты). Это совпадение знаменательно, и для нас эти два открытия стоят рядом, но до Ньютона, вероятно, никто серьезно не сопоставлял эти результаты. Более того, Галилей не признавал закона Кеплера, а о своем открытии Кеплеру не сообщал, несмотря на регулярную переписку (оно было опубликовано уже после смерти Кеплера).

Галилей и Кеплер долгие годы переписывались. Кеплер был для Галилея одним из самых близких по духу ученых. Прежде всего было существенно, что Кеплер безоговорочно принимал систему Коперника. Еще в 1597 г. Галилей (в связи с получением книги «Тайна мироздания») делится с Кеплером сокровенным желанием опубликовать свои аргументы в пользу системы Коперника. Он пишет: «я до сих пор не решился опубликовать их из боязни столкнуться с той же судьбой, которая постигла нашего Коперника, хотя и заслужившего бессмертную славу среди немногих, но представлявшегося большинству заслуживающим освистания и осмеяния, до того велико количество глупцов. Я бы все же решился выступить с моими размышлениями, если бы было больше таких людей, как Вы, поскольку же это не так, я избегаю касаться указанной темы». Кеплер посылает в ответ страстный призыв: «Оставь колебания, Галилей, и выступай вперед!» Он предлагает объединиться: «Если я не ошибаюсь, среди видных математиков Европы немного таких, кто захочет отделиться от нас». А книгу не обязательно печатать в Италии, можно и в Германии. В далекой Праге проблема виделась не так, как в Италии, где шестой год ждал в тюрьме своей участи Джордано Бруно.

Очень поучителен путь, которым шел Кеплер к своему открытию. У Кеплера как ученого было два лица. С одной стороны, это был великий фантазер, пытавшийся постичь величайшие тайны мироздания. Он был уверен, что самая великая тайна, открывшаяся ему, состояла в следующем. Существует шесть планет, потому что существует пять правильных многогранников! «Мне никогда не удастся найти слов, чтобы выразить свое восхищение этим открытием». Кеплер располагает шесть сфер, перемежая их различными правильными многогранниками так, что в каждую сферу один многогранник вписан, а другой — описан. Сферам он ставит в соответствие последовательные планеты. В порядке многогранников особый таинственный смысл (куб отвечает Сатурну, тетраэдр — Юпитеру — и т. д.). Отношения радиусов сфер Кеплер сравнивает с известными относительными размерами орбит и странным образом получает не очень большое расхождение (кроме как для Меркурия). Эти рассуждения, опубликованные в книге «Тайна мироздания», были многими благожелательно встречены, не вызвали возражений у Галилея, а «король астрономов» Тихо Браге пригласил Кеплера сотрудничать с ним.

С этим приглашением связана другая сторона научной жизни Кеплера, так не похожая на первую. Он скрупулезно обрабатывает многочисленные наблюдения Тихо Браге, которые обладали невиданной точностью для наблюдений, не использующих телескопов (их точность оценивают в $\pm 25''$). Он должен пересмотреть орбиты планет, пользуясь наблюдениями Тихо Браге. По-видимому, Тихо Браге (Кеплер называл его «Фениксом астрономии») рассчитывал получить подтверждение своей компромиссной теории, по которой Солнце движется вокруг Земли, а остальные планеты — вокруг Солнца. Но Кеплер проводил вычисления в рамках системы Коперника.

Поскольку Коперник, подобно Птолемею, собирал орбиты планет из кругов, в его системе сохранились эпициклы. Кеплер хочет упростить систему (его итоговый труд, вышедший в 1618–1621 гг., назывался «Сокращение коперниковой астрономии»). Удивительным образом орбита Земли почти не отличается от окружности, однако Солнце несколько смещено относительно центра. Все это знал Коперник, но Кеплер уточнил величину смещения. Он внимательно изучил неравномерный характер движения Земли по орбите и долго искал закономерность в этом движении. Он пробовал обратно пропорциональную зависимость от расстояния до Солнца, ряд других возможностей, пока не обнаружил закон площадей (2-й закон Кеплера). Затем Кеплер вычисляет орбиту Марса и сравнивает ее с разными кривыми. Он проявляет поразительную трезвость и доверие к результатам наблюдений. Один раз он отверг гипотезу, обнаружив расхождение в $8'$ с данными Тихо Браге (такое расхождение почти незаметно для невооруженного глаза). «Он ясно сознавал, что теоретические, логико-математические построения, безразлично насколько прозрачные, не могут сами по себе гарантировать истину, что самые логические теории не имеют ни малейшего значения в естественных науках без сравнения с точнейшим опытом» (Эйнштейн). Кеплер перебрал разнообразные овалы и, наконец, обнаружил, что годится эллипс с Солнцем в фокусе. «Не переставая ощупывать все места окружающего мрака, я вышел, наконец, на яркий свет истины». Не правда ли, путь Кеплера мало напоминал путь Галилея. Галилей в большей степени шел от общих принципов и качественных результатов. На склоне лет Галилей вспоминал: «Я всегда ценил Кеплера за свободный (пожалуй, даже слишком) и острый ум, но мой метод мышления решительно отличен от его, и это имеет место в наших работах об общих предметах. Только в отношении движений небесных тел мы иногда сближались в некоторых схожих, хотя и немногих концепциях, отличающихся общностью оценки отдельных явлений, но это нельзя обнаружить и в одном проценте моих мыслей».

Галилей считал, что в мире царит равномерное круговое движение и не поверил ни в эллиптические орбиты, ни в неравномерное движение планет по орбитам, не приняв к сведению данных наблюдательной и вычислительной астрономии.

Кеплер был первым, кто рассматривал взаимное притяжение тел, связывал его с движением: он даже высказал гипотезу о характере убывания взаимодействия с расстоянием (как $1/r$, что неверно). Он принимал объяснение приливов лунным притяжением. Все это было совершенно неприемлемо для Галилея, отрицавшего дальнодействующие силы, в частности, попытки объяснять земные явления влиянием небесных тел. Особенно это относилось к приливам, которые Галилей ошибочно считал важнейшим доказательством движения Земли. Объяснения указанного типа Галилей отождествлял с астрологией, в которой события в человеческой жизни объясняются влиянием планет. «Среди великих людей, рассуждавших об этом поразительном явлении природы, более других удивляет меня Кеплер, который, обладая умом свободным и острым и будучи хорошо знаком с движениями, приписываемыми Земле, допускал особую власть Луны над водой, сокровенные свойства и тому подобные ребячества». Кеплер оказался прав, но реальные аргументы появились позднее.

Следует иметь в виду, что рассуждения Кеплера о взаимном притяжении содержат много путаницы. В одном отношении он серьезно отставал от Галилея: он считал, следуя Аристотелю, что скорость пропорциональна силе.

Механика земная и механика небесная. К 1610 г. Галилей получил в механике результаты, к которым шел 20 лет. Он начинает работать над всеобъемлющим трактатом, но неожиданные события отвлекают его от этих занятий более чем на 20 лет! Галилей построил телескоп и в начале 1610 г. открыл спутники Юпитера. Весь этот год астрономические открытия следовали одно за другим. Галилей полагает, что у него появились решающие доказательства в пользу системы Коперника. Следующие 23 года жизни он целиком посвятил утверждению этой системы, пока в 1633 г. приговор инквизиции не прервал эту деятельность. Все эти годы Галилей вспоминает о механике постольку, поскольку этого требует разработка «Системы мира». Временами его новая философия даже входит в противоречие с результатами о «земных» движениях. Так, он не находит во Вселенной, «где все части находятся в отличнейшем порядке», места для прямолинейного движения, которое в этих условиях представляется ему «излишним и неестественным». Причина в том, что движение по прямой не может быть периодическим, и состояние Вселенной должно все время меняться. Он оставляет место прямолинейному движению лишь в неустойчивых ситуациях, а в природе должно царить круговое движение. Открытый им закон инерции для «местных движений» Галилей считает справедливым лишь вблизи Земли.

Также приближенным считает Галилей закон движения брошенных тел по параболе. Он считает, что на самом деле траектория должна быть такова, чтобы заканчиваться в центре Земли. Из-за этого уже после открытия параболичности траектории он делал странные заявления о том, что движение брошенного тела должно происходить по дуге окружности или винтовой линии. Это вызвало возражение Ферма, переданное через Каркави (1637 г.). В ответ Галилей объявляет свое высказывание «поэтической фикцией», обещает опубликовать утверждение о параболичности траектории, но в заключение пишет: «Никакого отступления от параболического движения не произойдет, пока мы производим опыты на Земле, на высотах и расстояниях, нам доступных; но эти отступления будут заметны, велики и огромны при подходе и значительном приближении к центру». Приближенный характер параболической траектории был прояснен Ньютоном, но ожидания Галилея не оправдались[1].

Главный вопрос о движении, который интересовал Галилея все эти годы, был связан со стандартным возражением противников движения Земли: почему предметы не улетают с движущейся Земли? У Галилея нет сомнений, что за это ответственна сила тяжести, но как дать мотивированное объяснение? Пусть тело движется по сфере радиуса R со скоростью v. Так начинает Галилей свои рассуждения. Зафиксируем начало отсчета. Если бы не сила тяжести, тело продолжало бы прямолинейное движение по касательной со скоростью v. Чтобы обеспечить движение по сфере (удержать тело), надо добавить к этому движению движение по направлению к центру. Привычное для Галилея рассмотрение со сложением движений! Что оставалось сделать? Заметить, что (по теореме Пифагора) для второго движения путь $s(t) = \sqrt{R^2 + v^2t^2} - R$, а если время t мало, то это почти то же самое, что $\tilde{s}(t) = \dfrac{v^2t^2}{2R}$ $\big(\dfrac{s - \tilde{s}}{t^2} \to 0$ при $t \to 0\big)$. Теперь уже нельзя не узнать формулы Галилея для пути при равномерно ускоренном движении с ускорением $a = v^2/2R$. Ясно, что если $g > a$, то тело будет удерживаться на поверхности сферы. Однако второй половины рассуждения Галилей не провел, перейдя вместо этого к очень путаным мотивировкам. А формулу для центростремительного ускорения на пути, намеченном Галилеем, получил Гюйгенс в 1659 г.

«Беседы». В 1633 г. находясь в ссылке в Сиене, уже через несколько недель после приговора инквизиции и отречения, Галилей вспомнил о своих давних результатах по механике и решил немед-

[1]Поскольку Галилей надолго задержал публикацию, первое упоминание о параболической траектории появилось в 1632 г. в «Зажигательном зеркале» Кавальери, который очень ясно усвоил от Галилея идею сложения прямолинейных движений, принцип инерции. Галилея обидело отсутствие необходимых ссылок, он говорит об открытии параболичности траектории как главной цели сорокалетних трудов. Извинения Кавальери быстро удовлетворили Галилея.

ленно записать их. Он продолжает работу в Арчетри и Флоренции, несмотря на вынужденное одиночество, ухудшающееся здоровье, прогрессирующую слепоту. «Я хотя и молчу, но провожу жизнь не совсем праздно» — писал Галилей. Книга «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению» была закончена в 1636 г., с большими предосторожностями переправлена за границу (не ясно было, как отнесется к книге инквизиция) и вышла в Голландии в июле 1638 г. Как и предыдущая книга, явившаяся причиной преследования, «Беседы» написаны в форме диалогов, которые в течение шести дней ведут те же самые герои: Сальвиати (проводящий точку зрения автора), Сагредо и Симпличио (сторонник Аристотеля; его имя переводится как «простак») . В третий и четвертый дни они читают трактат академика (Галилея) «О местном движении» и подробно обсуждают его. Кстати, в названии книги «механика» и «движение» разделены, поскольку в те годы к механике было принято относить лишь статику и сопротивление материалов. Выбранная автором форма дискуссий позволяет многое узнать о том, как Галилей шел к своим открытиям.

Престарелый Галилей стремился реализовать свои давно оставленные замыслы. Но многое уже было ему не по силам, он нуждался в помощниках. Он поручает сыну Винченцо построить часы на основе открытого в юности свойства маятника, но ему не удалось увидеть свою идею осуществленной. Инквизиция ограничивает контакты Галилея с внешним миром. Уже после окончания «Бесед» на вилле Арчетри, которую Галилей называл своей тюрьмой, стали появляться желанные гости. Это старый друг и верный ученик Бенедетто Кастелли, Кавальери; а Вивиани и Торричелли с некоторых пор не покидают учителя. Они помогали в завершении его дел, продолжали его исследования.

Так, Торричелли вычислил вектор скорости брошенного под углом тела при помощи правила сложения скоростей, а поскольку скорость направлена по касательной, он получил изящный способ проводить касательную к параболе. Наступала эра дифференциального и интегрального исчисления, и задачи о проведении касательных к кривым выходили в математике на передний план. Разрабатывались различные способы их проведения. Одним из них стал кинематический способ, при котором кривая представлялась как траектория сложного движения, а касательная находилась при помощи сложения скоростей, как это впервые сделал Торричелли для параболы. Французский математик Жиль Пирсон, более известный под именем Роберваль (1602 – 1675), творил при помощи этого приема чудеса. «Механические» кривые, полученные как траектории различных движений, прочно вошли в обиход математического анализа. Стоит вспомнить, что сам Галилей сознательно ограничивал себя рассмотрением движений, реально в природе встречающихся: «Хотя, конечно, совершенно допустимо представлять себе любой вид движения и изучать связанные с ним явления (так, например, можно определить основные свойства винтовых линий или конхоид, представив их себе возникающими в результате некоторых движений, которые в действительности в природе не встречаются, но могут соответствовать предположенным условиям), мы тем не менее решили рассматривать только те явления, которые действительно имеют место в природе». Пользу общего взгляда на движение продемонстрировал Ньютон.

«Беседы» надолго определили развитие механики. Они были настольной книгой для Гюйгенса и Ньютона, великих наследников Галилея. Трудно себе представить, насколько бы задержалось развитие механики, если бы не произошли печальные события и Галилей так и не записал бы своих великих открытий.

Математическое добавление. У истории открытия закона свободного падения есть еще одна сторона: это — история не только о совершившемся открытии, но и об открытии... упущенном. После того как Галилей понял, что по закону $v(t) = cs(t)$ движение происходить не может, он потерял интерес к этому закону. Его интересуют только естественные движения! Вскоре шотландский лорд Непер заинтересовался движением, происходящим по аналогичному закону.

Непер рассмотрел прямолинейное движение, происходящее по закону $v(t) = l(t)$, где $v(t)$ — мгновенная скорость в момент времени t, а $l(t)$ — это уже не пройденный путь, а расстояние движущейся точки в момент t от фиксированной точки O на прямой. Случай, рассмотренный Галилеем, отвечает ситуации, когда движущаяся точка находится в начальный момент $t = 0$ в точке O, т. е. $l(0) = 0$, $l(t) = s(t)$. У Непера $l(0) > 0$, $l(t) = l(0) + s(t)$.

Оказывается, что при $l(0) > 0$ движение с такими свойствами в принципе происходить может и обладает замечательными математическими свойствами (хотя «в природе и не происходит»!). Исследуем его. Прежде всего, если начальное расстояние $l(0)$ умножить на c, то на c умножается расстояние $l(t)$ и скорости $v(t)$ во все моменты времени. Строго говоря, это нуждается в обосновании! Но ясно, что при умножении l и v на константу закон $v(t) = l(t)$ сохранится. Далее, ограничимся случаем $l(0) = 1$. Тогда

$$l(t_1 + t_2) = l(t_1)l(t_2).$$

Наметим доказательство этого соотношения. Удобно объявить момент t_1 новым началом отсчета времени. Тогда в силу сказанного выше в новый момент t_2 (старый $t_1 + t_2$) расстояние до O должно быть в $l(t_1)$ раз больше, чем в старый момент t_2. Это и означает, что $l(t_1+t_2) = l(t_1)l(t_2)$. Так впервые появилась в науке показательная функция!

Имеем: $l(t) = e^t$, где $e = l(1)$, т. е. это расстояние от O в момент $t = 1$. Пользуясь тем, что e — расстояние от O в момент времени $t = 1$, и тем, что $v = l$, нетрудно показать, что $e > 2$ (докажите!). На самом деле $e = 2{,}71828\ldots$; e стали называть числом Непера. Рассматривая движения, происходящие по закону $v(t) = kl(t)$, можно получить показательные функции с другими основаниями.

Для всякого положительного a время t, для которого $l(t) = a$, назовем *логарифмом (натуральным)* a (обозначается $\ln a$)[1]. В си-

[1] Рассмотрения Непера были не совсем такими, и неперовы логарифмы отличаются от натуральных.

лу сказанного выше $\ln ab = \ln a + \ln b$. Двадцать лет составлял Непер таблицы логарифмов, и в 1614 г. вышло «Описание удивительной таблицы логарифмов», предуведомление к которой содержало извинения за неминуемые ошибки и кончалось словами: «Ничто сначала не бывает совершенным».

Открытие Непера замечательно не только тем, что он создал таблицы логарифмов, но и тем, что он показал, что новые функции могут появляться при изучении движений. Начиная с этих работ Галилея и Непера, механика стала для математики постоянным источником новых функций и кривых.

2. *Медичейские звезды*

В ноябре 1979 г. Ватикан решил реабилитировать Галилео Галилея, осужденного судом инквизиции в 1633 г. Тогда Галилей был признан «сильно заподозренным в ереси», за то, что «держался и защищал в качестве правдоподобного мнение $\langle\ldots\rangle$, будто Солнце есть центр мира и не движется, а Земля не есть центр мира и движется». На проходившем в ноябре 1979 г. заседании Ватиканской Академии наук, посвященной столетию Эйнштейна, папа Иоанн Павел II отметил, что Галилей «много страдал — мы не можем теперь скрывать этого — от притеснений со стороны церкви», но, квалифицировав покаяние Галилея «как божественное озарение в уме ученого», он утверждал, что трагедия Галилея подтверждает «гармонию веры и знания, религии и науки». В октябре 1980 г. появились сообщения, что папа распорядился провести дополнительное расследование обстоятельств процесса над Галилеем. Разговоры об оправдании Галилея шли еще на II Ватиканском соборе (1962 — 1965). Оправдание хотели приурочить к 400-летию ученого в 1964 г., но, видимо, не успели, поскольку вопрос оказался небесспорным. При этом труды Галилея (наряду с трудами Коперника и Кеплера) были удалены из «Индекса запретов» уже в 1835 г. Суд над Галилеем, его отречение не переставали волновать людей, часто далеких от науки, три с половиной века. Характерно внимание, которое уделила этой проблеме художественная литература (достаточно вспомнить пьесу Бертольда Брехта «Жизнь Галилея»). Проблема Галилея жива и сегодня, несмотря на недавнюю «реабилитацию» ученого.

На рубеже XVI и XVII веков с вопросом о системе мира дело обстояло не просто. В IV веке до н. э. Аристотель утверждал, что семь видимых светил равномерно вращаются вокруг Земли, причем вращаются на самом деле хрустальные сферы, к которым они прикреплены, восьмую сферу занимают неподвижные звезды. Астрологи классифицировали планеты так: два светила — Луна и Солнце, две вредоносные планеты — Марс и Сатурн, две благоприятные — Юпитер и Венера и одна нейтральная — Меркурий.

Не в правилах Аристотеля, а особенно его последователей, было объяснять отклонения от его схемы — скажем, удивительное «попятное» движение планет, когда в какой-то момент направление видимого движения планеты изменяется на противоположное. Постепенно накапливались противоречия с точно зафиксированными данными наблюдений. Во II веке н. э. Птолемей построил систему, максимально учитывающую данные наблюдений. При этом он считал, что планеты движутся по вспомогательным окружностям (эпициклам), центры которых (деференты), в свою очередь, вращаются вокруг Земли. Желание учесть новые данные приводило ко все большему усложнению системы. Нужно отдать должное упорству и остроумию ученых, которым удавалось систему спасать.

Совершенно неожиданный путь предложил Николай Коперник (1473–1543). Его тщательно разработанная, согласованная с наблюдениями схема содержит все основные моменты сегодняшнего взгляда на Солнечную систему: вокруг Солнца вращаются планеты, включая Землю; Земля, кроме того, совершает суточное движение; Луна вращается вокруг Земли. При таком подходе все невероятно упростилось, хотя остались невыясненные моменты при согласовании с данными наблюдений. По мнению Коперника, движения планет близки к равномерным движениям по окружности (как у Аристотеля), а несомненно имевшиеся отклонения, по-видимому, опять требовали эпициклов, хотя их роль уже была не столь существенна, как у Птолемея. Эпициклы исчезли лишь у Кеплера, открывшего эллиптичность орбит. Система Коперника не была чисто описательной теорией, основанной на качественных явлениях. Она содержала многочисленные вычисления: расстояния до Солнца, периоды обращений и т. д. Только такая теория могла конкурировать с теорией Птолемея, полно учитывавшей данные наблюдений.

На возможность движения Земли указывали еще пифагорейцы. Поэтому церковь называла учение о движении Земли пифагорейским. Имя Коперника в этом плане предпочитали не употреблять по следующей причине. Книге Коперника «Об обращении небесных сфер» (вышедшей в год его смерти) было предпослано предисловие (возможно, написанное не самим Коперником), в котором его система объявлялась удобной математической схемой для астрономических вычислений и не больше. Рассматриваемые в ней движения объявлялись воображаемыми. А значит, об «истинных» движениях речь в книге не идет. Это не функции математиков! Этот вопрос должны решать философы и богословы в соответствии со священным писанием. Книга была посвящена папе Павлу III. Такой компромисс устраивал церковь, и книга не была объявлена еретической. Математикам можно было позволить пользоваться в их вычислениях воображаемыми схемами. Исключением не были и астрономы-иезуиты, которые пользовались таблицами Коперника, в частности, в расчетах, нужных для реформы календаря.

Незыблемым должно было оставаться утверждение, что Земля покоится, а Солнце движется. Даже в том, что касается остальных планет, церковь не была столь бескомпромиссной (о них не сказано в писании). Была проявлена терпимость к системе Тихо Браге, у которого Солнце движется вокруг Земли, а остальные планеты вокруг Солнца. Тот же Тихо Браге по существу расстался с хрустальными сферами, утверждая, что кометы не принадлежат «подлунному миру», а прилетают извне (Галилей, кстати, придерживался иной точки зрения).

Итак, система Коперника — удобная математическая фикция, а учение пифагорейцев — ересь. Так проходила граница. На этот компромисс и не готов был согласиться Галилей: «Коперника, на мой взгляд, нельзя смягчить, ибо движение Земли и недвижимость Солнца — существеннейший пункт и общий фундамент его учения. Поэтому его надо либо целиком осудить, либо оставить таким, как он есть!» Галилей настаивал, что движение Земли не воображаемое, а истинное. К решительной борьбе за гелиоцентрическую систему мира Галилей шел непростой дорогой. Рано поверив в систему Коперника, он долго не решался опубликовать свои аргументы в ее пользу (об этом свидетельствует письмо Кеплеру 1597 г.). XVII век начался сожжением Джордано Бруно, поэта и философа, грезившего об иных мирах, подобных Солнечной системе. К 1610 г. Галилей подошел к пику своей научной деятельности: блестяще завершились его двадцатилетние исследования естественных движений (свободного падения и движения брошенного тела). Он начинает труд о своих великих открытиях и неожиданно оставляет его на неопределенный срок. Что же случилось? В научной жизни Галилея произошли события, которые заставили вполне практичного Галилея отодвинуть на второй план публикацию открытий, которым была отдана молодость. Галилей решает, что у него появились решающие аргументы в пользу системы Коперника, и отныне вся его жизнь нацелена на пропаганду этих идей. Вспомним об этих важных аргументах.

«Новые очки». Рассказывая о жизни великих ученых, нередко приходится обращать внимание на дела житейские. Более высокое жалование было одной из причин переезда Галилея из Пизы в Падую. Здесь его материальное положение стало более прочным. Первоначальное жалование в 180 флоринов, хотя и медленно, увеличивалось; дополнительный доход давали молодые аристократы, с которыми Галилей занимался отдельно и которые часто жили в его доме. Однако тяжелым грузом легла на плечи Галилея выплата приданого сестрам, да и его собственная семья росла и требовала все больше средств. В 1609 г. Галилей был озабочен очередными переговорами об увеличении жалования. Скупую и практичную синьорию Венецианской республики могло раскошелить какое-нибудь изобретение, имеющее несомненное практи-

ческое применение. Галилей был не чужд техническим задачам. В его доме была прекрасная мастерская, а недавно он сконструировал удобный пропорциональный циркуль («геометрический и военный»), сам следил за его изготовлением и распространением. Можно было бы подумать о таблицах для стрельбы, основанных на параболичности траектории полета снаряда. Но неожиданно возникла совсем другая идея.

В 1608 г. в Голландии появились зрительные трубы, позволяющие разглядывать отдаленные предметы; их называли иногда «новыми очками». Еще Леонардо да Винчи говорил об очках, позволяющих видеть Луну большой, а Роджер Бэкон об очках, делающих человека размером с гору. Честь изобретения оспаривали мастера-оптики Липперсгей и Андриансен. К началу 1609 г. такую трубу можно было купить в Голландии за несколько сольдо. К середине года трубы появились в Париже. Генрих IV проявил пессимизм к новинке, объяснив, что в данный момент ему больше нужны очки, увеличивающие близкие предметы, а не далекие. Тогда же какой-то чужестранец пытался продать зрительную трубу Венецианской республике, не вдаваясь в подробности по поводу ее происхождения. Паоло Сарпи, друг Галилея, дал отрицательный отзыв о возможностях использования зрительной трубы «на войне, на суше и на море». Первые трубы были еще очень несовершенны. Галилей услышал о трубах, когда находился в Венеции.

«Узнав об этом, я вернулся в Падую, где тогда проживал, и начал размышлять над задачей В первую же ночь после моего возвращения я ее решил, а на следующий день изготовил инструмент, о котором и сообщил в Венецию тем же самым друзьям, с которыми предшествующий день я рассуждал об этом предмете. Тотчас же я принялся за изготовление другого, более совершенного инструмента, который шесть дней спустя привез в Венецию». В другом месте ситуация описывалась еще более торжественным образом: «не жалея ни труда и ни средств, я достиг того, что изготовил инструмент, настолько совершенный, что при взгляде через него предметы казались почти в тысячу раз крупнее и более чем в тридцать раз ближе, чем видимые естественным образом. Совсем излишне было бы перечисление того, насколько удобны такие инструменты как на суше, так и на море».

На самом деле характеристики труб были более скромными. Первая труба Галилея давала трехкратное увеличение, а труба, привезенная в Венецию, — восьмикратное. Галилей решил при помощи своей совершенной трубы расположить к своей просьбе членов синьории (быть может, это была идея Сарпи). 21 августа самые уважаемые люди Венеции рассматривали с колокольни собора Св. Марка отдаленные кварталы города, а 24 августа Галилей торжественно передал свою трубу дожу Венеции Леонардо Донато. Галилей не скупился на рекламу своего подарка. Он говорит, что извлек его идею «из наиболее сокровенных соображений о перспективе».

Потом много говорили, что Галилей переоценил свой вклад или даже присвоил себе чужое изобретение (об этом идет речь в пьесе Брехта). По крайней мере в публикациях Галилей всегда признавал, что построил свою трубу, услышав об изобретении голландцев (но не имея подробной информации и не видя «фламандской перспективы»). Позднее он подчеркивал оригинальность своего пути: «Теперь мы достоверно знаем, что голландец — изобретатель телескопа был простым мастером, изготовлявшим обыкновенные очки. Случайно перебирая стекла разных сортов, он взглянул сразу через два стекла, одно выпуклое, другое вогнутое, находившиеся на разных расстояниях от глаза, и при этом увидел и наблюдал возникший эффект и таким образом открыл инструмент. Я же, движимый вышеупомянутым известием, нашел инструмент путем рассуждения». Название «телескоп» предложил Чези (см. ниже) в 1611 г. во время демонстрации трубы Галилея в Риме; раньше Галилей пользовался термином «перспектива». Можно считать, что Галилей продемонстрировал превосходство теории над практикой: многие годы никто не мог создать трубы, сравнимые по возможностям с трубами Галилея (из-за этого, в частности, не получали подтверждения астрономические наблюдения Галилея).

Труба Галилея выполнила свое назначение: ему было назначено пожизненно годовое жалование в тысячу флоринов, невиданное для математика. Галилей должен был изготовить 12 труб для синьории, а никому больше труб не предоставлять.

«Звездный вестник». Вскоре Галилей имел трубу с 20-кратным увеличением, а потом он, «оставив дела земные ⟨...⟩, обратился к небесным». В конце 1609 г. Галилей рассматривает через трубу Луну и обнаруживает, «что поверхность Луны не гладкая и не ровная и не в совершенстве сферическая, как полагал в отношении ее целый легион философов, а, напротив того, неровная, шероховатая, испещренная углублениями и возвышенностями, наподобие поверхности Земли». Кроме того, Галилей обращает внимание на пепельный свет на части Луны, не освещенной Солнцем. Он считает этот свет «отблеском Земли». Позднее оказалось, что в то же время начали наблюдения небесных тел при помощи телескопа англичанин Харриот и его ученик Лоуэр (их наблюдения не были известны современникам). Лоуэр писал в письме учителю, что Луна напомнила ему пирог с вареньем, испеченный его кухаркой на прошлой неделе. О пепельном свете на Луне говорили уже Леонардо да Винчи и Местлин, учитель Кеплера.

Затем перед глазами Галилея Млечный Путь распался на отдельные звезды: «Все споры, в течение веков мучившие философов, умолкли сами собой благодаря наглядности и очевидности ⟨...⟩ Млечный Путь представляет собой ничто иное, как скопление бесчисленного множества звезд, как бы расположенных в кучах».

Наконец, 7 января 1610 г. Галилей направил телескоп в сторону Юпитера. Вблизи Юпитера он обнаружил три звезды. Он не сомневался, что видит обычные «неподвижные» звезды, но что-то привлекло его пристальное внимание. На следующую ночь Галилей, «водимый неизвестно какой судьбой», вновь рассматривает Юпитер. Он имел все основания не сожалеть! Он вновь увидел знакомые звезды, но... их положение относительно Юпитера изменилось: вчера они располагались по разные стороны Юпитера, а сегодня — все были по одну сторону. Пока еще можно продолжать считать звезды неподвижными, а изменение взаимного положения объяснить движением Юпитера. 9 января «небо со всех сторон было обложено тучами». 10 и 11 января Галилей нашел только две из трех звезд, а 13 января, напротив, появилась четвертая.

Зреет новое решение: виденные им звезды перемещаются относительно Юпитера, это его спутники — лу́ны, — и их исчезновение объясняется их затмением. К концу месяца Галилей уверен в этом, «переходя от ощущения загадки к чувству восхищения». Он пишет флорентийскому министру Винте: «Но наибольшим из всех чудес представляется то, что я открыл четыре новые планеты и наблюдал свойственные им их собственные движения и различия в их движениях относительно друг друга и относительно движений других звезд. Эти новые планеты движутся вокруг другой большой звезды таким же образом, как Венера и Меркурий и, возможно, другие известные планеты движутся вокруг Солнца». Нет сомнений, в каком контексте Галилей рассматривал свое открытие, но какую осторожную формулировку употребляет он пока в отношении «других известных планет»!

До 2 марта Галилей наблюдает за спутниками Юпитера, пользуясь каждой безоблачной ночью, а уже 12 марта выходит его знаменитый «Звездный вестник, возвещающий великие и очень удивительные зрелища и предлагающий на рассмотрение каждому, в особенности же философам и астрономам, Галилео Галилеем, флорентийским патрицием, государственным математиком Падуанской гимназии, наблюденные через подзорную трубу, недавно им изобретенную, на поверхности Луны, бесчисленных неподвижных звездах, Млечном Пути, туманных звездах и, прежде всего, на четырех планетах, вращающихся вокруг звезды Юпитера на неодинаковых расстояниях с неравными периодами и с удивительной быстротой».

Далее на все сказанное выше наложились дела житейские. Оказалось, что жалование прибавят только через год, а кроме того, Галилея стали очень тяготить преподавательские обязанности. Он начинает думать о переезде во Флоренцию. Только что умер герцог Фердинандо Медичи и на престол вступил Козимо II, бывший учеником Галилея. Покровительство герцога может быть незаменимым при решении многих проблем, особенно в трудном деле защиты системы Коперника. Уже нет сомнений, что это будет главным делом Галилея. Он пишет в письме Винте в связи с возможным переездом: «Труды, которые мне предстоит довести до конца, суть прежде всего два тома «Система мира», огромный замысел, исполненный философии, астрономии и геометрии».

А пока Галилей предлагает через Винту назвать спутники Юпитера в честь Козимо Медичи Космейскими или Медичейскими звездами. Был выбран второй вариант. Количество спутников удачно совпадало с тем, что у Козимо было три брата. «Звездный вестник» посвящается Козимо Медичи: «Называя новые звезды, открытые мной, величавым именем рода Медичи, я сознаю, что если прежде возвышение в звездный мир служило для прославления богов и властелинов, то в данном случае, наоборот, величавое имя Медичи обеспечит бессмертное воспоминание об этих звездах». Потом все четыре спутника получили собственные имена (Ио, Европа, Ганимед, Каллисто), а чтобы отличить от открытых позднее спутников Юпитера, их будут называть галилеевыми.

На пасхальные каникулы Галилей отправился во Флоренцию. Он везет с собой трубу, чтобы герцог мог сам увидеть «свои» звезды. Галилей окружен почетом, в его честь должна быть выбита медаль с изображением Медичейских звезд, вчерне договариваются об условиях переезда, лишь уточняется название должности Галилея. Государю приятно увековечить свое имя на небе, никто из царственных особ не может похвастаться этим. 14 мая Галилей получает из Франции письмо от 20 апреля, в котором его просят «открыть возможно скорей какое-либо небесное тело, которому могло бы быть дано имя его величества». Речь идет о Генрихе IV. Уточняется, что звезду следует назвать «именем Генриха без добавления Бурбон».

Оказалось, что автор письма не зря торопил Галилея: пока шло письмо, «сопутствуемый счастьем государь» был убит. Позднее Галилей писал во Флоренцию, что дом Медичи оказался в исключительном положении: ни у Марса, ни у Сатурна спутников не оказалось (через 50 лет Гюйгенс и Кассини открыли спутники Сатурна, потом обнаружились спутники и у Марса).

Сомнения не покидали герцога. Упорно распространялись слухи, что подаренные ему звезды — плод фантазии Галилея или порождение его трубы. Об этом говорил даже Христофор Клавий, первый математик Римской коллегии. Положение осложнялось тем, что никто из астрономов, кроме самого Галилея, Медичейских звезд не видел. Галилей расплачивался за то, что ни у кого не было столь совершенных труб, как у него. Столь важное открытие должны подтвердить три самых знаменитых астронома: Кеплер, Маджини, Клавий. А пока вопрос о переезде во Флоренцию откладывался.

Кеплер, Маджини, Клавий. Казалось, что проще всего обстоит дело с Маджини. Галилей по дороге из Флоренции в Падую остановится в Болонье и покажет ему открытые звезды. Маджини, славившийся в равной мере своими вычислительными способностями и хитростью, подчеркнуто предупредителен, но он делает вид, что не может ничего увидеть около Юпитера. Он не спорит, готов объяснить все своим ослабевшим зрением, но это не может утешить Галилея.

Кеплер сразу откликнулся на сообщение об открытии Галилея. Уже 19 апреля он пишет Галилею восторженное письмо. Оказывается, что известие о новых планетах пришло в Германию еще в середине марта. Кеплер в мягкой форме журит Галилея за отсутствие ответа на его «Новую астрономию», содержащую два первых его закона и недавно посланную Галилею: «ты, мой Галилей, вместо чтения чужой книги занялся собственной невероятнейшего содержания о четырех до сих пор неизвестных планетах ⟨...⟩, найденных при помощи двойной зрительной трубы».

Первоначальная информация была расплывчата, Кеплер испугался, что Галилей открыл новые (сверх шести) планеты в Солнечной системе, а он твердо держался мнения, что планет ровно шесть, причем число шесть не случайно, а связано с тем, что имеется пять правильных многогранников. Фантазия Кеплера рождает еще одну возможность: все планеты подобно Земле имеют по одной Луне, их и должен был открыть Галилей: «если Земля, по Копернику, одна из планет, имеет свою движущуюся вокруг нее

Луну и выходящую из общего счета, то, конечно, могло случиться, что Галилей действительно мог увидеть еще четыре луны, вращающиеся в очень тесных пределах вокруг малых тел Сатурна, Юпитера, Марса и Венеры; Меркурий же — самый последний из окружения Солнца, настолько погружен в его лучи, что в нем Галилей до сих пор не мог заметить чего-нибудь подобного». Кеплер повсюду ищет числовые закономерности! Затем он думает о том, что речь может идти о планетах, вращающихся около «неподвижных звезд», а не Солнца, вспоминает бесчисленные миры Джордано Бруно и уже думает «о возможности после этого начала сделать открытия там еще бесчисленного множества новых планет».

Тем временем император Рудольф II (Кеплер был императорским астрономом) получает «Звездный вестник». Кеплер безоговорочно доверяет сообщению Галилея: «Может быть, я покажусь слишком смелым, если так легко поверю твоим утверждениям, не подкрепившись никаким собственным опытом. Но почему же мне не верить ученейшему математику, о правоте которого свидетельствует самый стиль его суждений, который далек от суетности и для стяжания общего признания не будет говорить, что видел то, чего на самом деле не видел, не колеблясь из любви к истине противоречить распространеннейшим мнениям».

А самого Кеплера, разумеется, волнуют закономерности в распределении числа спутников у планет: «Лучше я пожелаю, чтобы у меня была готова зрительная труба, с которой я обогнал бы тебя в открытии двух (так мне кажется, требует пропорция) спутников Марса и шести или восьми Сатурновых, к которым, может быть, прибавится один-другой вокруг Венеры и Меркурия». Кеплер не знал, остановиться ему на арифметической или геометрической прогрессии!

Кеплер указывает Галилею на ряд предшественников (Местлин говорил о пепельном свете Луны, Порто предсказывал возможность создания зрительной трубы). Кеплер надеется, что Солнце ярче неподвижных звезд, и ему хочется верить в исключительность нашего мира: «наш мир не принадлежит к простому стаду других бесконечных». Нет предела фантазиям Кеплера:

«не будет непохожим на истину предположение, что не только на Луне, но и на Юпитере имеются жители ⟨...⟩ Дай корабли или приспособь паруса к небесному воздуху, и найдутся люди, которые не побоятся и такой обширности».

Маджини пытается привлечь Кеплера на свою сторону. Кеплер неумолим: «Мы оба коперникианцы — свой своему радуется». Критические замечания из «Разговора Иоганна Кеплера со звездным вестником» (ответа Галилею) обнадежили Маджини: «Теперь остается только этих четырех новых прислужников Юпитера изгнать и уничтожить». Серию памфлетов против Галилея открыл в мае 1610 г. Мартин Горкий, астроном из окружения Маджини. В его «Кратчайшем странствии против „Звездного вестника“ » спутники Юпитера объявлялись оптическим обманом. Кеплер не постоянен в своем отношении к Горкому. В письме к Галилею это сочинение называется наглым, он «удивляется дерзости этого юнца». Самому Горкому, выражая удивление его продолжающимся сомнениям в «звездах Галилея», Кеплер пишет: «не удивляюсь и не обвиняю тебя; мнения философствующих должны быть свободными».

Кеплера начало волновать отсутствие подтверждений. Он сам все еще не имел подходящей трубы. Из Болоньи пришло заключение университета, что в собственную трубу Галилея звезды не видны (инсценировка Маджини). В августе обеспокоенный Кеплер пишет Галилею: «Я не могу скрыть от тебя, что в Прагу приходят письма многих итальянцев, что при помощи твоей зрительной трубы нельзя видеть эти планеты ⟨...⟩ Поэтому я прошу тебя, Галилей, чтобы ты возможно скорее привел некоторых свидетелей ⟨...⟩ На тебе одном лежит все доказательство истинности наблюдения». К счастью, император Рудольф II, известный не только своими причудами, но и любовью к наукам, воспылал страстью к зрительным трубам. Наконец в Праге появилась достаточно совершенная труба, и в сентябре Кеплер наблюдал спутники Юпитера. Участники наблюдения независимо зарисовали положения звезд и рисунки совпали. «Ты победил, Галилеанин!» — воскликнул Кеплер.

В сентябре спутники Юпитера видел Сантини в Венеции, а в декабре пришло особенно радостное известие: спутники наблюдал Клавий. Правда, он еще не был «уверен, планеты это или нет». В сентябре Галилей переехал во Флоренцию. Он вступает в переписку с Клавием (находясь в Венецианской республике, переписываться с иезуитами было нельзя). «Воистину Вы, Ваша милость, заслуживаете великой похвалы, поскольку Вы первый, кто это наблюдал» — пишет Галилею Клавий. Нашел Галилей путь и к сердцу Маджини. Он рекомендовал его работы по зажигательным стеклам герцогу, способствовал получению освободившейся кафедры в Падуе (Маджини претендовал на это место, еще когда Галилей переезжал в Падую из Пизы). Осторожный Маджини положительно отзывается о свидетельстве Сантини. На большее рассчитывать не приходилось!

Год великих открытий. 1610 год, начавшийся открытием спутников Юпитера, был необычайно счастливым для Галилея-астронома: почти все свои замечательные астрономические наблюдения он сделал именно в этом году. 25 июля Галилей снова наблюдал «Юпитера утром на Востоке вместе с его свитой». После этого он обнаружил «еще другое необычайнейшее чудо». Он сообщает о своем открытии во Флоренцию, прося держать его в тайне до публикации: «Звезда Сатурна не является одной только, но состоит из трех, которые как бы касаются друг друга, но между собой не движутся и не меняются $\langle\ldots\rangle$, причем средняя из них примерно в три раза больше, чем две боковые». Кеплеру Галилей посылает зашифрованную в виде анаграммы фразу: «Высочайшую планету тройною наблюдал». Позднее Галилей писал: «Я нашел целый двор у Юпитера и двух прислужников у старика (Сатурна), они его поддерживают и никогда не отскакивают от его боков».

Пять месяцев не раскрывал Галилей своей тайны. Кеплеру и Рудольфу II не терпелось узнать разгадку, строились самые невероятные предположения: «Удовлетвори как можно быстрее наше страстное желание узнать, в чем состоит твое новое открытие. Не существует человека, которого ты мог бы опасаться как соперника». Галилей раскрыл тайну, добавив, что в более слабую трубу Сатурн напоминает маслину. Так получилось, что открытие Галилея (с необходимыми ссылками) впервые упоминается в печати в предисловии к «Диоптрике» Кеплера. Через два года Сатурн неожиданно перестал быть трояким. Галилей связал это с движением Сатурна вокруг Солнца и предсказал, что скоро его снова можно будет наблюдать в виде трех звезд. Предсказание сбылось, но тайны Сатурна Галилей не разгадал. Тайна раскрылась, когда в 1655 г. Гюйгенс, рассматривая Сатурн в телескоп с 92-кратным увеличением, обнаружил, что Сатурн окружен кольцом, которое при меньшем увеличении казалось боковыми звездами. Кольцо становится незаметным, когда наблюдатель оказывается в его плоскости. Это редкое явление и посчастливилось наблюдать Галилею. Такова была эволюция зрительных впечатлений от Сатурна по мере усиления телескопов: от маслины до шара, окруженного кольцом. Гюйгенс открыл также самый большой спутник Сатурна — Титан.

Вскоре после того, как было послано письмо Кеплеру с разгадкой анаграммы, появились новости и о других планетах. Галилей давно пристально наблюдал за Венерой и когда она была утренней звездой, и когда стала вечерней. С Венерой и Меркурием было много хлопот и у сторонников Птолемея, и у сторонников Коперника. Первые не могли договориться, где помещаются их «сферы» — внутри «сферы» Солнца или вне. Для сторонников Коперника было ясно, что если эти планеты являются темными телами, то поскольку они располагаются между Солнцем и Землей, временами должны наблюдаться неполные диски планет (должны наблюдаться явления, подобные фазам Луны). Этой проблемы не возникает, если предполагать, что планеты светят собственным светом (по-видимому, так думал Кеплер) или что они прозрачны (эта возможность серьезно обсуждалась). Быть может, телескоп поможет увидеть то, что не удавалось увидеть простым глазом?

Об этой проблеме напоминает Кастелли в письме Галилею от 5 декабря 1610 г.: «Поскольку (как я верю) правильно положение Коперника, что Венера вращается вокруг Солнца, то ясна необходимость того, чтобы она наблюдалась нами иногда рогатой, иногда же нет ⟨...⟩, если, однако, небольшая величина рогов и испускание лучей не мешает нам постоянно наблюдать эти различия». Но вряд ли Галилей нуждался в этом напоминании. Уже 10 декабря он отправляет в Прагу Кеплеру через тосканского посла Джулиано Медичи шифрованное сообщение об открытии фаз Венеры с сопроводительным письмом: «Я посылаю Вам шифрованное сообщение о еще одном моем необычном наблюдении, которое приводит к разрешению важнейших споров в астрономии и которое содержит важнейший аргумент в пользу пифагорейской и коперниканской системы». Кеплеру, как всегда, не терпится узнать разгадку: «Ты же видишь, что имеешь дело с немцем из немцев!»

Но первым, кому Галилей раскрыл свою тайну, был Клавий. Галилей только что получил от Клавия известие, что астрономы Римской коллегии наблюдали и спутники Юпитера, и удлиненную форму Сатурна. Поддержка Римской коллегии играла особую роль в планах Галилея, и он спешит удивить Клавия своим новым открытием. Галилей описывает свои наблюдения над Венерой после «ее вечернего появления», рассказывает о том, как неожиданно ее круглая форма стала искажаться со стороны, обращенной к Солнцу, пока Венера не стала напоминать полукруг; потом она «стала заметно рогатой». Предсказывается, какую форму будет принимать Венера, когда она будет наблюдаться в виде утренней звезды, и вот вывод: «Так вот, синьор мой, выясняется, как Венера (и несомненно, что то же самое сделает и Меркурий) движется вокруг Солнца, являющегося, вне всякого сомнения, центром наибольших обращений всех планет. Кроме того, мы уверены, что эти планеты сами по себе являются темными и блестят только освещенные Солнцем, чего, как я думаю, не происходит с неподвижными звездами по некоторым моим наблюдениям». У Клавия не должно было остаться сомнений в том, куда клонит Галилей! Так закончился для Галилея год его великих астрономических открытий.

Галилей не прекратил в дальнейшем астрономических наблюдений, но в основном это было продолжение того, что было наблюдено в 1610 г. Он продолжал наблюдения над солнечными пятнами, начатые летом 1610 г., и к 1613 г. обнаружил осевое вращение Солнца; мы уже говорили о наблюдении исчезновения «придатков» Сатурна. В конце жизни, перед тем как окончательно ослепнуть, Галилею посчастливилось открыть явление либрации Луны (в результате которого наблюдению доступно более половины поверхности Луны). Но Галилей уже никогда не будет уделять столько времени совершенствованию телескопа и астрономическим наблюдениям. И никогда великие тайны мироздания не будут открываться ему так, как в этот великий год! Достижения Галилея были столь велики, что пройдет не менее полувека, прежде чем в наблюдательной астрономии появятся открытия, сравнимые с открытиями Галилея (Гюйгенс, Кассини). А пока Галилея начинают волновать другие проблемы, и для решения этих проблем ему важно было поехать в Рим.

Покорение Рима. Галилей прибыл в Рим 29 марта 1611 г.; он прибыл как лицо, пользующееся особым вниманием тосканского герцога (в герцогских носилках, остановился в римском дворце Медичи). Любезно приняли Галилея четыре астронома Римской коллегии: Клавий, Гринберг, Малькотий, Лембол. Галилей обнаруживает, что отцы-иезуиты систематически наблюдают в трубы Медичейские звезды, пытаются определить их периоды. 21 апреля один из руководителей Священной службы кардинал Роберто Беллармино посылает им официальный запрос «о новых небесных наблюдениях одного выдающегося математика» (имя не указано) относительно Млечного Пути, Сатурна, Луны, спутников Юпитера. 24 апреля был получен ответ, в основном подтверждающий наблюдения. Указывались небольшие расхождения в наблюдениях (звезды, образующие Сатурн, не показались им разделенными) и существенные — в интерпретации виденного на Луне (не горы, а неравномерная плотность «лунного тела»).

14 апреля Галилей (пятым по счету) стал членом Академии Линчеев (рысьеглазых), основанной восемь лет назад Федерико Чези, маркизом Монтичелли. Эта Академия ставила своей целью свободное, не связанное никакими рамками изучение природы. Позднее Чези писал Галилею: «Те же, кого мы примем, не будут рабами ни Аристотеля, ни какого-либо другого философа, а

людьми благородного и свободного образа мыслей в исследовании природы». Дружба с Чези играла важную роль в дальнейшей жизни Галилея; теперь он ставил на своих работах имя «Галилео Линчео». На вершине Яникульского холма состоялась демонстрация удивительной трубы Галилея (тогда Чези и предложил называть ее телескопом).

Галилея чествует и Римская коллегия. Доклад, получивший название «Звездный вестник Римской коллегии», читает Одо Малькотий. Он называет Галилея «самым знаменитым и счастливейшим из живущих ныне астрономов», восхищается его открытиями, но в мягкой форме сообщает, что предлагаемые Галилеем объяснения открытых явлений не являются единственно возможными. Галилею дают понять, в каких рамках он должен держаться. Очень точно это пожелание выражено в словах Гвальдо: «вы должны довольствоваться славой, которую приобрели благодаря наблюдениям Луны, четырех планет и подобных вещей, и не браться защищать мысль, столь противную человеческому разумению». Следующая мысль Гвальдо предвещала путь, который позднее выберет Галилей: «Существует много вещей, которые можно сказать в виде диспута, но которые не было бы хорошо утверждать как истинные, в особенности, если имеешь против них всеобщее мнение, впитанное, если можно так сказать, с сотворения мира». По-видимому, пределы дозволенного указал Галилею и кардинал Беллармино во время аудиенции. Еще более определенное предупреждение сделал Беллармино тосканскому послу Никколини: «Галилей должен держаться в указанных рамках, иначе его работы будут переданы для рассмотрения богословам-квалификаторам» (а посол должен был понимать, что ничем хорошим это не кончится).

В остальном поездка Галилея была успешной. Кардинал дель Манто писал герцогу: «Галилей в дни, когда был в Риме, доставил много удовлетворения и, думаю, получил его сам, ибо имел возможность столь хорошо демонстрировать свои открытия, что все достойные и сведущие люди этого города признали их не только достовернейшими и действительнейшими, но и поразительнейшими. Если бы мы жили теперь в республике Древнего Рима, то я убежден, что ему бы воздвигли статую на Капитолии, дабы почтить его исключительную доблесть».

«Философ и первый математик великого герцога». Итак, не прошло и года как удивительные астрономические открытия Галилея получили признание. Не следует думать, что заключение Римской коллегии прекратило обвинения против Галилея. Люди, отрицавшие существование новых планет, по-прежнему находились. Подозрения к зрительным трубам сохранялись. Аргументация бывала самой нелепой (быть может, с сегодняшней точки зрения). Вот цепь рассуждений некоего Сицци. Зрительная труба подобна очкам, очки не могут в равной мере годиться для молодых и стариков, а раз и те, и другие видят в трубе Галилея планеты, то это обман зрения. А например, Либри из Пизы просто отказывался смотреть в зрительную трубу. «Я надеюсь, что, отправляясь на небо, он, наконец, заметит моих спутников, которых не желал видеть с Земли», — говорил Галилей после его смерти. Многие противники Галилея понимали, что особенно эффективны доносы в инквизицию с утверждениями о том, что высказывания Галилея противоречат священному писанию.

Но если так обстоит дело с явлениями, доступными непосредственному наблюдению, то какие опасности угрожали Галилею за его высказывания в пользу системы Коперника! В «Звездном вестнике» Галилей обещал написать «Систему мира», в которой он «шестьюстами доказательствами и натурфилософскими рассуждениями» подтвердит, что «Земля движется и своим светом превосходит Луну». Разведка в Риме ясно показала, что в настоящий момент эти рассуждения не встретят поддержки у «начальственных лиц». Галилей не отказывается от своих намерений, но начинает длительную осаду. Он хорошо понимал, что признание Коперника не было внутринаучным вопросом, что ему предстоит в первую очередь убедить сильных мира сего, что это потребует всех его сил, отвлечет от непосредственных научных занятий. Оправданность принятого Галилеем решения ставилась под сомнение многими учеными. Известно мнение Эйнштейна по этому поводу: «Что касается Галилея, я представлял себе его иным. Нельзя сомневаться в том, что он страстно добивался истины —

больше чем кто-либо иной. Но трудно поверить, что зрелый человек видит смысл в воссоединении найденной истины с мыслями поверхностной толпы, запутавшейся в мелочных интересах. Неужели такая задача была для него важной настолько, чтобы отдать ей последние годы жизни ⟨...⟩ Он без особой нужды отправляется в Рим, чтобы драться там с духовенством и политиканами. Такая картина не отвечает моему представлению о внутренней независимости старого Галилея. Не могу себе представить, чтобы я, например, предпринял бы нечто подобное, чтобы отстаивать теорию относительности. Я бы подумал: истина куда сильнее меня, и мне показалось бы смешным донкихотством защищать ее мечом, оседлав Росинанта». Галилей придерживался иного мнения, но он мало напоминает дон Кихота от науки. Он не столько дрался с «духовенством и политиканами», сколько с величайшим искусством привлекал их на свою сторону.

Приведенное высказывание Эйнштейна интересно сопоставить с мнением пифагорейцев, впервые допустивших движение Земли и неподвижность Солнца: «Постараемся лишь знать что-то для самих себя, находя единственно в этом удовлетворение, и оставим желание и надежду возвыситься в глазах толпы или добиться одобрения философов-книжников».

Прежде всего традиция была такова, что математику не полагалось обсуждать вопрос о строении мира. Наблюдать светила, составлять таблицы, пользоваться таблицами для гороскопов — вот круг обязанностей математика. У Галилея не было вкуса к составлению гороскопов (как, например, у Кеплера), но все же иногда приходилось этим заниматься. Так, в ожидании переезда во Флоренцию он по настоянию герцогини составил гороскоп болевшего герцога Фердинанда (отца нынешнего герцога) . Гороскоп обещал благоприятное развитие событий, герцог обрадовался, зять Галилея получил желанную должность, а через несколько дней герцог умер... Для того, чтобы рассуждать о строении мира, надо быть по крайней мере философом (ведь и жалование у них заметно выше, чем у математиков), а если окажется замешанным священное писание, надо быть непременно богословом.

Последнее Галилею недоступно, а вот философом он может попытаться стать.

При переезде во Флоренцию Галилей долго ведет переговоры о названии его будущей должности; он хочет, чтобы в ее названии фигурировало слово «философ», ибо «философию он изучал больше лет, чем месяцев чистую математику». В конечном счете договорились о названии «философ и первый математик светлейшего великого герцога тосканского» (первый математик, но не первый философ!).

Свою жизнь во Флоренции он начинает с дискуссий с консервативными философами Пизанского университета, последователями Аристотеля, которые считали, что истину, «говоря их собственными словами, надо искать не в мире и не в природе, а в сопоставлении текстов». Галилей доволен первыми успехами: «Как бы ты, любезнейший Кеплер, принялся хохотать, если бы ты услышал, как в Пизе в присутствии великого герцога первый философ тамошнего университета выступал против меня, силясь аргументами логики, словно колдовскими заклинаниями, сорвать с неба и уничтожить новые планеты!» Его дискуссии касаются не только астрономии. В 1612 г. выходят «Рассуждения о телах, пребывающих в воде», посвященные гидростатике и весьма неприятные для сторонников Аристотеля. Еще через год выходят «Письма о солнечных пятнах», острие которых направлено в ту же сторону: «Эта новость, боюсь, станет похоронным звоном или, скорее, смертным приговором для псевдофилософии $\langle\ldots\rangle$, надеюсь, что гористость Луны станет для перипатетиков шуточным щекотанием по сравнению с муками в виде облаков, паров и обилия дыма, которые постоянно возникают, движутся и исчезают на самом лике Солнца» (из письма к Чези). Перипатетиками называют сторонников учения Аристотеля. Быть может, Галилей преждевременно праздновал победу...

Все больше втягивается Галилей в дискуссии с людьми, далекими от настоящей науки. Иногда его мучают сомнения: «С несказанным отвращением добрался я до сих пор и, словно раскаявшись за содеянное, понял, как бесплодно растратил силы и время». Борьба обострялась. Против Галилея были направлены проповеди доминиканца Каччини, предлагавшего радикальные меры: «Математики должны быть изгнаны из всех католических государств!». Галилей в то же время решается обсуждать богословские проблемы. В 1614 г. распространяется в списках письмо к Кастелли, в котором можно найти такие слова: «Поскольку речь идет о явлениях природы, которые непосредственно воспринимаются нашими чувствами или о которых мы умозаключаем при помощи неопровержимых доказательств, нас нисколько не должны повергать в сомнение тексты писания, слова которых имеют видимость иного смысла, ибо ни одно изречение писания не имеет такой принудительной силы, какую имеет любое явление природы». Вероятно, именно это письмо послужило поводом для доноса патера Лорини в инквизицию. Оказалось, что Галилей был достаточно аккуратен. Въедливые квалификаторы смогли найти в письме лишь «три дурно звучащих места», причем двух из них в подлиннике не было (инквизиция не смогла получить оригинал послания).

В феврале 1615 г. в Неаполе выходит книга члена ордена кармелитов Фоскарини, в которой в форме письма генералу ордена излагается система Коперника. Беллармино воспользовался этим поводом для изложения в письме к Фоскарини своего отношения к проблеме: «Ваше священство и господин Галилео мудро поступают, довольствуясь тем, что говорят предположительно, а не абсолютно, я всегда полагал, что так говорил и Коперник. Потому что, если сказать, что предположение о движении Земли и неподвижности Солнца позволяют нам представить явления лучше, чем принятие эксцентров и эпициклов, то это будет сказано прекрасно и не влечет за собой никакой опасности. Для математика это вполне достаточно. Но желать утверждать, что Солнце и действительно является центром мира и вращается только вокруг себя ⟨...⟩ — утверждать это очень опасно не только потому, что значит возбудить всех философов и теологов-схоластов, это значило бы нанести вред святой вере, представляя положения святого писания ложными». Надо отдать должное главе инквизиции — он выразил свое мнение предельно ясно.

В декабре 1615 г. Галилей опять в Риме. Вероятно, он хотел повлиять на ход идущего по его поводу следствия, да и не потерял он еще надежды изменить мнение церкви по поводу системы Коперника.

«Спасительный декрет». Галилей весь во власти дипломатии. Он посещает Беллармино, пытается привлечь на свою сторону кардинала Орсини. В послании к нему излагается самый сокровенный аргумент в пользу движения Земли — приливы и отливы. Он объясняет их взаимодействием суточного и орбитального движений Земли и не видит конкурирующего объяснения. Это объяснение Галилей придумал в Венеции, наблюдая, как движется вода в лодке при ее ускорении и замедлении. «Это явление установлено бесспорно, легко понятно и может быть проверено на опыте в любое время». Все прочие объяснения делают систему Коперника очень правдоподобной, но окончательное доказательство движения Земли можно обнаружить лишь на самой Земле! Будущее показало, что главный козырь Галилея был ошибочным, но выяснилось это много позднее. Галилей в самом центре римских интриг: «Нахожусь я в Риме, где как погода постоянно меняется, так и в делах всегда царит неустойчивость».

Кончилось все тем, что 24 февраля комиссия из 11 богословов признала утверждение о движении Земли «по меньшей мере заблуждением в вере». Галилею это решение было сообщено генеральным комиссарием инквизиции в присутствии кардинала Беллармино. 5 марта конгрегация индекса «задержала» (но не запретила) книгу Коперника. Этот акт был почти символическим. Из книги собирались изъять несколько фраз о том, что излагаемая доктрина не противоречит писанию, да исправить те места, где Коперник называет Землю светилом (светила — это Солнце и Луна!). Тосканский посол в письме на родину жалуется на настойчивость Галилея, но выражает надежду, что Галилей не пострадает. Распространились слухи, что от Галилея потребовали клятвенного отречения, и Галилей получил от Беллармино удостоверение, опровергавшее эти слухи: «Ему лишь было объявлено решение, вынесенное нашим владыкой и обнародованное святой конгрегацией индекса, в котором говорится, что доктрина, приписываемая Копернику, что Земля движется вокруг Солнца и что Солнце находится в центре мира, не двигаясь с востока на запад, противна священному писанию, и поэтому ее нельзя ни защищать, ни держаться». Это было в мае перед отъездом из Рима, а еще ранее Галилей был принят папой Павлом V. То, что произошло, еще не было осуждением, но было грозным предупреждением. Нарушение ясно выраженного запрета — несомненное преступление.

В ожидании перемен. Галилей покидает Рим, он подчиняется «спасительному декрету». Но не слишком ли демонстративной выглядит его покорность? Вот, например, что он пишет, посылая свою работу «Приливы и отливы» эрцгерцогу Австрии Леопольду, брату тосканской герцогини: «Ныне, зная, что следует слушаться и верить постановлениям начальственных лиц как проистекающим от более возвышенных знаний, до коих мой низкий ум сам по себе не поднимается, я рассматриваю это посылаемое Вам сочинение, имеющее в основе мысль о движении Земли, т. е. один из физических аргументов, которые я приводил в доказательство этого движения. Я рассматриваю это, повторяю, как поэтический вымысел или сновидение». Трудно поверить, что этот человек никогда не будет говорить о движении Земли. Но для возвращения к этой теме Галилею нужны не новые аргументы, а изменение житейской ситуации. И он дождался изменений. Умер папа Павел V, влиятельным секретарем нового папы Григория XV стал Чамполи, благоволивший к Галилею, в 1621 г. не стало страшного кардинала Беллармино, а в 1623 г. папой под именем Урбана VIII стал кардинал Маттео Барберини, образованный человек, покровитель наук, не скрывавший своего восхищения Галилеем.

В это время Галилей заметно активизируется. В 1623 г. выходит его книга «Пробирные весы» — ответ астроному Римской коллегии Грасси, посвященный кометам. Здесь еще не идет прямо речь о движении Земли. Но следующая книга «Послание к Инголи», написанная в 1624 г., имеет к этому вопросу прямое отношение. Книга была ответом на направленное против системы Коперника сочинение Франческо Инголи, высокообразованного клирика, вышедшее в 1616 г. Знаменательно, что Галилей ждал с ответом 8 лет. В небольшом по объему «Послании» много ярких и смелых страниц. Здесь и поэтическое описание обстановки на корабле, не позволяющей обнаружить его движение, — замечательное пояснение закона инерции; здесь и рассуждения о неподвижных звездах, которые сравниваются с Солнцем; здесь и свободное обсуждение проблемы размеров Вселенной.

Что касается последнего, то здесь нет и намека на мир, ограниченный «восьмым небом» неподвижных звезд. Галилей четко объясняет, что не видит аргументов, позволяющих выбрать между гипотезами о конечной или бесконечной Вселенной, но вполне допускает, что человеку доступна лишь небольшая ее часть: «Мне вовсе не претит мысль о том, что мир, границы которому положены нашими внешними чувствами, может оказаться столь же малым по отношению к Вселенной, как мир червей по отношению к нашему миру». Очень смело допускает Галилей предположение о бесконечности Вселенной! Можно вспомнить, как неуютно почувствовал себя великий фантазер Кеплер, предположив, что существует бесконечное число миров, подобных солнечной системе (в «Разговоре со звездным вестником»): «Мне пришлось бы обречь себя на оковы, на темницу в бесчисленных мирах Бруно и даже, более того, на изгнание в эту бесконечность».

«Послание к Инголи» было написано осенью 1624 г., а весной 1625 г. Галилей вновь посетил Рим. Разумеется, его целью было установить контакты с новым папой, оценить насколько благоприятной стала обстановка. Галилей шесть раз беседовал с папой, был обласкан всей многочисленной семьей Барберини, установил благоприятные контакты с рядом кардиналов, включая влиятельного немецкого кардинала Цоллерна. Отношение лично к Галилею не могло быть лучшим, но главная надежда не оправдалась: Урбан VIII твердо поддержал утверждение «спасительного декрета» о движении Солнца и неподвижности Земли. Галилей обнаружил, что в обсуждении этого вопроса они с папой разговаривают на разных языках. Галилей утверждает, что невозможно объяснить приливы и отливы иначе, как предположив движение Земли, но получает разъяснение, что то, что неизвестно людям, может быть известно Богу. С такими аргументами спорить трудно! Галилей возвращается, а вслед ему тосканскому герцогу Фердинандо (Козимо недавно умер) отправляется послание папы с выражением удовлетворения визитом флорентийского ученого, самыми хвалебными отзывами о нем.

«Система мира». Вернувшись из Рима, Галилей решает, наконец, написать книгу с изложением всех аргументов в пользу системы Коперника. Об этой книге он мечтал в 1597 г., когда писал Кеплеру, ее он обещал в «Звездном вестнике», создание такой книги он считал главным делом при переезде во Флоренцию. Галилею исполнилось 60 лет, здоровье оставляло желать лучшего. Поездка в Рим не была полным успехом, но ожидать лучшего момента не приходилось. Разумеется, после «спасительного декрета», которого, как выяснилось, твердо придерживаются «начальственные лица» в Риме по сей день, нельзя было думать об открытой поддержке гелиоцентрической системы, но Галилею не привыкать хитрить.

Даже на богословских диспутах позволяли одному из участников «условно» защищать еретическую точку зрения с тем, чтобы более выпукло ее разоблачить. Система Коперника не была объявлена ересью, и даже Беллармино позволял говорить о ней «предположительно» как о математическом построении. Галилей придумывает художественный прием. Трое собеседников Сальвиати, Сагредо и Симпличио соберутся во дворце Сагредо и будут в течение шести дней «беспристрастно» обсуждать каждую из двух систем мира. Первые два героя носят имена умерших друзей Галилея, третье имя — сторонника Аристотеля и Птолемея — вымышленно.

Более пяти лет напряженно работает Галилей над книгой; он, безусловно, воспринимает ее как главный труд своей жизни. К 1630 г. закончены четыре дня из шести: в первый день обсуждается принципиальная возможность движения Земли, во второй — ее суточное движение, в третий — годовое движение и, наконец, в четвертый — приливы и отливы — самая любимая находка Галилея. Он решает ограничиться четырьмя днями, назвать книгу «Диалогом о приливах и отливах». Весной 1630 г. Галилей везет рукопись в Рим.

Надо сказать, что созданная Галилеем книга, пользуясь современной терминологией, должна быть отнесена к разряду научно-популярных. Галилей сознательно адресует ее широкой публике, а не только ученым; он хочет всех убедить в существовании неопровержимых аргументов в пользу Коперника. Отчасти в связи с этим, отчасти из-за своих научных вкусов Галилей почти исключительно оперирует с качественными явлениями, не увязывая системы с численными данными астрономических наблюдений. Планеты у него движутся равномерно по окружностям с центром в Солнце, что не было никакой возможности согласовать с данными наблюдений. В этом отношении Галилей значительно уступает Кеплеру и уходит от обсуждения проблем, которые волновали Коперника. По-видимому, вычислительная астрономия не была сильной стороной Галилея.

Галилей получает аудиенцию у папы, встречается с влиятельными кардиналами. Урбан VIII не против книги, в которой будут содержаться условные аргументы в пользу осужденной системы, но не должно создаваться ощущения, что читателю предоставляется выбор между двумя системами. Книга должна содержать недвусмысленные указания на окончательность утверждения о движении Солнца и неподвижности Земли, освященного церковью. Кроме того, папа бракует название «Диалог о приливах и отливах». Галилей обещает выполнить пожелания в еще ненаписанных введении и заключении. Рукопись была передана Магистру Святого дворца (главному цензору) Никколо Риккарди (известному под именем отец Мостро) для вынесения суждения. Отец Мостро выбирает выжидательную тактику, он в отличие от Галилея не торопится.

Дальнейшее напоминает детективную историю, в которой Галилей и его благожелатели проявили чудеса изобретательности с тем, чтобы книга увидела свет. Уже для получения предварительного согласия, по-видимому, Чамполи, бывший секретарем папы, пошел на обман, рискуя карьерой. Книгу полагалось печатать в Риме. С огромными хитростями, со ссылками на здоровье Галилея, чуму в Италии и т. д. ее напечатали во Флоренции.

22 февраля 1632 г. герцог Фердинандо получил в подарок первый экземпляр посвященной ему книги «Диалог Галилео Галилея Академии Линчеи, Экстраординарного Математика Пизанского Университета и Главного Философа и Математика Светлейшего Великого Герцога Тосканского, где в четырех дневных беседах ведется обсуждение двух Основных Систем Мира, Птолемеевской и Коперниковой, и предлагаются неокончательные философские и физические аргументы как с одной, так и с другой стороны». В предисловии, адресованном «благоразумному читателю», объясняются мотивы, по которым автор приводит аргументы в пользу системы Коперника. Он вспоминает «спасительный эдикт, который для прекращения опасных споров нашего времени своевременно наложил запрет на пифагорейское мнение о подвижности Земли».

Галилея «волнуют» распространяющиеся слухи, «что этот декрет был издан не на основании надлежащего рассмотрения вопроса, а под влиянием страстей и людьми мало осведомленными». Эти-то слухи и должна опровергнуть предлагаемая книга. Он хочет показать «чужеземным народам, что в Италии вообще и в Риме в особенности знают по этому предмету не менее того, что могут знать исследователи за границей ⟨...⟩ и собрав воедино все собственные наблюдения, относящиеся к системе Коперника, заявить, что знакомство с ними предшествовало постановлению римской цензуры, и что от последней исходят не только догмы для спасения души, но также и остроумные открытия, удовлетворяющие разум». Наконец, «если мы принимаем неподвижность Земли и признаем противоположное мнение математическим парадоксом, то основой нашего убеждения является не неведение того, что думают другие, а иные соображения и мотивы — благочестие, религия, сознание всемогущества божия и признание несовершенства человеческого разума». Ну что же, цели должны были показаться в Риме достойными: пресечь разговоры о необдуманности эдикта, поставить на место «чужеземные народы». Впрочем некоторые формулировки сегодня кажутся двусмысленными. Возможно, они показались таковыми и кому-то из «начальственных лиц». По крайней мере, вскоре после того, как экземпляры «Диалога» оказались в Риме, разразился гром.

Процесс и отречение. По-видимому, инициатива в преследовании Галилея принадлежала самому Урбану VIII. Что так рассердило папу и сделало его непримиримым? Быть может, он счел неискренними похвалы «своевременности спасительного эдикта?» Несомненно, что «Диалог» появился в очень тяжелое для Урбана время. Сильная испанская оппозиция в Риме добивалась смещения папы, и он мог вполне опасаться быть обвиненным в поддержке учения, «заподозренного в ереси». Поговаривали, что папа узнал себя в простаке Симпличио, защищавшем неподвижность Земли. Галилей пишет во введении, что этот герой, в отличие от двух других, не назван его собственным именем. О чем должен был подумать Урбан, если действительно обнаружил в разглагольствованиях Симпличио соображения, когда-то высказанные Галилею?

В августе 1632 г. папская курия запрещает распространение «Диалога». В сентябре дело передается в инквизицию. Начинается длительная игра. Благожелатели Галилея, включая тосканского герцога, вначале пытаются избежать рассмотрения дела в инквизиции, затем перенести рассмотрение во Флоренцию и, наконец, по возможности оттянуть разбирательство, ссылаясь на болезнь Галилея. Все эти попытки окончились безрезультатно — Урбан VIII был неумолим. Угроза быть доставленным в оковах заставила Галилея в январе 1633 г. отправиться в Рим. 13 февраля он в Риме, а 12 апреля предстает перед генеральным комиссарием инквизиции Макулано. Начинается мучительное разбирательство, на Галилея оказывается давление, по-видимому, ему предъявляли орудия пытки. Шла изматывающая борьба в поисках компромисса. Три квалификатора Святой службы дали заключения, что книга, по крайней мере, нарушает запрет держаться осужденной доктрины и распространять ее. Галилей признает, что против своего желания усилил аргументы в пользу системы Коперника. 22 июня в церкви святой Марии-над-Минервой коленопреклоненный Галилей, которому через полгода должно было исполниться 70 лет, выслушивает приговор. За то, что он «считал, будто можно держаться и защищать в качестве правдоподобного мнение после того, как оно было объявлено и определено как противное священному писанию», Галилей объявлялся «сильно заподозренным в ереси», книга «Диалог» запрещалась, Галилей приговаривался к заключению в Святой службе (заподозренного в ереси не сжигали как еретика!) и он должен «три года единожды в неделю читать семь покаянных псалмов». Затем Галилей зачитывает текст отречения: «После того как мне было объявлено, что названная доктрина противоречит священному писанию, я написал и напечатал книгу, в которой трактую об этой самой доктрине, осужденной в прошлом, и с большой убедительностью привожу аргументы в ее пользу, не давая никакого решения». Он клянется «исполнить и блюсти все эпитимьи», на него наложенные.

Может быть, в этот момент Галилей пожалел, что покинул Венецианскую республику, где он был недосягаем для инквизиции, переоценив возможности тосканского герцога. Но в Венеции у него, по-видимому, не было шансов издать свой главный труд, что, несмотря на страшные последствия, ему удалось во Флоренции. Заключение в тюрьме инквизиции было заменено ссылкой, вначале в римский дворец Медичи; через две недели его отправили в Сиену к архиепископу Пикколамини. Еще через полгода ему разрешили перебраться в его виллу Арчетри, невдалеке от монастыря, где находились его дочери. Там и прожил Галилей восемь оставшихся ему лет, лишь ненадолго выехав во Флоренцию. Повсюду Галилей находился под неусыпным оком инквизиции, которая тщательно контролировала его связи с внешним миром. Урбан VIII не проявил милосердия к опальному ученому даже в день его кончины. Его родственник кардинал Барберини передает во Флоренцию: «Нехорошо строить мавзолей для трупа того, кто был наказан трибуналом святой инквизиции и умер, отбывая это наказание». Герцогу пришлось отказаться от желания похоронить Галилея рядом с Микеланджело (это желание было исполнено через много лет).

Отречение Галилея не перестает волновать людей и сегодня. Имел ли право ученый отречься от теории, которую считал несомненной истиной и утверждению которой отдал значительную часть своей жизни? Предлагались разные объяснения принятого Галилеем решения: страх 70-летнего больного ученого перед пыткой и сожжением, ощущение, что он выполнил свою миссию и ничто уже не может помешать распространению книги, возможность сохранить оставшиеся годы (их оказалось восемь) для занятий наукой (он вернулся к занятиям, которые прервал на четверть века, ради разработки идей, от которых теперь должен был отречься). В книге К. Рид «Гильберт» рассказывается, что великий математик с присущей ему непосредственностью говорил о Галилее: «Но он же не был идиотом. Только идиот может считать, что научная истина требует мученичества. Быть может, так обстоит дело в религии, но научные результаты доказывают себя с течением времени». Следует иметь в виду, что Галилей и раньше шел на компромиссы и уже после 1616 г. формально признавал неподвижность Земли (в том числе и в «Диалоге»).

Легендарной фразы «А все-таки она вертится!» Галилей, по-видимому, не говорил, но несмотря на его несомненную религиозность, его отречение не могло быть искренним. Его не могло не радовать, что «Диалог» не удалось изъять полностью, и что в 1635 г. в Европе появился перевод на латинский язык. Его венецианский знакомый Миканцио пишет ему: «Примечательная вещь — после выхода в свет вашего „Диалога“ люди, знающие математику, тут же перешли на сторону Коперниковой системы. Вот к чему привели запреты!» Галилей отвечает: «То, что Вы писали мне относительно „Диалога“, в высшей степени для меня неприятно, поскольку это может причинить великое волнение начальственным лицам. Ведь выдача разрешения читать „Диалог“ столь ограничена, что их святейшество сохраняет его лишь единственно для себя самого, дабы в конце концов, что вполне может случиться, об этой книге совершенно забыли».

Очень тяжел был для Галилея позор, связанный с процессом и приговором, но тяжел был и запрет продолжать работу над проблемами мироздания. У него не было сомнений, что от этих занятий он должен отказаться. Что же оставалось Галилею? У него есть все основания жаловаться на эпоху: «Несчастная наша эпоха, ныне царит твердая решимость искоренять всякую новую мысль, особенно в науках, как будто бы уже познано все, что можно познать!» Можно утешаться предсказаниями его старого единомышленника Кампанеллы (еще в 1616 г. в неаполитанской тюрьме написавшего «Апологию Галилея»): «Грядущий век рассудит нас, ибо современность всегда распинает своих благодетелей, но они потом воскресают на третий день или на третье столетие». Через несколько недель после приговора Галилей вспоминает о прерванном на полуслове трактате по механике, и на ближайшие годы написание этой книги становится главным делом Галилея, целью его жизни. Он вспоминает об открытом им в юности изохронном свойстве маятника и поручает сыну Винченцо сконструировать маятниковые часы. Галилей неумолимо слеп. К окончанию работы над книгой он уже потерял зрение на один глаз, и все же он временами наблюдал небо в телескоп, описал либрацию Луны, пока в конце 1637 г. не ослеп окончательно: «То небо, тот мир и та Вселенная, которую я своими поразительными наблюдениями и ясными доказательствами расширил в сотни и тысячи раз по сравнению с тем, как обычно видели ее мудрецы всех прошлых веков, ныне для меня так уменьшилась и сузилась, что стала не больше того пространства, которое занимает моя персона. Из-за недавности случившегося я еще не могу относиться к несчастью с терпением и покорностью, однако течение времени должно будет меня к этому приучить». И все-таки в последний дарованный ему год он опять наблюдал медичейские звезды, а его старые друзья навели его на мысль, которая завладела им в его последние дни.

Опять медичейские звезды. Возможно, эта идея появилась у Галилея еще раньше, в конце 1635 г., когда он давал для Французской комиссии, созданной кардиналом Ришелье, отзыв на метод Морена определения долготы местности по наблюдениям над движением Луны. Метод оказался несостоятельным, но следует обратить внимание, сколь высокопоставленная особа была в нем заинтересована. А дело в том, что задача определения долготы на борту корабля в XVII веке — веке мореплавания — была одной из самых актуальных. Сегодня трудно поверить, что в то время моряки совершали дальние плавания, не имея сколь-нибудь надежного способа измерять координаты корабля в открытом море. Это, конечно, не касалось широты: ее умели надежно измерять, по крайней мере, в XVI веке (например, по высоте Солнца в полдень). А что касается долготы, то ученые ничего реального предложить не могли. Проблема эта все больше волновала морские державы по соображениям сугубо экономическим. Автор метода измерения долготы с приемлемой точностью (скажем, до 1/2 градуса) мог в разное время получить 100 000 экю от Филиппа II Испанского, или 100 000 ливров от Людовика XIV, или 20000 фунтов от английского парламента, или 100 000 флоринов от Генеральных Штатов Голландии. Меньшая точность пропорционально уменьшала премию. Эти цифры достаточно выразительно свидетельствуют об интересе к проблеме.

Идея измерения долготы восходит еще к Гиппарху (II век до н. э.): надо воспользоваться тем, что разность долгот в двух пунктах земного шара пропорциональна разности местных времен в этих пунктах. Так, в пунктах, у которых долготы отличаются скажем на 15°, разница в местном времени равна 1 часу ($360^\circ/24 = 15^\circ$). Поэтому задачу можно свести к измерению местного времени на корабле и соответствующего времени в какой-нибудь фиксированной точке, например, в порту отплытия. Местное время в пункте нахождения корабля измерить реально, но как помнить время в порту отплытия? Долго никто и не помышлял о его «сохранении». Прекрасный пример — история о сутках, «потерянных» во время кругосветного плавания Магеллана! Да и не было часов, которые могли бы это время помнить, особенно в условиях морской качки.

Другая возможность — воспользоваться какими-нибудь астрономическими явлениями, которые можно наблюдать на борту корабля и точное время наступления которых в порту отплытия известны. Но как мало подходящих явлений! Что можно предложить сверх солнечных и лунных затмений, которые происходят слишком редко? Таблицы для движения Луны были столь несовершенны, что не позволяли определять долготу за счет повседневных наблюдений за Луной (примером такой попытки и был метод Морена). Галилей описывает ситуацию с присущей ему торжественностью: «По прежним временам небо было на этот счет щедро, но по нынешним нуждам оно изрядно скупо, помогая нам только лунными затмениями: и не потому, что то же самое небо не изобилуют явлениями частыми, заметными и куда более подходящими для наших нужд, чем лунные и солнечные затмения, но правителю мира угодно было скрывать их вплоть до наших дней». Оптимизм, который чувствуется в последних словах Галилея, связан с надеждами, которые он возлагал на открытые им Медичейские звезды — спутники Юпитера. Дело в том, что одна из их особенностей, открытых еще во время первых наблюдений 1610 г., — частые затмения. Если бы не наклон лунной орбиты к земной, Луна попадала бы в конус тени, отбрасываемой Землей, каждое полнолуние. Спутники Юпитера попадают в мощный конус его тени при каждом обороте, а вращаются они довольно быстро (Ио совершает полный оборот примерно за 42,5 земных часа). На наблюдении затмений спутников Юпитера и решает Галилей построить свой способ измерения долготы на борту корабля.

Он начинает переговоры, не дожидаясь окончательной разработки метода. Первоначально Галилей думал об Испании (вероятно, было важно, что это традиционная католическая страна), о встрече с вице-королем в Неаполе, но постепенно переориентировался на Голландию, где его идея вызвала больший интерес. В 1636 г. секретные переговоры с Генеральными Штатами в самом разгаре, в августе принимается решение запросить у Галилея необходимые материалы для рассмотрения. Галилей пишет торжественное обращение к Генеральным Штатам Голландии как к «покорителям и властителям океана». Приведенная выше цитата была взята из этого обращения. Галилей считает символичным, что телескоп, который играет первостепенную роль в его методе, был изобретен в Голландии. Он не скупится на описание преимуществ, которые получит Голландия, воспользовавшись его методом: «Я мог бы назвать множество искусств, но достаточно ограничиться кораблевождением, доведенным вашими же голландцами до столь поразительного совершенства, и если единственное оставшееся дело — определение долготы, которое, видим, пока им не дается, — благодаря их последнему и величайшему изобретению присоединится к списку остальных остроумных операций, то слава их достигает такого предела, превзойти который никакая другая нация не сможет и мечтать».

Была образована авторитетная комиссия, в которую вошли адмирал Лауренс Реаль, астроном и математик Гортензий, а позднее и член Государственного Совета Константин Гюйгенс (отец великого ученого). Практичным голландцам нелегко было поверить в реалистичность предлагаемого метода. «Представляете ли Вы себе, скольким людям высокого положения и власть имущим мы были вынуждены проповедовать неведомую дотоле истину, принятую вначале за безумие», — сетовал К. Гюйгенс. Впрочем и сами благожелательные члены комиссии не были уверены в возможности практически реализовать проект. Адмирал Реаль в письме Галилею опасается, что его метод может оказаться слишком тонок «для такого грубого народа, как голландские моряки». Сомнения можно почувствовать и в словах К. Гюйгенса: «Наши народы с трудом сочтут себя обязанными за широкий дар, более прекрасный, чем выгодный». Даже Гортензию с трудом удается наладить наблюдения над спутниками Юпитера. Не хватает хороших телескопов. Галилей посылает в конце 1637 г. свой телескоп, который уже не может ему понадобиться из-за слепоты. Для наблюдения спутников необходимы таблицы, которые составить непросто (даже определение периодов обращения спутников долго не удавалось).

Вычислительная астрономия никогда не была сильной стороной Галилея, а теперь слепота к тому же лишила его возможности проводить наблюдения. Галилей просит монаха-оливетанца Винченцо Реньери, опытного астронома-вычислителя, найти эфемериды спутников Юпитера, по возможности на год вперед. Вычисления затягивались, и Реньери так и не удалось составить необходимые таблицы.

Генеральные Штаты поручают Гортензию встретиться с Галилеем, чтобы уточнить необходимые детали и вручить золотую цепь — подарок Генеральных Штатов. Тем временем в переговоры вмешалась инквизиция. Началась сложная игра, в результате которой Галилей то ли сам счел за благо отказаться от встречи с Гортензием и от голландского подарка, то ли получил прямой запрет инквизиции. Начались разговоры о сохранении приоритета за Италией. Кастелли, которому давно отказывали в свидании с учителем, даже получил разрешение встретиться с Галилеем и выяснить подробности метода. Неожиданно умерли Гортензий и Реаль. Силы покидали Галилея. Флорентийский инквизитор доносил в Рим, что ученый, «совершенно ослепший, скорее уже лежит в гробу, чем занимается математическими построениями». Надежды не покидали Галилея, но становилось ясно, что ему не доведется увидеть осуществление своего замысла. Вероятно, и в самом деле практическая реализация проекта была невозможна. Прошло еще много времени, прежде чем проблема измерения долготы в море была, наконец, решена, но на совсем другом пути — при помощи точных морских часов.

Одно из последних высказываний Галилея показывает, что его никогда не оставляли мысли о главной проблеме его жизни, свидетельствует о его «неисправимости»: «И так же, как я считаю недостаточными наблюдения и предположения Коперника, я полагаю, что еще более ложны и ошибочны наблюдения и предположения Птолемея, Аристотеля и их последователей, поскольку несостоятельность последних можно достаточно ясно выявить, пользуясь обычной речью». Ему не позволено спорить с тем, что могут существовать аргументы, недоступные человеку и опровергающие Коперника, но для опровержения Птолемея хватает аргументов, человеку доступных.

Эпилог. По прошествии трех с половиной веков многое видится не так, как это представлялось Галилею. Это относится и к различию между системами Птолемея и Коперника, и к вопросу об «истинном» движении Земли.

Трудно строить последовательную систему мира, реально не опираясь на небесную механику. Парадокс заключался в том, что небесная механика Галилея в отличие от его «земной» механики была еще достаточно наивной и близкой к взглядам Аристотеля. Во-первых, он считал, что небесные тела движутся по инерции, не испытывая постоянно действующих сил. Для него не было приемлемым предположение о дальнодействии, и, например, предположение о солнечном или лунном притяжении для земных объектов воспринималось как астрологический анахронизм. Во-вторых, по Галилею, небесные тела, двигаясь по инерции, совершают равномерные вращательные движения. Противоречие с «земным» принципом инерции налицо!

Главным вопросом для Галилея был вопрос об истинном (абсолютном) движении Земли, о его экспериментальном доказательстве. Поскольку доказательством должны служить земные явления, столкновение земного и небесного принципов инерции неминуемо. С величайшей проницательностью опровергает Галилей утверждение Тихо Браге, повторенное Инголи, что на движущемся корабле ряд явлений должен обнаружить это движение. Скорее всего, это опровержение Галилея, которое по существу и явилось первой формулировкой закона инерции («земной»), основывалось на эксперименте. Одновременно Галилей утверждает, что существуют явления, обнаруживающие движение Земли (приливы и отливы). При этом не выявляется, чем гипотетическое движение Земли отличается от движения корабля, которое нельзя обнаружить внутренним образом.

Подчеркнем, что эти явления должны были быть следствием собственного движения Земли, происходящего по инерции без участия дальнодействующих сил. Галилей не видит здесь противоречия. Как уже отмечалось, «решающий» аргумент Галилея оказался совершенно ошибочным.

Взгляд Галилея на истинное (абсолютное) движение не был корректным. Творец закона инерции был еще далек от понимания относительного характера движения, о роли системы отсчета при рассмотрении движения. Многое для выяснения относительного характера движения сделал Гюйгенс. Ньютон (в отличие от Гюйгенса) считал вращение абсолютным. В системах Птолемея и Коперника фигурируют разные системы отсчета: в одной покоится Земля, в другой — Солнце. Развитие механики показало, что удачно выбранная система необходима для выявления закономерностей движения. Главное достоинство системы Коперника — в возможности выявить законы Кеплера (которые, кстати, Галилей не принял). Дело в том, что в системе Коперника неподвижное начало помещается в самое массивное тело и при рассмотрении отдельной планеты в первом приближении можно ограничиться взаимодействием этой планеты с Солнцем (пренебрегая взаимодействием с другими планетами). Возникает задача двух тел, и законы Кеплера, как показал Ньютон, непосредственно следуют из его закона всемирного тяготения. В системе отсчета, в которой неподвижна Земля, описание движения усложняется, и, в частности, законы Кеплера для нее не имеют места.

Что касается астрономических наблюдений Галилея, то они открыли новую эру в астрономии. Особую роль сыграли при этом спутники Юпитера. Более полувека ушло на вычисление их периодов, которое пытался провести и сам Галилей, и опытные в вычислениях астрономы Римской коллегии. Еще более трудным было вычисление их расстояний до Юпитера из-за недостаточно развитой микрометрической техники. Но когда в 1685 г. Ньютон создавал свою книгу «О системе мира», вошедшую в «Математические начала натуральной философии», он уже имел возможность констатировать, что для спутников Юпитера имеет место третий закон Кеплера $T^2 \sim R^3$ (T — периоды обращения, R — расстояния до Юпитера), хотя данные измерений требовали некоторых уточнений. Этим фактом открывался раздел «Явления», где перечислялись экспериментальные факты, на которые опирается ньютоновская «система мира».

Построение теории движения спутников Юпитера на основе закона всемирного тяготения долго испытывало честолюбие классиков небесной механики. Дело в том, что достаточно точная теория должна учитывать не только притяжение Юпитера, но и Солнца и взаимное притяжение спутников. В 1774 г. эта задача фигурирует в качестве темы на премию французской Академии наук.

Весьма точная теория была построена Лапласом в 1789 г. Медичейские звезды долго оставались объектом, мимо изучения которого не мог пройти ни один великий астроном. А они дарили ученых все новыми удивительными фактами. Так, например, Лаплас установил, что время обращения первого спутника плюс удвоенное время обращения третьего равно утроенному времени обращения второго. Но несомненно самая замечательная страница в изучении спутников Юпитера — открытие Олафа Рёмера, о котором мы расскажем более подробно.

Добавление. Догадка Олафа Рёмера

Наблюдения Кассини. Постепенно телескоп становится признанным инструментом астронома. Растут размеры телескопов: телескоп Гюйгенса давал 92-кратное увеличение, а в 1670 г. в Париже появился телескоп, дававший увеличение в 150 раз. Характерно, что этот телескоп уже не был в распоряжении одного ученого: он был установлен в научном учреждении нового типа — обсерватории. Парижской Обсерваторией, находившейся под покровительством Людовика XIV, руководил Жан Доминик Кассини (1625–1712) — астроном, приехавший из Италии. Астрономия очень многим обязана Кассини. Он обнаружил, что у Сатурна, кроме одного спутника (Титана), открытого Гюйгенсом, имеется еще четыре, а открытое тем же Гюйгенсом кольцо Сатурна оказалось при более тщательных наблюдениях Кассини состоящим из двух колец, разделенных щелью, которую стали называть щелью Кассини. Кассини доказал осевое вращение Юпитера и Сатурна. Велики заслуги Кассини и в астрономических вычислениях: он с невиданной до тех пор точностью измерил астрономическую единицу — расстояние от Земли до Солнца. Интересно сопоставить полученное Кассини значение 146 *млн. км* с истинным значением 149,6 *млн. км* и величиной 8 *млн. км*, которая принималась прежде.

Как уже отмечалось, одной из центральных задач астрономии второй половины XVII века стало вычисление периодов обращения спутников Юпитера. Эти величины можно получить путем нехитрых вычислений, если точно известны последовательные моменты их затмений. Зная же периоды обращения спутников, можно, напротив, предсказывать моменты их затмений. В 1672 г. Кассини очень тщательно фиксирует моменты затмения Ио (спутника Юпитера). Он с удивлением обнаружил, что получаемые им значения для периода обращения Ио несколько различаются от случая к случаю, как если бы иногда затмение несколько запаздывало, а иногда наступало несколько раньше. Наибольшая разница между полученными значениями, составлявшая 22 минуты (при времени обращения 42,5 часа), не могла быть объяснена точностью измерений. По-видимому, Кассини уже имел возможность пользоваться маятниковыми часами Гюйгенса, которые начинали использоваться для астрономических наблюдений. Наблюденный эффект не находил разумного объяснения.

В 1672 г. — в год, когда Кассини систематически наблюдал за спутниками Юпитера, — в Парижской обсерватории появился молодой датский ученый Олаф Рёмер (1644–1710). Его заинтриговало поразительное совпадение (возможно, на него обратил внимание Кассини). Наибольшее запаздывание затмений Ио приходилось на те моменты времени, когда Юпитер находился дальше всего от Земли. Обратить внимание на такое совпадение можно было благодаря случаю, но какая нужна была прозорливость, чтобы не объявить его с порога случайностью! Хотя во времена Людовика XIV в астрономических атласах Земля все еще изображалась в центре мироздания, ученые уже не были готовы объяснять изменение обращения спутника Юпитера влиянием Земли! Впрочем, конкурирующее объяснение этого эффекта, предложенное Рёмером, должно было казаться не менее фантастическим. Рёмер предположил, что мы наблюдаем затмение Ио с некоторым запаздыванием из-за того, что свету приходится пройти большее расстояние, когда расстояние между Землей и Юпитером увеличилось. Чтобы оценить эту гипотезу

Рёмера, нам надо вспомнить, что думали о скорости света его современники.

Отступление о скорости света. Ученые древности считали, что свет распространяется мгновенно (возможно, единственным исключением был Эмпедокл). Это мнение на много веков было закреплено авторитетом Аристотеля. На Востоке Авиценна и Альхазем допускали, что скорость света конечна, но очень велика. Среди европейских ученых нового времени Галилей был одним из первых, готовых допустить конечность скорости света. В его «Беседах» трое собеседников Сагредо, Симпличио и Сальвиати обсуждают проблему скорости света. Сагредо поднимает этот вопрос, Симпличио считает, что она бесконечна, поскольку мы видим пламя выстрела «без потери времени», тогда как звук доходит через заметное время, что для Сагредо означает лишь, что звук распространяется значительно медленнее, чем свет. В ответ на это Сальвиати, представляющий в этом триумвирате интересы Галилея, предлагает опыт с двумя наблюдателями, снабженными фонарями, причем каждый открывает свой фонарь, увидев свет другого. Однако этот опыт, который в самом деле пытались провести ученые Флорентийской академии, не дает реальной возможности убедиться в конечности скорости света. (У Эйнштейна и Инфельда отмечается, что для этого надо было бы уметь фиксировать промежутки времени порядка $1/100\,000\,c$.) Кеплер считал, что свет распространяется мгновенно; Роберт Гук думал, что скорость света конечна, но столь велика, что ее измерение невозможно. Декарт и Ферма считали скорость света бесконечной, что сильно осложнило их исследования по геометрической оптике. Декарт, с одной стороны, считал, что свет распространяется мгновенно, с другой стороны, разлагал его «скорость» на составляющие. Ферма, формулируя свой знаменитый принцип, который сегодня называется принципом наименьшего времени, чтобы не говорить о скорости света, прибегал к всевозможным уловкам, говоря об «антипатии света к веществу», вводя формальный коэффициент, фактически равный отношению скоростей света. Таким образом, большинство современников Рёмера не готово было признать конечность скорости света, не говоря уже о том, чтобы сделать ее ответственной за вполне ощутимые, хотя и проявляющиеся в астрономических масштабах, явления. Для сравнения заметим, что лишь недавно была измерена скорость звука.

Вычисления Рёмера. Они предельно просты. Итак, он исходит из того, что 22 минуты — максимальное запаздывание начала затмения — как раз тот срок, который необходим свету, чтобы пройти расстояние, равное разности между наибольшим и наименьшим расстоянием между Землей и Юпитером. Эта разность равна удвоенному расстоянию между Землей и Солнцем. По сравнению с ним расстоянием от спутника до Юпитера можно пренебречь.

Мы видим, что у Рёмера был еще один повод быть благодарным Кассини, от которого он знал достаточно точное значение расстояния от Земли до Солнца (146 *млн. км*). Итак, по Рёмеру, свету на преодоление 292 млн. км требуется 1320 *с* (22 *мин*). Откуда для скорости света получается значение 221 200 *км/с*. Ошибка у Рёмера получилась из-за неточностей в значении астрономической единицы (правильно 149,6 *млн.км*), но, главное, из-за очень большой ошибки в определении максимального времени запаздывания (правильно — 16 *мин* 36 *с*). Для правильных значений получилось бы для скорости света значение 300 400 *км/с*, что очень близко к истинному значению. Все же поразительно, что Рёмеру удалось дать правильное по порядку значение скорости света.

Эти вычисления были проведены Рёмером в сентябре 1676 г. Чтобы убедить ученых в своей правоте, он придумывает трюк, достойный египетских жрецов. Он проводит вычисления и предсказывает, что в ноябре затмение Ио произойдет примерно с 10-минутным запозданием. Наблюдения, в которых участвовал Кассини, доказали, что Рёмер правильно предсказал время с точностью до секунды. Однако это совпадение не произвело слишком сильного впечатления на окружающих. По крайней мере, он не убедил ученых из Парижской академии, среди которых преобладали картезианцы (сторонники Декарта). Ведь их учитель писал про астрономов, что «хотя их предположения всегда ошибочны и недостоверны, они делают весьма правильные заключения, опирающиеся на различные выполненные ими наблюдения». Рёмера отказался поддержать даже Кассини! С такого рода явлениями нередко приходится встречаться в истории науки. Нашлись и сторонники Рёмера, среди которых выделялся английский астроном Эдмонд Галлей (1656–1742). Окончательное признание теории Рёмера пришло, когда в 1728 г. Джеймс Брэдли (1693–1762) изучил видимое годичное движение звезд — аберрацию. Она нашла естественное объяснение как результат сложения скорости света, идущего от звезд, и скорости движения Земли по орбите. При этом получилось, что скорость света в 10 000 раз больше скорости движения Земли, что давало хорошее согласие с величиной, найденной Рёмером. То, что два существенно различных пути приводили к одному ответу, убедило многих. Первое же измерение скорости света в результате «земного» эксперимента было сделано Арманом Физо в 1849 г.

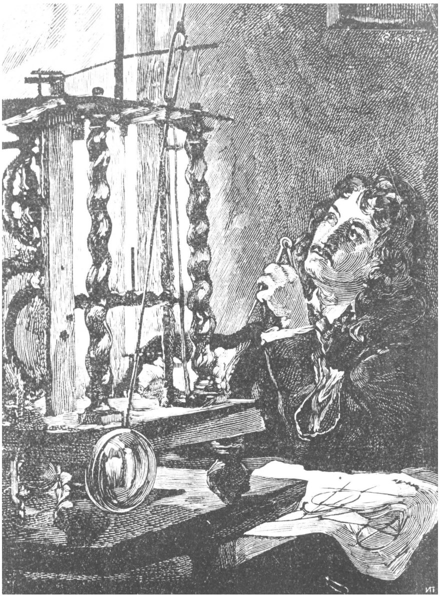
Рассказывая сегодня об открытии Галилея, нельзя не вспомнить о том, что при помощи космических аппаратов «Вояджер-1» и «Вояджер-2» удалось узнать, как устроена поверхность галилеевых спутников Юпитера. Вот что пишет Дж. Эберхарт об увиденном учеными на переданных снимках: «Оказалось, что „галилеевы луны“ — вовсе не „коллекция скалистых шаров“. Пожалуй, только испещренная кратерами поверхность Каллисто, самого дальнего из четырех спутников, подтвердила предположения ученых. На Ганимеде взорам исследователей открылась целая гамма тектонических разломов, искривлений и отрогов. Но совершенно ошеломили их два других спутника, более близких к планете, — Ио и Европа.

Ученые не могли поверить своим глазам — на снимках Ио они увидели разукрашенный в красное и золотое, серебряное и черное бурлящий мир, царство активных вулканов! А когда объективы „Вояджеров“ были направлены на Европу, взорам наблюдателей предстала ледяная планета, светлая поверхность которой была словно исхлестана гигантской плетью».

О ХРИСТИАНЕ ГЮЙГЕНСЕ И ЧАСАХ С МАЯТНИКОМ

> Циклоидальный маятник был изобретен Христианом Гюйгенсом, крупным ученым XVII столетия и гениальнейшим часовым мастером всех времен.
>
> *Зоммерфельд, «Механика»*

Мы рассказывали о том, как почти одновременно с началом XVII века Галилей заложил основы классической механики. Христиан Гюйгенс (1629 – 1695) был непосредственным преемником Галилея в науке. По словам Лагранжа, Гюйгенсу «было суждено усовершенствовать и развить важнейшие открытия Галилея». Существует рассказ о том, как в первый раз Гюйгенс соприкоснулся с идеями Галилея: 17-летний Гюйгенс собирался доказать, что брошенные горизонтально тела движутся по параболам, но обнаружил доказательство в книге Галилея и не захотел «писать „Илиаду“ после Гомера». Поражает, насколько близок был Гюйгенсу научный дух Галилея, его научные интересы. Иногда кажется, что это помолодевший Галилей вновь совершенствует свои зрительные трубы и продолжает свои астрономические наблюдения, прерванные сорок лет назад. Он пытается при помощи более сильного телескопа разгадать тайну Сатурна, казавшегося тремя соединенными звездами, и, наконец, наблюдая в 92-кратный телескоп (у Галилея был 20-кратный), обнаруживает, что за боковые звезды принималось кольцо Сатурна. Он вновь возвращается к проблеме, остро стоявшей в 1610 г.: существуют ли спутники у планет, отличных от Земли и Юпитера. Тогда Галилей писал Медичи, что у других планет спутников не обнаружилось и ни один царственный дом, кроме дома Медичи (в честь которого были названы спутники Юпитера), не может



Христиан Гюйгенс

рассчитывать на «собственные» звезды. Гюйгенс открыл в 1655 г. Титан, спутник Сатурна. Вероятно, времена изменились, и Гюйгенс не предлагал открытый им спутник кому-либо в подарок. А потом Гюйгенс обратился к механике. И здесь его волнуют те же проблемы, что и Галилея. Он развивает его принцип инерции, утверждая, что не только иногда нельзя обнаружить движение внутренними средствами, но и само утверждение о том, что тело движется, не имеет абсолютного значения. Гюйгенс воспринимал всякое движение как относительное, в чем серьезно расходился с Ньютоном. Когда-то Галилей, обдумывая, почему при вращении Земли тела удерживаются на ее поверхности, почти получил формулу для центростремительного ускорения, буквально не сделав последнего шага (см. с. 63). Гюйгенс дополнил рассуждения Галилея и получил одну из самых замечательных формул в механике.

Гюйгенс обращается к исследованию изохронного характера качаний математического маятника. Вероятно, это было первое открытие Галилея в механике. И здесь Гюйгенсу представилась возможность дополнить Галилея: изохронность математического маятника (независимость периода колебаний маятника фиксированной длины от амплитуды размаха) оказалась справедливой лишь приближенно для малых углов размаха. Затем Гюйгенс реализует идею, которая занимала Галилея в его последние годы: он конструирует маятниковые часы.

Задачей о создании и совершенствовании часов, прежде всего маятниковых, Христиан Гюйгенс занимался почти сорок лет:

с 1656 по 1693 г. Один из основных мемуаров Гюйгенса, содержащих его результаты по математике и механике, вышел в 1673 г. под названием «Маятниковые часы, или геометрические доказательства, относящиеся к движению маятников, приспособленных к часам». Многое придумал Гюйгенс, пытаясь решить одну из основных задач своей жизни — создать часы, которые можно было бы использовать в качестве морского хронометра; многое он продумал с точки зрения возможностей применения к этой задаче (циклоидальный маятник, теория развертки кривых, центробежные силы и т. д.). Мы расскажем здесь о занятиях Гюйгенса хронометрией, но прежде всего поясним, почему задача о создании часов привлекала великого ученого.

Часы относятся к очень древним изобретениям человека. Вначале это были солнечные, водяные, песочные часы; в Средние века появились механические часы. В разные эпохи измерение времени играло разную роль в жизни человека. Немецкий историк О. Шпенглер, отмечая, что механические часы были изобретены в эпоху начала романского стиля и движения, приведшего к крестовым походам, пишет: «Днем и ночью с бесчисленных башен Западной Европы звучащий бой, этот жуткий символ уходящего времени, есть, пожалуй, самое мощное выражение того, на что вообще способно историческое мироощущение. Ничего подобного мы не найдем в равнодушных ко времени античных странах и городах. Водяные и солнечные часы были изобретены в Вавилоне и Египте, и только Платон, опять в конце Эллады, впервые ввел в Афинах клепсидру (разновидность водяных часов. — С. Г.), и еще позднее были заимствованы солнечные часы как несущественная принадлежность повседневного обихода, причем все это не оказало никакого влияния на античное мироощущение».

Характерно, что при первых шагах новой механики и математического анализа время не сразу заняло место основной переменной величины при описании движения (Галилей в поисках закона свободного падения начал с гипотезы о пропорциональности скорости пути, а не времени).

Долгое время механические часы были громоздки и несовершенны. Было изобретено несколько способов преобразовать ускоренное падение груза в равномерное движение стрелок, и все же даже известные своей точностью астрономические часы Тихо Браге приходилось каждый день «подгонять» при помощи молотка. Не было известно ни одного механического явления, которое бы периодически повторялось через одно и то же сравнительно небольшое время.

Маятниковые часы. Такое явление было обнаружено на заре создания новой механики Галилеем. Именно, Галилей обнаружил, что колебания маятника изохронны, т. е. их период, в частности, не меняется при затухании колебаний. Мы приводили выше рассказ Вивиани об этом открытии Галилея.

Галилей предполагал воспользоваться маятником для создания часов. В письме от 5 июня 1636 г. голландскому адмиралу Л. Реалю он писал о соединении маятника со счетчиком колебаний. Однако к созданию часов Галилей приступил в 1641 г., за год до смерти. Работа не была закончена. Ее должен был продолжить сын Галилея Винченцо, который долго медлил с возобновлением работ и приступил к ним лишь в 1649 г., также незадолго до смерти, так и не создав часов. Некоторые ученые уже пользовались изохронностью маятника в лабораторных экспериментах, но отсюда до создания маятниковых часов — нелегкий путь.

Его преодолел в 1657 г. 27-летний Христиан Гюйгенс, к тому времени уже известный ученый, открывший кольцо Сатурна. 12 января 1657 г. он писал: «На этих днях я нашел новую конструкцию часов, при помощи которой время измеряется так точно, что появляется немалая надежда на возможность измерения при ее помощи долготы, даже если придется везти их по морю». Первый экземпляр маятниковых часов изготовил гаагский часовщик Соломон Костер, а 16 июня Генеральные Штаты Голландии выдали патент, закреплявший авторство Гюйгенса. В 1658 г. вышла брошюра «Horologium» с описанием изобретения.

Узнав о часах Гюйгенса, ученики Галилея предприняли энергичную попытку восстановить приоритет учителя. Для того чтобы правильно оценить ситуацию, важно понимать, что в XVII веке проблема создания точных часов воспринималась в первую очередь в связи с возможностью их использования для измерения долготы на борту корабля. Эту возможность понимал Галилей, ее же с самого начала выдвигал на первый план Гюйгенс (ср. приведенное выше высказывание).

Мы уже говорили выше о проблеме измерения долготы. Ученики Галилея знали, что в конце жизни он вел секретные переговоры с Генеральными Штатами, предлагая свой способ измерения долготы. Содержание переговоров, прерванных после вмешательства флорентийского инквизитора, не было достоверно известно. Можно было предположить, что речь в них шла и об использовании маятниковых часов. Напомним, что идея этого метода состоит в том, что часы «запоминают» время в порту отплытия, а разность этого времени с местным временем на корабле пересчитывается в разность долгот. Важно было, чтобы часы долго сохраняли правильный ход в условиях морской качки. Изохронность колебаний маятника должна была быть существенна как при затухании колебаний, так и при раскачке во время морского волнения.

Галилей предлагал Голландии другой способ измерения долготы, основанный на наблюдении затмений спутников Юпитера. Хотя упоминания о маятниковых часах могли фигурировать в переговорах (ср. упомянутое письмо Реалю), несомненно, конструкция часов или сколько-нибудь подробные сведения о них в Голландию не передавались. К тому времени, когда Галилей приступил к созданию часов (1641 г.), переговоры с Генеральными Штатами Голландии практически прервались.

Гюйгенса не обвиняли в плагиате, хотя, быть может, и настораживало, что маятниковые часы созданы в Голландии сыном влиятельного члена Государственного Совета, имевшего отношение к переговорам с Галилеем. Леопольд Медичи написал письмо французскому астроному И. Буйо, покровительствовавшему Гюйгенсу, и поручил изготовить ходовой механизм по модели Галилея. К письму для передачи Гюйгенсу прилагался рассказ Вивиани, упоминавшийся выше, и чертеж часов Галилея. Гюйгенс, ознакомившись с чертежами, констатировал, что в них присутствует основная идея, но нет ее технической реализации. В 1673 г.

Гюйгенс напишет: «Некоторые утверждают, что Галилей пытался сделать это изобретение, но не довел дело до конца; эти лица, скорее, уменьшают славу Галилея, чем мою, так как выходит, что я с большим успехом, чем он, выполнил ту же задачу». При этом не лишне помнить, что Галилей занимался часами слепым и был на 50 лет старше Гюйгенса, когда последний занимался той же задачей.

Первые часы Гюйгенса в максимальной степени использовали конструкцию часов, распространенную в то время (он имел в виду возможность быстро переделывать уже имевшиеся часы в маятниковые). С этого момента совершенствование часов становится одной из главных задач Гюйгенса. Последняя работа о часах была опубликована в 1693 г. за два года до его смерти. Если в первой работе Гюйгенс проявил себя прежде всего как инженер, сумевший реализовать в часовом механизме уже известное свойство изохронности маятника, то постепенно на первый план выходит Гюйгенс — физик и математик.

Впрочем, в числе его инженерных достижений были выдающиеся. Макс Лауэ выдвигал на первый план в часах Гюйгенса идею обратной связи: впервые энергия сообщалась маятнику без нарушения периода колебаний, «причем сам источник колебаний определяет моменты времени, когда требуется доставка энергии». У Гюйгенса эту роль выполняло простое и остроумное устройство в виде якоря с косо срезанными зубцами, ритмически подталкивающего маятник.

Еще в начале своей работы Гюйгенс обнаружил неточность утверждения Галилея об изохронности колебаний маятника. Этим свойством маятник обладает лишь при малых углах отклонения от вертикали, но, скажем, для угла в 60° колебания заметно неизохронны (на это мог бы обратить внимание Галилей в опытах, описанных Вивиани). В 1673 г. Гюйгенс отмечал, что период для 90° относится к периоду для малых дуг, как 34 к 29. Для того чтобы скомпенсировать отклонения от изохронности, Гюйгенс решил уменьшать длину маятника при увеличении угла отклонения. В первых часах Гюйгенса с этой целью использовались ограничители в форме щек, на которые частично наматывалась нить подвеса. Эмпирический способ подбора формы щек не устраивал Гюйгенса. В 1658 г. он вообще удалил их из конструкции, вводя ограничители амплитуды. Но это не означало отказа от поисков изохронного маятника. В часах 1659 г. корректирующие пластинки появились вновь, но на сей раз Гюйгенс уже умел определять форму щек теоретически: оказалось, что они должны иметь форму *циклоиды* — кривой, сыгравшей большую роль в развитии математики в XVII веке.

Этой кривой целиком посвящена следующая глава нашей книги; из нее читатель сможет узнать, как именно Гюйгенс пришел к своему открытию.

Изобретению циклоидального маятника Гюйгенс придавал наибольшее значение: «Для проведения этих доказательств потребовалось укрепить и, где нужно, дополнить учение великого Галилея о падении тел. Наиболее желательным плодом, как бы величайшей вершиной этого учения, и является открытое мною свойство циклоиды».

Центробежные часы и часы с коническим маятником. Циклоидальный маятник — не единственное изобретение, сделанное Гюйгенсом в процессе совершенствования часов. Другое направление в его исследованиях по хронометрии связано с теорией центробежных сил. Эта теория была создана Гюйгенсом, и показательно, что впервые она была опубликована в «Маятниковых часах». В пятой части этой книги без доказательства приводятся теоремы о центробежной силе и описывается конструкция часов с коническим маятником (известно, что Гюйгенс изобрел их 5 октября 1659 г.). Доказательства теорем содержатся в работе «О центробежной силе», написанной в 1659 г., но вышедшей в свет лишь через восемь лет после смерти Гюйгенса. О центробежной силе знал еще Аристотель, а Птолемей считал, что если бы Земля вращалась вокруг своей оси, то из-за центробежной силы предметы не могли бы удерживаться на ее поверхности. Кеплер и Галилей опровергали эту точку зрения, объясняя, что в этом случае вес уравновешивает центробежную силу, фактически предполагая, что при удалении от центра вращения центробежная сила уменьшается. Однако лишь Гюйгенс получил знаменитую формулу для центробежной силы $F_{\text{ц.б.}} = mv^2/R$, к которой был очень близок Галилей. В дополнении приводится подлинный текст Гюйгенса и читатель сможет увидеть, в каком (быть может, не самом экономном с сегодняшней точки зрения) виде были впервые сообщены результаты, полученные Гюйгенсом.

Какой бы задачей Гюйгенс ни занимался, он всегда думал о возможных приложениях полученных результатов к часам. И в этом случае он хотел воспользоваться коническим маятником. Так называется нить с грузом, вращающаяся вокруг оси, проходящей через точку подвеса. Пусть l — длина нити, α — угол нити с вертикалью, R — расстояние от груза до оси. Если маятник движется по окружности и угол α остается постоянным, то $mv^2/R = mg\operatorname{tg}\alpha$. Отсюда $v = \sqrt{gR\operatorname{tg}\alpha}$. Для периода — времени одного оборота — получаем (поскольку $T = 2\pi R/v$)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}\operatorname{ctg}\alpha} = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{u}{g}}.$$

Здесь $u = l\cos\alpha$ — длина проекции нити на ось маятника. В тексте Гюйгенса проводятся многочисленные обсуждения формулы для периода конического маятника. Движение конического маятника сравнивается с двумя движениями, которые к тому времени были основательно изучены: со свободным падением и колебаниями простого (или математического) маятника (Гюйгенс называет его колебания боковыми в отличие от круговых колебаний конического маятника).

Итак, период определяется проекцией нити на ось. Трудность в построении изохронного конического маятника заключается в том, что постепенно угол с осью уменьшается и период увеличивается. Гюйгенс рассчитал, что для того чтобы период оставался неизменным, надо с уменьшением угла так уменьшать длину нити, чтобы ее конец постоянно находился на параболоиде вращения.

В самом деле, пусть имеется некоторая поверхность вращения (у Гюйгенса параболоид — поверхность вращения параболы $py = x^2$ вокруг оси y). Тяжелая материальная точка устойчиво вращается по горизонтальному сечению (кругу), если равнодействующая веса и центробежной силы направлена по нормали к поверхности (перпендикуляру к касательной плоскости), а потому здесь применима формула для конического маятника. В этом случае α — угол нормали с осью, l — длина отрезка нормали между осью и поверхностью, u — проекция этого отрезка на ось. Здесь переход от конического маятника к вращению тяжелой точки в какой-то мере аналогичен переходу Галилея от математического маятника к движению тяжелой точки по круговому желобу. Далее Гюйгенс замечает, что у параболы $py = x^2$ величина u (проекция отрезка нормали на ось) не зависит от положения точки и равна $p/2$. Отсюда он делает вывод, что период вращения тяжелой точки по любым горизонтальным сечениям параболоида один и тот же:

$$T = 2\pi\sqrt{p/2g}.$$

Это дает новый способ получения изохронных колебаний, что, по мнению Гюйгенса, было важно при построении часов. Если подвесить конический маятник так, чтобы независимо от угла α наклона нити к оси его конец двигался по поверхности параболоида, полученного от вращения параболы $py = x^2$, то период вращения не будет зависеть от α. Другими словами, надо сделать так, чтобы при изменении α длина l изменялась, обеспечивая постоянство проекции на ось. Гюйгенс придумал чрезвычайно остроумный способ подвески. Он предложил изготовить пластинку по форме полукубической параболы $y^2 = ax^3 + b$, закрепить в некоторой ее точке конец нити и тогда, оказывается, можно так подобрать a, b и длину нити, что как бы мы ни натянули нить, намотав часть ее на пластинку, другой ее конец будет находиться на параболе. Секрет этого остроумного способа подвески опирается на те же математические соображения, что и способ подвески циклоидального маятника.

Заметим, что эти же вычисления помогли Гюйгенсу в 1687 г. быстро решить задачу Лейбница о кривой, по которой тяжелая точка движется так, что пути, пройденные ею в равные промежутки времени, имеют равные проекции на вертикаль. Этим свойством обладает полукубическая парабола.

Физический маятник. Одно из главных достижений Гюйгенса относится к теории физического маятника, т. е. речь идет уже не о колебании точечного груза, а о колебании конфигурации грузов или тяжелой пластины. Эта задача возникла в связи с идеей иметь, кроме основного груза на конце маятника, подвижный груз, позволяющий регулировать период качаний маятника. Гюйгенс почерпнул эту идею у гаагского мастера Доу, который в 1658 г. взял патент на свой вариант маятниковых часов, мало отличающийся от часов Гюйгенса. Задачи о колебаниях физического маятника возникали и раньше. Для механики переход от движения материальной точки к движению протяженных конфигураций был принципиальным. Первая серия таких задач относилась к центру тяжести, и здесь важные результаты были известны. В задачах же о колебаниях физического маятника долго не удавалось сделать ничего существенного[1].

[1]Напомним, что приведенной длиной физического маятника называется длина математического маятника, имеющего тот же период колебаний, а центр качания — это точка, лежащая на прямой, соединяющей точку подвеса с центром тяжести, на расстоянии от точки подвеса, равном приведенной длине.

О задачах про физический маятник Гюйгенс узнал от Мерсенна: «Когда я был еще почти мальчиком (ему не было 17 лет — С. Г.), ученейший муж Мерсенн задал мне и многим другим задачу — определить центр качания. Из писем, которые писал мне Мерсенн, а также из недавно опубликованных мемуаров Декарта, заключающих ответ на письма Мерсенна по этому поводу, я заключаю, что эта задача пользовалась в это время известной славой среди математиков ⟨...⟩ Мерсенн назначил большую, вызывающую зависть премию на тот случай, если я решу задачу. Однако он тогда ни от кого не получил того, что требовал ⟨...⟩, я в то время не нашел, что позволило бы мне приступить к расчетам и как бы повернул назад у самого порога, и воздержался от всякого исследования. Но и те, кто надеялись, что решили задачу, знаменитые люди, как Декарт, Оноре Фабри и другие, вовсе не достигли цели или достигли ее только в немногих, особенно простых случаях.

Повод к новой постановке опытов дали регулируемые маятники наших часов, снабженные, кроме нижнего постоянного груза, еще вторым подвижным грузиком, как сказано при описании часов. Исходя из этого, я начал исследования с начала, на этот раз с лучшими видами на успех и, наконец, преодолел все трудности и решил не только все задачи Мерсенна, но нашел еще и новые задачи, более трудные, и, наконец, нашел общий метод для вычисления центров качания линий, площадей и тел. От этого я имел не только удовольствие, что я нашел нечто, что напрасно искали столь многие, и понял законы природы, относящиеся к этому случаю, но, получил и определенную пользу, которая вообще заставила меня заняться этим вопросом, а именно я нашел легкий и удобный способ регулировки часов. К этому, однако, присоединилось то, что я считаю еще более ценным, а именно: благодаря своему открытию я смог дать абсолютно устойчивое определение для постоянной, верной для всех времен меры длины».

Последняя идея, о которой пишет Гюйгенс, состояла в том, что подобно тому, как для измерения времени имеется естественная единица измерения — сутки, для измерения длины такой единицей предлагалось считать 1/3 длины маятника, период колебаний которого равен одной секунде.

Задачи о центре качания не были доступны с позиций разработанных к тому времени методов математического анализа. Гюйгенс заметил, что целый ряд трудностей можно преодолеть, исходя из энергетических соображений: центр тяжести при движении не может подняться выше, чем он был в начале движения (иначе существовал бы вечный двигатель). Этот способ доказательства вызывал возражения у ряда крупных ученых, и было затрачено много сил, прежде чем Я. Бернулли удалось получить аналогичные утверждения на другом пути.

Морские часы. 1673 год был вершиной деятельности Гюйгенса по маятниковым часам. В этом году вышла его книга «Маятниковые часы», а парижский часовщик Исаак Тюре изготовил экземпляр часов с учетом всех усовершенствований. Маятниковые часы прочно вошли в обиход, но надежды на морские маятниковые часы не оправдались. Первые экземпляры таких часов были изготовлены в 1661 г., а с 1663 г. начались их испытания. Вначале граф Брюс взял с собой часы при плавании из Голландии в Лондон, но часы остановились; более успешными были испытания капитана Холмса при плавании из Лондона в Лиссабон. О драматических событиях, связанных с испытанием часов во время плавания английской эскадры в Гвинее, рассказывает Гюйгенс в «Маятниковых часах». Испытания проходили с переменным успехом до 1687 г., хотя становилось ясно, что надежного средства для измерения долготы маятниковые часы не дают. Постепенно спрос на морские часы упал, и в 1679 г. сам Гюйгенс склонился к тому, что морской хронометр должен представлять собой пружинные часы с балансиром. Такой хронометр удалось создать в 1735 г. Дж. Харрисону, который и получил премию в 20 тыс. фунтов от английского правительства.

Прошло 300 лет. Маятниковые часы сослужили добрую службу людям, которые нечасто знают имя их создателя. Драматическая история работы Гюйгенса над маятниковыми часами очень поучительна. В некотором смысле его главные надежды не осуществились: ему не удалось создать морской хронометр, а в сухопутных часах циклоидальный маятник, который Гюйгенс считал своим главным изобретением, не прижился (вполне хватало ограничителей амплитуды). Та же участь постигла конический маятник. Но те математические и физические результаты, получение которых стимулировалось задачей о совершенствовании часов, навсегда остались в анализе бесконечно малых, дифференциальной геометрии, механике, и их значение трудно переоценить.

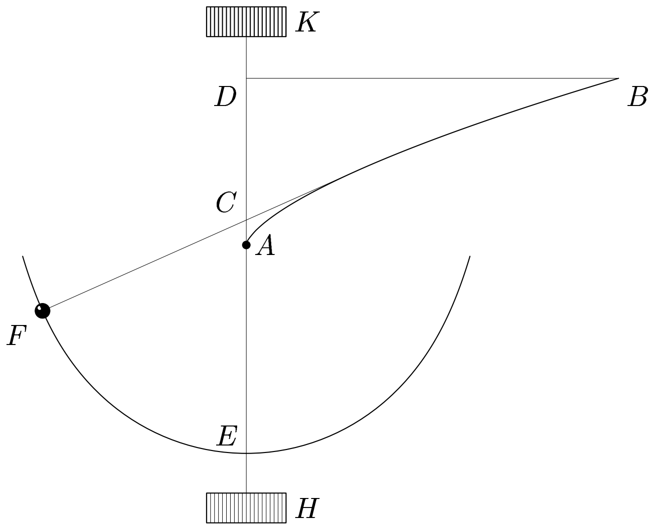
Приложение
Пятая часть «Маятниковых часов», содержащая другую конструкцию часов с использованием кругового движения маятников и теоремы о центробежной силе

У меня было намерение издать описание этих часов вместе с теоремами, относящимися к круговому движению и к центробежной силе, как я хочу ее назвать. Но относительно этого предмета у меня больше материала, чем времени для его изложения в настоящий момент. Но для того, чтобы лица, интересующиеся этим вопросом, быстрее познакомились с новым, отнюдь не бесполезным открытием, чтобы какая-либо случайность не помешала опубликованию, я, противно моему первоначальному предположению, присоединил еще и эту часть к предыдущим. В ней кратко описывается конструкция новых часов и далее следуют теоремы о центробежной силе, их доказательство откладывается на более позднее время.

Конструкция вторых часов

Я не счел нужным изложить здесь распределение колес внутри часового механизма; это устройство легко могут осуществить часовщики в различных вариантах. Будет достаточным описать ту часть часов, которая регулирует их ход определенным образом.

Следующий рисунок изображает эту часть часов. Ось KH следует представлять себе вертикальной, способной вращаться в двух подшипниках. В A к оси приделана пластинка, имеющая определенную ширину и искривленная по кривой AB, которая



есть полукубическая парабола, при сматывании нити с которой и прибавлении некоторой длины описывается парабола EF, как доказано в теореме VIII третьей части. AE — длина, на которую надо удлинить нить; путем сматывания всей линии BAE и образуется парабола EF. BCF — нить, закрепленная на кривой AB, конец которой описывает параболу. К нити прикреплен груз F. Если ось DH вращается, тогда нить BCF, вытянутая в прямую, повлечет за собой груз F, который будет описывать горизонтальные круги. Эти круги будут больше или меньше в зависимости от большей или меньшей силы, с которой действуют на ось колеса, вращающие барабан K. Но все эти круги будут лежать на параболическом коноиде, и именно потому продолжительность одного оборота будет всегда одна и та же, как вытекает из того, что я объясню об этом движении впоследствии. Если оборот должен совершаться в полсекунды, то параметр параболы EF должен составлять $4\frac{1}{2}$ дюйма моего часового фута, т. е. он должен быть равен половине длины маятника, у которого каждое колебание длится $1/2$ секунды. Из параметра параболы определяется параметр полукубической параболы; он равен $27/16$ первого параметра; определяется также отрезок AE, который равен половине длины параметра параболы EF. Если же оборот должен совершаться в секунду, то надо все длины брать в четыре раза больше, как параметры, так и длину AE.

Теоремы о центробежной силе, вызванной круговым движением[1]

I

Если два одинаковых тела в одинаковое время описывают неодинаковые окружности, то их центробежные силы относятся, как длины окружностей или как диаметры.

II

Если два одинаковых тела движутся с одинаковой скоростью по окружности разных кругов, то их центробежные силы обратно пропорциональны диаметрам.

III

Если два одинаковых тела движутся по одинаковым кругам с разной скоростью, но оба равномерно, как мы это здесь всегда подразумеваем, то их центробежные силы относятся, как квадраты скоростей.

IV

Если два одинаковых тела движутся по разным окружностям и обнаруживают одинаковую центробежную силу, то их времена обращения относятся, как корни квадратные из диаметров.

[1] Примечания к тексту даны в квадратных скобках. В примечаниях используются обозначения: m — масса тела, F — центробежная сила, T — период, R — расстояние до центра, v — скорость.

V

Если тело движется по окружности круга с той скоростью, которую бы оно приобрело, свободно падая с высоты $1/4$ диаметра круга, то испытываемая им центробежная сила равна весу, т. е. оно тянет за нить, при помощи которой оно прикреплено к центру, с той же силой, как если бы было подвешено к нити.

[Если высота $H = R/2$, то для конечной скорости при свободном падении имеем $v = \sqrt{2gH} = \sqrt{Rg}$, а для указанной центробежной силы имеем $F = mv^2/R = mRg/R = mg$.]

VI

Если тело пробегает различные горизонтальные окружности, которые все лежат на кривой поверхности параболического коноида (параболоида) с вертикальной осью, то время оборотов всегда одно и то же, будут ли круги больше или меньше, и это время обращения вдвое больше продолжительности колебания маятника, длина которого равна половине параметра образующей параболы.

ТАЙНЫ ЦИКЛОИДЫ

> Рулетта является линией столь обычной, что после прямой и окружности нет более часто встречающейся линии; она так часто вычерчивается перед глазами каждого, что надо удивляться тому, как не рассмотрели ее древние $\langle\ldots\rangle$, ибо это не что иное, как путь, описываемый в воздухе гвоздем колеса, когда оно катится своим движением с того момента, как гвоздь начал подниматься от земли, до того, когда непрерывное качение колеса не приводит его опять к земле после окончания целого оборота.
>
> *Паскаль*

1. Циклоида и изохронный маятник

Кривую, «так часто вычерчивающуюся перед глазами каждого», первыми заметили Галилей в Италии и Мерсенн (1588 – 1648) во Франции. В Италии ее назвали циклоидой (это название, означающее «происходящая от круга», принадлежит Галилею), во Франции — рулеттой. Привилось первое название, а рулеттами теперь называют кривые более широкого класса, речь о которых пойдет позднее. Математики XVII века, создававшие общие методы исследования кривых, были очень заинтересованы в новых «подопытных» кривых. Среди этих кривых циклоида заняла особое место. Она оказалась одной из первых *трансцендентных* кривых (кривых не алгебраического происхождения), для которых удалось найти красивый явный ответ в задачах о построении касательных и вычислении площади. Но больше всего поражало, что циклоида вновь и вновь появлялась при решении самых разных задач, в первоначальной постановке которых она не участвовала. Все это сделало циклоиду самой популярной кривой XVII века:

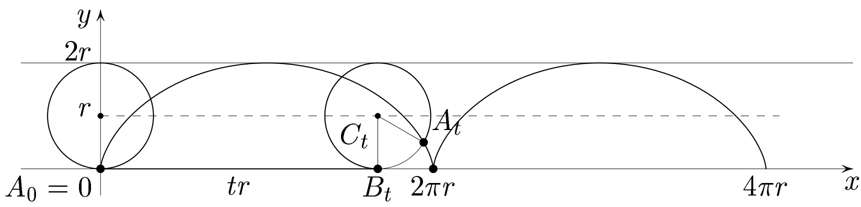


Рис. 2.

крупнейшие ученые и Италии, и Франции (Торричелли, Вивиани (1622 – 1703), Ферма (1601 – 1665), Декарт (1596 – 1650), Роберваль (1602 – 1675)) решали разнообразные задачи о циклоиде, а в 1673 году Гюйгенс констатировал, что «циклоида исследована точнее и основательнее всех других кривых».

От кинематического определения к аналитическому. Кинематическое определение циклоиды содержится в эпиграфе к этой главе. Попробуем его расшифровать.

Выберем на плоскости систему координат так, чтобы прямая, по которой катится круг (*направляющая* прямая), совпала с осью Ox, и пусть круг (его называют *производящим* кругом) катится в положительном направлении оси Ox. Предположим, что в начальный момент времени наблюдаемая точка границы круга занимает положение $A_0 = (0, 0)$ (рис. 2).

Если r — радиус производящего круга, то центр его будет двигаться по прямой $y = r$. Чтобы полностью охарактеризовать качение круга, достаточно описать движение его центра, если только добавить, что *круг катится без скольжения*![1] Нам удобно, зафиксировав единицу времени, предположить, что центр круга движется равномерно со скоростью r. В момент времени t центр круга окажется в точке $C_t = (tr, r)$, и производящий круг будет касаться направляющей прямой в точке $B_t = (tr, 0)$. Найдем теперь положение A_t наблюдаемой точки в момент времени t (в силу определения A_t будет точкой циклоиды). Чтобы это сделать, нужно четко сформулировать условие, что качение

[1]Вероятно, именно это и имел в виду Паскаль, когда писал, что колесо «катится своим движением».

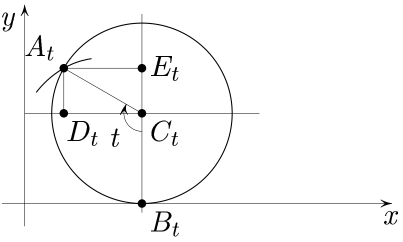


Рис. 3.

круга происходит без скольжения: оно состоит в том, что длина отрезка между точками касания производящего круга с направляющей прямой в моменты времени 0 и t (отрезка OB_t, см. рис. 2) равна длине дуги B_tA_t, «прокатившейся» по этому отрезку (при этом дуга может превышать полную окружность). Поэтому в момент времени t угол $B_tC_tA_t$ равен t (в радианной мере), так как длина дуги B_tA_t равна tr. Обозначив через D_t проекцию точки A_t на прямую, проходящую через центр круга C_t параллельно оси Ox, а через E_t — проекцию точки A_t на прямую, проходящую через центр C_t параллельно оси Oy (рис. 3), получим (с учетом направлений координатных осей)

$$C_tD_t = -r\sin t, \quad C_tE_t = -r\cos t$$

(посмотрите, что будет в случаях $t > \pi/2$, $t > \pi$). Следовательно, координаты точки A_t циклоиды равны соответственно

$$x = rt - r\sin t, \quad y = r - r\cos t.$$

Заметим, что при $t = 2\pi$ длина отрезка OB оказывается равной длине окружности, наблюдаемая точка вновь попадает на ось Ox, и картина начнет повторяться. Таким образом, период циклоиды равен $2\pi r$.

Итак, циклоиду можно определить как множество точек с координатами $(rt - r\sin t, r - r\cos t)$, и при желании про исходное кинематическое определение забыть. Мы получили так называемое параметрическое задание циклоиды: обе координаты x и y точки A_t циклоиды являются функциями от некоторой вспомогательной переменной t.

Назовем точки циклоиды, лежащие на оси Ox, остриями циклоиды, точки, лежащие на прямой $y = 2r$, — вершинами, а дуги между соседними остриями — арками циклоиды. В выбранной системе координат циклоида характеризуется одним параметром r

(радиусом производящего круга). Все циклоиды, у которых точка $(0, 0)$ — острие, получаются друг из друга гомотетией. По каждой точке (x, y), $x \neq 0$, можно единственным образом выбрать r так, что эта точка будет лежать на первой арке, выходящей из точки $(0, 0)$ соответствующей циклоиды (докажите).

Касательные к циклоиде. Мы построим касательную к циклоиде с помощью приема, разработанного Торричелли и Робервалем; этот прием основывается на сложении скоростей. Первым касательную к циклоиде, вероятно, построил Вивиани. Однако, поскольку циклоида определялась кинематически, естественно было найти такой способ построения касательной к ней, который исходил бы из кинематических соображений. Это и сделали Роберваль и Торричелли.

Рассмотрим движение материальной точки. Если в момент времени t_0 прекратить действие сил, то точка остановится или начнет равномерно двигаться по касательной к траектории (скорость возникающего равномерного движения называется мгновенной векторной скоростью исходного движения при $t = t_0$). Это утверждение вытекает из законов Ньютона. Но можно, как это часто делали математики в XVII веке, принять его за кинематическое определение касательной, убедившись, что оно согласуется с наблюдениями над простейшими движениями (прежде всего вращательным). Встав на такую точку зрения, мы сможем строить касательные ко многим интересным кривым, используя при этом лишь простые факты о скоростях.

Будем рассматривать только плоское движение. Зафиксируем на плоскости точку O — начало отсчета. Если движущаяся точка в момент времени t занимает положение A_t, то через $\mathbf{r}(t)$ обозначим вектор $\overline{OA_t}$. Задание векторов $\mathbf{r}(t)$ для всех значений t полностью определяет движение. Мгновенную векторную скорость в момент времени t обозначим через $\dot{\mathbf{r}}(t)$; напомним, что вектор $\dot{\mathbf{r}}(t)$ направлен по касательной к траектории движения. Его длина $|\dot{\mathbf{r}}(t)|$ называется величиной скорости. Если движение происходит по фиксированной прямой, на которой введены координаты, то векторы $\mathbf{r}(t)$ и $\dot{\mathbf{r}}(t)$ направлены по этой прямой, и их можно характеризовать координатами $s(t)$ и $\dot{s}(t)$.

Пример 1. Галилей показал, что для прямолинейного движения $s(t) = gt^2/2$ скорость будет равна $\dot{s}(t) = gt$.

Пример 2. Пусть точка, находящаяся на расстоянии R от точки O, равномерно вращается вокруг O. Тогда вектор $\dot{\mathbf{r}}(t)$ направлен по касательной к окружности, по которой движется точка, и $|\dot{\mathbf{r}}(t)| = 2\pi R/T$, где T — период вращения (время полного оборота). В частности, при $T = 2\pi$ имеем $|\mathbf{r}(t)| = |\dot{\mathbf{r}}(t)| = R$.

Закон сложения скоростей. Пусть имеется два движения $\mathbf{r}_1(t)$ и $\mathbf{r}_2(t)$. Назовем их суммой движение, для которого $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)$, где справа стоит векторная сумма. Закон сложения скоростей утверждает, что скорость движения $\dot{\mathbf{r}}(t)$ равна $\dot{\mathbf{r}}_1(t) + \dot{\mathbf{r}}_2(t)$, то есть сумме (векторной) скоростей составляющих движений. Закон сложения скоростей легко установить для суммы движений с постоянными скоростями; общий же случай получается из этого частного случая предельным переходом.

Всякое движение $\mathbf{r}(t)$ может быть представлено в виде суммы двух прямолинейных движений. Для этого достаточно ввести любую декартову систему координат так, чтобы $O = (0, 0)$, и рассмотреть изменение со временем координат $x(t), y(t)$ вектора $\mathbf{r}(t)$. Очевидно, что исходное движение $\mathbf{r}(t)$ и будет суммой движений $x(t)$ и $y(t)$ по координатным осям. Скорости этих движений $x(t)$ и $y(t)$ являются компонентами вектора $\mathbf{r}(t)$ (в силу закона сложения скоростей). Если в примере 2 $R = 1, T = 2\pi$, и вектор $\mathbf{r}(0)$ направлен по положительному направлению оси Ox, то $\mathbf{r}(t) = (\sin t, \cos t)$, $\dot{\mathbf{r}}(t) = (\cos t, -\sin t)$, и мы получаем, что $\dot{s}(t) = -\sin t$ если $s(t) = \cos t$, и $\dot{s}(t) = \cos t$ если $s(t) = \sin t$. Читатель, знакомый с дифференцированием, заметит, что выявился очень простой кинематический смысл формул для производных от $\sin t$ и $\cos t$.

Кинематическое определение касательной к параболе. Еще Галилей (1564 — 1642) обнаружил, что если тело бросить под углом к горизонту, то оно летит по параболе. При доказательстве этого факта Галилей исходил из предположения, что такое движение является суммой равномерного движения по инерции и свободного падения. Однако Галилей не воспользовался своими вычислениями для построения касательной к параболе. Сделал это Торричелли. В приводимых ниже задачах 1, 2 сформулирован его результат.

Задача 1. Докажите, что касательная, проведенная в точке A_t траектории горизонтально брошенного тела: $A_t = (x(t), y(t)) = (vt, gt^2/2)$, соединяет эту точку с точкой $(0, -y(t)) = (0, -gt^2/2)$.

Все вычисления легко обобщаются на случай тела, брошенного под углом к горизонту со скоростью (u, v). В этом случае движение разбивается на движение $\{x_1(t) = ut, x_2(t) = vt\}$ с постоянной скоростью (u, v) и свободное падение $\{x_2(t) = 0, y_2(t) = -gt^2/2\}$. Поэтому результирующее движение записывается так: $\{x(t) = ut, y(t) = vt - gt^2/2\}$ (при сложении векторов с началом в O координаты их концов складываются).

Задача 2. Докажите, что касательная к параболе, по которой летит тело, брошенное со скоростью (u, v), соединяет точку касания $(x(t), y(t))$ с точкой $(0, -y_2(t)) = (0, gt^2/2)$.

Заметим, что указанный Торричелли способ построения касательных к параболе был известен и раньше, однако его кинематическая интерпретация, безусловно, поучительна.

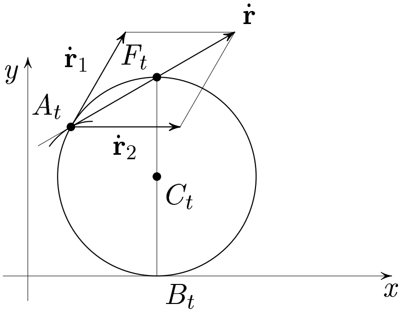


Рис. 4.

Вернемся к циклоидам. Движение точки, описывающей циклоиду, можно рассматривать как сумму вращательного $\mathbf{r}_1(t)$ — вокруг O — и поступательного $\mathbf{r}_2(t)$ — вдоль прямой l, причем движения эти происходят таким образом, что в каждый момент времени пройденные пути оказываются одинаковыми $(s(t))$. Закон изменения пути $s(t)$ можно задавать по-разному; от этого будет зависеть характер движения, но траектория (циклоида), а вместе с ней и интересующие нас касательные, меняться не будут. Выберем самый простой закон изменения: $s(t) = ct$. Тогда оба движения, и поступательное и вращательное, будут равномерными с одинаковой величиной скорости $\dot{\mathbf{r}}_1(t) = \dot{\mathbf{r}}_2(t) = c$ (см. пример 2)[1].

[1]Имеем $c = 2\pi R/T$, где R — радиус производящего круга, T — время его полного оборота. В частности, если $T = 2\pi$, то $c = R$.

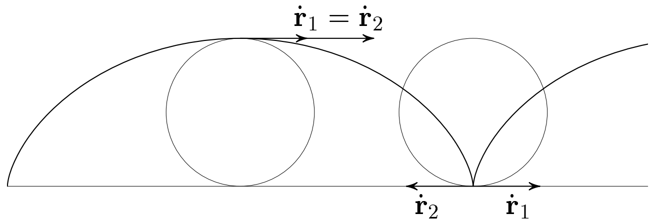


Рис. 5.

Найдем скорость результирующего движения. Пусть в момент времени t точка занимает положение A_t (рис. 4). Вектор $\dot{\mathbf{r}}_1(t)$ направлен по касательной к границе производящего круга, вектор $\dot{\mathbf{r}}_2(t)$ — горизонтально; длины их одинаковы. По правилу параллелограмма (в данном случае это ромб) находим искомую скорость $\dot{\mathbf{r}}(t)$, а значит, и касательную к циклоиде.

Задача 3. Докажите, что касательная к циклоиде в точке A_t соединяет эту точку с верхней точкой F_t производящего круга при его соответствующем положении.

(Для решения задачи нужно доказать лишь простой геометрический факт: вектор $\dot{\mathbf{r}}(t)$ направлен по прямой A_tF_t.)

Заметим, что величина скорости $|\dot{\mathbf{r}}(t)|$ не постоянна: она максимальная, когда точка занимает наивысшее положение (при этом векторы $\dot{\mathbf{r}}_1(t)$ и $\dot{\mathbf{r}}_2(t)$ лежат на одной прямой и совпадают по направлению), и равна нулю, когда точка попадает на прямую l (в этом случае векторы $\dot{\mathbf{r}}_1(t)$ и $\dot{\mathbf{r}}_2(t)$ противоположны — рис. 5).

Можно показать, что равенство нулю скорости в точках соприкосновения круга и прямой во все моменты времени эквивалентно принятому ранее определению качения без скольжения.

Итак, получаем, что там, где циклоида имеет заострения, скорость наблюдаемой точки обращается в нуль. Оказывается, что и в точках заострения любой траектории скорость всегда равна нулю. Иногда говорят, что траектория не может «сломаться» на ненулевой скорости. Принято считать, что в точках заострения у кривых нет касательных. Все сказанное здесь нуждается в серьезных уточнениях, которые мы делать не будем.

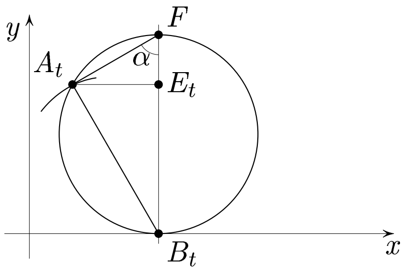


Рис. 6.

Нормаль к циклоиде. Итак, касательная к циклоиде в точке A_t (рис. 6) проходит через верхнюю точку производящего круга — точку F на рис. 6. Пусть B_t — нижняя точка круга, α — угол между касательной и вертикалью FB_t. Тогда A_tB_t — *нормаль* к циклоиде (перпендикуляр к касательной; мы воспользовались тем, что вписанный угол, опирающийся на диаметр, — прямой), и для ординаты y точки A_t имеем $y = E_tB_t = 2r\sin^2\alpha$. Отсюда получаем следующее соотношение:

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{y}{2r}}. \tag{9}$$

В дальнейшем это соотношение будет играть важную роль. Можно показать, что циклоида с параметром r является единственной кривой, проходящей через точку $(0,0)$ и удовлетворяющей соотношению (9).

О площадях криволинейных фигур. Площади некоторых криволинейных фигур умели вычислять еще в Древней Греции. Вначале интересовались лишь квадратурой фигур, т. е. построением для данной фигуры циркулем и линейкой отрезка, длина которого равна ее площади. Как выяснилось позднее, это можно сделать для тех фигур, площадь которых вычисляется при помощи арифметических операций и операции извлечения квадратного корня. Постепенно стали интересоваться фигурами, площади которых вычисляются с помощью произвольных алгебраических операций (алгебраическая квадратура), а затем даже и такими фигурами, в выражениях для площадей которых фигурировало число π. Основной метод вычисления площадей состоял в приближении данной фигуры многоугольниками и переходе к пределу; но должно было очень повезти, чтобы эти вычисления удалось довести до явного ответа.

Иногда вычисление площади фигуры можно упростить, воспользовавшись какими-нибудь общими свойствами площадей. Вот несколько таких свойств.

1. При гомотетии фигуры с коэффициентом k площадь ее умножается на k^2, а при растяжении фигуры относительно некоторой оси с коэффициентом k площадь ее умножается на k.
2. Равносоставленные фигуры (т. е. фигуры, которые можно разрезать на попарно равные части) равновелики (имеют равные площади).
3. Две фигуры, при пересечении которых любой прямой, параллельной некоторой фиксированной прямой, получаются равные отрезки, равновелики (этот принцип сформулировал в 1635 году Кавальери (1598 – 1647)).

Представим себе, что контур фигуры — гибкая лента, а сама фигура составлена из очень тонких жестких слоев, параллельных прямой l («неделимых», по терминологии Кавальери). Рассмотрим преобразования, сохраняющие эти слои, но сдвигающие их друг относительно друга. Все получающиеся при таких преобразованиях фигуры в силу принципа Кавальери будут равновелики.

Перечисленные свойства площадей нуждаются в доказательствах (основная трудность этих доказательств состоит в том, чтобы дать строгое определение площади), но в них легко поверить. Сейчас мы расскажем о том, как изящно применяются эти свойства при вычислении площади фигуры, лежащей под аркой циклоиды.

Спутница циклоиды, лепестки Роберваля и площадь под циклоидой. Поскольку все циклоиды подобны, мы ограничимся случаем $r = 1$. Вслед за Робервалем свяжем с каждой точкой циклоиды A_t (см. рис. 6 на с. 132) ее проекцию E_t на вертикальный диаметр производящего круга. Точка E_t имеет координаты

$$x = t, \quad y = 1 - \cos t = 1 - \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right).$$

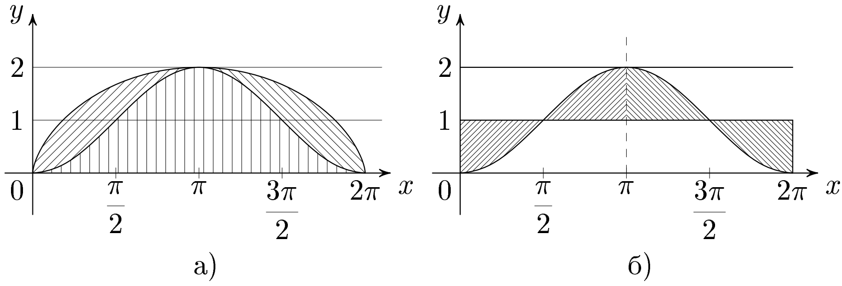


Рис. 7.

Кривую, составленную из точек E_t при всевозможных t, Роберваль назвал «спутницей циклоиды». Легко понять, что «спутница циклоиды» — это сдвинутая синусоида (на 1 вверх и на $\pi/2$ вправо).

С этим обстоятельством связан исторический курьез. Математики с незапамятных времен занимались тригонометрическими функциями, но синусоида впервые появилась лишь в XVII веке, причем не как график синуса, а как ...«спутница циклоиды» (отчасти это можно объяснить тем, что долго не рассматривали функций неалгебраического происхождения).

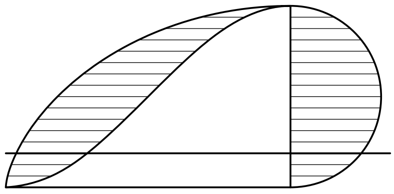


Рис. 8.

«Спутница циклоиды» разбивает ее на три части (рис. 7а на с. 134): фигуру под синусоидой и две симметричные фигуры, названные «лепестками Роберваля». В силу свойства 2 площадь фигуры под синусоидой равна 2π: эта фигура равносоставлена с прямоугольником такой площади (рис. 7б). Рассмотрим один «лепесток». Горизонталь на высоте $y = 1 - \cos t$ пересекает его по отрезку A_tE_t длины $|\sin t|$ (см. рис. 3). Переместив эти горизонтальные отрезки (при всевозможных t) вдоль своих горизонталей так, чтобы их левые концы попали на одну вертикаль, мы получим полукруг единичного круга (рис. 8). В силу принципа Кавальери площадь «лепестка» равна площади этого полукруга, т. е. $\pi/2$. Значит, площадь фигуры под аркой циклоиды с $r = 1$ равна $2\pi + 2(\pi/2) = 3\pi$ (и следовательно, $3\pi r^2$ при $r \neq 1$).

Вопрос о вычислении площадей сегментов циклоиды является менее элементарным. Гюйгенс не без гордости писал: «Я первый промерил площадь той части циклоиды, которая получится, если отсчитать от вершины $1/4$ часть оси и провести параллель основанию. Эта часть составляет половину площади правильного шестиугольника, вписанного в образующий круг».

Таутохрона. Галилей утверждал, что период колебаний математического маятника определяется только его длиной l и не зависит от угла φ его максимального размаха. Гюйгенс, выяснив, что это утверждение справедливо лишь для малых углов φ, решил построить маятник, период колебаний которого и в самом деле не зависел бы от φ (такой маятник называется таутохронным или изохронным).

Построение изохронного маятника Гюйгенс разделил на два этапа:

1) нахождение кривой, по которой должен двигаться конец маятника (таутохроны);

2) нахождение подвески маятника, обеспечивающей движение его конца по таутохроне.

Мы начнем с поисков таутохроны (существование которой заранее не очевидно).

Конец математического маятника движется по дуге окружности точно так же, как тяжелая материальная точка — по желобу, контур которого совпадает с этой окружностью. Если пренебречь силами трения и сопротивления воздуха, то тяжелая точка, пущенная по круговому желобу без начальной скорости с высоты H, пройдя нижнее положение, снова поднимется на высоту H и далее будет совершать периодические колебания, поднимаясь то в одну, то в другую сторону на высоту H. Неверное утверждение Галилея состояло в том, что при этом период колебаний $T(H)$ не зависит от H. Наша задача — определить, какой формы должен быть желоб, чтобы то, что утверждал Галилей, было верным.

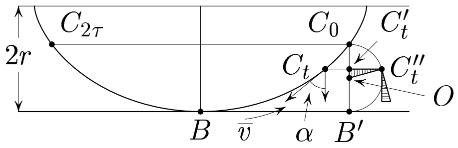


Рис. 9.

Благодаря счастливой случайности (они в истории науки играют не последнюю роль), Гюйгенс изучал циклоиду (в связи с конкурсом Паскаля, 1658 год) в то самое время, когда искал изохронный маятник. Именно циклоида и оказалась таутохроной! Вероятно, сам Гюйгенс этого заранее не ожидал (так можно понимать его слова: «я обнаружил пригодность ее (циклоиды) для измерения времени, исследуя ее по строгим правилам науки и не подозревая ее применимости»).

Рассмотрим на желобе, сделанном по форме перевернутой циклоиды (рис. 9; r — радиус производящего круга) тяжелую материальную точку; пусть в начальный момент времени она находится на высоте H (в точке C_0 на рисунке). Попытаемся найти время τ, через которое она окажется в нижней точке B (вершине циклоиды). Тогда через 2τ она будет в точке $C_{2\tau}$ циклоиды, симметричной относительно вертикальной оси точке C_0, через время $T = 4\tau$ (полный период) вернется в точку C_0. Нас интересует зависимость τ от H.

Пусть в момент времени t тяжелая точка занимает положение C_t на высоте $h = h(t)$. Вектор скорости $\dot{\mathbf{r}}(t)$ в момент времени t направлен по касательной к циклоиде в точке C_t; его длина $|\dot{\mathbf{r}}(t)|$ (величина скорости) определяется из закона сохранения энергии:

$$\frac{m|\dot{\mathbf{r}}(t)|^2}{2} = mg(H - h(t)),$$

т. е.

$$|\dot{\mathbf{r}}(t)| = \sqrt{2g(H - h(t))}.$$

Посмотрим, как движется проекция нашей точки на вертикаль C_0B'. В момент времени t эта проекция занимает положение C'_t, а в момент времени τ она окажется в точке B' (см.

рис. 9), пройдя отрезок C_0B' длины H. Скорость $w(t)$ в момент времени t этого прямолинейного движения (в точке C'_t на рис. 9) — это проекция вектора скорости $\dot{\mathbf{r}}(t)$ на вертикаль: $w(t) = |\dot{\mathbf{r}}(t)|\cos\alpha$, где α — угол между касательной к циклоиде и вертикалью. Поскольку (см. (9)) $\cos\alpha = \sqrt{(2r-y)/2r}$ и $y = 2r - h(t)$, имеем $\cos\alpha = \sqrt{h(t)/2r}$, а значит

$$w(t) = \sqrt{\frac{g}{r}} \cdot \sqrt{h(t)(H - h(t))}.$$

Итак, закон изменения скорости у нашего прямолинейного движения довольно сложный. Но Гюйгенс заметил (решающая догадка!), что при равномерном вращательном движении по окружности диаметра H вертикальная компонента скорости имеет тот же вид, что и $w(t)$. Действительно, построим на отрезке C_0B' как на диаметре полуокружность, и пусть C''_t — точка этой полуокружности, лежащая на высоте $h(t)$. Длина отрезка $C'_tC''_t$ равна $\sqrt{h(t)(H - h(t))}$.

Из подобия прямоугольных треугольников, заштрихованных на рис. 9 (их стороны взаимно перпендикулярны: OC''_t — радиус, в точке C''_t проведены касательная к полуокружности и вертикаль), следует, что вектор длины $(H/2)\sqrt{g/r}$, касательный к окружности в точке C''_t, имеет вертикальную проекцию длины $w(t)$. Значит, когда наша точка C движется по циклоиде, соответствующая ей точка C'' равномерно вращается с угловой скоростью $\sqrt{g/r}$ радиан в секунду (не зависящей от H!). За время $\tau = \pi\sqrt{r/g}$ точка C'' пройдет полуокружность C_0B', за то же время точка C' пройдет отрезок C_0B', а сама точка C — дугу циклоиды C_0B. Итак, мы не только доказали таутохронность циклоиды (т. е. что τ не зависит от H), но и нашли полный период колебаний:

$$T = 4\tau = 4\pi\sqrt{\frac{r}{g}}. \tag{10}$$

Фактически доказано, что движение тяжелой материальной точки по циклоидальному желобу можно представить в виде суммы равномерного вращательного движения с угловой скоростью, не зависящей от того, с какой высоты H пущена точка, и некоторого (вообще говоря неравномерного) поступательного движения. При $H = 2r$ это легко вывести из кинематического определения циклоиды и соотношения (9) на с. 132.

Формула (10) настолько напоминает гипотетическую формулу Галилея для периода математического маятника ($T = 2\pi\sqrt{l/g}$, где l — длина), что было естественно попытаться использовать (10) для обоснования последней. И в самом деле, с помощью (10) Гюйгенс получил первое строгое доказательство формулы для периода колебаний математического маятника при малых углах размаха φ. Он заметил, что при малых углах круговой желоб почти не отличается от циклоидального, и оставалось только понять, при каком соотношении между длиной l математического маятника и параметром l циклоиды это отличие наименьшее. Оказалось, что при $l = 4r$ (это не очевидный факт; мы еще к нему вернемся). Подставляя в (10) $r = l/4$, получаем знаменитую формулу для периода математического маятника: $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ (при малых φ).

Циклоидальный маятник. Создавая первую модель часов, Гюйгенс надеялся скомпенсировать отклонение простого (математического) маятника от изохронности, уменьшая в процессе отклонения его длину. Длину маятника можно регулировать, установив «щеки» (рис. 10а), на которые в процессе отклонения будет наматываться нить подвески. Попытки экспериментально подобрать нужную зависимость длины маятника от угла отклонения не дали успеха, и Гюйгенс в следующих своих конструкциях часов устанавливает вместо щек ограничители размаха. Когда же выяснилось, что циклоида — таутохрона, стало понятно, что форма щек должна быть такой, чтобы конец маятника двигался по циклоиде.

Гюйгенс искал форму щек, рассуждая (в несколько вольном пересказе) примерно так. Пусть имеется препятствие, ограниченное кривой L, в некоторой точке O которого закреплена нерастяжимая нить длины l (рис. 10б). Натянутую нить мы наматываем на препятствие, наблюдая за кривой M, которую описывает

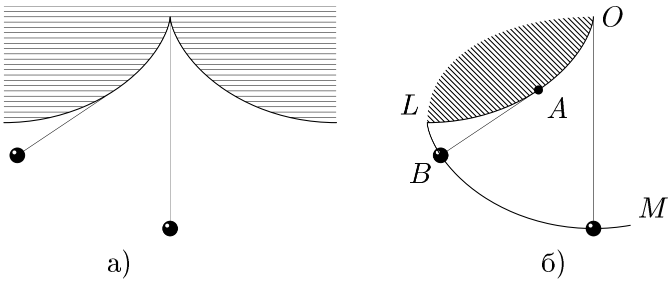


Рис. 10.

незакрепленный конец нити. Гюйгенс называл кривую M «разверткой» кривой L; теперь M называют *эвольвентой* кривой L, а L — эволютой кривой M (с одной эволютой связывается много эвольвент, отвечающих разным длинам l). Нам нужно найти эволюту циклоиды.

Кривая M состоит из таких точек B, что сумма длин отрезка касательной BA к кривой L в точке A и дуги AO кривой L равна l (см. рис. 10б — это в точности означает натянутость частично намотанной на L нити). Первая догадка Гюйгенса заключалась в том, что касательная к кривой M в точке B перпендикулярна к AB, т. е. что AB — касательная к кривой L в точке A — является одновременно и нормалью к кривой M в точке B. Проще всего пояснить этот факт, исходя из кинематического определения кривой M. Вспомним, что вектор скорости направлен по касательной к траектории движения и что при изменении действия сил вектор скорости не может измениться мгновенно (подробнее об этом см. ниже). «Обрубим» в точке A препятствие, но будем продолжать движение натянутой нити (рис. 11); тогда конец нити начнет двигаться по окружности с центром в точке A; векторная же скорость его в точке B не изменится; поэтому в точке B у кривой M и окружности с центром A будет общая касательная, перпендикулярная к радиусу BA.

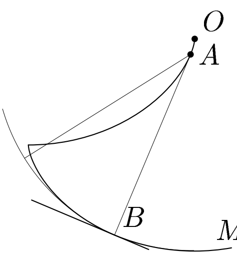


Рис. 11.

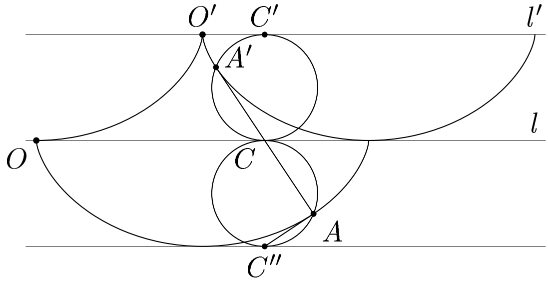


Рис. 12.

Когда вы прочтете в этой главе раздел, посвященный рулеттам, вы заметите, что если рассматривать нити разной длины, то описанное движение конца нити продолжается до такого движения всей плоскости как твердой пластины, при котором точки кривой L являются мгновенными центрами вращения, а различные эвольвенты — траекториями точек плоскости. Из этого замечания сразу следует перпендикулярность отрезка AB к касательной к кривой M в точке B.

Следующая догадка Гюйгенса состояла в том, что в «хорошей» ситуации эволюта кривой восстанавливается однозначно (помните, у одной кривой много эвольвент)! Дело в том, что нормали к кривой M в разных точках — это касательные к ее эволюте L. «Хорошую» же кривую по касательным можно восстановить: взяв много касательных, построить описанную ломаную и, «учащая» затем касательные, все лучше приближать кривую (говорят, что кривая огибает множество своих касательных).

Нам нужно найти кривую, касательные к которой будут нормалями к заданной циклоиде. Гюйгенс догадался, что этой кривой будет такая же циклоида, только поднятая на $2r$ и сдвинутая на полпериода (так, что ее вершины совпадают с остриями исходной циклоиды; см. рис. 12).

В самом деле, пусть $r = 1$, и пусть l и l' — направляющие прямые соответственно нижней и верхней циклоид, O и O' — их начальные точки (l' на две единицы выше l; O' на π единиц правее O). Возьмем на прямой l точку C и рассмотрим положения производящих кругов (обеих циклоид), когда они касаются l в этой точке C. Пусть C' и C'' — диаметрально противоположные ей точки соответственно верхнего и нижнего кругов, A и A' — соответствующие точки циклоид. Дуга $CC''A$ равна по длине отрезку OC; поэтому она на π больше дуги $C'A'$, равной по длине отрезку $O'C'$. Отсюда $\angle C'CA' = \angle C''CA$, и точки A', C, A лежат на одной прямой. Остается заметить, что CA' — касательная к верхней циклоиде, а CA — нормаль к нижней (AC'' — касательная к ней).

Теперь мы знаем, что щеки таутохронного маятника должны быть циклоидальными, и что длина нити l должна равняться $4r$ (именно при таком значении l мы в качестве эвольвенты получим нужную циклоиду). При малых же углах размаха φ регулирующие щеки почти не влияют на длину маятника, и циклоида близка к дуге окружности радиуса $4r$ (см. конец предыдущего пункта).

Теорема Кристофера Рена. Эволюты и вычисление длин кривых. Решив задачу о циклоидальном маятнике, Гюйгенс не остановился, понимая, что им создана замечательная математическая теория. Он пишет: «Для применения моего изобретения к маятникам мне необходимо было установить новую теорию, а именно, теорию образования новых линий при посредстве развертывания кривых линий. Здесь я столкнулся с задачей сравнения кривых и прямых линий. Я изучил этот вопрос несколько далее, чем нужно было для моей цели, так как теория показалась мне изящной и новой».

Прежде всего Гюйгенс заметил, что когда нить маятника целиком наматывается на щеку, то конец его оказывается в вершине циклоиды; значит, длина нити маятника ($4r$) совпадает с длиной половины арки циклоиды, и, значит, длина арки циклоиды равна $8r$. Эту теорему в 1658 году сформулировал и доказал Кристофер Рен; Гюйгенс же, как мы видим, получил очень естественное доказательство этой теоремы.

Теорема Кристофера Рена произвела на современников очень сильное впечатление, и вот почему. Вычислением длин кривых математики интересовались не меньше, чем вычислением площадей. Вначале, по аналогии с квадратурой (см. с. 132), они интересовались «ректификацией» — построением циркулем и линейкой отрезка соответствующей длины; позже стали интересоваться и алгебраической ректификацией — выражением длины кривой при помощи любых алгебраических операций. Мы уже говорили, что квадратуры некоторых фигур были найдены еще античными математиками; кривую же, для которой была бы возможна хотя бы алгебраическая ректификация, математики безуспешно искали вплоть до второй половины XVII века. Начали думать, что такой кривой вообще нет (так можно толковать слова Декарта «мы, люди, не можем найти соотношения между прямыми и кривыми»). Ректификация циклоиды, полученная Реном, опровергла эту точку зрения. Затем Ферма получил ректификации нескольких других кривых; однако во всех этих примерах фигурировали неалгебраические кривые, и скептики «уточнили» гипотезу, предположив, что невозможна алгебраическая ректификация алгебраических кривых (они справедливо объясняли, что, конечно, искусственно построить кривую, допускающую ректификацию, можно). Однако и в таком виде гипотеза оказалась неверной (первый опровергающий эту гипотезу пример был построен еще в 1657 году, но оставался неизвестным): Нейль, Хейрат и Ферма независимо предъявили в качестве алгебраической кривой, допускающей алгебраическую ректификацию, одну и ту же *полукубическую параболу* $ay^2 = x^3$. Совпадение это казалось мистическим до тех пор, пока Гюйгенс не вскрыл, в чем причина исключительности этой малозаметной кривой: она является эволютой параболы. Точнее, эволютой параболы $y = x^2$ является кривая

$$y = \frac{1}{2} + 3\left(\frac{x}{4}\right)^{2/3}.$$

Теория Гюйгенса вообще максимально прояснила вопрос о ректификации. Результаты о циклоидальном маятнике и связанные с ними вопросы составили содержание большей части книги Гюйгенса «Маятниковые часы», вышедшей в 1673 году.

В заключение мы предлагаем читателям несколько задач с весьма почтенной репутацией.

Две задачи Галилея

1. Докажите, что под действием силы тяжести материальная точка проходит все хорды окружности, оканчивающиеся в нижней точке окружности, за одно и то же время (аналогично — для хорд, начинающихся в верхней точке окружности).
2. Пусть есть кривая L (достаточно «хорошая») и точка A, не лежащая на L. Найдите на L такую точку B, чтобы отрезок AB проходился материальной точкой под действием силы тяжести за минимальное время.

Задачи Ньютона

Пусть есть центральное поле, в котором силы пропорциональны расстоянию r до центра: $F(r) = kr$, $k > 0$.

Ньютон заметил, что в таком поле гипоциклоиды (см. о них ниже в этой главе) играют ту же роль, что циклоиды — в поле сил тяжести: гипоциклоиды являются (в этом поле) таутохронами (Ньютон называл их изохронами), а эволютами гипоциклоид являются подобные же гипоциклоиды (это — чисто геометрический факт, не относящийся к механике, но он позволяет устроить гипоциклоидальный маятник, а заодно и вычислить длину гипоциклоиды).

Попробуйте доказать эти утверждения.

2. Рулетты и касательные к ним

> Некоторые вопросы выяснились для меня первоначально при помощи механического метода, после чего их надо было доказать геометрически, ибо исследование упомянутым методом не может дать подлинного доказательства. Однако, разумеется, легче найти доказательство, если сперва с помощью этого метода получено известное представление о вопросе, чем искать доказательство, не зная заранее, в чем суть дела.
>
> *Архимед*

Укороченные циклоиды. Пока мы следили только за одной (фиксированной) граничной точкой производящего круга; ясно, что и другие граничные точки будут двигаться по таким же циклоидам, только сдвинутым вдоль прямой. Проследим теперь за траекториями внутренних точек круга. Возникающие кривые называются укороченными циклоидами; они характеризуются отношением $k = \rho/r$, где R — радиус производящего круга, ρ —

расстояние от центра круга до наблюдаемой точки. При $k = 0$ получаем прямую, по которой движется центр круга, а при $k = 1$ — циклоиду (рис. 13).

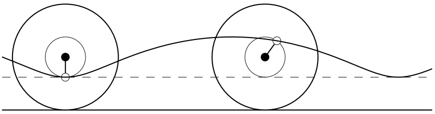


Рис. 13.

Задача 4. Докажите, что нормаль к укороченной циклоиде проходит через нижнюю точку производящего круга.

Заметим, что точка, движущаяся по укороченной циклоиде, нигде не имеет нулевой скорости. В нижней точке скорость направлена горизонтально и ее величина равна $R - \rho$. Это означает, что к качению окружности радиуса ρ добавляется скольжение со скоростью $R - \rho$ (поступательное движение).

Удлиненные циклоиды. Вовлечем в качение круга его внешние точки (можно представить себе, что на колесо, движущееся по рельсу, надет обод). Эти точки движутся по кривым, которые называются удлиненными циклоидами (рис. 14). Все рассуждения, которые ранее были приведены для укороченных циклоид, дословно переносятся на удлиненные. Здесь только $k = \rho/r > 1$. Заметим лишь, что в нижней точке удлиненной циклоиды скорость направлена в сторону, противоположную движению круга ($|\dot{\mathbf{r}}_1| = \rho$, $\dot{\mathbf{r}}_2 = r$, $\rho > R$).

Обращали ли вы внимание на то, что нижние точки обода колеса вагона движутся назад?

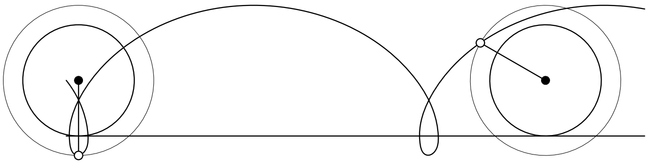


Рис. 14.

Мгновенный центр вращения. Итак, мы вовлекли в качение круга по прямой все точки плоскости. Каждая точка движется по своей траектории, но все эти траектории согласованы, так как движущиеся точки составляют твердое тело. Характеристическим свойством твердого тела с точки зрения кинематики является то, что при движении расстояния между всеми его точками остаются неизменными. Мы ограничимся здесь рассмотрением лишь таких движений твердых пластин, которые можно производить, не выводя пластины из плоскости (запрещается, например, их переворачивать). Нас будет интересовать, какие ограничения накладывает на скорости точек пластины условие твердости (заметим, что вопрос о движении трехмерных твердых тел намного сложнее рассматриваемой нами плоской задачи).

Вот некоторые закономерности движения твердых пластин.

Принцип вовлечения. Движение твердой пластины однозначно определяется движениями любых двух ее точек. Движение двух различных точек, при котором сохраняется расстояние между ними, можно, и притом единственным образом, продолжить до движения всей плоскости как твердой пластины.

Это утверждение носит чисто геометрический характер. Мы не будем приводить его доказательства, ограничившись наглядными пояснениями. Во-первых, движение прямолинейного стержня полностью характеризуется движением двух его точек, а во-вторых, если треугольник составлен из жестких стержней, то движение одного из них однозначно приводит в движение весь треугольник. В результате в движение двух точек A, B можно вовлечь прямую AB, а затем всякую точку C вне AB.

Принцип инерции. Если на твердую пластину не действуют никакие внешние силы (а лишь внутренние силы, обеспечивающие твердость), то она совершает равномерное прямолинейное или равномерное вращательное движение.

При рассмотрении произвольных движений пластин нам потребуется еще один фундаментальный принцип механики: *скорость не может измениться мгновенно* (для изменения скорости требуется ненулевое время). В частности, если в момент времени t_0 изменить силы, действовавшие на движущуюся точку, то скорость $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ не изменится, а значит, если $\dot{\mathbf{r}}(t_0) \neq 0$, не изменится и касательная к траектории в момент t_0 (хотя сама траектория начиная с этого момента может стать иной).

Пусть в момент времени t_0 на движущуюся твердую пластину перестали действовать внешние силы. Тогда, с одной стороны, скорости точек в момент времени t_0 останутся прежними, а с другой стороны, движение должно подчиняться сформулированному принципу инерции. Поэтому при движении твердой пластины в каждый момент времени t может иметь место лишь одна из двух возможностей;

а) скорости всех точек равны (как векторы);

б) существует единственная точка O_t, в которой скорость равна нулю; в произвольной же точке A пластины скорость направлена перпендикулярно к вектору $\overline{O_tA}$, а ее величина пропорциональна расстоянию от A до O_t. (Коэффициент пропорциональности зависит только от момента времени t.)

Из того, что скорость не может измениться мгновенно, нетрудно вывести, что переход от ситуации а) к б) и наоборот возможен лишь в те моменты, когда пластина останавливается (скорости всех точек равны нулю). Поэтому в промежутках между остановками либо всюду имеет место ситуация а), либо всюду б). Можно показать, что в случае а) траектория любой точки A получается из траектории некоторой точки B параллельным переносом на вектор $\overline{BA}$. Мы будем рассматривать случай б) (то есть считать, что в каждый момент времени имеется единственная точка O_t с нулевой скоростью). Будем называть O_t *мгновенным центром вращения* в момент t. (В примере с качением круга по прямой мгновенным центром вращения является точка соприкосновения круга с направляющей прямой.)

Если известен мгновенный центр вращения O_t, то нормали к траекториям в момент времени t (прямые O_tA_t), а следовательно, и касательные, строятся автоматически. Наоборот, если в момент t известны скорости двух точек пластины, то взяв точку пересечения нормалей к этим скоростям, мы получим мгновенный центр вращения O_t.

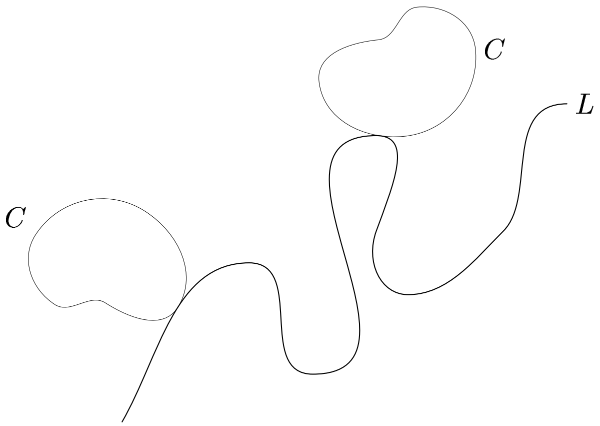


Рис. 15.

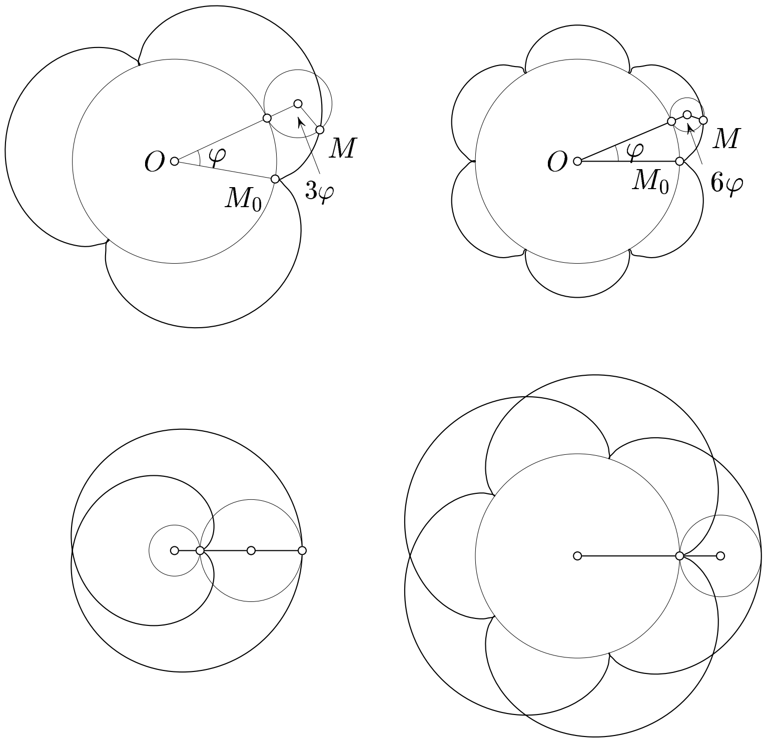
Пусть теперь твердая пластина движется по неподвижной плоскости. Рассмотрим *на этой плоскости* кривую L, составленную из мгновенных центров вращения во все моменты времени; кривую L называют неподвижным центроидом; мы будем называть ее «рельсом». С другой стороны, рассмотрим *на пластине* кривую C, составленную из всех таких точек, которые оказываются мгновенными центрами вращения в какие-то моменты времени; C называют подвижным центроидом; мы будем называть C «колесом». Введенные «несерьезные» термины, вероятно, подсказали вам, что исходное движение можно получить, если рассмотреть качение без скольжения нашего кривого «колеса» по кривому «рельсу» и вовлечь в это качение остальные точки (рис. 15). Отсюда можно вывести равенство длин дуги «колеса» и соответствующей дуги направляющего «рельса» (по которой эта дуга «колеса» прокатилась). При этом разрешается, чтобы при качении «колесо» пересекало «рельс».

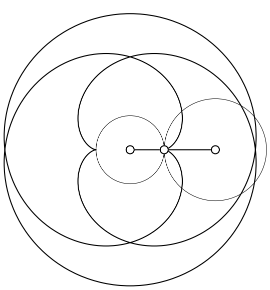
Часто под *рулеттами* понимают траектории, которые описывают точки плоскости при ее движении как твердой пластины с условием (б) во все моменты времени, т. е. при некотором качении. Ко всем рулеттам мы научились проводить нормали и касательные. При этом оказалось, что не нужно даже уметь проводить касательные к «колесу» и «рельсу» (это было бы необходимо, если пользоваться сложением скоростей). В наших механических рассмотрениях мы вышли за пределы XVII века; замечательно, однако, что способ проведения нормалей к общим рулеттам открыл Декарт, определявший их с помощью качения (не зная, сколь общий характер носят движения, порожденные качениями).

Эпициклоиды. Рассмотрим теперь рулетты, получающиеся при качении круга по кругу. Пусть круг радиуса r катится по внешней стороне окружности радиуса R. Траектории граничных точек катящегося круга («колеса») называются эпициклоидами. Их вид зависит от $k = R/r$ (рис. 16 на с. 149). Если k — целое, то подвижный круг, прокатившись один раз по границе неподвижного, сделает k оборотов и эпициклоида будет иметь k заострений и k арок. Эпициклоиду при $k = 1$ называют кардиоидой (она напоминает стилизованное изображение сердца). Если $k = p/q$ — несократимая дробь, то подвижный круг, сделав q оборотов, p раз прокатится по неподвижному. Если же k будет иррациональным числом, то никакой периодичности не будет, и наблюдаемая точка никогда не вернется в исходное положение. (Можно доказать, что получающаяся в этом случае бесконечная траектория заполняет кольцо $\{R \leqslant OA \leqslant R+2r\}$, подходя сколь угодно близко к любой его точке, но не в каждую попадая.)

Касательные к эпициклоидам легко строятся с помощью мгновенного центра вращения — точки соприкосновения кругов. Докажите, что касательная к эпициклоиде (в некоторой точке) проходит через точку соответствующего подвижного круга, диаметрально противоположную точке соприкосновения с неподвижным.

Замечание. При построении эпициклоид и решении задач нужно помнить следующее. Если A — начальное положение наблюдаемой точки (рис. 18 на с. 151), а в некоторый момент времени подвижный круг касается неподвижного в точке B, то эпициклоиде принадлежит такая точка его границы C, что дуга BA





а)	$k = 3$	б)	$k = 6$
в)	$k = \frac{1}{2}$	г)	$k = \frac{5}{2}$
д)	$k = \frac{2}{3}$		

Рис. 16.

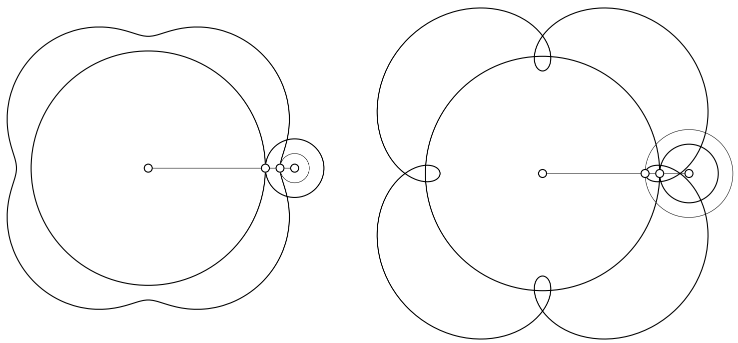


Рис. 17. Укороченные и удлиненные эпициклоиды

равна по длине дуге BC; учитывая разницу радиусов, получаем

$$\frac{\cup BC}{\cup BA} = \frac{R}{r} = k.$$

Траектории движения внутренних (соответственно внешних) точек подвижного круга при рассматриваемом качении называются укороченными (соответственно удлиненными) эпициклоидами (рис. 17; мы ограничиваемся целыми k).

Задача 5. Пусть точка A равномерно вращается вокруг точки O_1, которая, в свою очередь, равномерно вращается вокруг точки O; $OO_1 = r_2$, $O_1A = r_1$. Пусть оба вращения происходят по часовой стрелке; v_1 и v_2 — величины линейных скоростей. Покажите, что движение точки A будет происходить по какой-то эпициклоиде (быть может, укороченной или удлиненной). Какими соотношениями определяется характер кривой?

Гипоциклоиды. Рулетты, получающиеся при качении круга радиуса r по внутренней стороне окружности радиуса $R > r$, называются *гипоциклоидами* (соответственно, удлиненными или укороченными). Можно также в качестве аналога такого движения рассмотреть качение обруча радиуса R, внутренней стороной касающегося границы неподвижного круга радиуса $r < R$. Соответствующие рулетты называются перициклоидами. Но оказывается, что они совпадают с эпициклоидами (см. приложение в конце главы).

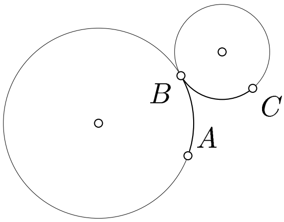


Рис. 18.

Задача 6. Пусть вращения, описанные в задаче 5, происходят в двух противоположных направлениях (одно — по, другое — против часовой стрелки). По каким траекториям будет при этом двигаться точка A?

Мы не ставили перед собой цели строго доказать все результаты, полученные нами из кинематических соображений. В некоторых случаях это сделать просто: механические рассуждения заменяются математическими почти автоматически (для этого оказывается достаточно скорости заменить производными). В других случаях такие «заменители» найти сложнее (например, там, где рассматривается движение пластин или изменяются силы). Однако чисто математические рассмотрения не могут полностью заменить механическую интерпретацию, во многих случаях дающую возможность увидеть простой и красивый ответ.

3. Брахистохрона, или еще одна тайна циклоиды

Ошибка Галилея. В самом начале XVII века юный Галилей пытался экспериментально проверить свою догадку о том, что свободное падение — равноускоренное движение. Когда он перенес наблюдения с Пизанской башни в лабораторию, ему стало очень мешать то, что тела падают «слишком быстро». Чтобы замедлить это движение, Галилей решил заменить свободное падение тел их движением по наклонной плоскости, предположив, что и оно будет равноускоренным. Проводя эти опыты, Галилей обратил внимание на то, что в конечной точке величина скорости тела, скатившегося по наклонной плоскости, не зависит от угла наклона плоскости, а определяется только высотой H и совпадает с конечной скоростью тела, свободно упавшего с той же высоты (как вы хорошо знаете, в обоих случаях $|\overline{v}|^2 = 2gH$. Изучив движения по наклонным плоскостям, Галилей перешел к рассмотрению движения материальной точки под действием силы тяжести по ломаным линиям. Сравнивая времена движения по различным ломаным, соединяющим фиксированную пару точек A и B, Галилей заметил, что если через эти две точки A, B провести четверть окружности (это всегда можно сделать; подумайте, как?) и вписать в нее две ломаные M и L, такие, что ломаная L «вписана» в ломаную M (см. рис. 19), то материальная точка из A в B быстрее попадает по ломаной M, чем по ломаной L (попытайтесь доказать это). Увеличивая у ломаной число звеньев и переходя к пределу, Галилей получил, что по четверти окружности, соединяющей две заданные точки, материальная точка спустится быстрее, чем по любой вписанной в эту четверть окружности ломаной. Из этого Галилей сделал ничем не аргументированный вывод, что четверть окружности, соединяющая пару заданных точек A, B (не лежащих на одной вертикали), и будет для материальной точки, движущейся под действием силы тяжести, линией наискорейшего спуска (позже линию наискорейшего спуска стали называть брахистохроной). Впоследствии выяснилось, что это утверждение Галилея было не только необоснованным, но и ошибочным.

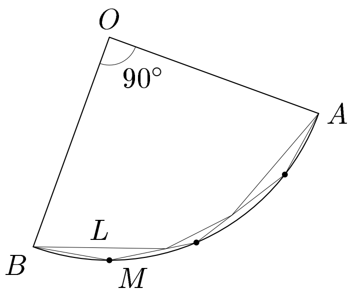


Рис. 19.

Швейцария. Конец XVII века. «Прогуливаясь по улицам Базеля и обсуждая всевозможные математические вопросы, Иоганн и Якоб Бернулли наткнулись на следующий вопрос: какую форму могла бы принять свободно висящая цепь, укрепленная в двух своих концах? Они скоро и легко сошлись на том взгляде, что цепь примет ту форму равновесия, при которой ее центр тяжести будет лежать возможно ниже $\langle\ldots\rangle$ Физическая часть задачи этим исчерпана. Определение кривой с наиболее низким центром тяжести при данной длине между двумя точками A и B есть уже задача только математическая.» (Мах).

Исследовав цепную линию (так называется линия, форму которой принимает гибкая тяжелая нерастяжимая нить, подвешенная в двух точках), братья Бернулли заинтересовались другими задачами, в которых разыскиваются кривые, отвечающие наименьшему значению той или иной величины. В 1696 году Иоганн Бернулли опубликовал заметку «Новая задача, к разрешению которой приглашаются математики». Впрочем, эта «новая» задача уже рассматривалась Галилеем. Речь шла о нахождении брахистохроны — линии, соединяющей фиксированную пару точек, по которой материальная точка спустится под действием силы тяжести быстрее всего. Задача о брахистохроне, недоступная в начале века даже великому Галилею, оказалась очень своевременной в конце века. Она была очень быстро решена и самим Иоганном Бернулли, и его братом Якобом, и их учителем Лейбницем, а также Ньютоном и Лопиталем. Мы расскажем о решении Иоганна Бернулли: оно совершенно неожиданным образом использует соображения из геометрической оптики!

«Без всякого еще метода, при помощи одной своей геометрической фантазии Иоганн Бернулли одним взглядом решает задачу умело, пользуясь при этом тем, что случайно уже известно, — картина поистине замечательная и удивительно красивая. Мы должны признать в Иоганне Бернулли истинно художественную натуру, действующую в области естествознания. Брат его, Якоб Бернулли, был научным характером совсем другого рода. Ему было уделено больше критики, но гораздо меньше творческой фантазии. И он решил ту же задачу, но гораздо более тяжеловесным образом. Зато он не упустил случая развить с большей основательностью общий метод для решения задач этого рода. Таким образом, мы находим в обоих братьях разделенными те две стороны научного таланта, которые в величайших исследователях природы, каким был, например, Ньютон, бывают соединены с необычайной силой.» (Мах).

Принцип Ферма. Еще в 140 году до н. э. Клавдий Птолемей составил подробную таблицу зависимости угла преломления светового луча при переходе из воздуха в воду от угла падения, но лишь в

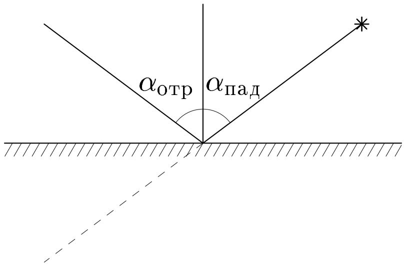


Рис. 20.

1621 году Снеллиус угадал аналитическую закономерность, связывающую эти углы:

$$\frac{\sin \alpha_{\text{падения}}}{\sin \alpha_{\text{преломления}}} = k,$$

где k — *коэффициент преломления,* константа для фиксированной пары сред.

В 1650 году Ферма дал замечательную интерпретацию этого закона. Он отправлялся от известного еще Герону Александрийскому факта, что равенство углов падения и отражения можно вывести из предположения, что при отражении свет выбирает наикратчайший путь (рис. 20).

Ферма предположил, что *путь распространения света между двумя точками есть такой путь, для прохождения которого свету требуется наименьшее время по сравнению с любым другим путем между этими точками,* — теперь это утверждение носит название «принципа Ферма». Из принципа Ферма, в частности, следует, что поскольку в однородной среде скорость света постоянна, то наименьшее время приходится на путь наименьшей длины. Отсюда следует, что путь света в однородной среде, не имеющей препятствий, прямолинеен, а также закон отражения. Если же среда имеет переменную плотность, и скорость света в различных ее участках различна, то путь распространения света, на прохождение которого уходит наименьшее время, уже не должен быть прямолинейным. Посмотрим, что происходит в слу-

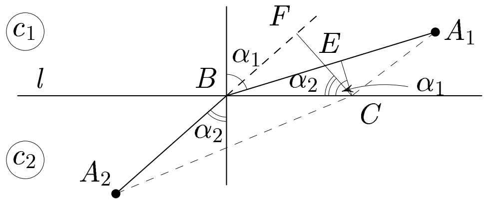


Рис. 21.

чае преломления. (Все наши дальнейшие рассмотрения относятся к плоскому случаю).

Пусть прямая l разделяет две среды (на плоскости), в первой из которых скорость света равна c_1, а во второй c_2; A_1 и A_2 — точки, лежащие по разные стороны от l. Найдем на l такую точку B, что $\sin\alpha_1/\sin\alpha_2 = c_1/c_2$, где α_1 — угол падения, α_2 — угол преломления (см. рис. 21). Существование и единственность такой точки B легко доказывается. Пусть C — любая другая точка прямой l. Опустим из нее перпендикуляры CE и CF на A_1B и A_2B соответственно.

Тогда $\angle ECB = \alpha_1$, $\angle FCB = \alpha_2$, и прохождение отрезка BE со скоростью c_1 займет столько времени, сколько прохождение отрезка BF со скоростью c_2. Значит, свету на прохождение пути A_1BA_2 нужно столько же времени, сколько на прохождение двух отрезков: A_1E со скоростью c_1 и FA_2 со скоростью c_2. Так как длины отрезков A_1C и A_2C больше длин отрезков A_1E и FA_2 соответственно, то свету на прохождение пути A_1CA_2 нужно больше времени, чем на прохождение пути A_1BA_2 и, значит, точка C не годится.

Таким образом, из принципа Ферма следует закон преломления Снеллиуса, причем коэффициент преломления светового луча из одной среды в другую оказывается равным отношению скоростей света в этой паре сред[1].

Из принципа Ферма также следует, что в сложной слоистой оптической среде, состоящей из горизонтальных «полос», в ка-

[1]Принцип Ферма получил обоснование в волновой теории света, построенной Гюйгенсом в 1672 – 1673 годах.

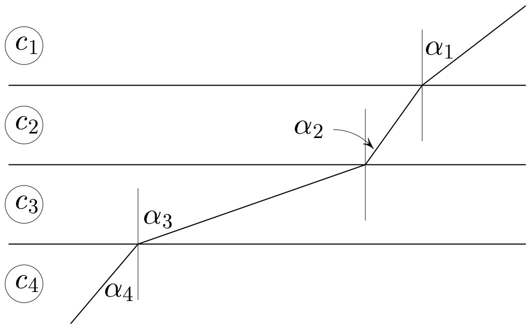


Рис. 22.

ждой из которых скорость света постоянна: $c_1, c_2, \ldots$ (рис. 22), свет будет распространяться по плоской ломаной с вершинами на разделяющих эти полосы прямых, причем если α_i — угол, который звено ломаной, лежащее в области со скоростью света c_i, образует с вертикалью, то $\sin\alpha_j/c_j = \mathrm{const}$ для всей ломаной. Действительно, если $\sin\alpha_j/c_j \neq \sin\alpha_{j+1}/c_{j+1}$ для некоторого j, то по принципу Ферма по такой ломаной свет распространяться не может: вершину ломаной на границе соответствующих сред можно передвинуть так (не меняя остальных вершин), что общее время, затраченное светом, уменьшится.

Если же в некоторой неоднородной оптической среде скорость света меняется непрерывно, но так, что в точках горизонталей (т. е. в точках с одинаковыми ординатами) она одна и та же: $c(y)$ (значение $y = 0$ соответствует начальному положению точки, из которой выходит луч), то предельным переходом получаем, что в этой среде путь распространения света между двумя точками есть такая кривая L, что

$$\frac{\sin\alpha(y)}{c(y)} = \mathrm{const}, \tag{11}$$

через $\alpha(y)$ обозначен угол, который касательная, проведенная к кривой L в точке с ординатой y, образует с вертикалью.

Чтобы перейти к задаче о брахистохроне, заметим, что соотношение (11) мы получили из принципа Ферма, пользуясь лишь тем, что в фиксированной точке нашей неоднородной среды величина скорости света фиксирована и не зависит от направления распространения света (в наших примерах она была постоянна на горизонталях). Но, как мы уже отмечали выше, для тела, движущегося только под действием силы тяжести, $|\overline{v}(y)| = \sqrt{2gy}$, где y — пройденный по вертикали путь, «потеря» высоты, — и мы получаем, что и в этой задаче величина скорости в каждой фиксированной точке плоскости фиксирована и не зависит от того, по какому пути происходит движение. Поэтому все выводы из принципа Ферма могут быть перенесены и сюда. Следовательно, чтобы попасть из одной заданной точки в другую за минимально возможное время, материальная точка должна двигаться по такому пути L, соединяющему эти две точки (мы предполагаем, что точки не лежат на одной вертикали), для которого

$$\frac{\sin\alpha(y)}{\sqrt{y}} = \mathrm{const}, \tag{12}$$

где $\alpha(y)$ — угол между вертикалью и касательной к кривой L, проведенными в точке с ординатой y.

Нам остается лишь отыскать кривую, удовлетворяющую условию (12).

Опять циклоида! Математики XVII века привыкли к тому, что циклоида — это «палочка-выручалочка» во многих вопросах. И вот ей снова было суждено подтвердить свою «репутацию» — брахистохрона также оказалась циклоидой!

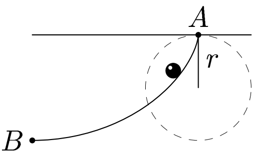


Рис. 23.

В самом деле, если через $\alpha(y)$ обозначить угол, который касательная, проведенная к циклоиде с параметром r (получающейся при качении без скольжения по прямой $\{y = 0\}$ круга радиуса r) в точке с ординатой y составляет с вертикалью, то $\sin\alpha(y) = \sqrt{y/2r}$ (см. формулу (9) на с. 132). Более того, как мы уже отмечали, циклоида является единственной кривой, удовлетворяющей этому соотношению. Таким образом, брахистохроной, соединяющей две данные точки A и B (не лежащие на одной вертикали), служит часть арки (или арка) перевернутой циклоиды (см. рис. 23), причем в «верхней» точке A находится острие этой циклоиды. Поскольку мы рассматриваем только одну (первую) арку циклоиды, то ее параметр r по точке B определяется однозначно.

Дуга циклоиды, являющаяся брахистохроной, может быть больше полуарки циклоиды. В этом случае материальная точка, двигаясь под действием силы тяжести по брахистохроне, сначала спустится вниз (дойдя до вершины перевернутой циклоиды), а затем начнет снова подниматься вверх. И тем не менее такое движение оказывается более экономным по времени, чем если бы материальная точка отправилась из A в B по прямой!

Для сравнения отметим, что хотя перевернутая циклоида является и таутохроной, и брахистохроной, в первом случае нужно брать дугу с концом в вершине циклоиды, а во втором — с началом в острие.

Несколько задач. Вернемся к оптике. Теперь мы знаем, что если в плоской неоднородной среде величина скорости света меняется по закону $c(x, y) = k\sqrt{H - y}$ (т. е. аналогично изменению величины скорости материальной точки, движущейся под действием силы тяжести), то в такой среде свет между двумя точками будет распространяться по дугам перевернутых циклоид с остриями на прямой $\{y = H\}$.

Попробуйте сейчас решить несколько задач на отыскание в оптически неоднородной среде пути распространения света между двумя точками, если в этой среде задан закон изменения величины скорости света.

Задача 7. Величина скорости света меняется по закону $c(x, y) = k(y - a)$. Докажите, что свет между двумя точками будет распространяться по дугам полуокружностей с диаметрами на прямой $\{y = a\}$ (причем «начальная» точка находится на этой прямой).

Задача 8. Величина скорости света меняется по закону

$$c(x, y) = \frac{k}{\sqrt{a - y}}.$$

Докажите, что в этом случае свет между двумя точками будет распространяться по дугам парабол.

Пока во всех задачах величина скорости света зависела только от y. Если же оптическая среда такова, что эта зависимость более сложная, например, величина скорости света постоянна не на горизонталях, а на каких-то кривых — *линиях постоянства скорости света*, — то свет между двумя точками будет распространяться по такой кривой L, для которой

$$\frac{\sin \alpha(c(x_0, y_0))}{c(x_0, y_0)} = \text{const},$$

где $\alpha(c(x_0, y_0))$ — угол между касательной к кривой L и нормалью к линии постоянства скорости света $c(x, y) = c(x_0, y_0)$.

Задача 9. Величина скорости света меняется по закону $c(x, y) = k\sqrt{1 - r^2}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ — расстояние от начала координат. Докажите, что в такой среде свет между двумя точками будет распространяться по дугам окружностей, перпендикулярных к окружности радиуса 1 с центром в начале координат.

Задача 10. Величина скорости света меняется по закону $c(x, y) = kr$. Докажите, что в этом случае свет между двумя точками будет распространяться по дугам гипоциклоид (см. «упражнения Ньютона» со с. 143).

Если в задачах 7 – 10 $c(x, y)$ интерпретировать как величину скорости некоторого механического движения, то полученные при решении этих задач траектории распространения света будут брахистохронами для соответствующих механических систем.

> Основная задача механики заключается в том, чтобы определить положение движущегося тела в любой момент времени. *Из школьного учебника по физике*

Аналогия между механикой и оптикой. Итак, в механике обычно ищется траектория материальной точки, если известны действующие на точку силы и заданы начальные положение и вектор скорости (начальные условия). Однако можно интересоваться не индивидуальными траекториями, а описанием всей совокупности траекторий при заданном законе изменения действующих сил (дополнительное задание начальных условий будет тогда выделять из этой совокупности траекторий конкретную траекторию). Так, классический результат Галилея о движении брошенного тела (горизонтально или под углом к горизонту) заключается в том, что в случае силы тяжести множество траекторий состоит из дуг парабол.

Использование оптики в чисто механических задачах навело на мысль попытаться выделить возможное множество траекторий для конкретной механической системы каким-нибудь условием минимальности, аналогичным принципу Ферма. Об этом думал Лейбниц, но первая формулировка принадлежит Мопертюи. Однако его построения касались всего мироздания в целом и не содержали точных утверждений. Первая точная формулировка принадлежит Эйлеру (учившемуся математике у Иоганна Бернулли). Она относится к следующей специальной ситуации.

Пусть материальная точка движется по плоскости под действием такой силы, что потенциальная энергия зависит только от положения точки: $U = U(x, y)$. В силу закона сохранения энергии величина скорости точки $|\overline{v}|$ тогда также зависит только от (x, y):

$$|\overline{v}(x, y)| = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x, y))}.$$

Рассмотрим плоскую неоднородную оптическую среду, в которой величина скорости света меняется по закону $c(x, y) = \dfrac{k}{\overline{v}(x, y)}$. Принцип Эйлера состоит в том, что *траектории света, распространяющегося в такой среде, будут совпадать с возможными траекториями исходной механической системы* (материальной точки массы m с потенциальной энергией $U(x, y)$). Разумеется, принцип Эйлера можно сформулировать так, что в нем не будет идти речь о распространении света.

В частности, из задачи 8 и принципа Эйлера следует приведенное выше утверждение Галилея о траектории материальной точки, движущейся под действием силы тяжести.

Поясним теперь принцип Эйлера. Для простоты ограничимся случаем, когда $U(x, y)$, а значит и $|\overline{v}|$, зависит только от y.

Поскольку на горизонталях потенциальная энергия постоянна, сила будет направлена вертикально, горизонтальная компонента вектора ускорения равна нулю, а горизонтальная компонента вектора скорости постоянна, то есть

$$|\overline{v}(y)|\sin\alpha(y) = \mathrm{const}, \tag{13}$$

где $\alpha(y)$ — угол между вектором скорости и вертикалью в точке траектории с ординатой y. Соотношение (13) вместе с (11) и дает принцип Эйлера для данного частного случая. (В общем же случае следует учесть, что силы действуют перпендикулярно к линиям постоянства потенциальной энергии и что, следовательно, компоненты вектора скорости, касательные к этим линиям постоянства, не меняются.)

В современной механике принципы, обобщающие принцип Эйлера (такие, как, например, принцип Гамильтона), играют исключительно важную роль.

Эпилог

Героическая история циклоиды завершилась с концом XVII века. Она так таинственно возникала при решении самых разных задач, что никто не сомневался, что она играет совершенно исключительную роль. Пиетет перед циклоидой держался долго, но прошло время, и стало ясно, что она не связана с фундаментальными законами природы, как, скажем, конические сечения. Задачи, приводившие к циклоиде, сыграли огромную роль в становлении механики и математического анализа, но когда величественные здания этих наук были построены, оказалось, что эти задачи являются частными, далеко не самыми важными. Произошла поучительная историческая иллюзия. Однако, знакомясь с поучительной историей циклоиды, можно увидеть много принципиальных фактов из истории науки.

Приложение

В этом приложении мы, как и обещали, объясним, почему перициклоиды (с. 150) совпадают с эпициклоидами. Напомним, что именно надо доказать.

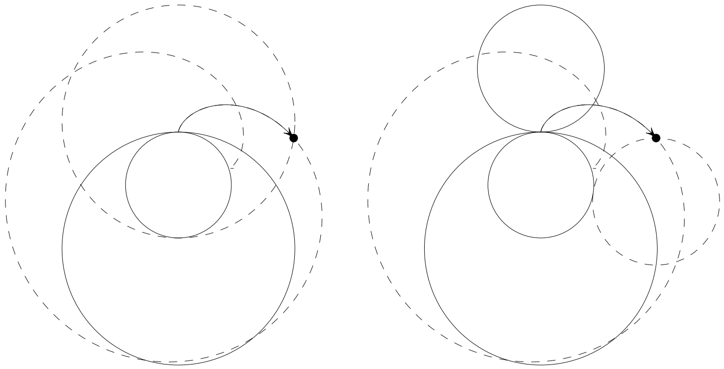


Рис. 24.

Утверждение. *Пусть обруч радиуса R, висевший на неподвижном круге радиуса $r < R$, начинают катить без скольжения по этому кругу. Тогда точка обруча описывает ту же траекторию, которую описывала бы точка колеса радиуса $R - r$, катящегося снаружи по тому же кругу радиуса r (рис. 24).*

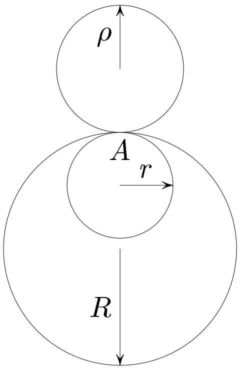


Рис. 25.

Обозначим радиус колеса $R-r$ через ρ. Напомним, что кривые, описываемые при указанном качении точками границы колеса, называются эпициклоидами, а кривые, описываемые точками обруча, — перициклоидами. Докажем, что при указанном в условии соотношении между радиусами ($R = r + \rho$) перициклоиды совпадают с эпициклоидами.

Зафиксируем по одной точке на колесе и на обруче. Пусть в начальный момент точки, наблюдаемые на колесе и обруче, совпадают с одной и той же точкой A границы неподвижного круга (рис. 25). Пусть для определенности и колесо, и обруч катятся по кругу против часовой стрелки. Если в некоторый момент колесо касается неподвижного круга в точке B, то точка, наблюдаемая на его границе (точка эпициклоиды), занимает такое положение C, что длины дуг AB и BC

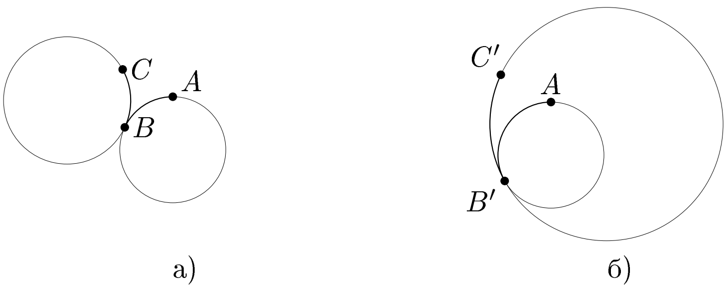


Рис. 26.

равны (дуга BC выбирается с учетом направления качения) — рис. 26а.

Аналогично, положение точки C', наблюдаемой на обруче (точки перициклоиды), в тот момент, когда он касается неподвижного круга в точке B', находится из условия равенства длин дуг AB' и $B'C'$, с учетом направления качения (см. рис. 26б).

Докажем, что для любой точки B на границе неподвижного круга можно так подобрать точку B' (тоже на границе неподвижного круга), что соответствующие точки C (эпициклоиды) и C' (перициклоиды) совпадут (рис. 27а). (Из нашего доказательства будет ясно также, как по B выбирать B'.)

Возьмем точку B' так, чтобы отношение длин дуг AB и BB' было равно ρ/r: тогда радианная мера дуги BC равна радианной

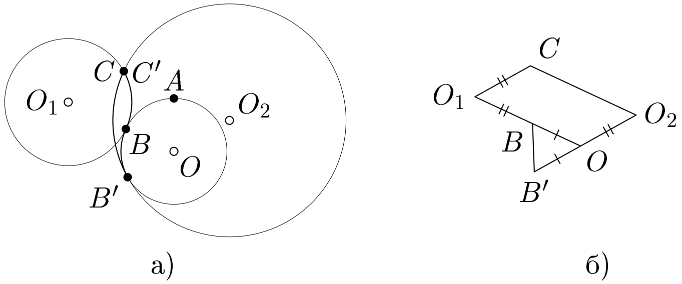


Рис. 27.

мере дуги BB' — обозначим ее через φ. Имеем

$$\text{дл.}\, AB = \text{дл.}\, BC = \rho\varphi, \quad \text{дл.}\, BB' = r\varphi.$$

Поэтому дл. $B'C'$ = дл. $AB' = r\varphi + \rho\varphi$, и радианная мера дуги $B'C'$ также равна φ. Пусть O — центр неподвижного круга, O_1 — положение центра колеса в момент, когда оно касается неподвижного круга в точке B, O_2 — положение центра обруча в момент касания обруча с неподвижным кругом в точке B'; точки $\{O, B, O_1\}$ и $\{O_2, O, B'\}$ лежат на одной прямой.

Пусть $0 < \varphi < \pi$. Имеем (рис. 27б) $OB = OB' = r$, $O_2B' = R$, $OO_2 = R - r = \rho$, $O_1B = O_1C = \rho$, $O_1O = r + \rho = R$, $\angle BOB' = \angle OO_1C = \varphi$, Значит, четырехугольник OO_1CO_2 — параллелограмм, откуда $O_2C = R$, $\angle CO_2B' = \varphi$. Таким образом, точка C лежит на окружности радиуса R с центром в O_2, причем радианная мера дуги $B'C$ равна φ. Это и означает, что C совпадает с C'. Итак, мы доказали, что если по неподвижному кругу прокатились дуги колеса и обруча одной и той же радианной меры $\varphi < \pi$, то получившиеся точки эпициклоиды и перициклоиды совпадут.

Остается убедиться в справедливости этого утверждения и при $\varphi \geqslant \pi$. Посмотрите сами, во что превращается рисунок 27а при $\varphi = \pi$, а также при $\pi < \varphi < 2\pi$. Отметим, что поскольку разность между длинами обруча и колеса равна $2\pi r$ — длине границы неподвижного круга, то в тот момент, когда и колесо, и обруч сделают полные обороты, наблюдаемые точки, вновь попав на границу неподвижного круга, займут одно и то же положение A_1. Случай $2\pi < \varphi < 4\pi$ сводится к случаю $\varphi < 2\pi$, если считать точку A_1, начальной точкой вместо A. Если же считать A_1, начальной точкой и одновременно изменить направление качения, то случай $\pi \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ сведется к случаю $\varphi \leqslant \pi$.

БЛЕЗ ПАСКАЛЬ

Паскаль носил в душе водоворот без дна.
Ш. Бодлер, «Пропасть»[1]

Блезу Паскалю была присуща удивительная разносторонность, которая была характерна для эпохи Возрождения, но уже почти изжила себя в XVII веке. Еще не наступило время полного размежевания естественных наук (скажем, физики и математики), но занятия гуманитарные и естественнонаучные уже обычно не совмещались.

В историю естествознания Паскаль вошел как великий физик и математик, один из создателей математического анализа, проективной геометрии, теории вероятностей, вычислительной техники, гидростатики. Франция чтит в Паскале одного из самых замечательных писателей: «Тонкие умы удивляются Паскалю как писателю самому совершенному в величайший век французского языка ⟨...⟩ Каждая строка, вышедшая из-под его пера, почитается как драгоценный камень» (Жозеф Бертран). Далеко не все соглашались с мыслями Паскаля о человеке, его месте во Вселенной, смысле жизни, но никто не оставался равнодушным к строкам, за которые их автор заплатил жизнью и которые удивительным образом не старились. В 1805 г. Стендаль писал: «Когда я читаю Паскаля, мне кажется, что я читаю себя». А через сто лет в 1910 г. Л. Н. Толстой читал «чудного Паскаля», «человека великого ума и великого сердца» и «не мог не умилиться до слез, читая его и сознавая свое полное единение с этим умершим сотни лет

[1]Перевод К. Бальмонта.

тому назад человеком». Поучительно сопоставить, как старятся идеи естественнонаучные и гуманитарные.

Паскаль в юности

Упомянем еще об одной грани наследия Паскаля — его практических достижениях. Некоторые из них удостоились высшего отличия — сегодня мало кто знает имя их автора. Для И. С. Тургенева мерилами удобства и простоты были «яйцо Колумба» и «Паскалева тачка». Узнав, что великий ученый изобрел самую обыкновенную тачку, он писал Н. А. Некрасову: «Кстати я в одном месте говорю о Паскалевой тачке — ты знаешь, что Паскаль изобрел эту, по-видимому, столь простую машину». А еще Паскалю принадлежит идея омнибусов — общедоступных карет («за 5 су») с фиксированными маршрутами — первого вида регулярного городского транспорта.

Паскаль — один из самых знаменитых людей в истории человечества. Ему посвящена необъятная литература. Каких только сторон жизни и наследия Паскаля не касалось «паскалеведение»! Особенно популярен Паскаль во Франции. Имеется своеобразное свидетельство этого: портрет Паскаля был воспроизведен на ассигнациях (в числе других французских писателей, удостоившихся в разное время такой чести, — Корнель, Расин, Мольер, Монтескье, Вольтер, Гюго, Сент-Экзюпери).

Палочки и монетки. Когда мы учимся рисовать графики, то в калейдоскопе безымянных кривых иногда появляются кривые, имеющие какое-то название или носящие чье-то имя: спираль Архимеда, трезубец Ньютона, конхоида Никомеда, лист Декарта, локон Марии Аньези, улитка Паскаля... Редко кто усомнится в том, что это тот же Паскаль, которому принадлежит «закон Паскаля». Однако в названии замечательной кривой 4-го порядка увековечено имя Этьена Паскаля (1588 – 1651) — отца Блеза Паскаля. Э. Паскаль, как было принято в роде Паскалей, служил в парламенте (суде) города Клермон-Феррана. Совмещение юридической деятельности с занятиями науками, далекими от юриспруденции, было делом нередким. Примерно в это же время посвящал математике свой досуг советник тулузского парламента Пьер Ферма (1601 – 1665). Хотя собственные достижения Э. Паскаля были скромными, его основательные познания позволяли ему поддерживать профессиональные контакты с большинством французских математиков. С великим Ферма он обменивался трудными задачами на построение треугольников; в споре Ферма с Рене Декартом (1596 – 1650) о задачах на максимум и минимум Паскаль выступал на стороне Ферма. Б. Паскаль унаследовал добрые отношения отца со многими математиками, но вместе с тем к нему перешли и напряженные отношения с Декартом.

Рано овдовев, Этьен Паскаль посвящает себя главным образом воспитанию своих детей (кроме сына, у него было две дочери — Жильберта и Жаклина). У маленького Блеза очень рано обнаруживается поразительное дарование, но, как это часто бывает, в сочетании с плохим здоровьем. (Всю жизнь с Б. Паскалем случались странные происшествия; в раннем детстве он едва не погиб от непонятной болезни, сопровождавшейся припадками, которую семейная легенда связывает с колдуньей, сглазившей мальчика.)

Этьен Паскаль тщательно продумывает систему воспитания детей. На первых порах он решительно исключает математику из числа предметов, которым обучает Блеза: отец боялся, что ранняя увлеченность математикой помешает гармоничному развитию, а неизбежные напряженные размышления повредят слабому здоровью сына. Однако 12-летний мальчик, узнав о существовании таинственной геометрии, которой занимался отец, уговорил его рассказать о запретной науке. Полученных сведений оказалось достаточно для того, чтобы начать увлекательную «игру в геометрию», доказывать теорему за теоремой. В этой игре участвовали «монетки» — круги, «треуголки» — треугольники, «столы» — прямоугольники, «палочки» — отрезки. Мальчик был застигнут отцом в тот момент, когда он обнаружил, что углы треуголки составляют столько же, сколько два угла стола. Э. Паскаль без труда узнал знаменитое 32-е предложение первой книги Евклида — теорему о сумме углов треугольника. Результатом были слезы на глазах отца и доступ к шкафам с математическими книгами. История о том, как Паскаль сам построил евклидову геометрию, известна по восторженному рассказу его сестры Жильберты. Этот рассказ породил очень распространенное заблуждение, заключающееся в том, что раз Паскаль открыл 32-е предложение «Начал» Евклида, то он открыл перед этим все предыдущие теоремы и все аксиомы. Нередко это воспринималось как аргумент в пользу того, что аксиоматика Евклида — единственно возможная. На самом же деле, вероятно, геометрия у Паскаля находилась на «доевклидовском» уровне, когда интуитивно неочевидные утверждения доказываются путем сведения к очевидным, причем набор последних никак не фиксируется и не ограничивается. Лишь на следующем, существенно более высоком уровне делается великое открытие, что можно ограничиться конечным, сравнительно небольшим набором очевидных утверждений — аксиом, предположив истинность которых, можно остальные геометрические утверждения доказать. При этом, наряду с неочевидными утверждениями (такими, как, например, теоремы о замечательных точках треугольника), приходится доказывать «очевидные» теоремы, в справедливость которых легко поверить (например, простейшие признаки равенства треугольников).

Собственно, 32-е предложение — первое неочевидное в этом смысле предложение «Начал». Нет сомнения, что у юного Паскаля не было ни времени для огромной работы по отбору аксиом, ни, скорее всего, потребности в ней.

Это интересно сопоставить со свидетельством А. Эйнштейна, который в те же 12 лет в значительной степени самостоятельно постигал геометрию (в частности, нашел доказательство теоремы Пифагора, о которой узнал от дяди): «Вообще мне было достаточно, если я мог в своих доказательствах опираться на такие положения, справедливость которых представлялась мне бесспорной».

Примерно в 10 лет Б. Паскаль сделал первую физическую работу: заинтересовавшись причиной звучания фаянсовой тарелки и проведя поразительно хорошо организованную серию экспериментов при помощи подручных средств, он объяснил заинтересовавшее его явление колебанием частичек воздуха.

«Мистический шестивершинник», или «великая паскалева теорема». В 13 лет Б. Паскаль уже имеет доступ в математический кружок Мерсенна, в который входило большинство парижских математиков, в том числе Э. Паскаль (Паскали жили в Париже с 1631 г.).

Францисканский монах Марен Мерсенн (1588 – 1648) сыграл в истории науки большую и своеобразную роль ученого-организатора[1]. Его основная заслуга состояла в том, что он вел обширную переписку с большинством крупных ученых мира (у него было несколько сот корреспондентов). Мерсенн умело концентрировал информацию и сообщал ее заинтересованным ученым. Эта деятельность требовала своеобразного дарования: умения быстро понимать новое, хорошо ставить задачи. Обладавший высокими нравственными качествами Мерсенн пользовался доверием корреспондентов. Иногда письма Мерсенна адресовались совсем молодым ученым. Так, в 1648 г. он начал переписываться с 17-летним Гюйгенсом, помогая в его первых шагах в науке и предвещая, что тот станет «Аполлонием и Архимедом ⟨...⟩ грядущего века».

Наряду с заочным коллективом корреспондентов существовал и очный кружок — «четверги Мерсенна», в который и попал Блез Паскаль. Здесь он нашел себе достойного учителя. Им был Жерар Дезарг (1593 – 1662), инженер и архитектор, создатель оригинальной теории перспективы. Его главное сочинение «Чер-

[1]При оценке деятельности Мерсенна надо иметь в виду, что первый научный журнал — «Журнал ученых» — был основан в 1665 г.

новой набросок исследования того, что происходит при встрече конуса с плоскостью» (1639 г.) нашло лишь нескольких читателей, и среди них особое место занимает Б. Паскаль, сумевший существенно продвинуться вперед.

Хотя в то время Декарт прокладывал в геометрии совершенно новые пути, создавая аналитическую геометрию, в основном геометрия едва достигла уровня, на котором она находилась в Древней Греции. Многое из наследия греческих геометров оставалось неясным. Это прежде всего относилось к теории конических сечений. Самое выдающееся сочинение на эту тему — 8 книг «Konika» Аполлония — было известно лишь частично. Предпринимались попытки дать модернизированные изложения теории, среди которых наиболее известное принадлежит Клоду Мидоржу (1585 – 1647), члену кружка Мерсенна, но его сочинение фактически не содержало новых идей. Дезарг заметил, что систематическое применение метода перспективы позволяет построить теорию конических сечений с совершенно новых позиций.

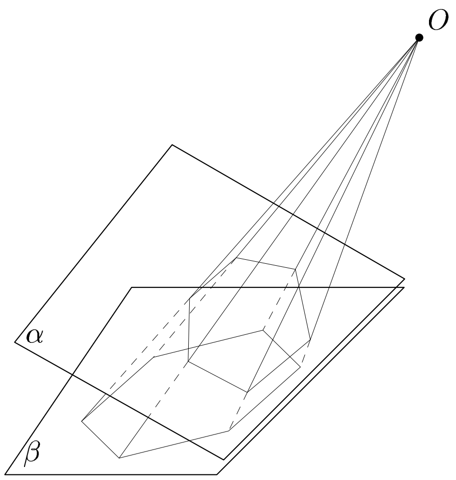


Рис. 28.

Рассмотрим центральную проекцию (из некоторой точки O) картинок на плоскости α на плоскость β. Применять такое преобразование в теории конических сечений очень естественно, поскольку само их определение — как сечений прямого кругового конуса — можно перефразировать так: все они получаются при центральном проектировании из вершины конуса на различные плоскости одного из них (например, окружности). Далее, заметив, что при центральном проектировании пересекающиеся прямые могут перейти или в пересекающиеся или в параллельные, объединим два последних свойства в одно, считая, что все параллельные друг другу прямые пересекаются в одной «бесконечно удаленной точке»; разные пучки параллельных прямых дают разные бесконечно удаленные точки; все бесконечно удаленные точки плоскости заполняют «бесконечно удаленную прямую». Если принять эти соглашения, то две любые различные прямые (уже не исключая параллельных) будут пересекаться в единственной точке. Утверждение, что через точку A вне прямой m можно провести единственную прямую, параллельную m, можно переформулировать так: через обычную точку A и бесконечно удаленную точку (отвечающую семейству прямых, параллельных m) проходит единственная прямая — в результате в новых условиях без всяких ограничений справедливо утверждение, что через две различные точки проходит единственная прямая (бесконечно удаленная, если обе точки бесконечно удалены). Мы видим, что получается очень изящная теория, но для нас важно то, что при центральном проектировании точка пересечения прямых (в обобщенном смысле) переходит в точку пересечения.

Важно продумать, какую роль в этом утверждении играет введение бесконечно удаленных элементов (при каких условиях точка пересечения переходит в бесконечно удаленную точку, когда прямая переходит в бесконечно удаленную прямую). Не останавливаясь на использовании этого простого соображения Дезаргом, мы расскажем о том, как замечательно применил его Паскаль.

В 1640 г. Б. Паскаль напечатал свой «Опыт о конических сечениях». Небезынтересны сведения об этом издании: тираж — 50 экземпляров, 53 строки текста напечатаны на афише, предназначенной для расклейки на углах домов (про афишу Паскаля достоверно не известно, но Дезарг заведомо рекламировал таким способом свои результаты). В афише, подписанной инициалами автора, без доказательства сообщается следующая теорема, которую ныне называют теоремой Паскаля. *Пусть на коническом сечении* L (на рис. 29 L — парабола) *произвольно выбраны и занумерованы 6 точек. Обозначим через* P, Q, R *точки пересечения трех пар прямых* $(1, 2)$ *и* $(4, 5)$*;* $(2, 3)$ *и* $(5, 6)$*;* $(3, 4)$ *и* $(6, 1)$. (При

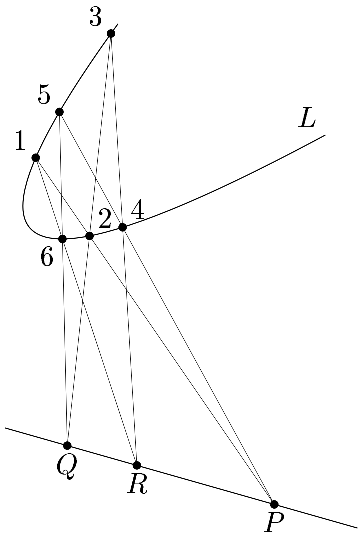


Рис. 29.

простейшей нумерации — «по порядку» — это точки пересечения противоположных сторон шестиугольника.) *Тогда точки P, Q, R лежат на одной прямой*[1].

Паскаль вначале формулирует теорему для окружности и ограничивается простейшей нумерацией точек. В этом случае это элементарная, хотя и не слишком простая задача. А вот переход от окружности к любому коническому сечению очень прост. Нужно преобразовать при помощи центральной проекции такое сечение в окружность и воспользоваться тем, что при центральном проектировании прямые переходят в прямые, а точки пересечения (в обобщенном смысле) — в точки пересечения. Тогда, как уже доказано, образы точек P, Q, R при проектировании будут лежать на одной прямой, а отсюда следует, что и сами точки P, Q, R обладают этим свойством.

Теорема, которую Паскаль назвал теоремой о «мистическом шестивершиннике», не была самоцелью; он рассматривал ее как ключ для построения общей теории конических сечений, покрывающей теорию Аполлония. Уже в афише упоминаются обобщения важных теорем Аполлония, которые не удавалось получить Дезаргу. Дезарг высоко оценил теорему Паскаля, назвав ее «великой паскалевой»; он утверждал, что в ней содержатся первые четыре книги Аполлония.

Паскаль начинает работу над «Полным трудом о конических сечениях», который в 1654 г. упоминается как оконченный в послании «знаменитейшей Парижской математической академии».

[1] Сформулируйте самостоятельно следствия, получающиеся из этой теоремы, когда некоторые из рассмотренных точек являются бесконечно удаленными.

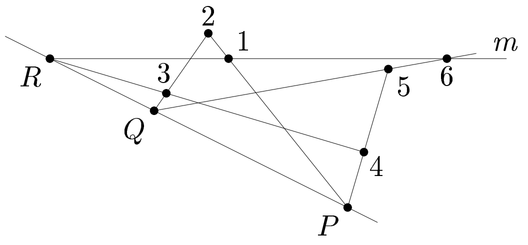


Рис. 30.

От Мерсенна известно, что Паскаль получил около 400 следствий из своей теоремы. Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646 – 1716) был последним, кто видел трактат Паскаля уже после его смерти, в 1675 – 1676 гг. Несмотря на совет Лейбница, родные не опубликовали рукопись, а со временем она была утеряна.

В качестве примера приведем одно из самых простых, но и самых важных следствий из теоремы Паскаля: *коническое сечение однозначно определяется любыми своими пятью точками.* Действительно, пусть $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ — точки конического сечения и m — произвольная прямая, проходящая через (5). Тогда на m существует единственная точка (6) конического сечения, отличная от (5). В обозначениях теоремы Паскаля точка P является точкой пересечения $(1, 2)$ и $(4, 5)$, Q — точка пересечения $(2, 3)$ и m, R — точка пересечения $(3, 4)$ и PQ, а тогда (6) определится как точка пересечения $(1, R)$ и m.

«Паскалево колесо». 2 января 1640 г. семья Паскалей переезжает в Руан, где Этьен Паскаль получает место интенданта провинции, фактически ведающего всеми делами при губернаторе. Этому назначению предшествовали любопытные события. Э. Паскаль принял активное участие в выступлениях парижских рантьеров, за что ему грозило заточение в Бастилию. Он был вынужден скрываться, но в это время заболела оспой Жаклина, и отец, несмотря на страшную угрозу, навещал ее. Жаклина выздоровела и даже участвовала в спектакле, на котором присутствовал кардинал Ришелье. По просьбе юной актрисы кардинал простил ее отца, но одновременно назначил его на должность. Бывший смутьян

должен был проводить в жизнь политику кардинала (читателей «Трех мушкетеров» это коварство, наверное, не удивит).

Теперь у Этьена Паскаля было очень много счетной работы, в которой ему постоянно помогает сын. В конце 1640 г. Блезу Паскалю приходит мысль построить машину, чтобы освободить ум от расчетов «с помощью пера и жетонов». Основной замысел возник быстро и оставался неизменным на протяжении всей работы: «Каждое колесо или стержень некоторого разряда, совершая движение на десять арифметических цифр, заставляет двигаться следующее только на одну цифру». Однако блестящая идея — это только первый шаг. Несравненно больших сил потребовала ее реализация. Позднее в «Предуведомлении» тому, кто «будет иметь любознательность видеть арифметическую машину и пользоваться ею», Блез Паскаль скромно пишет: «Я не экономил ни время, ни труд, ни средства, чтобы довести ее до состояния быть тебе полезной». За этими словами стояло пять лет напряженной работы, которая привела к созданию машины («паскалева колеса», как говорили современники), надежно, хотя и довольно медленно, производившей четыре действия над пятизначными числами. Паскаль изготовил около пятидесяти экземпляров машины; вот только перечень материалов, которые он перепробовал: дерево, слоновая кость, эбеновое дерево, латунь, медь. Он потратил много сил на поиски лучших ремесленников, владеющих «токарным станком, напильником и молотком», и ему много раз казалось, что они не в состоянии достичь необходимой точности. Тщательно продумывается система испытаний, в их число включается перевозка на 250 лье. Паскаль не забывает и о рекламе: он заручается поддержкой канцлера Сегье, добивается «королевских привилегий» (нечто вроде патента), много раз демонстрирует машину в салонах и даже посылает экземпляр шведской королеве Христине. Наконец, налаживается производство; точное число произведенных машин неизвестно, но до настоящего времени сохранилось восемь экземпляров.

Поражает, как блестяще умел делать Паскаль самые разные вещи. Сравнительно недавно стало известно, что в 1623 г. Шиккард, друг Кеплера, построил арифметическую машину, однако машина Паскаля была гораздо совершенней.

«Боязнь пустоты» и «великий эксперимент равновесия жидкостей». В конце 1646 г. до Руана докатилась молва об удивительных «итальянских опытах с пустотой». Вопрос о существовании пустоты в природе волновал еще древних греков; в их взглядах на этот вопрос проявилось присущее древнегреческой философии разнообразие точек зрения: Эпикур считал, что пустота может существовать и действительно существует; Герон — что она может быть получена искусственно, Эмпедокл — что ее нет и ей неоткуда взяться, и, наконец Аристотель утверждал, что «природа боится пустоты». В средние века ситуация упростилась, поскольку истинность учения Аристотеля была установлена практически в законодательном порядке (еще в XVII веке за выступление против Аристотеля во Франции можно было попасть на каторгу).

Воспоминания о «боязни пустоты» еще долго сохранялись, о чем свидетельствует следующий пассаж из неоконченного произведения Ф. М. Достоевского «Крокодил»: «Как же достигнуть устройством крокодила, чтоб он глотал людей? Ответ еще яснее: устроив его пустым. Давно уже решено физикой, что природа не терпит пустоты. Подобно тому и внутренность крокодила должна именно быть пустою, чтобы не терпеть пустоты, а следственно беспрерывно глотать и наполняться всем, что только есть под рукою».

Классический пример «боязни пустоты» демонстрирует вода, поднимающаяся вслед за поршнем, не давая образоваться пустому пространству. И вдруг с этим примером произошел казус. При сооружении фонтанов во Флоренции обнаружилось, что вода «не желает» подниматься выше 34 футов (10,3 метра). Недоумевающие строители обратились за помощью к престарелому Галилею, который сострил, что, вероятно, природа перестает бояться пустоты на высоте, превышающей 34 фута, но все же предложил разобраться в странном явлении своим ученикам Торричелли и Вивиани. Вероятно, Торричелли (а, возможно, и самому Галилею) принадлежит мысль, что высота, на которую может подняться жидкость в насосе, обратно пропорциональна ее удельному весу. В частности, ртуть должна подняться на высоту в 13,3 раза меньшую, чем вода, т. е. на 76 *см*. Опыт приобрел масштабы, более благоприятные для лабораторных условий, и был проведен Вивиани по инициативе Торричелли. Этот опыт хорошо известен, но все же напомним, что запаянная с одного конца метровая стеклянная трубка заполняется ртутью, открытый конец зажимается пальцем, после чего трубка переворачивается и опускается в чашку с ртутью. Если отнять палец, то уровень ртути в трубке упадет до 76 *см*. Торричелли делает два утверждения: во-первых, пространство над ртутью в трубке пусто (потом его назовут «торричеллиевой пустотой»), а во-вторых, ртуть из трубки не выливается полностью, поскольку этому препятствует столб воздуха, давящий на поверхность ртути в чашке. Приняв эти гипотезы, можно все объяснить, но можно получить объяснение и введя специальные, довольно сложно действующие силы, препятствующие образованию вакуума. Принять гипотезы Торричелли было непросто. Лишь немногие из его современников смирились с тем, что воздух имеет вес; некоторые, исходя из этого, поверили в возможность получения вакуума, но поверить, что легчайший воздух удерживает в трубке тяжелую ртуть, было почти невозможно. Упомянем, что Галилей пытался объяснить этот эффект свойствами самой жидкости, а Декарт утверждал, что кажущийся вакуум всегда заполнен «тончайшей материей».

Паскаль с увлечением повторяет итальянские опыты, придумав много остроумных усовершенствований. Восемь таких опытов описаны в трактате, опубликованном в 1647 г. Он не ограничивается опытами с ртутью, а экспериментирует с водой, маслом, красным вином, для чего ему потребовались бочки вместо чашек и трубки длиной около 15 *м*. Эффектные опыты выносятся на улицы Руана, радуя его жителей. (До сих пор гравюры с винным барометром любят воспроизводить в учебниках физики.)

На первых порах Паскаля более всего интересует вопрос о доказательстве того, что пространство над ртутью пусто. Была распространена точка зрения, что кажущийся вакуум заполняет материя, «не имеющая свойств» (вспоминается подпоручик Киже из повести Ю. Н. Тынянова, «не имеющий фигуры»). Доказать отсутствие такой материи просто невозможно. Четкие высказывания Паскаля очень важны в плане постановки более широкой проблемы о характере доказательств в физике. Он пишет: «После того как я доказал, что ни одна из материй, которые доступны нашим чувствам и которые нам известны, не заполняет это пространство, кажущееся пустым, мое мнение, пока мне не докажут существование какой-то материи, заполняющей его, — что это пространство в самом деле пусто и лишено всякой материи». Менее академические высказывания содержатся в письме ученому-иезуиту Ноэлю: «Но у нас больше оснований отрицать ее (тончайшей материи — С. Г.) существование, потому что нельзя его доказать, чем верить в нее по той единственной причине, что нельзя доказать, что ее нет». Итак, необходимо доказывать существование объекта и нельзя требовать доказательства его отсутствия (это ассоциируется с юридическим принципом, состоящим в том, что суд должен доказать виновность и не вправе требовать от обвиняемого доказательств невиновности).

На родине Паскаля в Клермоне жила в это время старшая сестра Б. Паскаля Жильберта; ее муж Флорен Перье, служа в суде, свободное время посвящал наукам. 15 ноября 1647 г. Паскаль отправляет Перье письмо, в котором просит сравнить уровни ртути в трубке Торричелли у подножия и на вершине горы Пюи-де-Дом: «Вы понимаете, если бы высота ртути на вершине горы оказалась меньшей, чем у подошвы (я так думаю по многим основаниям, хотя все, писавшие об этом предмете, придерживаются другого мнения), то из этого можно было бы заключить, что единственная причина явления — тяжесть воздуха, а не пресловутый horror vacui (боязнь пустоты — С. Г.). Ясно, в самом деле, что внизу горы воздух должен быть сгущеннее, чем наверху, между тем как нелепо предполагать в нем больший страх пустоты у подножия, нежели на вершине». Эксперимент по разным причинам откладывался и состоялся лишь 19 сентября 1648 г. в присутствии пяти «уважаемых жителей Клермона». В конце года вышла брошюра, в которую были включены письмо Паскаля и ответ Перье с очень скрупулезным описанием опыта. При высоте горы около 1,5 *км* разница уровней ртути составила 82,5 *мм*; это «повергло участников эксперимента в восхищение и удивление» и, вероятно, было неожиданным для Паскаля. Предположить существование предварительных оценок невозможно, а иллюзия легкости воздуха была очень велика. Результат был столь ощутим, что уже одному из участников эксперимента аббату де ла Мару приходит в голову мысль, что результаты может дать эксперимент в куда более скромных масштабах. И, действительно, разница уровней ртути у основания и наверху собора Нотр-Дам-де-Клермон, имеющего высоту 39 *м*, составила 4,5 *мм*. Если бы Паскаль допускал такую возможность, он не стал бы ожидать десять месяцев. Получив известие от Перье, он повторяет эксперименты на самых высоких зданиях Парижа, получая те же результаты. Паскаль назвал этот эксперимент «великим экспериментом равновесия жидкостей» (это название может вызвать удивление, поскольку речь идет о равновесии воздуха и ртути и тем самым воздух назван жидкостью). В этой истории есть одно запутанное место. Декарт утверждал, что именно он подсказал идею эксперимента. Вероятно, здесь произошло какое-то недоразумение, так как трудно предположить, что Паскаль сознательно не ссылался на Декарта.

Паскаль продолжает экспериментировать, используя наряду с барометрическими трубками большие сифоны (подбирая короткую трубку так, чтобы сифон не работал); он описывает разницу в результатах экспериментов для различных местностей Франции (Париж, Овернь, Дьепп): Паскаль знает, что барометр можно использовать как высотомер (альтиметр), но вместе с тем понимает, что зависимость между уровнем ртути и высотой местности не проста, и обнаружить ее пока не удается. Он замечает, что показания барометра в одной и той же местности зависят от погоды; сегодня предсказание погоды — основная функция барометра (прибор для измерения «изменений воздуха» хотел построить Торричелли). А однажды Паскаль решил вычислить общий вес атмосферного воздуха («мне хотелось доставить себе это удовольствие, и я провел расчет»). Получилось 8,5 триллиона французских фунтов.

Мы не имеем возможности останавливаться на других опытах Паскаля о равновесии жидкостей и газов, поставивших его наряду с Галилеем и Симоном Стевином (1548–1620) в число создателей классической гидростатики. Здесь и знаменитый закон Паскаля, и идея гидравлического пресса, и существенное развитие принципа возможных перемещений. Одновременно он придумывает, например, зрелищно эффектные опыты, иллюстрирующие открытый Стевином парадоксальный факт, что давление жидкости на дно сосуда зависит не от формы сосуда, а лишь от уровня жидкости: в одном из опытом наглядно видно, что требуется груз в 100 фунтов, чтобы уравновесить давление на дно сосуда воды весом в одну унцию; в процессе опыта вода замораживается, и тогда хватает груза в одну унцию. Паскаль демонстрирует своеобразный педагогический талант. Было бы хорошо, если бы и сегодня школьника удивляли те факты, которые поражали Паскаля и его современников.

Физические исследования Паскаля были прерваны в 1654 г. в результате трагических происшествий, о которых мы расскажем ниже.

«Математика случая». В январе 1646 г. Этьен Паскаль во время гололеда вывихнул бедро, и это едва не стоило ему жизни. Реальность потери отца произвела ужасное впечатление на сына, и это прежде всего сказалось на его здоровье: головные боли стали невыносимыми, он мог передвигаться лишь на костылях и был в состоянии проглотить только несколько капель теплой жидкости. От врачей-костоправов, лечивших отца, Б. Паскаль узнал об учении Корнелия Янсения (1585 — 1638), которое в то время распространялось во Франции, противостоя иезуитизму (последний существовал к тому времени примерно сто лет). На Паскаля произвел наибольшее впечатление побочный элемент в учении Янсения: допустимо ли бесконтрольное занятие наукой, стремление все познать, все разгадать, связанное прежде всего с неограниченной пытливостью человеческого ума или, как писал Янсений, с «похотью ума». Паскаль воспринимает свою научную деятельность как греховную, а выпавшие на его долю беды —

как кару за этот грех. Это событие сам Паскаль назвал «первым обращением». Он решает отказаться от дел «греховных и противных Богу». Однако это ему не удается: мы уже забежали вперед и знаем, что вскоре он каждую минуту, которую ему оставляет болезнь, посвятит физике.

Здоровье несколько улучшается, и с Паскалем происходят вещи, мало понятные для его близких. Он мужественно переносит в 1651 г. смерть отца, и его рационалистические, внешне холодные рассуждения о роли отца в его жизни резко контрастируют с реакцией пятилетней давности (он пишет, что теперь присутствие отца не является «абсолютно необходимым», что он нуждался бы в нем еще десять лет, хотя присутствие отца было бы полезно всю жизнь).

А потом у Паскаля появились знакомые, мало подходящие для янсениста. Он путешествует в свите герцога де Роанне и знакомится там с кавалером де Мере, человеком высокообразованным и умным, но несколько самоуверенным и поверхностным. С де Мере охотно общались великие современники, и только поэтому его имя сохранилось в истории. При этом он умудрился писать Паскалю письма с поучениями по разным вопросам, не исключая и математики. Сейчас все это выглядит наивным и, по словам Сент-Бёва, «такого письма вполне достаточно, чтобы погубить человека, его писавшего, во мнении потомства». Тем не менее довольно длительное время Паскаль охотно общался с де Мере, он оказался способным учеником кавалера по части светской жизни.

Мы переходим к истории о том, как «задача, поставленная перед суровым янсенистом светским человеком, стала источником теории вероятностей» (Пуассон). Собственно, задач было две, и, как выяснили историки математики, обе они были известны задолго до де Мере. Первый вопрос состоит в том, сколько раз нужно кинуть две игральные кости, чтобы вероятность того, что хотя бы один раз выпадут две шестерки, превысит вероятность того, что две шестерки не выпадут ни разу. Де Мере и сам решил эту задачу, но, к сожалению,... двумя способами, давшими разные ответы: 24 и 25 бросков. Будучи уверенным в одинаковой достоверности обоих способов, де Мере обрушивается на «непостоянство» математики. Паскаль, убедившись в том, что правильный ответ — 25, даже не приводит решения. Основные его усилия были направлены на решение второй задачи — задачи «о справедливом разделе ставок». Происходит игра, все участники (их число может быть больше двух) вначале делают ставки в «банк»; игра разбивается на несколько партий, и для выигрыша банка надо выиграть некоторое фиксированное число партий. Вопрос состоит в том, как следует справедливо разделить банк между игроками в зависимости от числа выигранных ими партий, если игра не доведена до конца (никто не выиграл числа партий, достаточного для получения банка). По словам Паскаля, «де Мере $\langle\ldots\rangle$ даже не смог подступиться к этому вопросу».

Никто из окружения Паскаля не сумел понять предложенное им решение, но все же достойный собеседник нашелся. Между 29 июля и 27 октября 1654 г. Паскаль обменивается письмами с Ферма (при посредничестве Пьера Каркави, продолжавшего деятельность Мерсенна). Часто считают, что в этой переписке родилась теория вероятностей. Ферма решает задачу о ставках иначе, чем Паскаль, и первоначально возникают некоторые разногласия. Но в последнем письме Паскаль констатирует: «Наше взаимопонимание полностью восстановлено», и далее: «Как я вижу, истина одна и в Тулузе, и в Париже». Он счастлив тем, что нашел великого единомышленника: «Я и впредь хотел бы по мере возможностей делиться с Вами своими мыслями».

В том же 1654 г. Паскаль опубликовал одну из самых популярных своих работ «Трактат об арифметическом треугольнике». Теперь его называют треугольником Паскаля, хотя оказалось, что он был известен еще в Древней Индии, а в XVI веке был переоткрыт Штифелем. В основе лежит простой способ вычислять число сочетаний C_n^k индукцией по n (по формуле $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$). В этом трактате впервые принцип математической индукции, который фактически применялся и раньше, формулируется в привычной для нас форме.

В 1654 г. Паскаль в послании «Знаменитейшей Парижской математической академии» перечисляет работы, которые готовятся им к публикации, и в их числе трактат, который «может по праву претендовать на ошеломляющее название „Математика случая“ ».

Луи де Монтальт. Вскоре после смерти отца Жаклина Паскаль уходит в монастырь, и Блез Паскаль лишается присутствия очень близкого человека. Какое-то время его привлекает возможность жить, как живет большинство людей: он подумывает о том, чтобы купить должность в суде и жениться. Но этим планам не суждено было сбыться. В середине ноября 1654 г., когда Паскаль переезжал мост, передняя пара лошадей сорвалась, а коляска чудом задержалась у края пропасти. С тех пор, по словам Ламетри, «в обществе или за столом Паскалю всегда была необходима загородка из стульев или сосед слева, чтобы не видеть страшной пропасти, в которую он боялся упасть, хотя знал цену подобным иллюзиям». 23 ноября происходит необычайный нервный припадок. Находясь в состоянии экстаза, Паскаль записывает на клочке бумаги мысли, которые проносятся в его голове: «Бог Авраама, Бог Исаака, Бог Иакова, но не Бог философов и ученых». Позднее он перенес эту запись на пергамент; после его смерти обе бумаги обнаружили зашитыми в его камзоле. Это событие называют «вторым обращением» Паскаля. С этого дня, по свидетельству Жаклины, Паскаль чувствует «огромное презрение к свету и почти непреодолимое отвращение ко всем принадлежащим ему вещам». Он прерывает занятия и с начала 1655 г. поселяется в монастыре Пор-Рояль (оплоте янсенистов), добровольно ведя монашеский образ жизни. В это время Паскаль пишет «Письма к провинциалу» — одно из величайших произведений французской литературы. «Письма» содержали критику иезуитов. Они издавались отдельными выпусками — «письмами», — начиная с 23 января 1656 г. до 23 марта 1657 г. (всего 18 писем). Автора — «друга провинциала» — звали Луи де Монтальтом. Слово «гора» в этом псевдониме (la montagne) уверенно связывают с воспоминаниями об опытах на Пюи-де-Дом. Письма читали по всей Франции, иезуиты были в бешенстве, но не могли достойно ответить (королевский духовник отец Анна предлагал 15 раз — по числу написанных к тому времени писем — сказать, что Монтальт — еретик). За автором, оказавшимся смелым и талантливым конспиратором, охотился судебный следователь, которого контролировал сам канцлер Сегье, когда-то покровительствовавший создателю арифметической машины (по свидетельству современника, уже после двух писем канцлеру «семь раз отворяли кровь»), и, наконец, в 1660 г. государственный совет постановил сжечь книгу «мнимого Монтальта». Но это было по существу символическим мероприятием. Тактика Паскаля дала поразительные результаты. «Делались попытки самыми различными способами показать иезуитов отвратительными; Паскаль сделал больше: он показал их смешными», — так оценивает «Письма» Вольтер. «Шедевром шутливой логики» назвал их Бальзак, «кладом для комедиографа» — Расин. Образы Паскаля предвещали появление мольеровского Тартюфа.

Работая над «Письмами», Паскаль ясно понимал, что правильное владение логикой важно не только математикам. В Пор-Рояле много думали о системе образования, и существовали даже специальные янсенистские «маленькие школы». Паскаль активно включился в эти размышления, сделав, например, интересные замечания о первоначальном обучении грамоте (он считал, что нельзя начинать с изучения алфавита). В 1667 г. посмертно вышли два фрагмента работы Паскаля «Разум геометра и искусство убеждения». Это сочинение не является научной работой; его назначение более скромно — быть введением к учебнику геометрии для янсенистских школ. Многие высказывания Паскаля производят очень сильное впечатление, и не верится, что такая четкость формулировок была достижима в середине XVII века. Вот одно из них: «Все должно быть доказано, и при доказательстве нельзя использовать ничего кроме аксиом и ранее доказанных теорем. Никогда нельзя злоупотреблять тем обстоятельством, что разные вещи нередко обозначаются одним и тем же словом, поэтому определяемое слово должно быть мысленно заменено определением». В другом месте Паскаль замечает, что обязательно существуют неопределяемые понятия. Исходя из этих высказываний, Жак Адамар (1865 – 1963) считал, что Паскалю оставался маленький шаг, чтобы произвести «глубокую революцию во всей логике — революцию, которую Паскаль мог бы осуществить тремя веками раньше, чем это действительно случилось». Вероятно, здесь имеется в виду тот взгляд на аксиоматические теории, который сложился после открытия неевклидовой геометрии.

Удивительные события не переставали происходить в жизни Паскаля. В страшный для него 1654 год у его любимой племянницы Маргариты появилась опухоль в уголке глаза. Врачи были бессильны помочь девочке, состояние которой непрерывно ухудшалось. В марте 1657 г. к глазу приложили хранившийся в Пор-Рояле «святой терний» (колючка, по преданию, снятая с тернового венца Христа), и... опухоль пошла на убыль. «Чудо святого терния», по словам Жильберты Перье (матери Маргариты), «было засвидетельствовано знаменитыми врачами и искуснейшими хирургами и легализовано торжественным постановлением церкви». Слухи о случившемся произвели настолько сильное впечатление на церковь, что янсенистский монастырь в очередной раз избежал закрытия. Что касается Паскаля, то «радость его была столь огромна, что ум его отдался этому чувству всецело, и у него явилось много удивительных мыслей о чудесах» (Жильберта Перье). Великий ученый поверил в чудо! Он писал: «Невозможно разумно рассуждать против чудес». Позднее он даже попытался дать определение чуда: «Чудо — это действие, которое превышает естественную силу способов, при нем употребляющихся». Потом были предприняты многочисленные попытки рационально объяснить случившееся (одно из объяснений: причиной опухоли была металлическая соринка, а терний обладал магнитным свойством). С тех пор на печати Паскаля был изображен глаз, окруженный терновым венцом.

Амос Деттновиль. «Я провел много времени в изучении отвлеченных наук; недостаток сообщаемых ими сведений отбил у меня охоту к ним. Когда я начал изучение человека, я увидел, что эти отвлечения ему несвойственны и что я еще больше запутался, углубляясь в них, чем другие, не зная их». Эти слова Паскаля характеризуют его настроение в последние годы жизни. И все же полтора года из них он занимался математикой...

Началось это весной 1658 г. как-то ночью, когда во время страшного приступа зубной боли Паскаль вспомнил одну нерешенную задачу Мерсенна про циклоиду. Он замечает, что напряженные размышления отвлекают от боли. К утру он уже доказал целый ряд результатов о циклоиде и... исцелился от зубной боли. Поначалу Паскаль считает случившееся грехом и не собирается записывать полученные результаты. Позднее, под влиянием герцога де Роанне, он изменяет свое решение, в течение восьми дней, по свидетельству Жильберты Перье, «он только и делал, что писал, пока рука могла писать». А затем в июне 1658 г. Паскаль, как это часто делалось тогда, организовал конкурс, предложив крупнейшим математикам решить шесть задач про циклоиду. Наибольших успехов добились Христиан Гюйгенс (1629 – 1695), решивший четыре задачи, и Джон Валлис (1616 – 1703), у которого с некоторыми пробелами были решены все задачи. Но наилучшей была признана работа неизвестного Амоса Деттонвиля. Гюйгенс признавал позднее, что «эта работа выполнена столь тонко, что к ней нельзя ничего добавить». Заметим, что «Amos Dettonville» состоит из тех же букв, что «Louis de Montalte» (если вы будете проверять это, имейте в виду, что в XVII веке буквы u и v не различались). Так придуман новый псевдоним Паскаля[1]. На премиальные 60 пистолей труды Деттонвилля были изданы.

Теперь несколько слов о работе. Мы уже говорили о циклоиде. Эту кривую описывает точка круга, катящегося по прямой без скольжения. Первоначальный интерес к циклоиде стимулировался тем, что ряд интересных задач для нее удалось решить элементарно. Например, по теореме Торричелли, чтобы провести касательную к циклоиде в точке A, нужно взять соответствующее этой точке положение производящего (катящегося) круга и соединить его верхнюю точку B с A. Вот еще одна теорема, которую Торричелли и Вивиани приписывают Галилею: площадь кри-

[1] Еще одна анаграмма этого имени «Соломон де Тульти» (Salomon de Tulti») появилась в последнем произведении Паскаля «Мысли» среди авторов, которым он следует (наряду с Эпиктетом и Монтенем). Паскалеведы немало потрудились в поисках загадочного философа, пока догадались, в чем дело.

волинейной фигуры, ограниченной аркой циклоиды, равна утроенной площади производящего круга.

Задачи, рассмотренные Паскалем, уже не допускают элементарных решений (площадь и центр тяжести произвольного сегмента циклоиды, объемы соответствующих тел вращения и т. д.). На этих задачах Паскаль разработал по существу все, что необходимо для построения дифференциального и интегрального исчисления в общем виде. Лейбниц, который делит с Ньютоном славу создателя этой теории, пишет, что когда по совету Гюйгенса он ознакомился с работами Паскаля, его «озарило новым светом», он удивился, насколько был близок Паскаль к построению общей теории и неожиданно остановился, будто «на его глазах была пелена».

Для работ, предвосхищавших появление дифференциального и интегрального исчисления, было характерно то, что интуиция их авторов сильно опережала возможности провести строгие доказательства; математический язык был недостаточно развит, чтобы перенести на бумагу ход мыслей. Выход был найден позднее путем введения новых понятий и специальной символики. Паскаль не прибегал ни к какой символике, но он так виртуозно владел языком, что временами кажется, что у него в этом просто не было потребности. Приведем высказывание Н. Бурбаки: «Валлис в 1655 г. и Паскаль в 1658 г. составили каждый для своего употребления языки алгебраического характера, в которых, не записывая ни единой формулы, они дают формулировки, которые можно немедленно, как только будет понят их механизм, записать в формулах интегрального исчисления. Язык Паскаля особенно ясен и точен; и если не всегда понятно, почему он отказался от применения алгебраических обозначений не только Декарта, но и Виета, все же нельзя не восхищаться его мастерством, которое могло проявиться лишь на основе совершенного владения языком». Хочется сказать, что здесь Паскаль-писатель помог Паскалю-математику.

«Мысли». После середины 1659 г. Паскаль уже не возвращался ни к физике, ни к математике. В конце мая 1660 г. он в последний

раз приезжает в родной Клермон; Ферма приглашает его заехать в Тулузу. Горько читать ответное письмо Паскаля от 10 августа. Вот несколько выдержек из него: «В настоящее время я занимаюсь вещами, столь далекими от геометрии, что с трудом вспоминаю о геометрии ⟨...⟩ хотя Вы тот человек, кого во всей Европе я считаю самым крупным математиком, не это качество привлекает меня; но я нахожу столько ума и прямоты в Вашей беседе и поэтому ищу общения с Вами ⟨...⟩ я нахожу математику наиболее возвышенным занятием для ума, но в то же время я знаю, что она столь бесполезна, что я делаю малое различие между человеком, который только геометр, и искусным ремесленником. Поэтому я называю ее самым красивым ремеслом на свете, но, в конце концов, это лишь ремесло. И я часто говорил, что она хороша, чтобы испытать свою силу, но не для приложения этой силы». И, наконец, строчки, говорящие о физическом состоянии Паскаля: «Я так слаб, что не могу ни ходить без палки, ни ездить верхом. Я не могу даже ехать в экипаже более двух или трех лье». В декабре 1660 г. Гюйгенс дважды посетил Паскаля и нашел его глубоким стариком (Паскалю было 37 лет), который не в состоянии вести беседу.

Паскаль решает разобраться в самых сокровенных тайнах человеческого существования, в смысле жизни. Он растерян: «Я не знаю, кто меня послал в мир, я не знаю, что такое мир, что такое я. Я в ужасном и полнейшем неведении ⟨...⟩ Как я не знаю, откуда я пришел, так же точно не знаю, куда уйду ⟨...⟩ Вот мое положение: оно полно ничтожности, слабости, мрака». Его занятия естественными науками не могут помочь ответить на возникшие вопросы: «Знание физики не утешает меня в незнании начал нравственности в момент страданий». Когда-то Паскаль писал: «Нет нигде настоящих доказательств, кроме как в геометрии и там, где ей подражают». Но на сей раз геометрия не может быть образцом (хотя немало людей пыталось строить математическую теорию нравственности!). А. С. Пушкин писал не без иронии: « „Все, что превышает геометрию, превышает нас“, — сказал Паскаль. И вследствие того написал свои философские мысли!». Но Паскаль не видит здесь противоречия. Он искал истину на другом пути: «Я одобряю только тех, которые ищут с болью в сердце». Паскаль пишет: «Все наше достоинство заключено в мысли. Не пространство и не время, которых мы не можем заполнить, возвышают нас, а именно она, наша мысль. Будем же учиться хорошо мыслить: вот основной принцип морали». Он неоднократно возвращается к этому вопросу: «Человек, по-видимому, создан, чтобы мыслить; в этом все его достоинство, вся его заслуга; вся его обязанность в том, чтобы мыслить как должно ⟨...⟩ А о чем думают люди? ⟨...⟩ о том, как бы потанцевать, поиграть на лютне, попеть, написать стихи, покататься на карусели и т. д., как бы построиться, сделаться королем ⟨...⟩ Все достоинство человека в его мысли. Но что такое эта мысль? Как она глупа!». Но хорошо мыслить — небезопасно: «Крайнюю степень ума обвиняют в безумии точно так же, как полное отсутствие ума. Хороша только посредственность». Паскаль много думает о роли религии в жизни человека. Почти нет вопроса, мимо которого он проходит. Он продумывает человеческую историю, подчеркивает роль случая в ней («Если бы нос Клеопатры был бы короче, вся поверхность земли приняла бы другой вид»), повествует о страшных сторонах человеческой жизни («Может ли быть что-нибудь нелепее факта, что такой-то человек имеет право убить меня, потому что он живет по ту сторону реки или моря и потому что его правительство в ссоре с моим, хотя я никакой не имею

с ним ссоры»). Высказывания Паскаля по самым разным вопросам необычайно проницательны. Его мысли о государстве ценил Наполеон, который, находясь в изгнании на острове св. Елены, говорил, что «сделал бы Паскаля сенатором».

Паскаль не окончил главную книгу жизни. Оставшиеся материалы были изданы посмертно в разных вариантах, под разными названиями. Чаще всего книгу называют «Мысли».

Популярность этой книги была необычайной. Мы ограничимся тем, что подчеркнем ее влияние на деятелей русской культуры. Не все принимали ее. И. С. Тургенев называл «Мысли» «самой ужасной, самой несносной книгой из всех когда-либо напечатанных», но писал, что «Никогда еще никто не подчеркивал того, что подчеркивает Паскаль: его тоска, его проклятия ужасны. В сравнении с ним Байрон — розовая водица. Но какая глубина, какая ясность — какое величие! ⟨...⟩ Какой свободный сильный, дерзкий и могучий язык!». Н. Г. Чернышевский писал о Паскале: «Погибать от избытка умственных сил — какая славная погибель». Полемика с Паскалем прошла через всю жизнь Ф. М. Достоевского. Для Л. Н. Толстого Паскаль был одним из самых почитаемых мыслителей. Имя Паскаля постоянно встречается в составленном им «Круге чтения» (около 200 раз). Паскаль для Л. Н. Толстого писатель, «пишущий кровью сердца».

Блез Паскаль скончался 19 августа 1662 г. 21 августа в церкви Сент-Этьен-дю-Мон был составлен «Похоронный акт»: «В понедельник 21 августа 1662 г. был похоронен в церкви покойный Блез Паскаль, при жизни стремянный, сын покойного Этьена Паскаля, государственного советника и президента палаты сборов в Клермон-Ферране. 50 священников, получено 20 франков».

ВЫСОКОЙ ГЕОМЕТРИИ НАЧАЛА

> Но это лишь начала некоей много более высокой Геометрии, которая распространяется на труднейшие и прекраснейшие задачи прикладной Математики, и едва ли комунибудь удастся заняться с той же легкостью такими вещами, не пользуясь нашим дифференциальным исчислением или ему подобными.
>
> *Лейбниц*

В 1684 г. в журнале «Acta Eruditorum», выходившем с 1682 г. в Лейпциге («Труды ученых», или, как говорят сейчас, «Ученые записки»), появилась семистраничная статья Готфрида Вильгельма Лейбница (1646 – 1716) «Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления». Это была первая публикация по дифференциальному исчислению, хотя возникло оно лет на двадцать раньше, а первые шаги старше еще на пятьдесят лет и относятся к самому началу XVII века.

Золотой век анализа. Анализ бесконечно малых... Как видятся сегодня вехи героического века его создания? В самом начале XVII века Галилей (1564 – 1642) изучает равноускоренное движение в связи со свободным падением. Как исследовать неравномерное движение, если вся наша интуиция относится к равномерному движению? Можно считать, что на малых участках времени движение мало отличается от равномерного. Но удобнее считать, что на «бесконечно малых» интервалах оно просто является равномерным. Появляется очень расплывчатый образ неравномерного движения, рассыпающегося на бесконечное множество бесконечно малых интервалов (нулевых?) с равномерным движением. Лишь через двести лет этот образ удалось превратить в математически корректное понятие, но все это время математики решительно и успешно работали с ним. А потом от прямолинейного движения перешли к криволинейному: движение тела, брошенного под углом к горизонту. Появляется идея рассматривать кривые как траектории движений. Так Галилей исследует параболу.

Готфрид Вильгельм Лейбниц

Впрочем, у Галилея был великий предшественник в этих рассмотрениях: Архимед определил свою спираль кинематически. Вообще, век анализа долго продолжался с оглядкой на Архимеда. Уже в XVI веке ученые настойчиво изучали его труды по вычислению площадей и объемов криволинейных фигур и тел. В Древней Греции был развит логически безупречный метод доказательства формул для криволинейных квадратур и кубатур — метод исчерпания. Формула доказывалась от противного при помощи приближения кривого тела с двух сторон ступенчатыми телами с любой точностью. Этим методом блестяще владел Архимед, а до него Евдокс доказал таким образом формулы для объема пирамиды и конуса. Теперь мы знаем (в XVII веке это не было известно), что когда Архимед искал формулы (а не доказывал их), он разрезал тело на бесконечно малые слои (неделимые), а потом пользовался механическими соображениями. Из переписки Галилея мы знаем, что он много думал о методе «неделимых», но не написал задуманной книги.

Вскоре после того, как математики XVII века занялись проблемой измерения криволинейных площадей и объемов, им стало тесно в рамках метода исчерпания. Первым, кто предпочитает двигаться по скользкой дороге бесконечно малых, был Кеплер (1571 – 1630). В 1616 г. выходит его «Новое измерение винных бочек», где он исследует практическое правило измерения объема бочки при помощи одного замера линейкой, просунутой в наливное отверстие. Он не приводит доказательства по Архимеду, смело работает с бесконечно малыми, но выражает уверенность в возможности провести строгое доказательство. Кеплер пишет, что он излагает принципы Архимеда «лишь настолько, насколько этого достаточно для удовлетворения ума, любящего геометрию, а полные во всех частях строгие доказательства следует искать в самих книгах Архимеда, если кто не убоится тернистого пути их чтения». Эта позиция (строгие доказательства провести можно, но мы этого делать не будем) надолго становится удобной защитой от необходимости проводить строгие доказательства. Вот несколько примеров. Ферма: «Было бы легко дать доказательство в духе Архимеда $\langle\ldots\rangle$ достаточно предупредить об этом раз и навсегда, чтобы избежать постоянных повторений». Паскаль: «Один из методов отличается от другого только способом выражения». Барроу: «Это доказательство можно было бы удлинить апагогическим (от противного — С. Г.) рассуждением, но для чего?». Но находились критики, которые пытались остановить любителей вольно обращаться с бесконечно малыми, заклиная их именем Архимеда. Против Кеплера было направлено сочинение Андерсона, ученика Виета, «Иск Архимеда» (1616 г.). Еще через сто лет Ролль констатировал, что «характер точности не господствует больше в геометрии с тех пор, как к ней примешали новую систему бесконечно малых».

Кеплер еще при формулировке своего второго закона рассматривал площадь, заметаемую отрезком, соединяющим Солнце с планетой, как «сумму» этих отрезков. Каждый следующий математик пытался разработать более безопасные процедуры работы с бесконечно малыми. Кавальери (ок. 1598 – 1647) был близок к Галилею и удостоился от Галилея высшей похвалы — был назван «соперником Архимеда». Кавальери посвятил методу неделимых две книги (1635, 1647). Он исходит из того, что площадь определяется длинами отрезков, по которым фигура пересекается семейством параллельных прямых (аналогично для объема). Кавальери уверен, что его процедуры имеют преимущества по сравнению с приемами Кеплера: «Всякий, кто видел трактат упомянутого Кеплера о движении Марса, может легко убедиться на основании наших исследований, как легко ему было впасть в ошибку $\langle\ldots\rangle$ исходя из предположения, что площадь эллипса равновелика совокупности всех расстояний планеты, вращающейся на эллиптической линии, от Солнца». Кавальери считал, что надо осторожно работать с непараллельными отрезками, но Кеплер не ошибался! Только интуиция могла защитить математиков от заблуждений при работе с бесконечно малыми.

Кавальери применяет свои методы к вычислению площади криволинейной трапеции под параболами $y = x^n$ (в современных обозначениях $\int_a^b x^n\,dx$). С огромным трудом он постепенно увеличивает n, дойдя между 1635 г. и 1647 г. до $n = 9$. Но к этому времени Ферма (1601 – 1655) уже умел вычислять площади для всех рациональных $n \neq -1$ (в 1644 г. он сообщил об этом Кавальери, но первые результаты относятся еще к 1629 г.). Математики начинают ощущать свое превосходство над древними. В 1644 г. Торричелли писал: «Несомненно, что геометрия Кавальери есть удивительное по своей экономии средство для нахождения теорем $\langle\ldots\rangle$ Это — истинно царская дорога среди зарослей математического терновника $\langle\ldots\rangle$ Жаль мне древней геометрии, что она либо на знала, либо не хотела признавать учения о неделимых».

Как же обстоит дело в случае $n = -1$, выпавшем из рассмотрений Ферма? И здесь выяснилось поразительное обстоятельство: при квадратуре гиперболы появляются логарифмы ($\int_1^x dy/y = \ln x$). Этот замечательный факт постепенно выкристаллизовывался, начиная с работы Сент-Винцента (около 1647 г.). Логарифмы появились у Непера (1550 – 1617) в самом конце XVI века при помощи кинематических рассмотрений, очень напоминавших первые механические построения Галилея.

Однако долго они воспринимались как чисто вычислительное средство (таблицы!) и не пересекались с теоретическими исследованиями. Как писал Торричелли, Непер «следовал только арифметической практике» (грубо говоря, еще не было логарифмической или показательной функций), и лишь с середины века эти функции начинают появляться (в значительной степени в связи с квадратурами). Это было принципиально, что при квадратуре алгебраической функции простого вида появляется трансцендентная. Был подробно исследован вопрос о квадратуре круга и его частей, и здесь выяснилось, что квадратура алгебраической функции ($\sqrt{1-x^2}$) ведет к тригонометрическим (круговым) функциям. Кстати, и синусоида появилась тогда же как промежуточный объект при вычислении площади под циклоидой («спутница циклоиды»).

Постепенно в круг интересов математиков все более начинают входить задачи на проведение касательных к кривым. Древние умели проводить касательные лишь к коническим сечениям, да еще Архимед умел строить касательную к своей спирали. Так что в этой задаче с самого начала математики XVII века были лишены поддержки древних. Начиная с 1629 г. Декарт (1596 – 1650) и Ферма, соревнуясь друг с другом, разрабатывают общие принципы построения касательных, причем последний связывает их с задачами на максимум и минимум. Параллельно Торричелли и Роберваль (1602 – 1675) предлагают искусственные приемы построения касательных, интерпретируя их как направления скорости при движении по кривой и искусно представляя движение по кривой как сложное движение, составленное из более простых. В 50 – 60-е годы, отправляясь от результатов Декарта – Ферма, Слюз, Гудде, Гюйгенс находят совершенно автоматические правила построения касательных к широким классам алгебраических кривых. Характерно, что никто из авторов не спешил обнародовать свое правило. В 1659 г. Гудде пишет Схоутену: «Я прошу вас сохранить в тайне все, что я вам пишу, и не говорить кому бы то ни было, что найдено нечто подобное. Необходимо, чтобы мои лучшие открытия либо были известны только самым интимным моим друзьям, либо чтобы они стали известны всем». Характерная иллюстрация эпохи! Информация распространяется в основном при помощи писем, редко выходят книги, а первый журнал («Журнал ученых» в Париже) стал выходить в 1665 г. Быстрая публикация еще не воспринималась как естественное средство сохранить приоритет. Считалось вполне допустимым «придержать» метод, чтобы самому извлечь максимальные следствия.

В 1668 г. Николай Кауфман (1620 – 1689), более известный под именем Меркатор, опубликовал в книге «Логарифмотехника» замечательный способ вычислять логарифмы:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots,$$

где можно обеспечить любую точность, взяв достаточное число членов (ряд для $\ln 2$ был ранее получен Броункером). Позже выяснилось, что этот ряд знали уже Гудде (1656 г.) и Ньютон (1665), но они не торопились с публикацией. Постепенно ряды становятся важнейшим средством как для вычислений, так и для теоретических рассмотрений. Например, Грегори (1638 – 1675) имел очень интересный план применить ряды к доказательству трансцендентности π и к доказательству того, что некоторые задачи (вычисление дуги эллипса или гиперболы) не сводятся к элементарным функциям.

Мы очень бегло описали ситуацию в первой половине века бесконечно малых, причем мы не только опустили многие славные страницы истории (результаты Паскаля, Ферма), не упомянули многие достойные имена (Валлис, Фабри), но и сильно огрубили картину, не обсуждая многочисленные переходящие друг в друга этапы становления результатов, авторство которых очень условно и часто несправедливо закреплено за теми или иными математиками: «Открытие произошло в результате почти неуловимых переходов, и спор по этому поводу о приоритете был бы равносилен спору между скрипкой и тромбоном относительно точного момента появления определенной мелодии в симфонии» (Бурбаки).

К началу 60-х годов математики накопили немало фактов. Начал очерчиваться круг задач, решаемых при помощи бесконечно малых. Выкристаллизовались два основных направления: вычисление квадратур и построение касательных. Ситуация с этими задачами была существенно различной. В то время как в задаче о касательных, более молодой, появились достаточно общие методы, в задаче о квадратурах все оставалось на уровне отдельных задач и искусственных приемов. Например, Декарт был уверен, что общие приемы в этих задачах не существуют. Все более осознавалась замечательная связь, которая имелась между этими задачами. Они оказались взаимно обратными, что наиболее естественно было усмотреть при помощи кинематических рассмотрений: нахождение скорости (мгновенной) по пути сводится к построению касательной, а путь находится по скорости при помощи квадратур. Эта связь, которая наметилась уже у Галилея, в весьма полном виде появляется у Барроу (1630 – 1677) в его лекциях, изданных в 1669 – 1670 г., хотя эксплуатируется она еще явно недостаточно.

Активность в области теории бесконечно малых к концу 60-х годов заметно падает. Ферма и Декарта уже нет в живых, Гюйгенс уже сделал свои главные работы. Остававшиеся задачи с трудом поддавались искусственным приемам, да и не было на математическом небосклоне такого созвездия математиков первой величины, как двадцать лет назад. Необходим был перелом, для которого требовался очень талантливый человек, который бы отважился на некоторое время отказаться от движения вперед и переосмыслил все с самого начала, разгрузил теорию от искусственных приемов, и только упростив и систематизировав способы решения известных задач, двинулся вперед. Необходимо было превратить теорию бесконечно малых в исчисление — набор достаточно простых формальных, но широко действующих рецептов. Нужно было превратить теорию из искусства в ремесло. В таком виде ее не только можно будет вывести из узкого круга посвященных, но и крупным математикам это позволило бы без затраты усилий пройти часть пути и сконцентрировать усилия на более глубоких вопросах. Характерно, что еще работающие гиганты, прежде всего Гюйгенс, не чувствовали в этом потребности: их устраивала работа по-старому. Этот труд должен был взять на себя математик следующего поколения.

«Бог сказал: да будет Ньютон! — и наступил свет» — сказано в популярном четверостишии А. Попа. Ньютон (1642 – 1727) создал исчисление во время своих двухлетних чумных каникул (1665 – 67 гг.) в Вулсторпе, когда после окончания Кембриджского университета он оказался на своей ферме отрезанным из-за чумы от внешнего мира. В эти два года он получил свои самые замечательные результаты по механике и математике. Перед этим он слушал лекции Барроу и, возможно, от него усвоил идею систематически рассматривать кривые как функции от времени: «вероятно, что лекции д-ра Барроу могли навести меня на рассмотрение образования фигур с помощью движения, хотя я теперь и не помню этого». Очень поучительное высказывание! Ньютон строит исчисление флюксий. У него независимое переменное — это всегда время, и флюксии — это скорости, производные по времени. Подробно разрабатываются правила вычисления флюксий (наши правила дифференцирования). Дальше исследуется обратная задача — нахождение флюент. Это операция интегрирования, и Ньютон систематически выясняет, какие правила для нее можно получить, эксплуатируя то, что она обратна дифференцированию (нахождению флюксий по Ньютону).

Это дает немало удобных приемов, поскольку с флюксиями (производными) все выглядит просто. По такой схеме — дифференцирование предшествует интегрированию — обычно строится анализ и сегодня. Но главный конек Ньютона — это ряды. Он очень ценит свою формулу для бинома $(1 + x)^k$ при любых (не обязательно натуральных) k. Он воспринимает ряды как универсальный метод решения аналитических задач и не видит для него ограничений.

В октябре 1666 г. Ньютон составляет черновой набросок теории, а в 1669 г. летом он передает конспект своих результатов Барроу, а через него Коллинзу в Лондон. В 1670 – 71 гг. Ньютон готовит подробное сочинение по методу флюксий, но не находит издателя, и сочинения Ньютона по анализу начинают появляться в печати лишь после 1704 г. Кое-какая информация о его работах распространялась среди математиков, кое-кто имел возможность познакомиться с рукописью, хранившейся у Коллинза. Ньютон не торопился с публикацией, спокойно наблюдая, как некоторые его результаты переоткрывались и публиковались другими (например, результаты о рядах — Меркатором). Вряд ли кто-нибудь из окружающих мог оценить важность исчисления, более обращали внимание на конкретные результаты. Да и сам Ньютон больше ценил их и выдвигал на первый план метод рядов, а не исчисление. Итак, к 70-м годам «активными остаются только Ньютон в Кембридже и Дж. Грегори, уединившийся в Абердине, к которым в скором времени со всем пылом неофита (вновь посвященного — С. Г.) присоединяется Лейбниц» (Бурбаки).

Лейбниц и его путь в математику. Всю свою жизнь Лейбниц был нацелен на глобальные проблемы, на всеобъемлющие теории. Его путь в математику был нестандартен, и в этом отчасти причина того, что он отдавал предпочтение методу в век, когда более ценили конкретные результаты. В жизни Лейбница было много планов. Некоторые поражают своей грандиозностью. Новые замыслы вытесняли старые, нередко увлекавшемуся автору не хватало реализма. Почти ни одной из задуманных книг он не дописал до конца, а большинство оставил в самом начале (лишь несколько книг по философии постигла лучшая участь). Но как трудно сохранить реализм, когда замыслы далеко обгоняют век!

Уже с 13 – 14 лет Лейбниц мечтает о перестройке логики, о создании алфавита человеческих мыслей, в котором можно было бы записывать все мыслительные процессы. Постепенно зреет главная идея его жизни: создание «универсальной характеристики», «универсального языка». «Универсальная математика является, так сказать, логикой воображения»; она должна заняться всем, «что в области воображения поддается точным определениям». Язык должен быть защищен от записи неправильных мыслей: «химеры, которые не понимает даже тот, кто их создает, не смогут быть записаны его знаками». Он грезит о машине, которая будет доказывать теоремы, хочет превратить мышление в исчисление, арифметизировать его так, чтобы можно было заменять рассуждения вычислениями и решать споры при помощи математических выкладок. Трижды приступал Лейбниц к реализации своего грандиозного, сильно опередившего время замысла, но всякий раз останавливался, пройдя лишь первые шаги. Только в XX веке, когда многое из задуманного Лейбницем оказалось явью в рамках математической логики, стало ясно, что его замыслы были не столь утопичны, сколь прозорливы.

Лейбница интересуют разнообразные применения математики, и он верит в безграничные ее возможности. Он готовится стать юристом и в 18 лет пытается строить юриспруденцию как математическую теорию с аксиомами и теоремами, думает о применении вероятностных соображений в судопроизводстве. В 20 лет он оказывается от кафедры в Нюрнбергском университете: его не привлекает спокойная академическая карьера. Планы Лейбница более честолюбивы: «я давно в душе лелеял другое» и «я считал недостойным молодого человека сидеть, точно пришпиленный к месту; дух мой горел желанием стяжать большую научную славу и посмотреть свет». Он принимает приглашение герцога Иоганна Филиппа и переезжает в Майнц. Лейбниц хочет воспользоваться ситуацией и, пусть в рамках довольно скромного государства, создать совершенный свод законов. Постепенно его планы становятся все более широкими и одновременно менее реалистическими. Он задумывает перестройку всей юридической науки, начинает три грандиозные монографии. Вероятно, когда в 1717 г. непременный секретарь Французской академии наук Фонтенель в «Похвальном слове Лейбницу» назвал его великим юристом, у него были основания.

У Лейбница немало интересных идей, но скоро приходит очередь совершенно другого замысла. Живший в Майнце известный дипломат Бойнебург увлекает Лейбница грандиозными планами изменить европейскую политику. Их замыслам тесно в провинциальном Майнце. Они берутся за предложение курфюрста Бранденбургского найти мотивировку для избрания на польский престол немецкого князя. Лейбниц сочинил блестящий меморандум, который, впрочем, не помешал проиграть дело: правильная практическая дипломатия оказалась эффективнее политического памфлета. Следующий прожект касался организации союза немецких государств против Франции. Он содержал немало остроумных ходов, но реализовать его не удалось. Наконец, третий грандиозный проект: вовлечь Францию в войну с Турцией с тем, чтобы ослабить ее влияние в Европе. Для реализации проекта Лейбниц едет в Париж. Единственным результатом было то, что Лейбниц по существу лишился поддержки курфюрста, который не очень был заинтересован в советнике, пытавшемся через его голову перестраивать европейскую политику.

Возможно, то обстоятельство, что Лейбниц остался не у дел, переключило эту кипучую натуру на математику. Первоначально в планах Лейбница математике предназначалась вспомогательная роль. В 1666 г. он издает в Лейпциге «Диссертацию о комбинаторном искусстве», в которой он сообщает, что его не интересует открытие новых арифметических истин: математика должна помочь ему разработать «логику открытия». И в Майнце он находит время для «математических досугов». В 1676 г. он работает над конструкцией арифметической машины, интересуется машиной Паскаля. Лейбниц привез в Париж некоторые математические результаты. Осенью 1672 г. они были темой обсуждения с Гюйгенсом, который в те годы работал в Париже. Речь шла о суммировании числового ряда $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ при помощи подбора такой последовательности $b_1, b_2, b_3, \ldots$, что $a_n = b_n - b_{n+1}$. Тогда $a_1 + \ldots + a_n = b_1 - b_{n+1}$. Лейбниц рассматривает ряд примеров, когда работает его правило, и удачно, что под правило подошел пример, предложенный Гюйгенсом:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

(здесь $b_n = 1/n$). Они оба не знали, что этот прием не был нов, да и речь шла об очень частном вопросе. Лейбниц тем не менее был высокого мнения о своих достижениях. Позднее он трезво оценивал ситуацию: «Когда я приехал в 1672 г. в Париж, я был математиком-самоучкой, но опыт мой был невелик, мне не хватало терпения пройти долгую цепь доказательств $\langle \ldots \rangle$ Я хотел плавать самостоятельно без учителя $\langle\ldots\rangle$ В этом высокомерном математическом невежестве я уделял внимание только истории и праву, видел в их изучении свою цель. Однако математика была для меня более приятным развлечением».

В 1673 г. Лейбниц посетил Лондон в составе майнцской дипломатической миссии. Контакты с английскими математиками подействовали на него отрезвляюще. Он узнал что его основные результаты не новы, а современная математика далеко впереди. У Лейбница оставался единственный путь войти в современную математику — начать все с начала. 27 лет — не самый подходящий возраст для старта в науку молодых, но Лейбница это не смущает, он имел все основания позднее назвать себя «самым учащимся из смертных» (письмо Я. Бернулли, 1703 г.). С осени 1673 г. начинаются годы математического ученичества Лейбница, умело направляемого Гюйгенсом. Гюйгенс угадал в самоуверенном «переростке» подлинный дар. «Гюйгенс, который, как я предполагаю, считал меня более способным, чем я был на самом деле, дал мне экземпляр только что изданного „Маятника“. Для меня это было началом или поводом для более глубоких математических занятий.» Итак, все началось с великой книги «Маятниковые часы». Затем последовали Сент-Винцент, Декарт, Слюз, Валлис, и прежде всего Паскаль. Лейбниц увидел, что Паскаль по существу применяет очень общий метод к частной задаче и, пораженный, что «глаза Паскаля были закрыты», пытается вычленить этот метод и применить его к другим задачам. Так появляется так называемый метод «характеристического треугольника», в котором бесконечно малый треугольник заменяется конечным, что было существенным прогрессом по сравнению с методом неделимых. Лейбницу было бы неплохо почитать и более классические тексты, но он торопится; он в самом деле смог пробраться «к геометрии воистину с черного хода». Появляются результаты, удивившие Гюйгенса, например, ряд

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots.$$

Потом оказалось, что его знал Грегори. Гюйгенс рассчитывал, что при помощи ряда можно получить квадратуру круга (а Грегори, напротив, рассчитывал таким способом доказать трансцендентность π). Лейбниц занимается не только анализом. Он пытается найти формулу для решения общего алгебраического уравнения (именно общего, частные проблемы его мало интересуют), анализирует формулу Кардано в комплексной области (удивляет Гюйгенса соотношением $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$), работает над циркулем, который позволяет находить корни любого уравнения (подобно тому как обычный циркуль позволяет находить корни квадратного).

Все же главные результаты связаны с бесконечно малыми. Лейбниц писал, что уже в 1673 г. он «заполнил несколько сот страниц», но еще «не считал этот труд достойным быть изданным. Ибо мне наскучило заниматься мелочами, когда передо мной открылся Океан».

Много теорем было получено в первый год «ученичества», но большинство из них можно было найти у Грегори или Барроу. Однако общие приемы позволяли получать все проще и единообразнее. Путь Лейбница был выбран: он строит исчисление бесконечно малых.

Характер его таланта, его предыдущий научный опыт как нельзя лучше отвечали этой цели. Он четко продумывает вопрос о классе функций, которые должно рассматривать в анализе (само слово «функция» впервые появляется у Лейбница в 1673 г.). Он решительно отвергает идею ограничиться алгебраическими функциями (геометрическими кривыми по Декарту) и считает, что необходимо рассматривать и трансцендентные функции (термин Лейбница; Декарт в этих случаях говорил о механических кривых). С первых шагов он сопровождает построение исчисления разработкой символики, которая в конечном счете приняла у него вид, дошедший до наших дней.

Лейбниц, как никто до него, понимал важность удачной символики, причем не только в математике. Исчисление бесконечно малых дало ему прекрасный повод для реализации этой идеи. Хорошая символика не только упрощает пользование исчислением, но и по существу необходима для овладения им. В 1678 г. Лейбниц писал Чирнгаузу: «Следует заботиться о том, чтобы знаки были удобны для открытий. Это достигается в наибольшей мере тогда, когда знаки коротко выражают и как бы отображают глубочайшую природу вещи, и при этом удивительным образом сокращается работа мышления». Лейбниц всюду искал возможность ввести удобную символику. Стоит упомянуть, что к нему восходит метод решения систем линейных уравнений при помощи определителей, в связи с чем он писал Лопиталю (1693 г.): «Часть секрета анализа состоит в искусстве хорошо употреблять применяемые знаки, и по этому малому образцу Вы видите, сударь, что Виет и Декарт еще не познали все его тайны». Следует подчеркнуть, что в исчислении Ньютона не было развитой символики. Он сам писал, что «не дал своего метода в форме символов и не придерживался какого-либо определенного вида символов для флюент и флюксий». Показательно, что Гюйгенс не оценил пользы аналитической символики. При его даровании он был в состоянии без нее обходиться. Лейбниц пытался объяснить преимущества: «Я вполне себе представляю, что Вы располагаете методом, эквивалентным моему исчислению разностей. Ибо то, что я называю dx или dy, вы можете обозначить другой буквой. Однако это примерно то же самое, как если бы вместо корней или степеней всегда хотели подставлять буквы $\langle\ldots\rangle$ Посудите сами, насколько это было бы затруднительно». То, без чего мог обойтись Гюйгенс, было совершенно необходимо для превращения анализа в повседневное практическое средство. Вероятно, символика явилась решающей причиной, по которой мы пользуемся сегодня анализом в варианте Лейбница.

Уже в 1674 г. Лейбниц уверен, что «все учение о суммах и квадратурах может быть сведено к анализу — вещь, на которую никто до сих пор не надеялся». К концу 1675 г. в первом приближении исчисление построено, и Лейбниц имел повод убедиться в его эффективности. Важным моментом было решение задачи Дебона, которой занимался Декарт, но не смог довести решение до конца: «Еще в прошлом году я поставил перед собой вопрос, который можно отнести к труднейшим во всей геометрии, поскольку распространенные до сих пор методы здесь почти ничего не дают. Сегодня я нашел его решение и я приведу его анализ» (11 ноября 1675 г.). Речь идет о нахождении кривой с постоянной подкасательной (отрезок между проекцией точки A на ось OX и точкой пересечения касательной в точке A с осью OX). Трудность заключается в том, что решение связано с логарифмической функцией. К середине 1676 г. дифференциальное и интегральное исчисление сложилось окончательно. Он поражается, что «благодаря этому исчислению все предстает перед очами и в уме с восхитительной краткостью и ясностью».

Лейбниц, как и Ньютон, стремился создать мощный метод, не заботясь на этой стадии о достаточно строгом обосновании исчисления. «Ньютон и Лейбниц, повернувшись спиной к прошлому, решили временно искать оправдание новым методам не в строгих доказательствах, а в обилии результатов и их взаимной согласованности» (Н. Бурбаки). Еще на стадии ученичества Лейбницу казалось, что Грегори слишком увлекается «доказательствами на античный лад». Для Лейбница конкретные результаты, в первую очередь, рассматривались как возможная иллюстрация его метода. Возможно, здесь сказалось, что он никогда не умел легко делать выкладки и всегда завидовал вычислителям «из железа или меди». Позднее (1696 г., письмо Лопиталю) он связывал это с тем, что одновременно занимался многими разными вещами: «Моему уму, занятому другими предметами, не удается сосредоточиться в необходимой мере, из-за этого я ежеминутно спотыкаюсь, а когда я напрягаю внимание, у меня появляется неприятное ощущение какого-то жара». В 1699 г.: «вычисления становятся приятнее, когда их делишь с кем-нибудь, а я не в состоянии долго заниматься вычислениями, если мне не помогают».

В 1675 г. в Париже у Лейбница был достойный напарник, его соотечественник Чирнгауз (1651 – 1708). Их способности были во многом дополнительны, и это делало их сотрудничество особенно плодотворным. Чирнгауз занимался больше всего алгебраическими уравнениями, но интересовался также и квадратурами. Лейбницу было больно, что его товарищ не смог оценить пользу исчисления: «Некоторые квадратуры, которые получены тобою пространно, но изящно, и сами по себе красивы, я считаю только следствиями общего исчисления. А пишу я это, мой друг, так как с сожалением вижу, что ты часто теряешь много времени и только потому, что не пожелал с достаточным вниманием отнестись к некоторым моим замечаниям» (1678 г.).

Лейбниц, разумеется, слышал, что Ньютон владеет какими-то мощными методами, и решает обсудить с ним свой новый метод. Через посредничество Ольденбурга (секретаря Королевского общества) в 1676 г. происходит обмен письмами. Лейбниц сообщает о задачах, которые он умеет решать, просит сообщить о методах Ньютона, обещает рассказать о своем методе. Еще ранее Лейбниц писал Ольденбургу, что создание метода — единственная вещь, которой он придает значение. Результаты Лейбница не удивили Ньютона. Он сразу заметил, что задача Дебона сводится к квадратуре гиперболы (логарифмам), а по поводу ряда для π заметил, что потребовалось бы 1000 лет, чтобы сосчитать 20 десятичных знаков. Очень скупо говорит Ньютон о методе. Ясно лишь, что центр тяжести в его рассмотрениях — на степенных рядах. Ньютон утверждает, что он в состоянии решить при их помощи любое дифференциальное уравнение. Основная часть информации закодирована в двух анаграммах, в которых высказывания зашифрованы первыми буквами содержащихся в них слов (5accdae10effh...). Ньютон расшифровал их много позднее. Это был старинный способ сохранить приоритет. Быть может, концентрация внимания на степенных рядах помешала Лейбницу осознать, что у Ньютона имеется исчисление.

Лейбниц не согласен, что ряды решают все проблемы. «Мы пока, насколько мне известно, не располагаем общим обратным методом касательных». Ему видится иная картина. Надо пытаться сводить решение дифференциальных уравнений к известным квадратурам. Важно разобраться, хватает ли элементарных функций и квадратур гиперболы и круга (логарифмической и тригонометрических функций). Грегори приводил веские аргументы в пользу того, что для вычисления длин дуг эллипса или гиперболы (будущие эллиптические интегралы) этих квадратур мало. Тогда надо «установить какие-то другие высшие основные фигуры» (в другом месте «высшие трансцендентности в геометрии»), которых достаточно для решения дифференциальных уравнений. Ньютона и эта постановка не застает врасплох: он сообщает, при каких α и β интеграл $\int x^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,dx$ сводится к известным квадратурам. Переписка прервалась по инициативе Ньютона, кроме того в 1677 г. умер Ольденбург, через которого она велась.

Математика и «завоевание умов» государей. Да и жизнь Лейбница решительно поменялась. От его парижского периода остались лишь черновики и наброски статей. У него зреет план подготовки всеобъемлющего труда «Математика бесконечного», но жизненные перемены отвлекли его от математики.

Нам не дано знать, опять ли взыграло у Лейбница политическое честолюбие, или он не нашел возможности обеспечить себе жизнь занятиями наукой (возможно, протестантство помешало ему получить место в Парижской академии наук). Так или иначе, с конца 1676 г. он на службе у герцога Иоганна Фридриха в Ганновере. Он едет в Ганновер кружным путем, посещает Лондон, где видится со многими математиками, но не встречается с Ньютоном, встречается со Спинозой в Голландии.

Итак, Лейбниц смог получить место лишь у второсортного государя, да и то поначалу он лишь герцогский библиотекарь. Не самое завидное место для 30-летнего ученого политика, еще не отказавшегося от честолюбивых замыслов. Но Лейбниц полон энтузиазма и мечтает о лучшей библиотеке в мире, пока размер реально отпускаемых средств не охладил его. Его допускают к юридической деятельности, но предпочитают загружать повседневными делами, к которым он не имел вкуса, в отличие от глобальных юридических проблем. Очень ограниченно допускают Лейбница к дипломатической деятельности. Так, ему поручается подготовить текст, мотивирующий право герцога участвовать во франко-германских мирных переговорах. Иоганн Фридрих был католическим монархом в протестантском государстве, и Лейбниц хотел воспользоваться этим обстоятельством для реализации своей заветной идеи: объединить католическую и протестантскую религии.

В 1678 г. на престоле новый герцог Эрнст Август, при котором дела стали идти хуже. Но Лейбниц полон проектов, спектр которых необычайно велик: усовершенствование кладки печей, производства гвоздей, молотков, усовершенствование колес экипажей, удочек, рулей кораблей, литейного производства, пожарного дела, реорганизация архивов, составление «Свода законов Эрнсто-Августов» и т. д. Почти ни один проект не нашел поддержки. Дальше всего зашло дело с планом усовершенствования водяных двигателей на рудниках в Гарце. В 1685 г. реализация была прервана, поскольку была признана бесперспективной. В каждом проекте Лейбница была остроумная находка, но ему часто не хватало реализма. Успех наступал тогда, когда за доводку идеи брался талантливый практик. Так было с паровой машиной: «Лейбниц, рассыпая вокруг себя, как всегда, гениальные идеи без заботы о том, припишут ли заслугу открытия этих идей ему или другим, — Лейбниц, как мы знаем теперь из переписки Папена (изданной Герландом), подсказал ему при этом основную идею: применение цилиндра и поршня» (Ф. Энгельс). В качестве курьеза упомянем, что Лейбниц предлагал патеру Гримальди, направлявшемуся в Китай, ознакомить просвещенного императора с двоичной системой счисления и при ее помощи обратить в христианство (доказав единственность божества).

Постоянная борьба за влияние при дворе надолго отвлекла Лейбница от математики. Новое обращение Лейбница к математике стимулировалось двумя обстоятельствами. С 1682 г. при поддержке Лейбница стали выходить «Ученые записки» в Лейпциге, и Лейбниц предполагает публиковать там свои результаты. В 1683–84 гг. в журнале публикуются статьи Чирнгауза о квадратурах, в которых Лейбниц обнаруживает следы своих недавних бесед с автором без необходимых ссылок. Когда-то Лейбниц безуспешно пытался убедить Чирнгауза в эффективности исчисления, теперь он напечатал сам некоторые результаты в этом направлении. Очень вероятно, что Чирнгауз не помнил, что первоисточником его утверждений были высказывания Лейбница.

Так бывает, что непонятые мысли прячутся глубоко, а через некоторое время возникают как свои собственные.

В мае 1684 г. Лейбниц напечатал статью с осторожной критикой Чирнгауза (без приоритетных претензий и без указания полной фамилии), а в октябре выходит его знаменитая статья, о которой мы говорили в начале. На семи страницах формулируются основные правила дифференциального исчисления, обсуждается связь с задачами на максимум и минимум и о точках перегиба, рассматривается несколько примеров (вывод закона преломления, задача Дебона). Очень оптимистична оценка: «То, что человек, сведущий в этом исчислении, может получить прямо в трех строках, другие ученейшие мужи принуждены были искать, следуя сложными обходными путями». По существу в это время Лейбниц не занимается анализом. Он лишь печатает немногое из своих математических «кладовых». Он печатает еще несколько статей. Среди них в 1686 г. вышла статья «о глубоко скрытой геометрии и анализе неделимых, а также бесконечных». В ней впервые появляется в печати интеграл (он еще называется суммой, но обозначается через $\int$; термин «интеграл» ввел И. Бернулли). Здесь четко формулируется взаимная обратность операций дифференцирования и интегрирования, подчеркивается необходимость рассмотрения трансцендентных функций в анализе. В статье приводятся краткие исторические замечания. Ньютон называется «глубочайшего дарования геометром». Отмечается, что публикация его методов способствовала «немаловажному приращению науки». На этом фактически закончился второй период математической жизни Лейбница.

Дела при дворе складывались все хуже. К 1685 г. окончательно провалился гарцский проект. Герцог нацелился стать девятым курфюрстом (князья, участвующие в выборах императора). В этой игре Лейбницу отводится немаловажная, но четко ограниченная роль. Он должен провести изыскания по истории дома Вельфов, к которому относился герцог. Они были необходимы для подкрепления претензий. Любознательного Лейбница скромная деятельность историографа вполне привлекала. Она, в частности, давала ему возможность вырваться из Ганновера.

В 1687 г. он отправляется в трехлетнюю поездку для работы в архивах Германии и Италии. За десять лет безвыездной ганноверской жизни его контакты с учеными были крайне ограничены. Он пытается заменить их активной перепиской: еще в Майнце число его корреспондентов приближалось к 50, в Ганновере их число возросло до 70, а к началу нового века и до 200. Все же письма не могут заменить личных контактов. Подводя итоги путешествия, Лейбниц напишет: «Путешествие отчасти послужило тому, чтобы освободить меня от обычных обязанностей и дать моему духу исцеление, и я получил удовлетворение от бесед, которые имел обыкновение вести со многими искусными в науках и эрудированными людьми». Кроме того, Лейбницу тесно на службе у ганноверского герцога. Для его планов важно «завоевать ум большого государя». Он получает аудиенцию у императора Леопольда в Вене («Я прожил день, которого желал уже двадцать лет»). В числе благосклонно встреченных предложений — проект организации Академии наук в Вене. Но скоро императору, занятому войной с Францией, стало не до Академии.

С 1690 г. Лейбниц снова в Ганновере. Он рассчитывает за два-три года закончить «Историю Вельфов». Но оценка оказалась, как всегда, слишком оптимистической. Слишком фундаментальны были его замыслы, а они еще расширялись по мере работы. Ограничивать задачу Лейбниц не умел, и книга тяжелым грузом висела на нем до конца его дней.

В Ганновере Лейбница ждало отправленное еще в 1687 г. письмо Якоба Бернулли (1654–1705). Я. Бернулли прочел статьи Лейбница и проникся духом нового исчисления. Пока он ожидал ответа Лейбница, он начал активно работать в анализе, вовлекая в занятия своего младшего брата Иоганна (1667–1748). Лейбниц нашел понимание, которого ждал много лет. О лучших учениках не приходилось и мечтать. Лейбниц получил свою научную школу (то, чего был лишен Ньютон). В контактах с братьями Бернулли Лейбниц начал систематически развивать анализ. Они печатали статьи в «Acta eruditorum», обменивались письмами, обсуждали задачи. Позднее к триумвирату присоединился маркиз Лопиталь (1661–1704), ученик И. Бернулли. В 1692 г.

И.Бернулли изготовил лекции по дифференциальному исчислению, но не опубликовал их, а в 1696 г. вышел первый курс по дифференциальному исчислению — «Анализ бесконечно малых для исследования линий» Лопиталя. Мы не будем останавливаться на результатах, полученных в эти годы Лейбницем и его сотрудниками, но обсудим, как в результате этих исследований менялся взгляд его на анализ.

Еще в конце века Лейбницу кажется, что в математике все сделано: «Я рассматриваю отныне чистую математику только как упражнение, служащее для развития искусства мыслить. Ибо для практических целей в ней почти все открыто с помощью новых методов». В сентябре 1692 г. он сообщает о своих планах Гюйгенсу: «Я хочу, чтобы мы могли еще в этом веке довести до завершения анализ чисел и линий, по крайней мере, в главном, дабы избавить от этой заботы человеческий род, чтобы отныне вся проницательность человеческого разума обратилась к физике». Но, как свидетельствует письмо к Лопиталю от 1708 г., он уже не так оптимистичен: «Не следует удивляться, что анализ бесконечно малых делает только первые шаги и что мы не хозяева положения и в квадратурах, и в обратной задаче касательных и, в еще меньшей мере, при решении дифференциальных уравнений». Он ясно видел, что естественные задачи не сводятся к известным квадратурам и не видел способна систематизировать «высшие трансцендентности». Это уже была задача для двух следующих столетий.

Научный авторитет Лейбница рос. Одним из свидетельств этого было избрание его во французскую Академию наук в 1699 г. (как только разрешили выбирать некатоликов). Но ему все труднее было совмещать службу с наукой. Он рвался за пределы Ганновера. С 90-х годов он на службе еще у двух немецких государей. В 1700–1711 гг. к этому присоединяется служба у бранденбургского курфюрста Фридриха III, ставшего прусским королем. Здесь по проекту Лейбница организуется научное общество, но интриги заставили Лейбница покинуть Берлин перед самым его открытием. Возобновляется идея организовать имперскую академию в Вене, в 1713 г. это твердо обещают, но потом Карл VI решает отказаться от слишком дорогой игрушки. География интересов Лейбница расширяется: «Я не принадлежу к числу тех, которые питают страсть к своему отечеству или какой-нибудь другой нации, мои помыслы направлены на благо всего человеческого рода; ибо я считаю отечеством небо и согражданами всех благомыслящих людей.» Так писал Лейбниц Петру I в январе 1712 г. Они познакомились в 1711 г. на свадьбе царевича Алексея и несколько раз встречались.

Петр принял Лейбница на русскую службу тайным советником юстиции для помощи в упорядочении российского законодательства. Обсуждается вопрос об организации академии в Петербурге. Круг вопросов, обсуждаемых с царем, необъятен: отыскание пути из полярных морей в Тихий океан, христианские миссии в Китай, объединение православия с католицизмом и протестантизмом (созыв вселенского собора), создание широкой антифранцузской коалиции. Похоже, что они нашли общий язык. Эта активность Лейбница не доставляла радости ганноверскому герцогу. Хотя его и сделали тайным советником, желание Лейбница «дослужиться» до вице-канцлера не осуществилось. Новый герцог (с 1698 г.) Георг Людвиг настойчиво выражает желание наконец увидеть «книгу-невидимку» — давно ожидаемую «Историю Вельфов». Лейбница по существу отстраняют от всех дел и стараются ограничить его внешние контакты. За ним прочно укрепляется репутация охотника за государями, о чем свидетельствует недоброе высказывание его помощника по историческим занятиям Эккарда (оно относится ко времени предсмертной болезни): «если царь или дюжина вельмож пообещают ему жалование, то он сможет подняться». А тяжело больной ученый из последних сил пытается завершить нескончаемую «Историю».

О систематических занятиях наукой не могло быть и речи. В 1695 г. он пишет: «Нет слов, чтобы описать, насколько я не сосредоточен. Ищу в архивах разные вещи и собираю ненапечатанные рукописи, с помощью которых надеюсь пролить свет на историю Брауншвейгского дома. Я получаю и отправляю немалое число писем. У меня столько нового в математике, столько мыслей в философии, столько других литературных заметок, которым я не могу дать погибнуть, что я часто не знаю, за что раньше приняться, и я чувствую, как прав был Овидий, восклицая: изобилие делает меня нищим ⟨...⟩ Уже свыше двадцати лет назад французы и англичане видели мою счетную машину ⟨...⟩ Теперь же с помощью собранных мною рабочих готова машина, позволяющая перемножать до двенадцати разрядов ⟨...⟩ А прежде всего я хотел бы закончить свою „Динамику“, в которой, я полагаю, наконец нашел истинные законы материальной природы ⟨...⟩ Мои друзья, которые знают о построенной мною высшей геометрии, настаивают на издании моей „Науки о бесконечном“, содержащей основы моего нового анализа. К этому надо добавить новую „Характеристику положения“, над которой я работаю, и еще значительно более общие вещи относительно искусства открытия. Но все эти работы, за вычетом исторических, идут украдкой. Вы ведь знаете, что при дворе ищут и ожидают совсем иного! Поэтому время от времени мне приходится заниматься вопросами международного права и прав имперских князей, особенно моего господина ⟨...⟩ Тем временем мне часто приходится обсуждать религиозные разногласия ⟨...⟩ И я все же стараюсь привести в порядок мои юридические размышления». В 1697 г.: «Если вы все это взвесите, ⟨...⟩ то пожелаете мне иметь помощников, молодых людей или друзей, ученых проницательных и прилежных, которые хотели бы меня поддержать. Ибо я многое могу дать, но не все из того, что я вижу, я могу завершить, и я охотно передал бы это другим, если бы это дало им самим прославиться, лишь бы это послужило общему делу, благу человеческого рода и тем самым славе Божьей». В письме И. Бернулли от 1697 г.: «ежедневные размышления на темы не только математики но и физики, и самой глубокой философии, истории и права, размышления, которые я записываю самым кратким образом, чтобы не дать им пропасть ⟨...⟩ Добавьте к этому мои идеи о построении естественного права ⟨...⟩; но прежде всего я занят новым анализом для рассуждений всякого рода ⟨...⟩ Предоставляю вам самому решать, много ли у меня времени для основательных занятий геометрией». О математике он часто думал в экипаже (из письма И.Бернулли мы узнаем, что так он придумал правило дифференцирования интеграла по параметру в 1697 г.). Идеи переполняют ученого; он увлечен замыслом создания «геометрии положения». «Я не решаюсь еще опубликовать мои проекты характеристики положения, ибо если я не придам ей убедительность, приведя сколько-нибудь существенные примеры, то ее примут за фантазию. Тем не менее я предвижу, что дело не может не удаться» (письмо Лопиталю, 1694 г.). Разумеется, ничего не было опубликовано, а великий замысел пытался разгадать Эйлер. Когда в XIX веке создавалась дифференциальная геометрия, а затем топология, каждый раз думали, что это и есть осуществление проекта Лейбница.

Последние годы жизни Лейбница были омрачены полемикой с Ньютоном о приоритете. Постепенно спор перерос в обвинение Лейбница в плагиате. Намекали на то, что он, возможно, познакомился с рукописями Ньютона в Лондоне. Сегодня независимость открытия Лейбница представляется доказанной. В Лондоне не было достаточно подробного текста, в первый приезд Лейбниц не был готов воспринять теорию Ньютона, не было никого, кто понимал исчисление настолько, чтобы передать его Лейбницу; ко второму визиту в Лондон Лейбниц уже владел своим исчислением. Вначале полемика проходила без участия Ньютона и Лейбница. Удивительно, что Ньютон, который всегда уходил от приоритетных споров, да и мало заботился о сохранении приоритета, на этот раз энергично включился в полемику. Вероятно, Лейбниц очень задел его, ни разу не признав в нем творца нового исчисления (теперь уже появились публикации). В Англии организовали подлинную травлю Лейбница. Была создана специальная комиссия, был подготовлен сборник материалов. В 1714 г. Лейбниц пытается написать свою «Историю и происхождение дифференциального исчисления», но он не смог противостоять английскому давлению.

Все осложнилось еще из-за того, что в 1714 г. герцог становится королем Англии Георгом I. Лейбниц рассчитывает переехать в Лондон, стать королевским историографом, но ему в оскорбительной форме отказывают даже в поездке на коронацию (заставляя завершать «Историю»). Сыграло свою роль и то, что король не хотел иметь в своей свите поверженного противника Ньютона, ставшего всеанглийской знаменитостью. Умер Лейбниц в 1716 г. Его скромно похоронили под плитой с краткой надписью «Прах Лейбница».

Когда-то Лейбниц писал Петру I: «Хотя мне часто приходилось действовать на политическом и юридическом поприщах, и знатные князья иногда в этих вопросах пользуются моими советами, я все-таки предпочитал науки и искусства, так как они постоянно содействуют славе Господней и благосостоянию всего рода человеческого ⟨...⟩ науки и ремесла составляют настоящее сокровище человеческого рода, ибо посредством их искусство превозмогает природу и цивилизованные народы отличаются от варварских. Поэтому я с малолетства любил науки, занимался ими и имел счастье ⟨...⟩ сделать разные и очень важные открытия, восхваленные в печати беспристрастными и знаменитыми людьми. Я не находил только могущественного государя, который достаточно интересовался бы этим».

По-видимому, с годами приоритеты Лейбница сместились: он долго отдавал предпочтение политике перед наукой, но жизнь жестоко научила его, как неблагодарно положение ученого во дворцах.

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

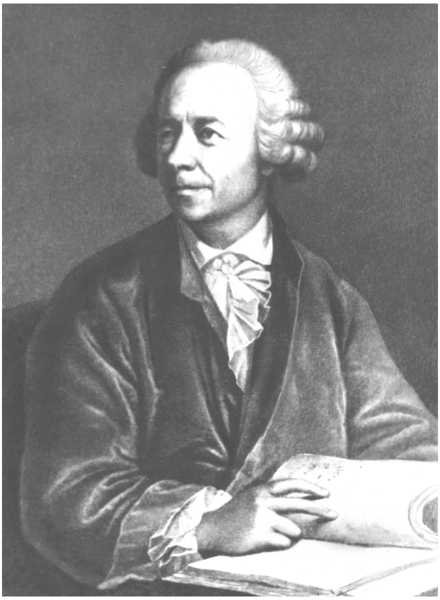
Итак, Эйлер перестал вычислять и жить.
Кондорсе

В начале 1783 г. директором Петербургской Академии наук была назначена княгиня Екатерина Романовна Дашкова, которая за 20 лет до того была ближайшей сподвижницей Екатерины II в дни ее воцарения на российском троне. Известная своей изобретательностью княгиня придумывает безошибочный ход, который должен убедить академиков в ее приверженности науке. Она уговаривает сопровождать ее при первом посещении Академии престарелого Эйлера, который давно был не в ладах с академическим начальством и не посещал академических конференций. Слепой Эйлер появляется в сопровождении сына и внука. Дашкова вспоминала впоследствии: «Я сказала им, что просила Эйлера ввести меня в заседание, так как, несмотря на собственное невежество, считаю, что подобным поступком самым торжественным образом свидетельствую о своем уважении к науке и просвещению».

А всего через несколько месяцев в протоколах Академии было записано: «В заседании конференции 11 сентября 1783 г. академик Н. И. Фусс взял на себя обязанности секретаря[1], отсутствующего из-за кончины его знаменитого отца, г. Леонарда Эйлера, который умер от апоплексического удара 7 сентября в 11 часов вечера, в возрасте 76 лет, 5 месяцев и 3 дней, совершившего свой долгий и блестящий путь и сделавшего свое бессмертное имя известным всей Европе». Предвестник несчастья в виде лег-

[1]Им был Иоганн-Альбрехт, старший сын Л. Эйлера.

кого головокружения появился в начале сентября, когда Эйлер вычислял скорость поднятия аэростата. В день смерти он обсуждал с астрономом А. И. Лекселем результаты вычислений орбиты Урана, недавно открытого Гершелем.



Леонард Эйлер

Исключительность личности Эйлера, его беспрецедентная роль в истории Академии заставили искать нестандартные способы почтить его память. 23 октября академик Н. И. Фусс, ученик Эйлера и муж его внучки, произнес «Похвальное слово». Академики решили на свои средства изготовить бюст «бессмертного Эйлера, равно достойного восхищения своим гением и своими достоинствами», а их «прославленный начальник» (Дашкова) «прибавила к этому великолепную колонну, которая служит основанием этому бюсту»; вначале бюст установили в библиотеке, а затем — напротив кресла президента в зале заседаний (а в библиотеке осталась картина «Силуэты группы академиков Математического класса, занятых установкой бюста покойного Л. Эйлера»). В больших подробностях (включая качество бумаги) обсуждались вопросы, связанные с изданием трудов покойного.

Слухи о почестях ученому распространились далеко за пределы России. Непременный секретарь Французской Академии наук маркиз Кондорсе (менее чем через 10 лет он примет участие в революции и его имя вычеркнут из списков Петербургской Академии за «достойное порицания поведение ⟨...⟩ против суверена») сказал в своем «Похвальном слове»: «Итак, народ, который мы в начале этого века принимали за варваров, в настоящем случае подает пример цивилизованной Европе — как чествовать великих людей при жизни и уважать их память по смерти: и другим нациям приходится в данном случае краснеть, что они не только в этом отношении не могли предупредить Россию, но даже не в силах ей подражать». Хотя из далекого Парижа обстановка в Петербурге казалась более благополучной, чем была на самом деле, отношение к науке за 60 лет существования Петербургской Академии стало неузнаваемым.

Первые годы Академии. Петр I думал об организации Академии в России еще в последние годы XVII века. Начиная с 1711 г. он трижды обсуждал свои планы с Лейбницем и даже зачислил последнего на русскую службу. Лейбниц, великий фантазер, мечтавший о распространении академий по миру, впервые встретил государя, с таким энтузиазмом откликнувшегося на его идею. Лейбниц не считал отсутствие наук в России препятствием к созданию Академии и даже находил в этом некоторые преимущества. Однако мало кто в России разделял этот оптимизм. Один из самых образованных сподвижников Петра В. Н. Татищев говорил ему, что «учить некого, ибо без нижних школ академия оная с великим расходом будет бесполезна». Петр отвечал: «Я имею жать скирды великие, а мельницы нет», а потому он решил вначале построить «водяную мельницу», хотя «воды довольно в близости нет, а есть воды довольно в отдалении», не надеясь успеть «делать канал», но в надежде, что мельница «наследников моих лучше понудит воду привести». Трудности на пути проекта были многочисленны, но в 1724 г. Сенат принял решение о создании Академии наук. В это время даже слово «наука» еще не существовало в русском языке и Академию назвали «де сиянс Академия».

В 1725 г. Петр умер, так и не дождавшись открытия Академии. Наступает черед наследников «принять участие в строительстве мельницы». Екатерина I не без колебаний осуществила замысел мужа, хотя и не разделяла его интереса к науке (как пишет современник, «похвальные речи ученых были непонятны Ее Величеству»). Судьба Академии все время висела на волоске. Она воспринималась как явление исключительно немецкое, и русская партия, в частности Меншиков, была настроена против нее. Публика плохо понимала функции Академии, и академики по мере сил демонстрировали свои достоинства. Дневник Петербурга, публиковавшийся в «Санкт-Петербургских ведомостях», сохранил запись о публичном чтении, устроенном академией по случаю коронации Петра II (1727 г.), когда академики Делиль и Бернулли дискутировали о вращении Земли вокруг Солнца, академик Байер произнес «похвальную оду латинскими стихами», а «в то же время для народа, гулявшего всю ночь на Царицыном лугу, были пущены фонтаны белого и красного вина». Академики пытались наладить контакты с русской публикой, два раза в неделю двери Академии открывались для посетителей. Иногда там можно было увидеть нечто удивительное. 24 февраля 1729 г. «профессор Лейтман умудрился изменить изображение государственного герба (с помощью призм) в портрет царствующего императора». Академики несколько утвердили себя успехами в организации «потешных огней» и иллюминаций, в сочинении торжественных од, в составлении гороскопов. Высокие материи не были в чести, разве что при составлении «ландкарт» да некоторых рекомендаций мореплавателям. В уставе 1747 г. будет записано: «Государству не может быть инако яко к пользе и славе, ежели будут такие в нем люди, которые знают течение тел небесных и времени, мореплавание, географию всего света и своего государства». А пока умирает в 1730 г. Петр II; Анна Иоанновна лишь однажды посещает Академию, а затем упоминания об Академии надолго исчезают из дневника Петербурга.

Академиков стали собирать в «социетет наук» еще при Петре I. Постепенно становилось ясно, что первоклассный состав набрать не удается: именитые ученые считали поездку в Россию мероприятием сомнительным и даже рискованным. Лейбница тогда уже не было в живых, а его ближайший последователь Христиан Вольф отказался принять пост президента. Первым президентом стал лейб-медик Блюментрост. Попробовали вместо именитых ученых приглашать их детей (в надежде, что способности к науке передаются по наследству, да и славное имя украсит академические списки). Так, приглашение знаменитому

Иоганну Бернулли (1667–1748) было переадресовано его сыну. В многоступенчатой переписке долго было неясно, относится ли приглашение к старшему сыну Николаю (1695–1726) или среднему — Даниилу (1700–1782). В конечном счете поехали оба: Николай, прежде бывший профессором римского права, стал профессором математики (с окладом 1000 руб. в год), а Даниил — профессором физиологии (с окладом 800 руб.). Отец напутствовал сыновей словами: «Лучше несколько потерпеть от сурового климата страны льдов, в которой приветствуют муз, чем умереть от голода в стране с умеренным климатом, в которой муз презирают и обижают». Мог ли он думать тогда, что не пройдет и года, как его старшего сына не станет!

Эйлер в Петербурге. С завистью провожал братьев Бернулли в 1726 г. ученик их отца Леонард Эйлер: «У меня явилось неописуемое желание отправиться вместе с ними $\langle\ldots\rangle$ Дело, однако, не могло так скоро осуществиться, а между тем названные молодые Бернулли крепко пообещали мне по прибытии своем в Петербург похлопотать о пристойном для меня месте».

Леонард Эйлер родился 4 (15) апреля 1707 г. в Базеле, в Швейцарии. Его отец, Пауль Эйлер, был сельским пастором. В молодости он успешно занимался математикой под руководством Якоба Бернулли (1654–1705), старшего брата Иоганна. Первые уроки Леонард получил от отца, последние классы гимназии он проходил в Базеле и одновременно посещал лекции по математике в университете, где преподавал И. Бернулли. Вскоре Эйлер самостоятельно изучает первоисточники, а по субботам И. Бернулли беседует с талантливым студентом, обсуждает неясные места. Леонард дружит с его сыновьями, особенно с Даниилом.

В 1723 г. Леонард получил степень магистра искусств; на испытании он произнес на латыни речь о сравнении философии Декарта и Ньютона. Пауль Эйлер считал, что сын должен повторить его карьеру, и Леонард покорно изучал богословие. И отец, и сын отчетливо понимали, что научная карьера бесперспективна. Хотя она и не была особенно престижной (в те годы в Швейцарии любили говорить: пусть учатся немцы, а у швейцарцев есть дела поважнее), число претендентов на профессорские места сильно превышало количество вакансий.

В 1727 г. Эйлер предпринял попытку занять кафедру физики в Базеле, заранее обреченную на неудачу. Тем временем он успешно участвует в конкурсе Французской Академии наук на наилучший способ расположения мачт на корабле. Примечательно, что «в гористой Швейцарии, из которой до того времени Эйлер никуда не выезжал, он, конечно, имел случай видеть корабль не иначе, как на картинках» (А. Н. Крылов). Это был первый, но не последний контакт Эйлера с морской наукой.

Даниил Бернулли выполнил обещание, данное при отъезде в Петербург: еще до попытки Эйлера устроиться в Базеле он узнал о возможности получить место адъюнкта по физиологии с окладом 200 рублей. Бернулли торопит, рекомендует ехать «еще этою зимою». Эйлера не смутило, что ему предстоит заниматься медициной. В те годы медицина не воспринималась как наука, далекая от математики. За примерами идти недалеко: его учитель И. Бернулли чередовал занятия математикой с медицинской практикой (как, впрочем, и с преподаванием греческого языка). Эйлер приступает к изучению анатомии и физиологии; позднее он удивлял окружающих медицинскими познаниями. Отъезд не удался столь быстро, как хотелось Д. Бернулли, но весной 1727 г. Эйлер получил «на проезд денег сто тридцать рублей векселем» и уехал в Россию. В Петербург он прибыл в день смерти Екатерины I.

Как и Д. Бернулли, Эйлер предпочитает в рамках занятий физиологией изучать гидродинамические проблемы кровообращения. Надо сказать, что эти проблемы в значительной мере стимулировали создание гидродинамики. В свои первые петербургские годы Эйлер вряд ли думал, что его жизнь так прочно будет связана с Академией. Само дальнейшее существование Академии казалось тогда крайне проблематичным. Потом Н. И. Фусс напишет: «Эйлер был украшением и славой нашей Академии в продолжение пятидесяти лет. На его глазах она начинала свое существование, несколько раз погибала и воскресала». Очень неуютно чувствовал себя Эйлер, когда гибель Академии представлялась ему реальностью. В один из самых тяжелых моментов, когда после кончины Петра II в 1730 г. началось массовое бегство академиков из России, отчаявшийся Эйлер ведет переговоры о поступлении на морскую службу. Но это не потребовалось. Напротив, освободившаяся вакансия позволила Эйлеру занять место профессора (академика) по кафедре физики (правда, с сравнительно невысоким окладом в 400 рублей). А через два года Д. Бернулли покинул Россию, и Эйлер занял его кафедру математики (хотя его оклад — 600 руб. — лишь половина оклада, который получал на этом месте Бернулли).

За эти годы Эйлер стал в Академии заметной фигурой. Большинство академиков не слишком ревностно относились к своим обязанностям, которые к тому же еще и не были четко определены. Эйлер не пренебрегал никакими поручениями: он постоянно делает доклады на академических конференциях, иногда занимая два, а то и три заседания подряд, читает публичные лекции, пишет учебник по арифметике для академической гимназии и научно-популярные статьи для «Примечаний» к «Санкт-Петербургским ведомостям», он в комиссиях по исследованию пожарного насоса, весов, «пильной машины» и магнитов, принимает разнообразные экзамены. Эйлер подробно вникает в многочисленные технические проекты. Забегая вперед, можно вспомнить исследования Эйлера по гидравлическим турбинам и заключения по проектам мостов через Неву, в том числе об одноарочном деревянном мосте И. П. Кулибина, работавшего в Академии механиком. Эйлер постоянно проявлял заботу об изобретателе. В их взаимоотношениях остался неясный момент. И. П. Кулибин 40 лет занимался созданием вечного двигателя («самодвижущихся машин»), и он утверждал, что Эйлер не отвергал возможности создания такой машины («может де быть в свое время какому щастливому сделать такую машину и откроется»). С другой стороны, имеются и противоположные свидетельства. Надо сказать, что рассмотрение проектов вечных двигателей было постоянным занятием петербургских академиков. Напомним, что в 1775 г. Парижская академия отказалась рассматривать проекты вечных двигателей.

Начиная с 1733 г. Эйлер участвует в «экзамене» карт, и постепенно участие в картографической деятельности выходит среди его академических обязанностей на первый план. Встает вопрос о составлении генеральной карты России на основе уже составленных губернских карт, и Эйлер предлагает свой проект, сопровождая его словами: «Я уверен, что география российская через мои и г-на профессора Гензиуса труды приведена гораздо в исправнейшее состояние, нежели география немецкой земли». Острые разногласия с академиком Делилем привели Эйлера в 1740 г. к решению прекратить занятия картографией. Вероятно, состояние здоровья ученого тоже сыграло свою роль в принятии этого решения. 21 августа он писал академику Гольдбаху: «География мне гибельна. Вы знаете, что я за нее поплатился глазом, а теперь опять нахожусь в подобной опасности; когда мне сегодня утром послали часть карт на просмотр, то я тотчас же почувствовал новый припадок, потому что эта работа, требуя всегда рассмотрения одновременно большого пространства, сильнее утомляет зрение, чем простое чтение или одно писание». Эйлер потерял правый глаз в 1735 г., когда выполнил в три дня правительственное задание, на которое академики требовали несколько месяцев. Нет полной ясности, относилось ли это задание к картографии (так можно понять Эйлера) или к астрономическим вычислениям (так пишет Кондорсе).

На 1740 г. приходится еще один случай, когда Эйлер уклонился от данного ему поручения (других примеров не известно): он переадресовал придворному астроному составление гороскопа «Ивану-царевичу», будущему недолговечному императору Иоанну Антоновичу; впрочем, А. С. Пушкин сообщает иную версию этой истории: «Когда родился Иоанн Антонович, то императрица Анна Иоанновна послала к Эйлеру приказание составить гороскоп новорожденному. Эйлер сначала отказывался, но принужден был повиноваться. Он занялся гороскопом вместе с другим академиком. Они составили его по всем правилам астрологии, как добросовестные немцы, хотя и не верили ей. Заключение, выведенное ими, испугало обоих математиков — и они послали императрице другой гороскоп, в котором предсказывали новорожденному всякие благополучия. Эйлер сохранил однако ж первый и показывал его графу К. Г. Разумовскому, когда судьба несчастного Иоанна Антоновича совершилась».

Не перестаешь удивляться, что все эти многочисленные обязанности оставляли Эйлеру время для его главного дела — для занятий математикой. Именно в эти годы он сложился как великий ученый. Критически переосмыслив труды Лейбница и Ньютона по математическому анализу и механике и работы Ферма по теории чисел, он нашел свой собственный путь в науке. Почти все его книги и статьи были опубликованы позднее, но главное в научной судьбе Эйлера решилось в его первое петербургское десятилетие. Только фантастическая работоспособность и поразительная целеустремленность позволили Эйлеру совместить малозаметные миру занятия математикой с повседневными академическими заботами. Позднее он писал, что для молодого ученого необходимо, чтобы его специальность «была у него главным предметом, и он не $\langle\ldots\rangle$ отрывался от нее никакими другими занятиями». По мнению Эйлера, он имел такую возможность в Петербурге: «Такому вожделенному случаю не только доктор Гмелин обязан всем, что сделало известным его имя, но и я, и все прочие, имевшие счастье состоять некоторое время при Русской Императорской Академии. Должен сознаться, сколько мы обязаны благоприятным обстоятельствам, в которых только что находились. Что собственно до меня касается, то, в случае неимения такого превосходного случая, я бы вынужден был главнейше прилежать к другим наукам, от которых, по всем признакам, я бы отупел только. Его королевское величество (Фридрих II — С. Г.) недавно меня спрашивал, где я изучил то, что знаю. Я согласно истине ответил, что всем обязан моему пребыванию в Петербургской академии Наук».

В 1733 г. Эйлер женился на Екатерине Гзель, дочери академического живописца родом из Швейцарии, вывезенного Петром I из Голландии. Из тринадцати их детей выжили три сына и две дочери. Для благочестивого сына сельского пастора семья была крепостью, в которой он мог уберечься от вольных нравов северной столицы. Размеренная семейная жизнь, маленькие радости были необходимы Эйлеру для спокойной работы. Никакие научные занятия не могли быть для него поводом пренебречь семейными обязанностями. Например, он никогда не был безразличным к финансовым проблемам (ему приписываются слова «Где больше дадут, туда и служить пойду»).

1740 год был, возможно, самым тяжелым годом в жизни Эйлера. С одной стороны, все признаки благополучия: его академический оклад достиг максимума — 1200 руб. (столько получал Д. Бернулли); он успел многое понять в жизни русского общества и, в частности, в тонкостях академических взаимоотношений. Ему оказывал «честь своим особливым расположением» фельдмаршал Миних; Эйлер ладил даже со всемогущим управителем академии Шумахером, что удавалось немногим академикам. (Возможность спокойно заниматься наукой была для Эйлера важнейшим делом, да и вообще он всю жизнь избегал конфликтов. Можно вспомнить многолетние добрые отношения с И. Бернулли, который постоянно ссорился не только с учениками, но и с братом Якобом и сыном Даниилом.) С другой стороны, великий ученый, только приближавшийся к тридцатитрехлетнему рубежу, успел из-за постоянных перегрузок основательно подорвать свое здоровье. В 1740 г. он оказался в тяжелой депрессии, что было связано не только со здоровьем, но и с постоянным напряжением из-за неустойчивости политической жизни в России. У Эйлера хватило выдержки пережить десятилетие бироновщины, но предстоявшее после смерти Анны Иоанновны новое регентство испугало его. Он вспоминал, что «предвиделось нечто опасно», и «после кончины достославной императрицы Анны — при последовавшем тогда регентстве — дела стали идти плохо». К тому времени появляется возможность переехать в Берлин к Фридриху II, и Эйлер подает прошение об отставке: «Того ради нахожусь принужден, как ради слабого здоровья, так и других обстоятельств, искать приятнейшего климата и принять от его королевского величества прусского учиненное мне призывание. Того ради прошу императорскую академию наук всеподданейше меня милостиво уволить и снабдить для моего и домашних моих проезду потребным пашпортом». Он обещает сохранить контакты с Академией, «а пришедши в лутчее здоровье, из немецкой земли опять в Россию возвратиться». Впрочем, в Пруссию Эйлер писал, что «твердо решился жить под славным правлением» Фридриха. 29 мая 1741 г. Эйлер увольняется со службы, а позднее удовлетворяется его просьба «почетным членом Академии наук учинить, с определением пенсии по двести рублев в год». Такая практика перевода уезжающих членов Академии в почетные с обязательством оказывать помощь Академии была обычной. С Эйлера берется обещание «через всегдашнюю корреспонденцию и другими математическими пиесами более того служить, нежели как он в действительной академической службе был».

На службе у «коронованного философа». Итак, Эйлер в Берлине. Фридриха II нет в городе. От покровительства наукам его постоянно отвлекает война: по его собственным словам, ему постоянно приходилось воевать с «тремя блудницами» (Марией-Терезией, Елизаветой, маркизой Помпадур). С года на год откладывается открытие Берлинской Академии наук (ее откроют в 1744 г.). А пока король присылает своему новому геометру ласковое письмо из лагеря Рейхенбаха. Эйлеру оказывают знаки внимания, его приглашают на придворный бал. Королеву-мать удивляют односложные ответы ученого на ее вопросы: «Однако отчего это Вы совсем не желаете со мной говорить?» Последовал ответ: «Государыня, простите, я отвык: я приехал из страны, где кто разговаривает, того вешают» (рассказ Кондорсе). Постепенно Эйлер втягивается в берлинскую жизнь. Поручений здесь не меньше, чем в Петербурге: он рекомендует королю книги по баллистике и сам печатает три тома работ на эту тему, обследует нивелировку канала между Гавелем и Одером и состояние дел в солеварнях у Шенебека, участвует в организации государственных лотерей и реформе вдовьих касс, дает отзывы на множество проектов. Все быстро поняли, что он может хорошо делать разнообразные дела и ни от чего не отказывается. После организации Берлинской Академии наук (1744 г.) Эйлер — директор ее математического департамента.

Однако отношения с королем сложились не самым лучшим образом. Показательно, что оклад Эйлера составлял половину оклада президента Академии Мопертюи. Эйлер редко удостаивался монаршей похвалы. Вот один из немногих случаев. Эйлер много занимался конкретными задачами оптики и в 1759 г. сконструировал для Фридриха очки, пришедшиеся ему впору; вот как сформулирована похвала: «Я не могу не похвалить Вашего старания извлечь пользу для людей из тех научных занятий, которые наполняют Ваше время. Мои дела не позволяют в настоящее время уделить должное внимание Вашим трудам, но я сделаю это при первой возможности». Эйлер пытается заинтересовать короля дифференциальным исчислением, но безуспешно. А еще Эйлер в 1747 г. «несвоевременно» опубликовал трактат против свободомыслия, что было при прусском дворе немодно. В этот момент ученый почувствовал себя неуютно: «Я замечаю, что наклонность к изящной литературе начинает здесь брать верх над математикою, так что у меня является опасение, чтобы моя личность скоро не сделалась здесь лишнею». Эйлер думает о переезде в Лондон.

В Берлине считали, что в обязанности ученых входит служить украшением гостиных, радовать приятной беседой. Французские ученые Мопертюи и Даржан блестяще владели этим искусством, а Эйлер — нет. Даржан пишет Фридриху об одном из своих коллег: «Между его стилем беседы и манерой Эйлера такая же разница, как между сочинениями Горация и трудами ученейшего и педантичнейшего Вольфа». В 1746 г. с Эйлером познакомился брат Фридриха Август-Вильгельм, он делится с королем своими впечатлениями: «Г-н Мопертюи познакомил меня с математиком Эйлером. Я нашел, что в нем подтверждается та истина, что все вещи несовершенны. Благодаря прилежанию он развил в себе логическое мышление и приобрел тем самым имя, но его внешность и неловкая манера выражаться затемняют все его прекрасные качества и мешают получить от них удовольствие». Фридрих отвечает: «Милейший брат! Я уже думал, что беседа с г-ном Эйлером не доставит тебе особого удовольствия. Его эпиграммы состоят в вычислении новых кривых, каких-либо конических сечений или астрономических измерений. Среди ученых бывают такие сильные вычислители, комментаторы, переводчики и компиляторы, которые полезны в республике наук, но в остальном отнюдь не блещут. Их употребляют подобно дорическим колоннам в архитектуре. Они принадлежат нижнему этажу как опоры всего здания и коринфских колонн, являющихся его украшением». Красноречивое свидетельство взглядов просвещенного монарха на науку и ученых!

Эйлер делил свое время между наукой и домом, но он не принадлежал к категории ученых, не интересовавшихся внешними событиями и избегавших общения с людьми. Его научные познания были энциклопедичны, он много знал по ботанике, химии, анатомии, медицине, хорошо знал языки древние и восточные, владел русским языком. После его смерти вспоминали, что он хорошо знал «лучших писателей древнего мира», «древнюю литературу по математике», «историю всех времен и народов». Н. И. Фусс писал в своих воспоминаниях, что Эйлер знал наизусть «Энеиду», причем помнил, каким стихом начинается и каким кончается каждая страница его экземпляра. Возможно, это было не то, что ценилось при прусском дворе, да и посмертные оценки всегда добры.

С некоторых пор Эйлер становится героем анекдотов, сочиняемых королем: «Некий геометр, потерявший при вычислениях глаз, вздумал сочинить менуэт с помощью a плюс b. Если бы его исполнили перед Аполлоном, то геометр рисковал бы тем, что с него, подобно Марсию, содрали бы кожу». Возможно, здесь содержится намек на трактат Эйлера по математической теории музыки. Королю стало известно, что Эйлер в театре не прекращает своих вычислений, — и ученый становится героем новой эпиграммы. Кстати, Эйлер не ценил театра, он лишь с огромным удовольствием посещал театр марионеток.

Эйлер, прочно завоевавший репутацию одного из крупнейших, а может быть, крупнейшего математика Европы, в окружении Фридриха был обречен оставаться человеком второго сорта. Эйлер одно время выполнял функции президента Академии, и после ухода Мопертюи он рассчитывал занять этот пост. Но король прочил в президенты Даламбера, замечательного математика, который был десятью годами моложе Эйлера. Отказ Даламбера не решил вопрос в пользу Эйлера. «Французская опасность» была одной из причин, заставлявших Эйлера думать об отъезде из Берлина.

Тем временем в России с воцарением Елизаветы отношение к Академии изменилось к лучшему. После долгого перерыва в дневнике Петербурга за 1742 г. появляется запись: «Затишье в столице разнообразилось немногими зрелищами да учеными собраниями в Академии наук. В библиотечном зале ее с 17 февраля начались для публики, по два раза в неделю с 10 до 12 часов, физические лекции Крафта, и число посетителей этих бесед, вошедших в моду, оказывалось значительным. Там же открыты рисовальные классы с натуры». Президентом академии назначается 18-летний Кирилл Разумовский, брат фаворита императрицы. Перед этим будущий президент для порядка два года провел в разнообразных университетских городах и обзавелся дипломами. Контакты Эйлера с Академией не прерывались. Никто из почетных академиков так добросовестно не относился к своим обязанностям. За 25 лет пребывания в Берлине Эйлер опубликовал в изданиях Петербургской Академии 109 статей (за то же время в Берлине опубликовано 127). Он оказывает Российской Академии разнообразные услуги: заботится о пополнении библиотеки, подбирает темы для конкурсов на академические премии, ищет кандидатов на вакантные академические должности, занимается приобретением «волшебных» фонарей и фейерверков для придворных празднеств (эта обязанность все еще лежала на академии как одна из важнейших). Поражает интенсивность переписки Эйлера с русскими академиками, но прежде всего с правителем академии Шумахером.

В начале 50-х годов Эйлер устраивает в своем доме пансион для своих учеников. Он совмещает занятия с ними с обучением старшего сына Иоганна-Альбрехта, а кроме того, доходы от этого немаловажны для напряженного семейного бюджета. Одними из первых приезжают воспитанники академического университета С. К. Котельников и С. Я. Румовский, будущие академики (третий ученик Сафронов был через год отослан на родину, поскольку «так предан пьянству, что едва может быть от этого удержан»). Эйлер постоянно озабочен финансовыми проблемами. Он старается, чтобы его семья ни в чем не нуждалась. В 1753 г. Эйлер приобретает имение в Шарлоттенбурге с красивым домом, садом, большим количеством пахотной земли, 6 лошадьми и 10 коровами. В Швейцарии умер его отец, мать переехала к сыну. Эйлер выехал ей навстречу во Франкфурт-на-Майне. Биографов не перестает волновать вопрос, почему он не воспользовался естественным поводом посетить родной Базель: были на это причины сентиментальные или финансовые?

Семилетняя война увеличила житейские трудности. Валюта обесценилась почти вдвое, а жалование не увеличилось. Наступавшие русские войска разрушили имение в Шарлоттенбурге. Однако фельдмаршал Салтыков, узнав имя владельца имения, велит немедленно возместить ущерб; позднее Елизавета добавляет от себя огромную сумму в 4000 рублей. Эти детали свидетельствуют об особом характере взаимоотношений Эйлера с Россией. Он старается не прерывать контактов с Россией даже в военные годы. Это не только научные контакты. Скажем, в 1762 году он просит через Штеттин прислать 3 центнера «русского масла», центнер «хорошего белого меда», «несколько пудов вологодских свечей» и т. д.

После окончания войны (1763 г.) Эйлер все решительнее думает о возвращении в Россию. В 1746 и 1750 гг. он уже получал приглашения через Разумовского, но тогда вежливо отложил принятие решения на неопределенный срок. Эйлер едва не уехал в 1763 г., но неожиданно функции посредника в переговорах с королем взял на себя Даламбер. По-видимому, ему удалось убедить обе стороны, потому что в августе он констатирует в письме к Эйлеру: «Я, наконец, считаю себя счастливым, что сохранил королю и Академии такого человека, как Вы». В другом письме через неделю: «Я совершенно убедил его величество, что в Вас Академия понесет невознаградимую потерю, которая нанесет удар славе короля. Я полагаю еще до моего отъезда поручить его вниманию Ваши интересы». Эйлер отказался от переезда, но через два года разразился скандал: Эйлер вызвал гнев короля, заступившись во время ревизии за академического казначея.

Переговоры о переезде возобновились с новой силой, а воцарившейся на русском троне Екатерине II очень хотелось получить Эйлера в Петербурге. Эйлер сообщает свои условия: оклад в 3000 руб. (такой оклад получал президент, оклад академика обычно не превышал 1200 руб.), место академика по физике для сына Иоганна-Альбрехта, подходящие места для других сыновей — артиллериста и врача, — квартира, свободная от солдатского постоя, и, наконец, учреждение для него поста вице-президента с соответствующим чином. Эйлер не смог стать президентом Берлинской Академии и он хотел хотя бы отчасти реализовать свои честолюбивые планы в Петербурге (на место президента он не претендовал, считая, что в России его должен занимать вельможа). Приятель Эйлера академик Гольдбах (см. о нем ниже) служил в министерстве иностранных дел с высоким чином тайного советника. Видно, и Эйлеру захотелось оказаться на склоне лет генералом. 6 января 1766 г. Екатерина пишет канцлеру графу Воронцову: «Письмо к Вам г. Эйлера доставило мне большое удовольствие, потому что я узнаю из него о желании его снова вступить в мою службу. Конечно, я нахожу его совершенно достойным желаемого звания вице-президента Академии наук, но для этого следует принять некоторые меры, прежде чем я установлю это звание — говорю установлю, так как доныне его не существовало. При настоящем положении дел там нет денег на жалование в 3000 рублей, но для человека с такими достоинствами, как г. Эйлер, я добавлю к академическому жалованию из государственных доходов, что вместе составит требуемые 3000 рублей. У него будет казенная квартира и ни малейшей тени солдат. Хотя в Академии нет свободной кафедры физики с жалованием 1000 рублей для его старшего сына, однако я ему их назначаю, так же как дозволяю свободную практику второму (медику) и дам место, если он пожелает вступить на службу. Третий сын (артиллерист) будет помещен без всякого затруднения ⟨...⟩ Я уверена, что моя Академия возродится из пепла от такого важного приобретения, и заранее поздравляю себя с тем, что возвратила России великого человека». Узнав о желании Эйлера принять участие в перестройке Академии, императрица обещает «не предпринимать до его приезда никаких перемен в Академии, на тот конец, чтобы лучше уговориться с ним об улучшениях». С великим дипломатическим мастерством Эйлеру отказывают в чине: Эйлер может получить лишь чин коллежского советника (гражданский эквивалент полковника), что недостойно великого ученого: «Я дала бы, когда он хочет, чин, если бы не опасалась, что этот чин сравняет его с множеством людей, которые не стоят г. Эйлера. Поистине его известность лучше чина для оказания ему должного уважения». Эйлер, вероятно, быстро понял, что щедрая императрица умеет четко объяснить границы дозволенного, согласился со всеми условиями и решил «кончить дни свои на службе этой несравненной государыни».

Оказалось, что Фридрих не склонен легко расстаться со своим геометром. В частности, он воспользовался возможностью удержать в армии сына ученого. Все же разрешение на отъезд было получено. Вдогонку король в последний раз использует Эйлера как мишень для острот: «Г-н Эйлер, до безумия любящий Большую и Малую Медведицу, приблизился к северу для большего удобства к наблюдению их. Корабль, нагруженный его XX, его KK, потерпел крушение — все пропало, а это жалко, потому что там было чем наполнить шесть фолиантов статей, испещренных от начала до конца цифрами. По всей вероятности, Европа лишится приятной забавы, которая была бы ей доставлена чтением их» (из письма Даламберу). Вскоре Фридрих утешился, заполучив на место Эйлера молодого Лагранжа, поучительно мотивируя целесообразность его переезда в Берлин: «Необходимо, чтобы величайший геометр Европы проживал вблизи величайшего из королей».

Снова в России. Эйлер прибыл в Петербург 17 июля 1766 года. Он отсутствовал ровно 25 лет и приближался к своему шестидесятилетию. Поначалу Эйлер всерьез принял предложение Екатерины принять участие в реорганизации Академии. Он привез с собой подробный проект, причем он не стремился к автономии Академии, а напротив, ориентировался на тесное переплетение деятельности Академии и правительственных учреждений. Однако постепенно выяснилось, что императрица не склонна передоверять Эйлеру руководство Академией. Эйлер получил еще один урок того, что просвещенные монархи любят, чтобы их ученые знали свое место. Как старейшина академиков — декан — он имел немалое влияние на академические дела, но про пост вице-президента никто не вспоминал. А во главе Академии Екатерина поставила (продолжая традиции Елизаветы) младшего брата своего фаворита — графа В. Г. Орлова. Впрочем, возникла небольшая неувязка: пост президента все еще занимал Разумовский, который, будучи командиром Измайловского полка, оказал Екатерине поддержку во время переворота. Его не стали обижать, а для Орлова учредили пост директора академии. Новый директор по-своему неплохо относится к Эйлеру: заботится о здоровье, достает лекарства, но может и подшутить над стариком, выдав себя, «для проверки зрения» ученого, за бедного просителя из Швейцарии. Незадолго до ухода Орлова в 1774 г. произошел конфликт, после которого Эйлер перестал посещать конференции в академии. Однако он продолжал интересоваться ее делами, и академики нередко собирались на заседания в квартире Эйлера.

Эйлер привез с собой в Петербург кипу рукописей, которые не удалось опубликовать в Берлине из-за почти прекратившейся во время войны издательской деятельности. Но еще больше привез он в своей голове почти созревших, но не реализованных замыслов. А жизнь подсказывала ученому, что он должен торопиться. Вскоре после приезда он лишается зрения во втором глазу, но не прекращает работать, диктуя свои сочинения мальчику, не имевшему ни малейшего представления о математике. Приглашенный императрицей окулист барон Вентцель удалил катаракту на одном глазу, но предупредил, что перегрузка неминуемо приведет к возвращению слепоты. Так и случилось вскоре, ибо Эйлер предпочел потерю зрения пассивности. Он пробует привлечь к занятиям других ученых: своего сына, академиков Крафта, Фусса и Лекселя, но больше всего диктует то, что он знал и хотел поведать людям. За полтора десятка лет он продиктовал более 400 статей и 10 больших книг. К слепоте стала присоединяться глухота. В 1766 г. умирает жена, и Эйлер женится на ее сестре (так проще всего было сохранить порядок, принятый в доме). Сгорел дом и большая часть имущества. Ничто не может заставить Эйлера прервать работу. Летом 1777 г. Эйлера посетил Иоганн (III) Бернулли (1747 — 1807), племянник Даниила. Вот его впечатления: «Здоровье его довольно хорошо, и этим он обязан умеренному и правильному образу жизни. Зрением, по большей части утраченным, а одно время вовсе потерянным, он, однако, теперь лучше пользуется, чем многие воображают! Хотя он не может узнать никого в лицо, читать черного на белом и писать пером на бумаге, однако пишет на черном столе свои математические вычисления мелом очень ясно и порядочно в обыкновенную величину. Потом они вписываются в большую книгу одним или другим из его адъюнктов, Фуссом или Головиным (чаще первым из них). И из этих-то материалов составляются под его руководством статьи. Таким образом в протяжение пяти лет, которые прожил г. Фусс в доме Эйлера, приведено к окончанию 120 или 130 статей.».

Эйлер сохранил работоспособность до последних дней. Второй петербургский период продолжался 17 лет. В 1783 г. окончил свои дни сын сельского пастора, ставший величайшим математиком Европы. Похоронили Эйлера на Смоленском кладбище. Надпись на памятнике гласила: «Здесь покоятся бренные останки мудрого, справедливого, знаменитого Леонарда Эйлера». Через 50 лет обнаружилось, что могила утеряна, и лишь случайно (во время похорон невестки ученого) обнаружили «камень, погрузившийся мало-помалу от собственной тяжести в землю и поросший дерном». В Академии почувствовали себя неловко и решили установить новый памятник, «достойный знаменитого геометра». Позднее останки Эйлера были перенесены в некрополь Александро-Невской Лавры, где и сегодня можно увидеть его могилу.

Великое наследие. Научное наследие Эйлера поражает совершенно беспрецедентными размерами. При жизни увидели свет его

530 книг и статей. Последние годы жизни академические издания не справлялись с потоком научной продукции слепого ученого, и он шутливо обещал графу В. Г. Орлову, что его работы будут заполнять «Комментарии» Академии в течение 20 лет после его смерти. Эта оценка оказалась «оптимистической»: Академия занималась изданием трудов Эйлера 47 лет. Число работ дошло до 771, но составленная в 1910 г. Энестремом библиография содержала 886 названий, разбитых по рубрикам: философия, математика, механика, астрономия, физика, география, сельское хозяйство. С 1910 г. Швейцарское общество естествоиспытателей издает собрание сочинений Эйлера, распространяемое по международной подписке: по предварительной оценке оно составит 75 томов большого объема. К началу 80-х годов вышло 72 тома. Восемь дополнительных томов должна составить научная переписка Эйлера.

Такой объем отражает не только поразительную скорость, с которой работал Эйлер, но и привычку систематически печатать научные тексты, в том числе и сравнительно спешно подготовленные. Большой разброс тематики отражает не только широту интересов и умение быстро войти в далекие области науки, но и многочисленные академические обязанности как в Петербурге, так и в Берлине. Некоторые публикации носят характер коротких реплик. Эйлер легко входил в научные контакты, давал разнообразные консультации, охотно думал над случайными, изолированными задачами, сообщаемыми его корреспондентами. Может показаться, что ученый разбрасывался, проявлял всеядность, но это только на первый взгляд. Случайные вопросы и задачи служили питательной почвой для хорошо спланированных размышлений. Эйлер умел своевременно останавливаться в своих раздумьях, если не видел реалистической возможности двигаться вперед. Он умел организовать свою жизнь так, чтобы многочисленные текущие дела не сильно отражались на основном направлении его работы.

Как это ни парадоксально, без большого преувеличения можно сказать, что всю свою жизнь Эйлер занимался почти исключительно математикой. В других областях науки (например, механике или астрономии) успех его был прежде всего связан с применением математических методов. Его философская установка на протяжении всей его жизни состояла в том, что естественнонаучные открытия должны получаться путем теоретической (в значительной степени математической) обработки небольшого числа общих, несомненных принципов. В своей швейцарской диссертации девятнадцатилетний Эйлер писал: «Я не считал необходимым подтвердить эту новую теорию опытом, потому что она полностью выведена из самых надежных и неопровержимых принципов механики и, таким образом, сомнение в том, верна ли она и имеет ли место в практике, просто не может возникнуть». Даже законы Ньютона Эйлер пытался вывести из более общих принципов, а в небесной механике он стремился не получать эмпирические формулы из обработки результатов наблюдений, а делать выводы непосредственно из закона всемирного тяготения. Он всюду стремился двигаться от теории к практике. Хотя Эйлер и был всю жизнь связан с экспериментом, это не было его сильной стороной. С. И. Вавилов писал: «Гений Эйлера был, по существу, математический ⟨...⟩ он плохо чувствовал эксперимент (хотя сам и экспериментировал)»; в другом месте: «Математическому гению Эйлера не хватало физической интуиции Ньютона и Гюйгенса, позволявшей угадывать решение при отсутствии точной математической формулировки задачи или методов ее решения».

Арифметика. Обращаясь к математическому наследию Эйлера, естественно начать с его арифметических работ. Первые публикации Эйлера относятся к 1732 году — пятому году пребывания в Петербурге. У Эйлера было два великих предшественника в арифметике: Диофант и Ферма. Если отвлечься от предыстории, связанной с именем Диофанта (III век), то Пьер Ферма (1601 – 1665) был первым, кто обнаружил, что в арифметике имеются не только удивительные факты про конкретные числа, но и общие утверждения — теоремы. Формулировки значительного числа таких теорем Ферма оставил на полях «Арифметики» Диофанта (как нельзя кстати изданной в 1621 г.), в письмах и заметках. Ферма был одним из крупнейших математиков своего времени, он был в самом центре героической эпопеи создания анализа и аналитической геометрии, поддерживал переписку с ведущими математиками. Знаменательно, что он не смог заинтересовать всерьез арифметическими задачами никого из наиболее серьезных своих корреспондентов. Он нашел заинтересованных собеседников лишь среди математиков калибром ниже, таких как Френикль де Бесси (1605 – 1675). По трудно разгадываемым причинам одни научные теории увлекают всех (например, анализ в XVII веке), другие разрабатываются отдельными учеными, тщетно пытающимися привлечь внимание коллег. Можно вспомнить про проективную геометрию, созданную Ж. Дезаргом (1591 – 1661) и Б. Паскалем (1623 – 1662) — далеко не безвестными учеными, — забытую на полтора века и переоткрытую Г. Монжем (1746 – 1818) и его учениками. В 70-е годы XVII века заметки Ферма были частично собраны и опубликованы, но трудно себе представить судьбу арифметики Ферма, если бы не Эйлер.

П.Л. Чебышев (1821 – 1879) писал в 1849 году: «Эйлером было положено начало всех изысканий, составляющих общую теорию чисел. В этих изысканиях Эйлеру предшествовал Ферма ⟨...⟩ Но изыскания этого геометра не имели непосредственного влияния на развитие науки: его предложения остались без доказательств и без приложений. В этом состоянии открытия Ферма служили только вызовом геометрам на изыскания в теории чисел. Но, несмотря на весь интерес этих изысканий, до Эйлера никто на них не вызывался. И это понятно: эти изыскания требовали не новых приложений приемов, уже известных, или новых развитий приемов, прежде употреблявшихся; эти изыскания требовали создания новых приемов, открытия новых начал, одним словом, основания новой науки. Это сделано было Эйлером».

По-видимому, Эйлер узнал о работах Ферма вскоре после своего приезда в Петербург в 1727 г. от Хр. Гольдбаха (1690 – 1764) и сохранил интерес к теории чисел на всю жизнь. Выдающиеся коллеги Эйлера отнеслись к его увлечению по меньшей мере без понимания. Д. Бернулли (1700 – 1782), который сам был не прочь немного позаниматься арифметическими задачами, в 1778 г. писал

Н. И. Фуссу (1755 – 1826), ученику Эйлера, по поводу арифметических работ его учителя: «Не находите ли Вы, что простым числам оказывают, пожалуй, слишком большую честь, расточая на них столько сил, и не отражает ли это рафинированный вкус нашего века?». Арифметические проблемы Эйлер обсуждает прежде всего с Гольдбахом, математиком очень оригинальным, но все же не относившимся к крупнейшим современникам Эйлера, таким, как Ж. Р. Даламбер (1717 – 1783) или А.К. Клеро (1713 – 1765).

Положение стало иным лишь к концу жизни Эйлера, когда благодаря его работам отношение к теории чисел стало меняться и он имел возможность обсуждать эти проблемы с Лагранжем в письмах 1772 – 73 гг.

Уже в 1729 г. Эйлер узнал от Гольдбаха об утверждении Ферма, что числа $F_n = 2^{2^n} + 1$ являются простыми при всех n. В 1732 году он обнаружил, что это утверждение неверно, а именно, F_5 делится на 641. Наблюдение Эйлера не было результатом перебора: непосредственно искать делители у F_5 было нереалистично даже для такого виртуозного вычислителя, каким был Эйлер. Он вначале обнаруживает, что делители F_n имеют очень специальный вид (если они существуют): $k \cdot 2^{n+2} + 1$, а после этого обнаружить $641 = 5 \cdot 2^7 + 1$ было нетрудно. Удивительно, что первый заход Эйлера на доказательство утверждений Ферма вывел его на единственное ошибочное утверждение. К счастью, это не поколебало доверия и интереса к арифметике Ферма.

Другой класс простых чисел в поле зрения Эйлера — это простые числа Мерсенна $M_p = 2^p - 1$ (p — простое). Делители M_p должны одновременно иметь вид $2pk - 1$ и $8l \pm 1$. Пользуясь этим, Эйлер доказал простоту числа $M_{31} = 2147483647$. С тех пор новых простых чисел Ферма обнаружено не было, а рекорды в мире простых чисел Мерсенна постоянно увеличиваются (рекорд 1983 г.: $p = 86243$; сегодня компьютеры поставляют простые числа Мерсенна с невероятным числом знаков).

В отношении чисел Мерсенна Эйлер заполнил также пробел, остававшийся от Евклида. Евклид знал, что если M_p — простое число, то $M_p(M_p + 1)/2$ — совершенное число (то есть число, равное сумме своих собственных делителей). Эйлер доказал, что каждое четное совершенное число представимо в таком виде (неизвестно до сих пор, существуют ли нечетные совершенные числа). Эйлера интересует, существуют ли многочлены $P(n)$, которые при всех натуральных n принимают простые значения. Он получает отрицательный ответ, но замечает, что значения многочлена $41 - n + n^2$ просты при всех $n \leqslant 40$.

Эйлер снабжает доказательством «малую теорему Ферма», утверждающую, что число $a^{p-1} - 1$, где a — целое, не делящееся на p, а p — простое, делится на p; но, не ограничившись этим, он находит и доказывает ее обобщение на непростой делитель: если a и m взаимно просты, то $a^{\varphi(m)} - 1$ делится на m (здесь $\varphi(m)$ — число натуральных чисел, взаимно простых с m и меньших m; при простом p имеем $\varphi(p) = p - 1$). Обнаружив, что функция натурального аргумента $\varphi(m)$ (ее назовут функцией Эйлера) обладает замечательными свойствами, он тем самым открывает важную главу теории чисел — теорию арифметических функций. Эйлер движется очень логично. Он подмечает, что для некоторых a число $a^k - 1$ делится на p при $k < p - 1$, а для некоторых — нет. В последней ситуации a называют первообразным корнем по модулю p. Эксперимент убеждает Эйлера, что первообразные корни существуют для всех простых p, но доказать этого он не смог (доказательство нашли позднее Лежандр и Гаусс). Эйлер умел доказывать трудные теоремы, но он умел и трезво оценивать свои возможности. Он никогда не концентрировал размышления над одной трудной задачей на годы, а наступал на математические тайны широким фронтом.

Еще одно утверждение, сформулированное Ферма без доказательства, привлекло внимание Эйлера. Речь идет о представимости квадратов n^2 в виде $kp - 1$, где p — простое число. При $p = 3$ таких квадратов не бывает (почему?), а при $p = 5$ имеем $2^2 = 5 - 1$. Ферма утверждал, что для всякого простого p вида $4l + 1$ существует квадрат вида $kp - 1$, а для $p = 4l - 1$ таких квадратов не существует. В 1747 г. Эйлер после нескольких безуспешных попыток доказывает это утверждение Ферма и продолжает движение в естественном направлении: для каких p число $kp + 2$ может быть квадратом и, шире, для каких p при фиксированном a число $kp+a$ может быть квадратом? При $a = 2$ гипотеза состоит в том, что квадраты такого вида существуют при $p = 8l \pm 1$ и не существуют в остальных случаях. Общая гипотеза: квадраты вида $kp + a$ (p — простое) существуют (как говорят, a является квадратичным вычетом по модулю p) или не существуют (a — квадратичный невычет) одновременно для всех простых p из арифметической прогрессии $b+4ak$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Это утверждение позднее получило название «квадратичного законом взаимности». Эйлер смог доказать его, кроме $a = -1$, лишь для $a = 3$. Далее Лагранж и Лежандр рассматривали случаи различных a, пока 19-летний Гаусс не нашел полное доказательство гипотезы Эйлера (в нашей книге оно изложено в главе о Гауссе).

Следующий круг вопросов, унаследованный у Ферма, — это решение уравнений в целых числах. Наиболее знаменитое утверждение Ферма — его «великая теорема»: уравнение $x^n + y^n = z^n$ при натуральном $n > 2$ не имеет решений в целых положительных числах (при $n = 2$ такие решения существуют и называются пифагоровыми тройками). В 1738 году Эйлер находит доказательство «великой теоремы Ферма» для $n = 3, 4$, но он отказался от попыток доказать теорему для бо́льших n, несмотря на немотивированное утверждение Ферма о существовании доказательства для произвольного n. Великая теорема Ферма была доказана Э. Уайлсом в 1995 году.

Однажды Ферма предложил Френиклю и Сен-Мартену построить прямоугольный треугольник с целочисленными сторонами, у которого сумма катетов и гипотенуза — квадраты, то есть решить в целых числах систему уравнений $x+y = u^2$, $\quad x^2+y^2 = v^4$. Ферма заподозрили в том, что он дал «невозможную» задачу. Эйлер исследовал эту систему, замечательную тем, что ее наименьшее решение дается 13-значными числами: 1 061 652 293 520, 4 565 486 027 761.

Эйлер рассматривает уравнение $x^2 - Dy^2 = 1$, $D \neq a^2$, которое он называет уравнением Пелля. Он обнаруживает связь его наименьшего решения с разложением $\sqrt{D}$ в бесконечную цепную дробь. Многочисленные примеры убеждают Эйлера, что получается периодическая цепная дробь, но доказательство этого факта лишь позднее нашел Лагранж.

Ферма утверждал, что всякое простое число вида $4k+1$ может быть представлено в виде суммы двух квадратов, причем единственным образом (простые числа вида $4k+3$, как легко показать, не представляются в виде суммы квадратов). Эйлер устанавливает, что верно и обратное: если представление N в виде суммы квадратов существует и единственно, то N — простое число. Он показывает, что этим свойством иногда можно пользоваться для доказательства простоты N. Например, число 1 000 009 составное, поскольку наряду с представлением $1000^2 + 3^2$ имеется представление $235^2 + 972^2$. Далее, Эйлер показывает, что аналогичным свойством обладают формы $x^2 + 2y^2$, $x^2 + 3y^2$. В виде x^2+2y^2 представляются, причем единственным образом, простые числа вида $8m+1$, $8m+3$, а числа, допускающие неединственное представление, являются составными. Аналогично единственное представление в виде $x^2 + 3y^2$ допускают только простые числа (они имеют вид $6m + 1$). После этого Эйлер переходит к общей задаче: верно ли, что число N допускает единственное представление в виде $x^2 + Dy^2$ (D фиксировано) тогда и только тогда, когда N — простое число. Это утверждение оказалось верным при всех $D \leqslant 10$, но при $D = 11$ удалось предъявить составное число, допускающее единственное представление. Ситуация заинтриговала. Эйлера. Он назвал число D удобным, если в виде $x^2 + Dy^2$ единственным образом представляются лишь простые числа. Эйлер получает критерий, позволяющий проверять удобство чисел, и с любопытством выписывает удобные числа одно за другим; после 10 идут 12, 13, 15, 16, 18, 21, 22, 24... Постепенно удобные числа встречаются все реже. В первой тысяче их набралось 62, но Эйлер упорно продолжает вычисления, вероятно надеясь подметить закономерность. Он обнаружил еще только три удобных числа: 1320, 1365, 1848, хотя, не теряя терпения, он перебрал все числа до 10000 и несколько дальше. Эйлер имел все основания высказать гипотезу, что совокупность удобных чисел ограничивается найденными им 65 числами. Гаусс сделал рассмотрения Эйлера более корректными, но новых удобных чисел не нашел. Сейчас доказана конечность множества удобных чисел, но неизвестно, существуют ли удобные числа, большие 1848. Эта работа очень характерна для творческого метода Эйлера, проделывавшего огромную экспериментальную вычислительную работу как для проверки гипотез, так и с целью увидеть новые закономерности. Из великих математиков этим индуктивным методом в совершенстве владел, пожалуй, только Гаусс.

На этом мы кончим обзор той стороны арифметической деятельности Эйлера, в которой он был последователем Ферма. Он включил утверждения Ферма в далеко продуманную картину мультипликативной (связанной с делимостью) теории чисел, безошибочно увидев практически все ее основные теоремы и проблемы. Доказательство некоторых ключевых утверждений осталось на долю последователей Эйлера. Уже по некоторым примерам можно увидеть особенности научного стиля Эйлера. Перед ним было несколько прекрасных задач, на которых можно было сосредоточиться на годы, если не на всю жизнь, но никакая конкретная проблема не имела для Эйлера приоритета перед воссозданием целостной картины, перед неудержимым желанием двигаться вперед. Он постоянно возвращался к неполучившимся задачам, умело дозируя время, уделяемое той или иной проблеме. Трудность возникавших проблем, сознание, что он вынужден отказаться от получения строгого доказательства, привели Эйлера к формированию способов установления математической истины, отличных от доказательства. Эксперимент выходит на первый план не только при обдумывании задачи или гипотезы: тщательно проведенный числовой эксперимент на большом материале во внутренней системе ценностей Эйлера иногда равнозначен установлению истины. Он говорит о «познанных, но не доказанных истинах» и стремится к тому, чтобы такого рода аргументация получила гражданство в математике. Получение строгого доказательства для Эйлера остается важнейшей целью, но на некоторой стадии он сознательно отказывается от дальнейшего поиска, тщательно прорабатывая эвристические соображения.

Аналитическая теория чисел. Теория чисел обязана Эйлеру идеей, которая вскоре совершенно изменила ее лицо. Речь идет о применении в арифметике математического анализа. Трудно было представить такую возможность. Поначалу она удивила самого Эйлера: «И хотя мы здесь рассматриваем природу целых чисел, к которой Исчисление Бесконечно Малых кажется неприложимым, тем не менее я пришел к своему заключению с помощью дифференцирований и других уловок».

Эйлер для разных s рассматривает сумму бесконечного ряда

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} + \ldots \tag{14}$$

(позднее ее назовут дзета-функцией Римана, и она сыграет в арифметике исключительную роль). Путем нестрогого рассуждения Эйлер доказывает, что эта бесконечная сумма совпадает с бесконечным произведением по простым числам

$$\zeta(s) = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)^{-1}\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)^{-1}\left(1 - \frac{1}{5^s}\right)^{-1}\ldots\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}\ldots. \tag{15}$$

Это рассуждение состоит в следующем: при $s > 0$ множитель $(1-p^{-s})^{-1}$ можно рассматривать как сумму бесконечной геометрической прогрессии $1 + p^{-s} + p^{-2s} + p^{-3s} + \ldots$. Перемножая эти бесконечные суммы по всем простым p и ограничиваясь произведениями слагаемых, в которых при всех p, кроме конечного числа, берется 1, мы приходим к бесконечной сумме (14). Тут надо еще многое добавить, чтобы это рассуждение стало строгим, начиная с придания смысла сумме бесконечного числа слагаемых и произведению бесконечного числа множителей. У Эйлера этого нет. Он чувствует, что эти рассмотрения ведут к исключительно серьезным арифметическим результатам, но сам может предъявить лишь новое доказательство восходящей еще к Евклиду теоремы о бесконечности множества простых чисел. Дело в том, что еще Я. Бернулли знал, что суммы n слагаемых $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ при $n \to \infty$ стремятся к бесконечности, т. е. $\zeta(s)$ стремится к бесконечности при $s \to 1$, чего не может произойти с произведением (15), если число различных p конечно. Может показаться, что гора родила мышь, но чутье не обмануло Эйлера. Это стало ясно, когда Дирихле доказал бесконечность числа простых чисел в арифметической прогрессии с взаимно простыми первым членом и разностью (обобщение теоремы Евклида), отправляясь именно от намеченного доказательства Эйлера (доказательство Евклида не переносится на случай арифметических прогрессий, отличных от натурального ряда).

Эйлер приоткрывает еще одну тайну в мире простых чисел. Его аналитическое чутье, сильно опережавшее технические возможности, подсказывает, что $\sum_{p<x} \frac{1}{p}$ при больших x близка к $\ln \sum_{n<x} \frac{1}{n}$, а это — первый шаг в получении закона распределения простых чисел в натуральном ряду. Эйлер чувствует, что функцию $\zeta(s)$ можно продолжить даже на те значения s, для которых ее нельзя определить как сумму ряда. Более того, он замечает связь между значениями ζ в точках s и $1-s$ (то, что позднее будет сформулировано Риманом в виде знаменитого функционального уравнения). Эйлер исследует значения $\zeta(s)$ в целых точках. Мы расскажем ниже, как он разобрался со случаем четных аргументов, а симметрию между s и $1-s$ он рассчитывал применить к исследованию ζ в нечетных точках. Но он потерпел неудачу, поняв, что в отрицательных четных точках продолженная ζ равна нулю. Отметим, что об арифметической природе значений дзета-функции в нечетных точках стало кое-что известно лишь в самые последние годы: в 1979 году было доказано, что число $\zeta(3)$ иррационально, а летом 2000 года был анонсирован результат, согласно которому среди чисел, являющихся значениями дзета-функции в нечетных точках, содержится бесконечно много различных иррациональных чисел.

Ряды и бесконечные произведения. Бесконечные суммы и бесконечные произведения были любимым объектом Эйлера в анализе. Бесконечными суммами (рядами), в частности, степенными рядами $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + \ldots$, много пользовался Ньютон (например, при исследовании бинома $(1+x)^\alpha$ для нецелых α). Ньютон, не очень акцентируя на этом внимание, имел в виду ряды, у которых сходятся суммы последовательных n слагаемых (как у убывающей геометрической прогрессии). Хотя Эйлер прекрасно понимает, что ряд может не суммироваться, он смело работает с рядами, не заботясь о сходимости: формально перемножает, делит ряды, почленно дифференцирует и т. д. Это предвестие современной работы с формальными рядами в алгебре. Не ограничиваясь формальными действиями, Эйлер хотел приписывать числовые значения расходящимся рядам. Потомки неоднократно осуждали его за в самом деле сомнительные утверждения типа $1 - 3 + 5 - 7 + \ldots = 0$, $\ldots + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} + 1 + n + n^2 + n^3 + \ldots = 0$. А с другой стороны, Эйлер брал частичные суммы гармонического ряда $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ и замечал, что если вычесть $\ln n$, то разность будет стремиться к конечной константе $0{,}577216\ldots$, ныне носящей имя Эйлера. Это — важный пример выявления природы расходимости. Не имея необходимого аппарата, Эйлер почувствовал, что расходящиеся ряды необходимы в математике, а поразительная интуиция страховала его при нестрогих рассуждениях от ошибочных выводов. В то же время его эпигоны, не имевшие столь мощной защиты, допустили немало ошибок и нелепостей.

Эйлер смотрит на бесконечные ряды как на многочлены бесконечной степени и по аналогии формулирует для них правило разложения в бесконечное произведение линейных множителей. Если сумма ряда $1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ равна нулю в точках $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, то она совпадает с бесконечным произведением $\left(1 - \frac{x}{\alpha_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{x}{\alpha_n}\right) \ldots$. Эйлер не дает этому утверждению ни обоснования, ни строгой формулировки, а прямо переходит к примерам. Он исходит из бесконечного ряда

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots;$$

его сумма имеет нули при $\alpha_{\pm k} = \pm\pi k$, откуда делается вывод:

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots.$$

Формально выполняя умножения скобок, собирая коэффициент при x^2 и сравнивая с коэффициентом в ряду слева, получаем

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Это — значение дзета-функции в точке $s = 2$. Полученный ряд исследовал еще Я. Бернулли, но не смог найти его сумму. Эйлер к этому ряду присматривался давно. Он вначале знал его сумму с семью знаками: 1,6449340, а потом вычислил еще восемь знаков. Понимая, что проведенные им выкладки строго не оправданы, Эйлер прежде всего нашел $\pi^2/6$ с семью знаками и сравнил с известным ему ответом. Получилось совпадение! Это происходило в 1735 г. Сравнивая коэффициенты при дальнейших степенях в ряду и произведении, Эйлер без труда находит $\zeta(4) = \pi^4/90$, $\zeta(6) = \pi^6/42 \cdot 6!$. Он понимает, что $\zeta(2n) = c_n\pi^{2n}$ и интересуется природой коэффициентов c_{2n}. Для них он получает рекуррентные формулы, достаточные для вычислений, но это не удовлетворяет Эйлера.

Почти в то же время Эйлера волновала другая числовая последовательность, возникшая из совершенно другой задачи. Он хотел применить интегралы к оценке сумм большого числа слагаемых $S(n) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$. Получилась формула (теперь ее называют формулой Эйлера – Маклорена):

$$S(n) = \int_0^n f(x)\,dx + \frac{f(n)}{2} + \frac{f'(n)}{12} - \frac{f''(n)}{720} + \frac{f'''(n)}{30240} + \ldots,$$

и далее при следующих производных — загадочные коэффициенты, которые Эйлер умел вычислять, но не знал простой закономерности для них. Каково же было удивление Эйлера, когда обнаружилось, что коэффициенты в его формуле равны $(-1)^{n-1}c_n/2^{2n-1}$. Только величайшим математикам природа дарит такие удивительные совпадения! Ведь прямой связи между задачами нет. А потом Эйлер вспомнил о замечательной числовой последовательности B_n, возникшей у Я. Бернулли при вычислении суммы k-х степеней первых n натуральных чисел (B_n сейчас называют числами Бернулли), и оказалось, что $B_{2n} = \dfrac{(-1)^{n-1}(2n!)c_n}{2^{2n-1}}$. Кроме того, при разложении $z/(e^z - 1)$ по степеням z коэффициент при z^n равен $B_n/n!$. Числа Бернулли были известны до Эйлера, но Эйлер был первым, кто понял, что они таинственным образом возникают в самых разных задачах.

Эйлера постоянно волновало, что его вычисления $\zeta(2n)$ необоснованы. Он придумывает еще один аргумент, усиливающий выводы из его числовых экспериментов. Среди рассмотренных им примеров был пример, основанный на разложении $1 - \sin x$ в ряд и бесконечное произведение. Он приводил к соотношению $\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \ldots$, которое уже было строго выведено Лейбницем непосредственно из геометрического определения π. Эйлер оценивает это совпадение как очень сильное: «Для нашего метода, который может некоторым показаться недостаточно надежным, здесь обнаруживается великое подтверждение. Поэтому мы вообще не должны сомневаться в других результатах, выведенных тем же методом». Эйлер настаивает на серьезном отношении к недоказанным утверждениям, прошедшим экспериментальную проверку и получившим косвенные подтверждения. Он понимает, что в современной ему ситуации математика потеряет многое, если жестко придерживаться евклидовских правил установления истины. Впрочем, он не отказывается от поисков строгого обоснования и через десять лет находит существенно более простое обоснование разложения $\sin x$ (кстати, основанное на связи тригонометрической и показательной функций в комплексной области).

Эйлер продолжает манипуляции с бесконечными произведениями. Он вычисляет ряд, отвечающий бесконечному произведению $s(x) = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots$, и замечает, что в нем многие степени отсутствуют:

$$s(x) = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{46} + \ldots;$$

у ненулевых членов знаки меняются через два. Для Эйлера не составило труда разгадать закономерность последовательности показателей ненулевых слагаемых. Он рассматривает последовательные разности: $1, 3, 2, 5, 3, , 7, 4, \ldots$, разбивает получившуюся последовательность на две: натуральный ряд и последовательность нечетных чисел, и в результате для исходной последовательности показателей получает представление: члены k-й пары — это $m = \frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$, причем знак при x^m совпадает с $(-1)^k$. Однако Эйлеру не удается даже на формальном уровне доказать совпадение бесконечного произведения и ряда: «Я долго тщетно разыскивал строгое доказательство равенства между этим рядом и бесконечным произведением $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots$, и я предложил этот вопрос некоторым из моих друзей, способности которых в этом отношении мне известны, но все согласились со мной, что это преобразование произведения в ряд верно, хотя никто не сумел раскопать какой-либо ключ для доказательства. Таким образом, это познанная, но не доказанная истина». Кстати, числа вида $(3k^2-k)/2$ были известны еще греческим математикам (по крайней мере, Никомаху в I веке); это так называемые пятиугольные числа.

К обсуждаемой задаче Эйлер пришел, отправляясь от другой задачи. Пусть a_m (b_m) — число представлений натурального числа m в виде суммы четного (нечетного) числа различных слагаемых. Проанализировав, какими способами возникает член x^m при перемножении $(1-x)$, $(1-x^2)$,$\ldots$, нетрудно убедиться, что коэффициент при x^m в точности равен $a_m - b_m$. Это означает, что утверждение, к доказательству которого стремился Эйлер, равносильно тому, что $a_m = b_m$ для всех m, отличных от $(3k^2 \pm k)/2$, а для этих чисел $|a_m - b_m| = 1$ (знак можно уточнить). Именно это утверждение интересовало Эйлера, а рассмотрение бесконечных произведений и рядов — это лишь способ доказать его.

Эйлер связывает с рассмотренным рядом $s(x)$ еще одно замечательное арифметическое утверждение для $\sigma(n)$ — суммы делителей числа n. Манипулируя с $s'(x)/x$, Эйлер получает

$$\sigma(n) = \sigma(n-1) + \sigma(n-2) - \sigma(n-5) - \sigma(n-7) + \ldots.$$

Полученное соотношение Эйлер называет «наиболее необычайным законом чисел, относящимся к сумме их делителей». Не видя никакого пути к его прямому доказательству, он проверяет закон при $n \leqslant 20$, а затем при $n = 101$ (простое число) и 301 и пишет: «Примеры, которые я только что разобрал, безусловно рассеют любые сомнения, которые мы могли бы иметь в отношении справедливости этой формулы. Это прекрасное свойство чисел тем более удивительно, что мы не чувствуем никакой разумной связи между структурой моей формулы и природой делителей, с суммой которых мы здесь имеем дело».

Аддитивная теория чисел. Задачи о числе представлений натуральных чисел в виде сумм слагаемых некоторой природы (как говорил Эйлер, задачи о «разбиении чисел») долго были в центре его внимания. Возможно, первоначальный толчок дали задачи, содержавшиеся в письме Ф. Ноде (1740 г.), фамилия которого ничего не говорит нашему современнику[1]. К этим задачам Эйлер применил аппарат бесконечных произведений. Вот несколько примеров. Эйлер утверждает, что

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\ldots}.$$

Рассуждение состоит в том, что если умножать левую часть последовательно на $(1-x)$, $(1-x^3)$, $(1-x^5)$,..., то постепенно будут исчезать все ненулевые степени, а это и означает тождество (это рассуждение можно сделать строгим при помощи теории пределов). После раскрытия скобок в левой части получается ряд $1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$, где a_k — число представлений k в виде суммы различных натуральных слагаемых. Правая часть при помощи суммы бесконечной геометрической прогрессии записывается в виде

$$(1+x+x^2+x^3+\ldots)(1+x^3+x^6+x^9+\ldots)(1+x^5+x^{10}+\ldots)\ldots,$$

[1]Знаменательно, что Эйлер стартовал не только от великих источников, как это было в случае Ферма, но иногда с совершенно случайных задач.

и она равна $1 + b_1x + b_2x^2 + \ldots$, где b_k — число представлений k в виде суммы нечетных слагаемых, среди которых могут быть одинаковые (почему?). Эйлер делает вывод о совпадении числа представлений $a_k = b_k$. Попробуйте доказать это совпадение непосредственно, и вы убедитесь, что не видно, как подойти к этой задаче.

Следующее рассуждение исходит из тождества

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)\ldots = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots;$$

чтобы убедиться в его правдоподобности, можно умножить обе части на $(1 - x)$ и проследить, как последовательно исчезают ненулевые степени x в обеих частях. Из него сразу следует, что каждое число одним и только одним способом представляется в виде суммы различных степеней двойки (числа таких представлений — коэффициенты в степенном ряду, полученном после преобразования левого произведения).

Метод Эйлера позднее получил название метода производящих функций. Функции натурального аргумента $a(n)$ (например, число каких-то разбиений n) ставится в соответствие функция, являющаяся суммой бесконечного ряда $A(x) = a(0) + a(1)x + a(2)x^2 + \ldots$. Идея Эйлера, подтвержденная на многочисленных примерах, состояла в том, что в свойствах функции $A(x)$ своеобразно проявляются арифметические свойства последовательности $a(n)$. Характерно, что чисто арифметическое доказательство результатов Эйлера о разбиениях, доказанных Эйлером аналитически, было получено лишь во второй половине XIX века. Методом Эйлера был позднее доказан ряд замечательных результатов. Например, Якоби не только передоказал теорему Лагранжа о представлении натурального числа в виде суммы четырех квадратов, но и нашел число таких представлений.

Задачи о разбиениях отходили от арифметики Диофанта и Ферма не только по методам, но и по постановкам. Они начинали аддитивную теорию чисел (в отличие от мультипликативной). К аддитивной теории чисел относились и знаменитые проблемы Гольдбаха, поставленные в письме к Эйлеру. Среди них широко известна гипотеза, что каждое нечетное число представимо в виде суммы трех простых, а каждое четное — двух. Для достаточно больших нечетных чисел это было доказано И. М. Виноградовым. Эйлер, верный своим правилам, тщательно продумал эти задачи. Гипотезу о том, что каждое нечетное число n есть сумма простого и удвоенного квадрата, он проверил при $n < 2500$ (это не доказано и по сей день). Он сформулировал несколько новых гипотез. Например, осталась недоказанной гипотеза Эйлера, что всякое простое вида $8k+3$ есть сумма удвоенного простого числа вида $4l + 1$ и нечетного квадрата. Упомянем еще одну арифметическую гипотезу Эйлера, происхождение которой трудно реконструировать: число $3^{\sqrt{2}}$ является трансцендентным. Обобщение этого утверждения составило одну из проблем Гильберта, решенную А. О. Гельфондом. Еще один пример удивительного предвидения!

Анализ. Мы уже говорили о работах Эйлера по анализу в связи с рядами и бесконечными произведениями. Дифференциальное и интегральное исчисление были созданы в течение XVII века, в окончательной форме — в трудах Ньютона и Лейбница. Эйлер приходился «научным внуком» Лейбницу (через И. Бернулли). Уже в конце XVII века встал вопрос о создании руководства по исчислению бесконечно малых; эту цель преследовал «Анализ бесконечно малых» (1696 г.) маркиза Лопиталя, ученика И. Бернулли. Свое продумывание анализа Эйлер сопровождает созданием сквозной монографии по анализу, чему была подчинена значительная часть жизни Эйлера. В 1748 г. выходят два тома «Введения в анализ бесконечно малых». Второй том — это аналитическая геометрия. Первый том — замечательный учебник, который с интересом могли бы читать студенты и сегодня, — содержит всё из «обыкновенного» анализа, что, по мнению Эйлера, должно предшествовать анализу бесконечно малых. Здесь много элементарного материала и задач. Вот одна из них: «После потопа человеческий род размножился от шести человек; положим, что 200 лет спустя число людей возросло до 1 000 000 человек; требуется узнать, на какую свою часть число людей должно было бы увеличиваться ежегодно». Но при этом подробное изучение элементарных функций содержит и разложение в ряды, и выход в комплексную область. Здесь же — вычисления $\zeta(2n)$ и теория разбиений натуральных чисел. В 1755 г. выходит «Дифференциальное исчисление», в 1768 – 1770 г. — три тома «Интегрального исчисления», а после смерти Эйлера — еще один том добавлений.

Мы имеем возможность лишь очень мало сказать об аналитических результатах Эйлера. Прежде всего он внес принципиальный вклад в эволюцию понятия функции. К тому времени математики ясно понимали, что функция является основным объектом анализа, знали большое число конкретных функций, но только подходили к осознанию общего понятия. С точки зрения математика, занимавшегося приложениями, функция всегда задается какими-то аналитическими выражениями. С другой стороны, при построении дифференциального и интегрального исчисления работа с явными выражениями часто неудобна. Здесь более эффективен геометрический взгляд на функцию. Эйлер, в поле зрения которого были и приложения, и общая теория, параллельно развивал обе точки зрения на функции. Он был первым, кто отважился отождествить общие функции с произвольными (непрерывными) кривыми, имеющими единственные точки пересечения с вертикалями. Как писал Риман, «Эйлер первым ввел эти (произвольные — С. Г.) функции в Анализ и, опираясь на геометрическую наглядность, приложил к ним исчисление бесконечно малых».

Но Эйлер не только развил для произвольных функций анализ, он указал реальную ситуацию, когда произвольные функции возникают в приложениях. В 1748 г., исследуя формулу для изменения со временем формы колеблющейся струны, Эйлер подчеркивает, что в начальный момент времени форма струны может быть произвольной. В то же время Даламбер, который нашел эту формулу на год раньше, имел массу неприятностей из-за уверенности, что начальная форма должна задаваться аналитическим выражением (в частности, он пришел к выводу, что неразрешима задача о колебании струны, изогнутой по дуге параболы). В 1761 г. Лагранж подчеркнул заслугу Эйлера в использовании общих функций: «Они необходимы для большого числа важных вопросов динамики и гидродинамики $\langle\ldots\rangle$ г-н Эйлер является, как я полагаю, первым, кто ввел в анализ этот новый род функций в своем решении проблемы о колеблющихся струнах». Со времени Эйлера существенно поменялась терминология: его общие («разрывные», или «механические») функции являются непрерывными с нашей точки зрения, а непрерывные в его смысле функции после Лагранжа стали называть аналитическими. Эйлер был уверен, что общие функции не допускают аналитического представления. Он решительно возражал Д. Бернулли, считавшему (в связи с задачей о струне), что общие функции являются суперпозициями гармоник. Через 70 лет правоту предположения Д. Бернулли подтвердил Фурье.

Как ни замечательны результаты Эйлера в области формирования общего понятия функции, они не идут ни в какое сравнение с колоссальной работой по отбору и изучению специальных классов «хороших» функций, необходимых в приложениях. В изучении специальных функций он решительно выходит за пределы элементарных функций. Мы уже говорили о дзета-функции, введенной еще в 1830 г. Продолжая исследования Валлиса, Эйлер ищет функцию $\Gamma(x)$, которая принимала бы в целых точках значения $n!$, а затем и функцию $\mathrm{B}(x,y)$, которая в целых точках совпадает с $\frac{(n+m)!}{n!m!}$ (числом сочетаний). Так появились знаменитые эйлеровы интегралы (гамма- и бета-функции).

Математики XVIII века знали, что элементарных функций недостаточно, и помнили о мечте Лейбница разобраться с высшими трансцендентными функциями, однако трезвая оценка показывает, что регулярных способов разобраться с этой проблемой тогда не было. Отдельные примеры функций появлялись у разных математиков, но мы теперь ясно видим, что это была задача для XIX века, и одновременно, что Эйлер, руководствуясь неведомыми чувствами, практически без пробелов угадал все специальные функции, которые составляют предмет высшего анализа. Мы уже говорили об эйлеровских интегралах и ζ-функции.

К этому можно прибавить бесселевы функции, некоторые виды тэта-функций, гипергеометрическую функцию Гаусса (разумеется, это более позднее название!), при различных значениях параметров в которй получается большинство специальных функций, появляющихся в математической физике. Наконец, Эйлер сделал важнейшие шаги в теории эллиптических интегралов, включая теорему сложения. От этих результатов отправлялись Лежандр и Гаусс, Абель и Якоби. Вошло в привычку, что если появляется новый естественный класс функций, то его надо поискать у Эйлера. В последние годы в самых разных задачах теории чисел, алгебры, топологии, геометрии мистическим образом появляется дилогарифм $\mathrm{Li}_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^2$. Оказалось, что Эйлер знал о замечательных свойствах этой функции, в частности, о теоремах сложения.

Важнейший технический прием, которого не хватало Эйлеру, — это продолжение специальных функций в комплексную область. Но Эйлер уже делал первые шаги в построении комплексного анализа: он наряду с Даламбером (правда, в связи с задачами гидромеханики) рассмотрел уравнения Коши – Римана, которые задают аналитические функции комплексного переменного; пользовался комплексными подстановками для вычисления вещественных интегралов, а в последние годы жизни вычислял вещественные интегралы через интегралы от комплексных функций, очень близко подойдя к теории Коши контурного интегрирования на комплексной плоскости. Эйлер понимал неизбежность «комплексного» мира.

Наиболее знаменитым результатом Эйлера в комплексном анализе является его открытие связи между показательной и тригонометрической функциями в комплексной области, которую невозможно увидеть, оставаясь в пределах вещественных чисел. Формулу Эйлера $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ Ж. Л. Лагранж (1736–1813) назвал «одним из наиболее прекрасных анлитических открытий, сделанных в настоящем веке». Формула производит сильное впечатление и сегодня. Ее можно очень естественно получить через ряды или функциональные уравнения, и редко вспоминают, как она появилась в математике XVIII века. Удивительно, что логика ее открытия была достаточно прямолинейной. В начале века И. Бернулли (1667 – 1748), учитель Эйлера, занимаясь задачей об интегрировании рациональных дробей, обратил внимание на соотношение $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right)$. Если его формально проинтегрировать, то слева получается арктангенс, а справа — логарифм, правда, мнимого аргумента. После несложных преобразований получается формула

$$x = \frac{1}{2i}\ln\frac{1-i\operatorname{tg}x}{1+i\operatorname{tg}x}\,, \tag{16}$$

которая тривиально преобразуется в формулу Эйлера. Хотя И. Бернулли и не выписал (16), он безуспешно пытался придать смысл встречавшимся здесь вычислениям с мнимыми величинами. На этой почве возникла известная дискуссия (1712 – 13 гг.) между Бернулли и его учителем Лейбницем о логарифмах отрицательных чисел (чему равен $\ln(-1)$?), а в 1714 г. «формула Эйлера» промелькнула без необходимых обоснований у Рождера Котеса (Коутса) (1682 – 1716), рано умершего сподвижника Ньютона. Эйлер, хорошо знакомый с проблемами, волновавшими его учителя, в 1728 г., отправляясь от вычислений, выводит (16), а в 1739 г. он развил теорию логарифмов в комплексной области так, что все формулы стали корректными и противоречия исчезли ($\ln(-1) = (2k+1)\pi i$, где k — произвольное целое число).

Поиски специальных функций невозможно отделить от выделения важных классов дифференциальных уравнений. Уже никто не сомневался, что явно проинтегрировать произвольные дифференциальные уравнения нельзя. Эйлер активно участвует в выделении тех уравнений, которые возникают из физики. Он рассматривает ряд уравнений в связи с задачами гидромеханики, колебаний струн и мембран, распространения звука: здесь и уравнение Лапласа, и некоторые варианты волнового уравнения, и др. Для Эйлера был характерен аналитический взгляд на физику. Он стремился свести физические задачи к решению тех или иных дифференциальных уравнений. В механике он первый перешел от геометрического языка Ньютона к аналитическому.

Подводя итоги деятельности Эйлера в области анализа, подчеркнем, что Эйлер отдавал предпочтение аналитическим методам при решении как общематематических, так и прикладных задач. Но никогда анализ не был для Эйлера самоцелью. Можно вспомнить, что он (в отличие от Даламбера) упорно искал чисто алгебраическое доказательство основной теоремы алгебры (существование комплексного корня у любого алгебраического уравнения). Алгебраического доказательства найти не удалось, и Г. Фробениус (1849–1917) с сожалением отмечал, что замечательным алгебраическим рассмотрениям Эйлера не отдано должного, а многие из них несправедливо приписываются Гауссу.

Геометрия. Занятия Эйлера геометрией носили более отрывочный характер. Второй том «Введения в анализ» является первым учебником аналитической геометрии. Очень многое в аналитической геометрии идет от Эйлера. Он первым рассмотрел аффинные преобразования (и ввел этот термин), исследовал группу вращений, связав полученные при этом результаты с движением твердого тела. Эйлер продумывал возможности применения анализа к геометрии, сделав первые шаги в дифференциальной геометрии. Одним из первых рассмотрел он и геометрические задачи, связанные с картографией, отправляясь от вопроса, в каком смысле плоское изображение на карте подобно соответствующей картине на сфере (поверхности земного шара). Многим показалась неожиданной обнаружившаяся при этом связь с комплексными числами.

Даже в элементарной геометрии Эйлер обнаружил факты, которые никто не заметил прежде, например, что в треугольнике ортоцентр, центр описанной окружности и центр тяжести лежат на одной прямой — прямой Эйлера. Кажется, и теорему о пересечении трех высот треугольника в одной точке (ортоцентре), пропущенную у Евклида, никто до Эйлера явно не сформулировал.

Вероятно, более других геометрических утверждений популярна теорема Эйлера для многогранников: $В + Г = Р + 2$, где $В$ — число вершин, $Г$ — число граней, $Р$ — число ребер. Интересно, что Эйлер увидел это соотношение на примерах, но не смог поначалу доказать его в общем виде, проверив вместо этого теорему для любых пирамид, призм, некоторых составных многогранников, правильных многогранников. Эйлер и в геометрии борется за доверие к математическому эксперименту: «Итак, поскольку верность этого утверждения во всех этих случаях оправдывается, нет никакого сомнения, что оно имеет место для любых тел, так что это предложение представляется достаточно обоснованным». Лишь позднее он нашел общее доказательство.

Эйлер уже не вызывал своих коллег на состязание по решению задач, как это делал еще Ферма, но он охотно обменивался с ними как решенными, так и нерешенными задачами. Отсюда его результаты по традиционной тематике математических состязаний: магическим квадратам, дружественным числам и т. д. Популярные книги до сих пор сохранили несколько просто формулируемых задач, либо придуманных Эйлером, либо им впервые решенных. Можно вспомнить об обходе шахматной доски конем так, чтобы ни одна клетка не проходилась дважды. Другая известная задача — доказать невозможность обойти семь кенигсбергских мостов так, чтобы ни один мост не проходился дважды. На примере этой задачи видно, что Эйлера интриговали нестандартно решаемые задачи, поскольку эта нестандартность могла иметь далеко идущие последствия. В марте 1736 г. Эйлер пишет «мужу славному и знатному Мариони»: «Некогда мне была предложена задача об острове, расположенном в городе Кенигсберге и окруженном рекой, через которую перекинуто семь мостов. Спрашивается, может ли кто-нибудь обойти их, переходя только однажды через каждый мост. И тут же мне было сообщено, что что никто до сих пор не мог это проделать, но никто и не доказал, что это невозможно. Вопрос этот, хотя и банальный, показался мне, однако, достойным внимания тем, что для его решения недостаточны ни геометрия, ни алгебра, ни комбинаторное искусство. Поэтому мне пришла в голову мысль, не относится ли она случайно к геометрии положения, которую в свое время исследовал Лейбниц». Лейбниц в самом деле оставил несколько загадочных реплик о невиданной геометрии, «которая раскрывается перед нами в положении, как алгебра в величинах» (письмо к Гюйгенсу, 1679 г.). Эйлер безуспешно пытается выяснить подробности о «геометрии положения». Он разрабатывает метод, позволяющий решить эту задачу и по существу относящийся к началам топологии. Он чувствует, что рассмотренная задача — лишь отголосок более глубоких проблем: «Если бы можно было привести здесь другие, более серьезные задачи, этот метод мог бы принести еще большую пользу, и им не следовало бы пренебрегать». Через месяц в письме к Эйлеру в Данциг обсуждается обобщение задачи о мостах и констатируется: «Ты можешь убедиться, славнейший муж, что это решение по своему характеру, по-видимому, имеет мало отношения к математике, и мне непонятно, почему следует скорее от математика ожидать этого решения, нежели от какого-нибудь другого человека, ибо это решение подкрепляется одним только рассуждением, и нет необходимости привлекать для нахождения этого решения какие-либо законы, свойственные математике. Итак, я не знаю, как так получается, что вопросы, имеющие совсем мало отношения к математике, скорее разрешаются математиками, чем другими. Между тем ты, славнейший муж, определяешь место этого вопроса в геометрии положения, что касается этой новой науки, то, признаюсь, мне неизвестно, какого рода относящиеся сюда задачи желательны были Лейбницу и Вольфу». Так Эйлер вслед за Лейбницем видел впереди новую область геометрии — геометрии формы, без измерений, — черты которой стали проясняться через полтора века.

Механика. Механика была с самого начала в поле зрения Эйлера. Уже в 1736 г. выходит его «Механика, или наука о движении, изложенная аналитически». Это первая книга 29-летнего ученого. Эйлер тщательно изучил «Начала» Ньютона, в которых механика изложена на геометрическом языке. Он обнаружил, что с точки зрения приложений к конкретным задачам более эффективен переход на аналитический язык при помощи использования координат. В конечном счете механическая задача преобразуется в чисто математическую задачу решения дифференциальных уравнений. Это направление в механике продолжил Лагранж, который в предисловии к своей «Аналитической механике» констатировал: «В этой работе вовсе нет чертежей, в ней только алгебраические операции». Эйлер ясно отдавал себе отчет, что сведение механической задачи к математической еще не означает ее решения: «Хотя принципы механики, на которых основаны все законы движения, по-видимому, достаточно известны и достаточно применимы к общим явлениям для того, чтобы с их помощью подчинить изменения движения аналитическим формулам, однако очень часто анализ становится недостаточным для решения уравнений ⟨...⟩ Разве мы не видим, что принципы механики каждый день приводят нас к дифференциальным уравнениям, решение которых может быть найдено только при таком развитии анализа, от которого он еще очень далек».

Механика Ньютона не выходила за пределы движения материальных точек, потом Декарт рассмотрел движение плоских пластин, но только Эйлер перешел к изучению специфики движения твердого тела конечных размеров. Сделал он это в книге, вышедшей в свет через 29 лет после выхода его «Механики».

Механика Ньютона начинается с аксиом — трех его законов. Эйлер считал, что они нуждаются в существенно большей мотивировке и их следует вывести из каких-то более первичных законов мироздания. Предпринятая в 1736 г. попытка в этом направлении была сомнительной. А. Н. Крылов пишет, что Эйлер получил лишь «разжиженные» законы Ньютона, и находит корни пожеланий Эйлера в его привычке к занятиям богословием. Когда Эйлер был в Берлине, перед ним неожиданно открылся новый путь разработать для механики более естественные основания. В 1744 г. Мопертюи предположил, что все законы движения и равновесия в природе могут быть выведены из того, что всякое движение происходит так, чтобы минимальное значение приняла некоторая величина — действие. Мопертюи отправлялся от оптики (принцип Ферма), переходил к механике, но затем толковал свой закон максимально широко и путано, давал своему закону наименьшего действия теологическое толкование, утверждая, что минимальность действия является следствием «наиболее мудрого употребления могущества Творца». Мопертюи не пошел дальше простых механических применений, он увлекся глобальными проблемами, которые вскоре вовлекли его в горячую дискуссию, дорого ему стоившую. Даламбер писал: «Этот спор о действии, если нам будет позволено сказать, несколько походит на некоторые религиозные споры по ожесточению, с которым он велся, и по количеству людей, принявших в нем участие, ничего в этом не смысля».

Эйлер с самого начала на стороне Мопертюи. Ему не чужда и теологическая интерпретация: «Действительно, так как здание всего мира совершенно и возведено премудрым Творцом, то в мире не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума». Но прежде всего Эйлер ищет точную формулировку принципа, которая позволила бы ему изменить законы механики. Он находит такую формулировку в случае центральных сил, хотя и не дает доказательства. Как писал сам Мопертюи по поводу Эйлера, «Этот великий геометр не только обосновал принцип более фундаментально, чем это сделал я, но его взор, более объемлющий и более проникновенный, чем мой, привел его к открытию следствий, которые я не извлек».

Утверждения Мопертюи были настолько общими, что в дискуссии (точнее сказать, скандале) приняли участие люди, далекие от физики, и среди них Вольтер, имевший с Мопертюи давние счеты и разразившийся сатирическим памфлетом «Диатриба доктора Акакии уроженцу Сен-Мало». В конечном счете Мопертюи был морально раздавлен, но от Вольтера досталось и Эйлеру, ярому защитнику Мопертюи. Его можно безошибочно узнать в ученом, который пытается снискать себе славу среди европейских математиков тем, что «производит на бумаге максимум вычислений». Речь идет об ученом, который считает не менее чем на 60 страницах вместо того, чтобы подумать и потратить не более десяти строк, который считает три дня и три ночи, не потратив четверть часа на обдумывание правильного пути. Вот как преломился у Вольтера образ гениального вычислителя.

Эйлера нередко упрекали и упрекают, что он переоценил путаные высказывания Мопертюи, почти демонстративно подчеркивая вторичность своих работ. Намекали даже, что практичный Эйлер стремился угодить всесильному (перед дискуссией) президенту Берлинской Академии наук. Но думается, что такое отношение к работе Мопертюи было органично для Эйлера: он умел ценить пионерские работы и понимал, сколь в несовершенном виде предстают в них идеи. Мопертюи высказал то, что естественно было сделать Эйлеру. Эйлер все время искал для механики более надежное основание, чем законы Ньютона, которые он не готов был принять за первичные. Ему не суждено было догадаться, что необходимый принцип можно было почерпнуть из его любимого вариационного исчисления.

Астрономия. Занятия Эйлера астрономией — продолжение его занятий механикой. Его область интересов — небесная механика. Он смог реализовать здесь свои поразительные вычислительные способности (как писал французский астроном Араго, он «вычислял так, как человек дышит»). Эйлеру одному из первых стали доступны вычисления, опережавшие результаты наблюдений. Старая небесная механика только экстраполировала результаты наблюдений, новая — исходила прежде всего из закона всемирного тяготения. Первые шаги в этом направлении сделаны самим Ньютоном, давшим теоретическое определение ускорения движения Луны и объяснившего некоторые аномалии (как стали говорить, неравенства) в ее движении. Как всегда, Эйлер ясно осознает насущные задачи небесной механики. Прежде всего надо попытаться объяснить «неравенства» в движении больших планет Юпитера и Сатурна их взаимным притяжением, накладывающимся на притяжение Солнца. Эйлер далеко продвигается к вожделенной цели — объяснить так называемые «большие неравенства», проявляющиеся в систематическом ускорении Юпитера и замедлении Сатурна. Однако Эйлеру не удалось довести вычисления до результата, хорошо согласующегося с наблюдением, хотя он и двигался по правильному пути (это удалось позднее Лапласу).

Теория движения Луны была в центре внимания Эйлера. Самой злободневной была задача объяснения периодического движения перигея орбиты (с периодом 9 лет). Учет возмущения упорно давал период 18 лет, пока в 1749 году Клеро не показал, что учет возмущающих членов следующего порядка дает правильный период. Эйлер признавал, что Клеро, сконцентрировавший усилия на решении этой задачи, опередил его: «В этом вопросе у г-на Клеро, пожалуй, нет более сильного противника, чем я ⟨...⟩, хотя я и был в этом вопросе предшественником г-на Клеро, у меня не хватило терпения пуститься в столь пространные вычисления». Хотя теория Эйлера и не дала столь выигрышного итога, как результат Клеро, она имела последствие исключительной важности. На ее основе в 1755 г. Майер (1723 – 1762) составил таблицы движения Луны невиданной точности. Они дали способ измерять долготу на борту корабля, конкурентоспособный со способом, использующим хронометр (изобретенный Харрисоном в 1735 г.). Признанием заслуг Майера в решении давно стоявшей практической задачи (см. главу о Гюйгенсе) стало присуждение ему в 1765 году (посмертно) премии английского парламента размером в 3000 фунтов. Одновременно Эйлеру была присуждена премия в 300 фунтов «за теоремы, при помощи которых недавно умерший профессор Майер из Геттингена построил свои Лунные Таблицы, позволившие достичь большого прогресса в деле нахождения долгот на море».

Много занимался Эйлер вычислением эллиптических (невозмущенных) орбит комет. В частности, это относится к знаменитой комете Лекселя 1769 г., необычайно близко подошедшей к Земле (10 мая 1983 г. впервые за 200 лет комета подошла к Земле на сравнимое расстояние).

Хотя Эйлеру не удалось построить теорию движения планет, исходящую лишь из законов Ньютона и полностью согласующуюся с экспериментом, он верил в непоколебимость закона всемирного тяготения. Когда-то после неудач с объяснением неравенств в движении Луны Эйлер, как и другие его современники, подумывал об «уточнении» закона Ньютона. Однако дальнейшее развитие теории движения Луны, по словам Эйлера, показало, что «чем более строго она согласована с законом Ньютона, тем лучше она представляет наблюдаемые явления». Эйлер не сомневался, что то же справедливо и в отношении всей небесной механики.

Поучительна позиция Эйлера в отношении подхода к решению задачи трех тел: «Я должен прежде всего заметить, что мы ничего не выиграли бы, употребив какой угодно труд на интегрирование этих уравнений. С одной стороны, я сильно сомневаюсь, чтобы когда-либо был найден способ для этого; а с другой стороны, если бы даже посчастливилось вывести их интегралы, то эти интегралы были бы крайне сложны и не принесли бы почти никакой пользы для употребления в астрономии. Для этой цели их все равно пришлось бы заменять подходящими приближениями. Но если речь идет о приближенных выражениях, то их столь же легко получить непосредственно, из дифференциальных уравнений».

«Письма к принцессе». Взаимоотношения ученых и монарших особ — небезынтересный сюжет в истории науки. Мы уже имели шанс поговорить об этом. Дело не только в том, что контакты с сильными мира сего бывали необходимы для обеспечения существования ученых и их работы. Нередко они тешили себя надеждой, что их знания могут способствовать воспитанию совершенного монарха (можно вспомнить о Лейбнице и ганноверском курфюрсте — будущем короле Англии, Декарте и шведской королеве Христине). Вряд ли Эйлер имел такие планы в отношении принцессы Ангальт-Дессауской, старшей дочери маркграфа Бранденбург-Шверинского, племянницы Фридриха II. Вероятно, Эйлеру было приятно заниматься с любознательной смышленой принцессой, да и ее отношение к ученому отличалось от отношения большинства родственников короля. Постепенно у принцессы становится все меньше времени для занятий, и Эйлер решает заполнить пробелы в уроках письмами: «Мои намерения продолжать с Вами занятия геометрией встречают новые препятствия, это составляет для меня истинное горе, но я хочу восполнить пропуски своими письмами, насколько это возможно по сущности предмета». Эйлера увлекает возможность систематически изложить свои глобальные взгляды на мироздание, жизнь, религию. Постепенно письма к принцессе ориентируются на дальнейшую публикацию. В 1768 – 1774 гг. выходят три тома

«Писем о разных физических и философских материях, писаных к некоторой немецкой принцессе».

Письма энциклопедичны, создается впечатление, что Эйлер стремится рассказать все, что успел продумать. Некоторое представление о широте обсуждаемых вопросов дает перечень тем, с которых начинается первый том: понятие притяжения, скорость звука и музыка, свет, зрение и строение глаза, закон всемирного тяготения, морские приливы и отливы, монадология Вольфа, «об отношении души к телу», «о явлениях естественных», «о лучшем из миров и происхождении всех зол», «о состоянии души после смерти», «об идеалистах, эгоистах и материалистах», «о совершенстве языка», «о силлогизме», «о нравственных и физических страданиях», «о назначении человека», «обращение грешников», «о чудесах человеческого голоса» и т. д.

Большинство ученых не приняли философские тексты Эйлера, хотя многие отмечали достоинство страниц, относящихся к популярному изложению научных знаний. Благожелательный Кондорсе писал: «этот труд представляет нечто весьма ценное по той ясности, с которой в нем изложено все самое главное и важное из области астрономии, оптики и теории звука. Что касается тех мыслей Эйлера, которые относятся к философии, они скорее остроумны, чем глубоки». Эйлер воспользовался страницами «Писем» для борьбы против свободомыслия в науке, против материализма. Он высмеивает «односторонних химиков, анатомов, физиков, которые все ушли в свои опыты. Сколько бы им ни говорили о свойствах и существе души, они соглашаются только с тем, что поражает их внешние чувства». Все это, вместе с размышлениями Эйлера о религии, вызвало резкие отзывы Лагранжа и Даламбера. 2 декабря 1768 г. Лагранж писал Даламберу: «Имеется одно сочинение, которого он не должен был бы публиковать ради своей чести: это „Письма к немецкой принцессе“ ». А 15 июля 1769 года он писал, что «Письма», возможно, позабавят Даламбера выходками против вольнодумцев. В ответ Даламбер сравнивает «Письма» с ньютоновскими комментариями к Апокалипсису и пишет: «Наш друг — великий аналитик, но довольно плохой философ»; в письме от 7 августа: «Вы имели полное основание говорить, что, дорожа своей честью, он не должен был печатать это произведение. Это просто невероятно, как такой великий гений, каким он является в геометрии и анализе, может быть в метафизике ниже самого маленького школяра, чтобы не сказать таким плоским и абсурдным, и вот действительно подходящий случай воскликнуть: не все богами даровано одному».

А публике «Письма» понравились! Об этом свидетельствует, что только в XVIII веке они выдержали четыре издания на русском языке (первоначально они были напечатаны по-французски). Это контрастирует с тем, как туго расходились научные труды Эйлера (в письме к конференц-секретарю Миллеру из Берлина Эйлер пишет, что из 500 экземпляров «Дифференциального исчисления» разошлось лишь 100; на «Теорию движения твердого тела» с трудом нашли 12 подписчиков). Уже в наши дни В. И. Вернадский писал, что перед «Письмами к принцессе» «останавливаешься в восхищении перед широтой и обдуманностью в единое, которое бьет ключом из этого произведения его досугов, не менее характерного для XVIII века, чем какие-нибудь создания тогдашнего искусства или музыки».

Популяризаторское искусство, проявившееся на лучших страницах «Писем к принцессе», было одним из проявлений выдающегося педагогического мастерства Эйлера. Другим его проявлением является продуманность вводимых понятий и современность обозначений (от Эйлера идут обозначения тригонометрических функций; он впервые рассматривал значения последних за пределами $[0; 2\pi]$ и т. д.). Много сил ученый отдавал воспитанию своих учеников, которые постоянно жили в его доме. Тексты его сочинений были ориентированы не только на сообщение его результатов, но и на демонстрацию его искусства: «Он предпочитал обучение своих учеников тому небольшому удовольствию, которое он бы получил, изумляя их. Он думал, что недостаточно сделал бы для науки, если бы не прибавил к открытиям, которыми он обогатил науку, чистосердечного изложения идей, приведших его к этим открытиям» (Кондорсе). Отсюда и готовность публиковать недоказанные результаты с мотивировкой их правдоподобия, и даже неточные, но поучительные вычисления. Вот как он ответил критику, обнаружившему пробелы в его работе по диоптрике: «Вы заблуждаетесь, мой дорогой, если думаете, что эта работа потому бесполезна. Наоборот, она очень ценная, ибо содержит расчеты, которые независимо от объекта самого по себе, по своему ходу и приложению, могут служить образцом; короче говоря, это все-таки расчеты нового вида, а это весьма не бесполезно».

Заключительные замечания. Мы не имели возможности коснуться многих сторон деятельности Эйлера: оптики, картографии, баллистики, теории корабля и т. д. Мы хотим еще раз подчеркнуть, что в богатом наследии Эйлера математика занимает особое место, а в своих математических работах он был прежде всего аналитиком. По работам Эйлера учились великие математики XIX века. «Читайте Эйлера — это наш общий учитель», — говорил Лаплас. По словам Гаусса, «изучение работ Эйлера остается наилучшей школой в различных областях математики, и ничто другое не может это заменить».

Никто всерьез никогда не оспаривал репутацию Эйлера как великого математика. Однако в последующих оценках сказалось то, что Эйлер многие трудные проблемы не доводил до окончательного решения. Если не оценивать его деятельность в целом, а лишь по законченным большим результатам, то он уступает другим великим ученым. Скажем, сделав многое в небесной механике, он не оставил результатов, подобных объяснению быстрого движения перигелия лунной орбиты или вычислению возмущенной орбиты кометы Галлея с предсказанием ее следующего возвращения, полученных Клеро. В арифметике Лежандр и Гаусс нашли трудные доказательства существования первообразных корней и квадратичного закона взаимности, высказанных Эйлером.

В 1842 г. Якоби в письме к П. И. Фуссу отмечает важное свойство математического наследия Эйлера: «В последнее время я вновь основательно изучал интегральное исчисление Эйлера и опять удивлялся, какой свежей сохранилась эта семидесятилетняя книга, в то время как современную ей книгу Даламбера совершенно невозможно читать. Причина, мне кажется, в его примерах. Потому что эти примеры имеют не просто побочное значение иллюстраций, они составляют все содержание, которое имели в то время общие предложения». Эйлера упорно сравнивали с Даламбером при жизни; Якоби продолжает делать это после их смерти. В мае 1841 г. он пишет Фуссу: «Удивительно, что сейчас невозможно прочитать хоть строчку, оставленную Даламбером, в то время как лучшие работы Эйлера еще читают с восхищением, а умерли они в один и тот же год. Кажется, что Даламбер истощил все свое изящество в беллетристике». Вкусы у Якоби и Фридриха II не совпадали, но к Даламберу Якоби определенно несправедлив.

Эйлера ценили прежде всего те, кто изучал его труды, а не оценивал наследие по вершинам, кто учился у него и пользовался его провидческими идеями.

В заключение приведем один курьез, который, впрочем, больше характеризует особенности академической «демократии» в России, чем заслуги Эйлера. В последние годы XIX столетия петербургские ученые загодя думали о праздновании предстоящего в 1907 году 200-летия великого ученого. 6 февраля 1899 г. на общем собрании академии обсуждалось предложение отделения физико-математических наук о сооружении по международной подписке памятника Эйлеру в Петербурге. Против этого предложения решительно выступил академик (по математике) Н. Я. Сонин (1849 – 1915). Он говорил, что труды Эйлера устарели, что его значительно превзошли Лагранж и Гаусс, что «следы деятельности Эйлера практически заметены». В общем, памятники следует ставить великим ученым, а Эйлер является разве что выдающимся, а потому для него вполне достаточно бюста в конференц-зале, который и был уже установлен вскоре после смерти ученого. Было еще мнение, что непонятно, почему памятник надо непременно устанавливать в Петербурге, а не в Базеле, где Эйлер родился, или в Берлине, где он работал почти так же долго, как в Петербурге. Вопрос был поставлен на голосование. Голоса разделились поровну, а это, согласно академическому уставу, означало, что в памятнике Эйлеру отказано. Демократия победила!

Сегодня в Петербурге имеется Математический институт имени Эйлера, но памятника пока нет.

ЖОЗЕФ ЛУИ ЛАГРАНЖ

> Я занимаюсь геометрией спокойно и в тишине. А так как меня никто и ничто не торопит, то я работаю больше для моего удовольствия, нежели по должности; я похож на вельмож — охотников строиться: я строю, ломаю, перестраиваю до тех пор, пока не выйдет что-нибудь такое, чем я останусь доволен.
>
> *Лагранж*

Письмо из Турина. В августе 1755 г. великий Эйлер (1707 – 1783) получил из Турина письмо от 19-летнего Лагранжа, который и прежде писал ему. У Эйлера, несомненно, уже успело сложиться мнение, что его корреспондент является талантливым зрелым математиком, несмотря на его молодость. И все же содержание последнего письма поразило ученого.

С конца XVII века внимание математиков все более привлекали задачи, которые сейчас принято называть вариационными, а тогда обычно называли изопериметрическими. Все началось с поставленной Иоганном Бернулли (1664 – 1748) задачи о брахистохроне — кривой наибыстрейшего спуска между двумя точками. Впрочем, задачи о кривых, обладающих теми или иными свойствами максимума-минимума, возникали и раньше: окружность при заданной длине ограничивает фигуру наибольшей площади (изопериметрическое свойство, отсюда и название класса задач), прямая — кратчайшее расстояние между точками и т. д. Число таких задач росло, математики с удовольствием решали их, подбирая свой «ключ с секретом» к каждой из них.

Однако стиль эпохи расцвета дифференциального и интегрального исчисления требовал попытаться найти *общий* метод, развить исчисление для решения изопериметрических задач. Замечательные математики, которые занимались этими задачами,

Жозеф Луи Лагранж

интуитивно ощущали общие моменты в их решении. Многое сделал Якоб Бернулли (1654 – 1705). И все же картина оставалась достаточно пестрой и для создания общего метода предстояло много поработать.

Эйлеру было в точности 19 лет, когда его учитель И. Бернулли поставил ему задачу о брахистохроне в среде с сопротивлением. Потом еще добавилась задача о кратчайших («геодезических») линиях на поверхностях. Вариационные задачи постоянно в поле зрения у Эйлера, и к 1732 г. у него выкристаллизовался общий метод решения таких задач. Еще 12 лет ушло на совершенствование метода, и в 1744 г. выходит итоговый мемуар о решении «изопериметрических задач в самом широком смысле». Метод иллюстрируется на решении более 60 самых разнообразных задач.

Сегодня мы ясно понимаем, в чем была трудность в решении вариационных задач: в некотором смысле они были преждевременны в анализе XVIII века. В то время аналитики занимались в основном функциями от одного переменного, в меньшей степени функциями от нескольких переменных. Однако кривые, фигурирующие в вариационных задачах, не характеризуются конечным набором параметров. Фактически эти задачи имеют дело с функциями от бесконечного числа переменных, а это уже вотчина анализа XX века (функционального анализа).

Основное наблюдение Эйлера состояло в том, что кривые, являющиеся решениями изопериметрических задач, отвечают решениям некоторых дифференциальных уравнений. В выводе этих уравнений Эйлер и видит основную задачу. Он действует очень осторожно, чтобы остаться в рамках привычного анализа: заменяет кривые ломаными (ведь они зависят от конечного числа параметров, характеризующих вершины) и следит за изменением фигурирующей в задаче величины при изменении только одной вершины. Искомое дифференциальное уравнение получается, но путь к нему достаточно тернист. Как напишет Деламбр (1749 – 1822; не путать с Даламбером!), верный друг и биограф Лагранжа, этот метод «не обладал всей той простотой, которая желательна в вопросе чистого анализа».

Эти слова, вероятно, отражают мнение Лагранжа. С решительностью, присущей молодости, он отваживается провести полностью схему, разработанную для функций, когда рассматривается главная линейная часть df приращения функции $f(x)$, отвечающая приращению dx аргумента x, и ищутся x, в которых $df(x) = 0$. Он рассматривает функции от кривых — функционалы (разумеется, специального вида) $I(l)$, не пугаясь, что фактически это функции от бесконечного числа переменных; для фиксированной кривой l рассматривает произвольное малое «возмущение» δl, определяет главную часть соответствующего приращения функционала — δI и для определения кривых, на которых $\delta I = 0$, получает дифференциальное уравнение, к которому Эйлер шел кружным путем, и которое ныне называется уравнением Эйлера–Лагранжа. Заметим, что Лагранж предусмотрительно вводит новое обозначение δ, которое похоже на обозначение дифференциала d, но отличается от него. Удачно введенное обозначение очень помогало делу.

Короткой информации Эйлеру было достаточно, чтобы оценить все преимущества усовершенствований Лагранжа. Начинается оживленная переписка, высокая оценка великого ученого окрылила начинающего математика. В письмах обсуждаются все усложняющиеся постановки задач: ведь сила нового метода должна быть продемонстрирована на решении новых задач, недоступных старой технике. Письмо Лагранжа возродило и у самого Эйлера интерес к экстремальным задачам. Уже в 1756 г. он делает в Берлинской академии два сообщения, связанные с методом Лагранжа. В том же году Лагранж по представлению Эйлера был избран иностранным членом этой академии — редкая честь для молодого ученого, который еще не успел опубликовать своих трудов (впрочем, в то время такому избранию придавали меньше значения, чем в наши дни).

Эйлер не спешит публиковать свои новые результаты, предоставляя своему молодому коллеге не торопясь подготовить к печати свою работу. Он разъясняет свою позицию в письме от 10 октября 1759 г.: «Твое аналитическое решение изопериметрической проблемы содержит, насколько я вижу, все, чего только можно желать в этой области, и я чрезвычайно рад, что эта теория, которой после первых моих попыток я занимался едва ли не один, доведена тобой до величайшего совершенства. Важность вопроса побудила меня к тому, что я с помощью твоего освещения сам вывел аналитическое решение. Я, однако, решил скрывать это, пока ты не опубликуешь свои результаты, так как я никоим образом не хочу отнимать у тебя часть заслуженной тобой славы». Замечательный пример научной этики!

Письмо Эйлера добавило решимости Лагранжу опубликовать сделанное, и во II томе «Туринских записок» за 1761 – 1762 гг. появляется его мемуар «Опыт нового метода для определения максимумов и минимумов неопределенных интегральных формул». В 1764 г. публикует свои результаты и Эйлер, предваряя публикацию словами: «После того как я долго и бесплодно трудился над решением этого вопроса, я с удивлением увидал, что в „Туринских записках“ задача эта решена столь же легко, как и счастливо. Это прекрасное открытие вызвало у меня тем большее восхищение, что оно значительно отличается от данных мною методов и значительно их превосходит по простоте». Несколько удивляет, что Эйлер не упоминает предшествовавшей переписки. Эйлер предлагает называть новый метод «вариационным исчислением» по аналогии с дифференциальным исчислением (δI называется вариацией).

Таким был научный дебют Лагранжа. В одном отношении он уникален. Известны и другие примеры, когда великие математики получали первые крупные результаты в том же возрасте, что и Лагранж. Однако при этом речь шла обычно о решении конкретных задач. Интерес же к совершенствованию метода как такового приходит с годами. Мы же видим, что уже в первой работе Лагранжа проявилось то, что будет всегда отличать его в дальнейшем: полное прояснение ситуации, совершенствование метода, поиск первопричины ценятся выше конкретных задач.

Джузеппе Луиджи. Мы рассказали о первой великой работе Лагранжа, но все же стоит сказать несколько слов о более ранних событиях его жизни. Жозеф Луи Лагранж родился 25 января 1736 г. в Турине, в Италии. Впрочем, на родине его называли Джузеппе Луиджи. Его прадед приехал из Франции и поступил на службу к герцогу Савойскому, а дед и отец продолжали служить в должности казначея фабрик и строений. К рождению будущего математика семья разорилась. «Если бы я был богат, я, вероятно, не достиг бы моего положения в математике; а в какой другой деятельности я добился бы тех же успехов?» — говорил впоследствии ученый. Впрочем, поначалу семейные планы предназначали Жозефу Луи карьеру адвоката, и в 14 лет он определяется в Туринский университет. Однако вскоре он перешел в Артиллерийскую школу, что было связано с усилившимся интересом к математике. В 19 лет он — профессор математики в этой школе (по некоторым сведениям, еще раньше).

Первые попытки открыть новое в математике привели Лагранжа к открытию уже известного. Контакты с исключительно оригинальным итальянским математиком графом ди Фаньяно (1682 – 1766) помогли юноше понять, что серьезное изучение современной математики должно предшествовать самостоятельной работе. И мы видели, что первые результаты Лагранжа — это не счастливая находка юного дилетанта, а результат напряженной работы сложившегося профессионала. Умение всесторонне и критически осмысливать и перерабатывать предшествующий опыт отличало научную деятельность Лагранжа с первых его шагов.

Вокруг Лагранжа сложился кружок молодых математиков и физиков, который позднее преобразовался в Туринскую академию наук. С 1759 г. начинают выходить «Философско-математические сборники частного Туринского научного общества», которые привыкли называть просто «Туринскими записками». Мы уже говорили, что во II томе записок появился мемуар Лагранжа о вариационном исчислении, а I том содержал две его работы, в том числе статью «Исследование о природе распространения звука». В математическом плане здесь очень поучительны комментарии к задаче о колебании струны. В 1747 – 48 гг. эта задача была рассмотрена тремя крупнейшими математиками того времени Даламбером (1707 – 1783), Эйлером и Даниилом Бернулли (1700 – 1782). Между их толкованиями были существенные расхождения. Даламбер, первым решивший уравнение струны, считал, что начальное положение должно описываться функцией с единым аналитическим выражением (еще не было ясно, что это значит). Эйлер же настаивал, что эта функция может быть совершенно произвольной (как бы мы сказали, непрерывной), и это был первый случай, когда в анализе появились функции общего вида, задаваемые графиками, а не аналитическими выражениями. Наконец, Бернулли рассматривал гармонические колебания с разными частотами и утверждал, что произвольное колебание разлагается в бесконечную суперпозицию гармонических колебаний, во что не верили ни Даламбер, ни Эйлер.

Лагранж придумывает остроумный прием, рассматривая струну постоянной плотности как предел невесомых струн с равномерно распределенными одинаковыми грузами в конечном числе. Вопрос о колебаниях такой струны с грузиками рассматривается элементарно. Делая предельный переход, Лагранж подтверждает мнение Эйлера. Позднее, повторяя это рассуждение в «Аналитической механике», он вспоминал: «Этим именно путем я в первом томе „Туринских записок“ доказал правильность построения Эйлера, которое не было достаточно обосновано». Вскоре Лагранж имел еще одну возможность убедиться в том, насколько прав был Эйлер, настаивая на необходимости пользоваться в анализе общими (неаналитическими) функциями: при изучении движения воздуха в трубах постоянного сечения возникали кривые, которые в некоторой точке превращаются в прямые («смешанные» функции, по терминологии Эйлера). Те же рассмотрения с предельным переходом убедили Лагранжа в правоте Бернулли; он был близок к доказательству возможности разложить произвольную функцию по гармоникам (в ряд Фурье), но точного доказательства пришлось ждать еще сорок лет.

Мы уже видели, какое одобрение у Эйлера получили первые работы Лагранжа. Работа о струне заставила обратить на него внимание другого из его великих современников — Даламбера: «До свидания, сударь, Вы достойны, если я не ошибаюсь, играть великую роль в науках, и я аплодирую началу Вашего успеха». Как скажет Деламбр, «среди этих знаменитейших геометров внезапно выступает двадцатитрехлетний молодой человек, при том не только как им равный, но как арбитр между ними, который, чтобы прекратить трудную борьбу, указывает каждому из них, в чем он прав и в чем он ошибается, исправляет эти ошибки и дает истинное решение, которое хотя и было предугадано, но не могло быть получено». Это наблюдение точно передает стиль статьи Лагранжа, а письма к нему Эйлера и Даламбера в самом деле отражают готовность воспринимать Лагранжа как арбитра.

Основания статики. Лагранж был душой Туринского кружка. Опубликованные в «Туринских записках» статьи его товарищей несут отчетливый след сильного влияния Лагранжа. Особенно это относится к статье Фонсене, который был, по-видимому, лишь соучастником предпринятого Лагранжем систематического продумывания основ механики. Потом с сюжета этой статьи начнется его знаменитая «Аналитическая механика», и он очень выразительно демонстрирует, как основательно Лагранж взялся за дело.

Речь идет о сопоставлении двух важнейших начал статики: принципа рычага и принципа сложения сил, приложенных к одной точке. Архимед положил в основу этой теории рычага аксиому о равновесии рычага с равными плечами и грузами и о двойной нагрузке на точку опоры в этой ситуации. Многие авторы пытались уточнить и дополнить рассуждения Архимеда, но они, по словам Лагранжа, «нарушив простоту, $\langle\ldots\rangle$ почти ничего не выиграли с точки зрения точности». Лагранж отмечает, что первую часть аксиомы естественно считать очевидной из соображений симметрии: «нельзя усмотреть основания, в силу которого один груз перетянул бы другой». Он, однако, не видит никаких логических оснований к тому, что нагрузка на точку опоры при этом должна быть равна обязательно сумме весов грузов: «по-видимому, все механики рассматривали это допущение как результат повседневного наблюдения, которое учит нас, что тяжесть тела зависит только от его массы, но ни в какой мере не зависит от его формы». Лагранж предлагает вывод второй половины аксиомы Архимеда из первой. Он рассматривает однородную треугольную пластину ABC, где основание AB равнобедренного треугольника горизонтально. Вершины A, B нагружаются равными грузами P, а вершина C — грузом $2P$. Пластина опирается на среднюю линию MN, параллельную AB (рис. 31). Она будет находиться в равновесии, что следует из рассмотрения пары рычагов AC, CB с точками опоры M, N в силу первой части аксиомы Архимеда. Но тогда в равновесии будет и рычаг CF, где F — середина AB, точка опоры E — середина CF (в ней пересекаются MN и CF). Значит, нагрузка в точке F должна быть равна грузу $2P$ в точке C (строго говоря, здесь применяется обращение первой части аксиомы Архимеда, которое легко выводится), а это в точности нагрузка на точку опоры в рычаге AB. Лагранж аккуратно отмечает, что прием с рассмотрением равновесия плоской пластины относительно стержня он почерпнул у Гюйгенса.

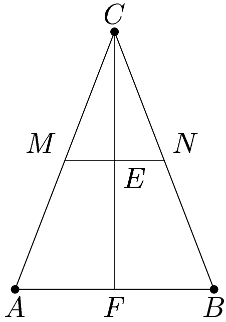


Рис. 31.

Далее, Лагранж рассматривает принцип сложения сил, приложенных к одной точке, который легко обосновывается при помощи рассмотрения сложения движений. Существенная разница в принципах состоит в том, что в одном случае силы прикладываются к разным точкам, а в другом — к одной. Тем не менее многие утверждения статики можно выводить как из одного принципа, так и из другого. Возникает желание вообще отказаться от принятия принципа рычага за аксиому, но Лагранжа настораживает, что все известные выводы аксиомы Архимеда из закона сложения сил весьма искусственные: «Хотя, строго говоря, оба принципа рычага и сложения движений всегда приводят к одним и тем же результатам, интересно отметить, что наиболее простой случай для одного из этих принципов становится наиболее сложным для другого».

Интуиция позволила Лагранжу безошибочно обнаружить тонкое место, хотя он и не смог до конца объяснить его. Оно связано с взаимоотношением механики и геометрии. Дело в том, что закон сложения сил, приложенных к одной точке, не зависит от аксиомы параллельных, в то время как в пространстве Лобачевского нагрузка на точку опоры рычага всегда превышает сумму весов приложенных грузов. В выводе второй половины аксиомы Архимеда используется утверждение о том, что высота равнобедренного треугольника пересекается со средней линией в ее середине, что опирается на аксиому параллельных и неверно в геометрии Лобачевского. По-видимому, Лагранж еще не знал этого, хотя известно, что он размышлял над проблемой пятого постулата.

Принцип наименьшего действия. Во II томе «Туринских записок» вслед за мемуаром о вариационном исчислении была помещена статья Лагранжа «Приложение метода, изложенного в предыдущем мемуаре, для решения различных задач динамики». И здесь Лагранж следует по стопам Эйлера. В 1744 г. Мопертюи (1698 – 1759) сформулировал очень общий и туманный принцип, согласно которому все в природе, включая механическое движение, происходит так, чтобы некоторая величина — действие — достигала своего минимального значения. Эйлер для случая движения точки в центральном поле превратил это неопределенное утверждение в совершенно точное, определив действие в этом случае как интеграл скорости по пути $\int v\,ds$. Лагранж обобщил принцип Эйлера на случай произвольной системы точек, между которыми имеются связи и которые взаимодействуют произвольным образом. Определив действие в этой общей ситуации, Лагранж, пользуясь разработанной им техникой вариационного исчисления, решает разнообразные задачи динамики, включая гидродинамику. У него нет сомнений, что при помощи этого принципа можно построить все здание механики. В «Аналитической механике» он напишет: «Таков тот принцип, которому, хоть и не вполне точно, я даю название *принцип наименьшего действия* и на который я смотрю не как на метафизический принцип, а как на простой и общий вывод законов механики. Во втором томе „Туринских записок“ можно увидеть применение, которое я дал ему для разрешения многих трудных проблем механики. Это принцип, будучи соединен с принципом живых сил и развит по правилам вариационного исчисления, даст тотчас же все уравнения, необходимые для решения каждой проблемы».

Как напишет Фурье (1768 — 1830), «Он сводит все законы равновесия и движения к одному принципу и, что не менее удивительно, он их подчиняет одному методу исчисления, изобретателем которого он сам является».

Первые астрономические работы. Мы видим, что деятельность Лагранжа начала развиваться в рамках традиционных для математики XVIII века вопросов, проблематики, находившейся в сфере интересов его старших современников Эйлера и Даламбера. Логика эпохи неминуемо должна была привести его к необходимости попробовать свои силы в небесной механике. Не было более животрепещущей проблемы, чем проблема согласования наблюдаемого движения небесных тел с законом всемирного тяготения. Было необходимо выяснить, с одной стороны, объяснимы ли в рамках этого закона несомненные отклонения от законов Кеплера, как тогда говорили, «неравенства», с другой стороны — чем вызваны различные дополнительные закономерности в небесной механике. Например, почему мы наблюдаем только одну сторону Луны? Объяснение этого феномена Парижская Академия наук выбирает в качестве темы для своей премии за 1764 г.

Надо сказать, что темы для академических премий в Париже выбирались с большим вкусом, а получение такой премии математиком, особенно молодым, было очень престижным. Работа Лагранжа удостаивается первой премии и восторженного отзыва Даламбера: «Я прочел с большим удовольствием плоды Ваших прекрасных работ о либрации, они достойны премии, которую Вам вручат».

Собственно законы движения Луны были очень точно выведены из наблюдений Кассини (1626 – 1712): ось вращения Луны неподвижна относительно поверхности, период вращения и период обращения вокруг Земли совпадают, ось вращения имеет постоянный угол с плоскостью эклиптики (земной орбиты) и, наконец, оси вращения Луны, эклиптики и лунной орбиты находятся в одной плоскости. Лагранж показывает, что из-за того, что поверхность Луны отклоняется от сферической, притяжение Земли постепенно выравнивает периоды собственного вращения Луны и вращения вокруг Земли. Лагранж близко подходит к объяснению последнего закона Кассини, что не удавалось прежде Даламберу, но ошибается в оценках. Лишь в 1780 г. ему окончательно удается обосновать теорию Кассини.

Объяснение неравенств в движении спутников Юпитера выбирается в качестве темы Парижской Академии наук за 1766 г. Решение аналогичных вопросов для Луны принесло в свое время славу Клеро (1713 – 1768) и Даламберу. В случае спутников Юпитера возникают дополнительные сложности, в частности, из-за того, что спутников несколько, а также из-за близости Сатурна. Эйлер удивлялся, что Лагранж смог справиться с этой задачей в работе, получившей премию: «Иррациональная формула, выражающая расстояние от Юпитера до Сатурна, не может быть представлена достаточно сходящимся рядом, и в этом состоит основное препятствие. Я сильно сомневаюсь, чтобы его можно было преодолеть ⟨...⟩ Сейчас мне тем более интересно знать, каким образом г-н Лагранж преодолел те же трудности в своей работе, получившей премию, и так как я не имею оснований сомневаться в успешности его решений, то можно льстить себя надеждой, что теоретическая астрономия в настоящее время доведена до наивысшей степени совершенства». Когда через 24 года Лаплас (1749 – 1827) вернулся к проблеме спутников Юпитера, чтобы закончить начатое Лагранжем, он с восхищением говорил о результатах своего предшественника, полученных при помощи «возвышенного (sublime) анализа».

Посещение Парижа. В 1766 г. Лагранжу исполнилось 30 лет. Это был важный рубеж в его жизни. Провинциальный Турин становился тесен для научной деятельности Лагранжа. В личной жизни он был непритязателен, отличался слабым здоровьем, его скромность в общении с людьми нередко приобретала форму застенчивости и даже нелюдимости. Но общение с коллегами он умел ценить и использовать. Поначалу его удовлетворяли контакты с товарищами по туринскому кружку, в работу которых он вкладывал много сил и души, но этих своих коллег он давно перерос. Не было у него систематических контактов с Фаньяно, который был стар, а в 1766 г. умер. Он вел обширную переписку, но как много дает непосредственное общение с учеными, Лагранж имел возможность убедиться во время поездки в Париж в 1755 г. Лагранж сопровождал своего друга Карачиоли, назначенного посланником в Лондон. Впрочем, до Лондона Лагранж не доехал. «Опасно заболев после обеда у аббата Нолле, на котором Нолле угощал его кушаньями, приготовленными на итальянский лад, Лагранж не мог поехать в Лондон, а остался для лечения в Париже и по выздоровлении поспешил вернуться в Турин», — вспоминал Деламбр.

Дело было в том, что в северной Италии для приготовления пищи используют касторовое масло, предварительно сильно прожаренное. На кухне у Нолле, где решили приготовить обед «на итальянский лад», воспользовались касторовым маслом без необходимой подготовки, и оно в полной мере проявило свои известные лекарственные свойства. Однако в научном плане болезнь была плодотворной. Лагранж много общается с крупнейшими французскими математиками Даламбером (1717 – 1783), Клеро, Кондорсе (1743 – 1794), но и среди менее знаменитых ученых были такие, которые остались его друзьями на всю жизнь. Лагранж неоднократно повторял, что эти полгода, проведенные в Париже, были самым счастливым периодом в его жизни.

В 1766 г. Эйлер уезжает из Берлина в Петербург, освободив место директора физико-математического класса Берлинской академии наук. Он предлагает Фридриху II в качестве своего преемника Лагранжа. Эта кандидатура была энергично поддержана Даламбером, с мнением которого король считался в еще большей степени. Лагранжу было послано приглашение с выразительной мотивировкой: «необходимо, чтобы величайший геометр Европы проживал вблизи величайшего из королей». Быть может, в отношении себя Фридрих был прав, но вряд ли при живых и работающих Эйлере и Даламбере Лагранж воспринимался как величайший геометр Европы. Вероятно, король несколько успокаивал свое уязвленное самолюбие, поскольку он не смог заполучить в свою академию Даламбера и должен был расстаться с Эйлером.

И все же несомненно, что к своему тридцатилетию Лагранж был допущен на математический Олимп. Он уже сложился как математик; основы всего, что он будет делать, были заложены, стал ясен стиль его занятий, его сильные и слабые стороны. Лагранж начал свою математическую жизнь как ученик Эйлера и Даламбера в самом высоком смысле этого слова. Он продолжал разрабатывать начатые ими проблемы, находить в них новые ракурсы, неведомые его учителям. Их восхищение было тому свидетельством. Своеобразно преломилось у Лагранжа творчество его учителей: он усваивает постановки задач, почти угаданные гениальной интуицией Эйлера, разрабатывает их до полной ясности, оттачивая необходимые понятия и технические средства, что было скорее характерно для Даламбера. И в дальнейшем сила Лагранжа будет прежде всего не в открытии новых путей, но в поразительной способности углубить, прояснить, дополнить единственно нужными штрихами картину, которую до него пытались нарисовать другие. И никакие трудности на этом пути Лагранжу не были страшны.

Лагранж в Берлине. Том «Туринских записок» за 1766 – 69 гг. еще содержит работу Лагранжа, восхитившую Эйлера: он сделал совершенно ясной природу некогда угаданной Эйлером формулы для сложения эллиптических интегралов. И, как было уже однажды, Эйлер с энтузиазмом возвращается к уже оставленному сюжету. А уже в ноябре 1766 г. Лагранж в Берлине, хотя король Сардинии неохотно расстался с ученым. Лагранж оказался в Академии не в лучшие ее дни. Здесь не было ни Эйлера, ни Даламбера, ни Мопертюи. Однако здесь работал очень оригинальный математик Ламберт (1728 – 1777), доказавший в частности, иррациональность числа π. У Лагранжа и Ламберта много точек соприкосновения в математике, чем-то они напоминают друг друга и по-человечески. Их дружба продолжалась десять лет до смерти Ламберта и была очень существенна для них обоих. Нелегко было замкнутому Лагранжу приспособиться к жизни прусского двора. Но он, в отличие от Эйлера, смог это сделать и избежать конфликтов. Лагранж ведет размеренную жизнь: внешние обязанности, встречи, переписка занимают большую часть дня, но весь вечер после обязательной прогулки отдан занятиям наукой в тишине, за закрытыми дверями. Лагранж женился и в связи с этим произошел обмен письмами с Даламбером. Даламбер: «Я узнал, что Вы сделали опасный скачок. Великий геометр должен прежде всего вычислить свое счастье. Я думаю, что результатом вычисления не было бы супружество». Лагранж: «Я не знаю, хорошо ли, худо ли я вычислил, или лучше — я совсем не вычислял, потому что я поступил бы как Лейбниц, который не мог решиться на женитьбу. Признаюсь, что я никогда не имел склонности к супружеству ⟨...⟩ надо было сделать добро одной из моих родственниц; надо было, чтобы кто-нибудь имел попечение обо мне и моих делах». Но вышло так, что Лагранжу вскоре пришлось ухаживать за женой, умиравшей от туберкулеза, и он безупречно выполнял свой долг.

«Аналитическая механика». Лагранж провел в Берлине чуть больше двадцати лет. Это была пора его зрелости, самый продуктивный период его жизни. Есть несколько великих ученых, в наследии которых есть одна главная книга («Начала» у Ньютона, «Маятниковые часы» у Гюйгенса). У Лагранжа такой книгой была «Аналитическая механика». Она вышла в 1788 году, когда Лагранж был уже в Париже. Но она вобрала в себя то главное, что было сделано в Берлине, а задумано еще в Турине.

Замысел книги лучше всего усвоить из слов самого автора: «Имеется уже несколько руководств по механике, но план этого сочинения совершенно новый. Я имел в виду привести всю теорию этой науки и искусство решения относящихся к ней задач к общим формулам, простое развитие которых давало бы все необходимые для решения всякой задачи уравнения. Я надеюсь, что тот способ, которым я старался этого достигнуть, не оставит желать ничего большего». «Это сочинение, кроме того, будет полезно и в другом отношении: оно объединит и представит с общей точки зрения различные до сих пор уже найденные принципы, служащие для решения вопросов механики, покажет их взаимную связь и зависимость и даст возможность иметь суждение об их верности и области их применимости.» Далее, об особенностях изложения: «В этом сочинении нет чертежей. Методы, в нем излагаемые, не требуют ни геометрических построений, ни механических рассуждений, для них требуются лишь алгебраические операции, подчиненные правильному и однообразному ходу. Любители анализа с удовольствием увидят, что механика становится новою его отраслью, и будут мне признательны за такое расширение его области».

Итак, коротко говоря, Лагранж собирается показать, что чисто аналитических процедур достаточно для решения механических задач (чтобы подчеркнуть это, Лагранж демонстративно не пользуется чертежами), что можно предложить «однообразные» (как мы бы сказали сегодня, алгоритмические) правила рассмотрения таких задач и что имеются простые общие принципы, на которых вся механика может быть построена. Насколько оригинальной была эта точка зрения? Можно вспомнить, что Эйлер был первым, кто в своей «Механике» 1736 г. отказался от чисто геометрических рассмотрений Ньютона в пользу аналитического метода, основанного на рассмотрении изменения координат и систем дифференциальных уравнений (Лагранж называет эту книгу «первой большой работой, в которой к учению о движении был применен анализ»). С другой стороны, вышедшая в 1743 г. «Динамика» Даламбера предваряется словами: «В настоящем сочинении я поставил себе двойную цель: расширить рамки механики и сделать подход к этой науке гладким и ровным ⟨...⟩ Одним словом, я стремился расширить область применения принципов, сокращая в то же время их число». И Лагранж очень высоко оценил трактат Даламбера: «В нем предложен прямой и общий метод, с помощью которого можно разрешить, или во всяком случае выразить в виде уравнений, все проблемы механики, какие только можно представить».

В чем же тогда новизна задуманного Лагранжем? В том, что он последовательно довел до конца намеченное его предшественниками, превратил их замечательные этюды в универсальный рабочий аппарат. Он достаточно скромно оценивает свою программу и ни в коей мере не сопоставляет себя с Ньютоном, «на долю которого выпало счастье объяснить мировую систему». Лагранж тщательно изучает и излагает на страницах «Аналитической механики» предшествующие работы. Исторические страницы являются украшением книги. Впрочем, Лагранжу ставили в упрек, что в этот обзор попали определения основных механических понятий и они оказались недостаточно проработаны.

Итак, начало своей механики Лагранж «собирает» из того, что уже сделали другие. Механика делится на статику и динамику. Мы уже говорили о двух началах статики: принципах рычага и сложения движений. К ним еще присоединяется принцип виртуальных (возможных) скоростей (его теперь чаще называют принципом виртуальных перемещений или виртуальных работ), который восходит к Галилею и разрабатывался Стевином, братьями Бернулли, Даламбером. Принцип состоит в том, что в условиях равновесия равна нулю работа всех сил на любых бесконечно малых перемещениях, совместимых со связями, наложенными на элементы механической системы. Лагранж «лишь» записывает это условие в виде аналитического уравнения и стремится доказать не только работоспособность принципа, что уже было сделано другими, но прежде всего его универсальность, достаточность для обоснования всей статики. «Получив эту общую формулу, Лагранж с искусством, едва ли не ему одному присущим и, может быть, доселе непревзойденным, развивает из этой формулы общие свойства равновесия сил и дает решение главнейших задач статики» (А. Н. Крылов). Очень поучительно также предложенное в книге обоснование принципа при помощи рассмотрения системы блоков.

Переходя к динамике, Лагранж эксплуатирует идею Даламбера о сведéнии динамики к статике. В несколько ином варианте ее на конкретных задачах разрабатывали Герман и Эйлер. Речь идет о том, что если отделить ту часть сил, которая не направлена на движение, а уравновешивается реакциями связей (Даламбер говорил о потерянных побуждениях к движению), то эти силы удовлетворяют условию на силы, под действием которых тело находится в равновесии. Исходя из этого Лагранж получает из основного уравнения для статики основное уравнение для динамики. Это эмоциональная вершина книги. Цель дальнейшего — продемонстрировать, что из основного уравнения (одной формулы!) может быть выведена вся механика.

Реализация этой программы начинается с вывода из основного уравнения всех «начал механики»: закона сохранения энергии, закона движения центра тяжести, принципа площадей. Кульминация этой части — вывод принципа наименьшего действия из основного уравнения. Лагранж понимает, что, в свою очередь, его уравнение можно вывести из принципа наименьшего действия, и, возможно, его более ранние планы состояли в построении аналитической механики на основе этого принципа. Сегодня именно этот способ построения наиболее распространен, Лагранж же предпочел начинать с основного уравнения. Возможно, здесь сыграли роль тактические соображения: современники еще не были готовы к восприятию вариационного изложения механики.

Следующая задача Лагранжа — научить работать с основным уравнением. Главное — учесть связи, наложенные на точки системы. По этой причине удобно перейти от декартовых координат точек, на которые наложены соотношения, к каким-то обобщенным координатам, которые уже могут меняться независимо. Это может быть угол отклонения маятника или широта и долгота точки, двигающейся по сфере. Лагранж показывает, что для произвольных независимых координат уравнение движения записывается через кинетическую энергию T и потенциальную энергию U системы, причем достаточно их разности $L = T - U$ — функции Лагранжа. Эти уравнения называют теперь уравнениями Лагранжа второго рода.

Уравнения первого рода относятся к случаю, когда связи не удается или нежелательно разрешать до конца, т. е. остается несколько уравнений на координаты. Лагранж показывает, как написать уравнения движения через уравнения связей, причем в эти уравнения входят величины, которые можно интерпретировать как силы реакции отдельных связей. Так впервые появились множители Лагранжа, вероятно, самый популярный элемент его математического наследия (мы еще поговорим о них ниже).

Основная часть книги посвящена реализации разработанной схемы для ряда важных конкретных ситуаций: малые колебания, движение тел под действием взаимного притяжения (в основном, небесная механика), несвободные движения (в частности, маятники), движение твердого тела.

Лагранж реалистически оценивает возможности разработанной им программы. У него нет иллюзии, что редукция механических задач к рассмотрению дифференциальных уравнений означает решение этих задач, поскольку «они (уравнения — *С. Г.*) требуют еще интегрирований, которые зачастую превышают возможности известного нам анализа». В связи с этим он разрабатывает приближенные методы и с большим вниманием относится к специальным случаям, когда интегрирование может быть явно осуществлено (это очень созвучно точке зрения современной математической физики). Под таким углом зрения он, вслед за Эйлером, рассматривает задачу о вращении твердого тела — «волчка».

Лагранж был целеустремлен в доказательстве возможности превратить механику в главу анализа, вывести всю механику из простого общего принципа. Идея дедуктивного построения механики по образцу евклидовой геометрии не была новой. Недаром Ньютон назвал свою книгу «Началами», а свои законы — аксиомами. Но никто прежде не выполнял эту программу достаточно последовательно. Всякая последовательность сопряжена с самоограничениями, которые кажутся курьезными по прошествии времени, когда доказываемые предложения уже кажутся несомненными. В самом деле, зачем было Лагранжу совсем отказываться от чертежей или во всех рассмотрениях «вести родословную» от основного уравнения? Но такова логика развития науки.

Лучше других могли оценить Лагранжа те, кто продолжал его дело. Две стороны современной механики связаны с именами Лагранжа и Гамильтона (1805 – 1865). Вот что писал Гамильтон: «Лагранж, может быть, сделал больше, чем все другие аналитики, для того, чтобы придать широту и гармонию таким дедуктивным исследованиям, показав, что самые разнообразные следствия относительно движения системы тел могут быть выведены из одной основной формулы; красота разработанного таким образом метода, высокое качество результатов делают из этого великого произведения род научной поэмы».

Замечательная особенность конструкций Лагранжа заключалась в том, что они нашли применения далеко за пределами механики. Лагранжевы уравнения появились в теории электромагнетизма. Как напишет Пуанкаре, «Чтобы доказать возможность механического объяснения электричества, нет надобности искать это самое объяснение, достаточно составить лагранжевы функции T и U, представляющие обе составные части энергии, по ним составить лагранжевы уравнения и сличить затем, согласны ли эти уравнения с законами, получаемыми экспериментально».

Труд Лагранжа был образцом для Максвелла (1831 – 1879) при создании аналитической теории электричества: «Лагранж поставил себе цель свести динамику к чистому анализу. Он начинает с выражения элементарных динамических отношений между чисто алгебраическими величинами, и из полученных таким образом уравнений он выводит свои окончательные уравнения путем чисто алгебраического процесса. Некоторые величины (выражающие взаимодействия между частями системы, поставленными в зависимость между собой физическими связями) появляются в уравнениях движения составных частей систем, и исследование Лагранжа с математической точки зрения есть метод исключения этих величин из конечных уравнений. Следя за постепенным ходом этих исключений, мы занимаемся вычислениями, оставляя в стороне динамические идеи».

Особенно эффективным средством экспансии идей Лагранжа за пределы механики стал принцип наименьшего действия: «Все обратимые процессы, будь они по природе механического, электродинамического или термического характера, все они подчинены одному и тому же принципу, дающему однозначный ответ на все вопросы, касающиеся хода процесса. Этот закон не есть принцип сохранения энергии, который хотя и приложим ко всем явлениям, но определяет их ход неоднозначно; это принцип более общий — принцип наименьшего действия» (М. Планк).

Лагранж видел свое предназначение в создании универсального языка механики. Ради этого он в максимальной степени абстрагировался от специфики конкретных задач, столь привлекательных для его великих предшественников. Позднее Пуассон (1781 – 1840) писал: «Желательно, чтобы геометры пересмотрели основные вопросы механики с физической точки зрения. Для того, чтобы раскрыть законы движения и равновесия, их нужно было рассматривать с чисто отвлеченной точки зрения; и в направлении этих абстракций Лагранж пошел настолько далеко, насколько это можно себе представить, когда он заменил физические связи внутри тел уравнениями, связывающими координаты отдельных их точек; в этом и состоит сущность его аналитической механики. Но наряду с этой замечательной концепцией можно было бы воздвигнуть теперь физическую механику».

Насыщать свою схему конкретным физическим содержанием Лагранж предоставил последующим поколениям. Разработанный им метод оказался прямо приспособленным к решению задач техники, от которых он также полностью отвлекался при создании аналитической механики. А. Н. Крылов перечисляет непосредственно последовавшие применения лагранжевой механики: теория механизмов Понселе, инженерный расчет сооружений, в частности, больших железных мостов, потребовавшихся в связи с развитием железных дорог, баллистические задачи, возникающие с переходом от гладкоствольных к нарезным орудиям (после Крымской войны), теория гироскопов. Он заканчивает: «В 1805 году под Трафальгаром корабли Нельсона громили с дистанции пистолетного выстрела и сваливались на абордаж. Под Цусимой стрельба велась на дистанцию около 7 000 *м*, в Ютландском бою — на дистанцию от 14 000 до 18 000 *м*. С тех пор дальность боя орудий значительно увеличена, а при таких дальностях, чтобы достигнуть меткости, необходим целый ряд сложных гироскопических приборов — все они рассчитываются по лагранжевым уравнениям.

Таких примеров из техники и физики можно привести неисчислимое множество, но и сказанного достаточно, чтобы видеть то значение, которое имеет знаменитое сочинение Лагранжа в общем развитии науки и техники во всех их областях, и то, насколько Лагранж был прав, что, не останавливаясь на частностях, придал своему изложению самую общую аналитическую форму; поэтому его методы одинаково приложимы и к расчету движения небесных тел, и к качаниям корабля на волнении, и к расчету гребного винта на корабле, и к расчету полета 16-дюймового снаряда, и к расчету движения электронов в атоме. Отсюда можно судить о необыкновенной гениальности создателя этих методов — Жозефа Луи Лагранжа». Эти строки были написаны в 1936 г.

Небесная механика. Среди нескольких типов механических задач, рассмотренных Лагранжем, несомненный приоритет имели задачи небесной механики. Такова была система ценностей в математике XVIII века, и ни один крупный математик не мог пройти мимо задач, связанных с согласованием закона всемирного тяготения с результатами непосредственных астрономических наблюдений. Мы видели, что Лагранж начал заниматься этими задачами еще в Турине и он энергично продолжил эти занятия в Берлине. В поле зрения Лагранжа все основные проблемы небесной механики. Он разрабатывает технику вычисления элементов орбит планет и комет по трем наблюдениям. И вновь характерная деталь: разработка метода не сопровождается ни одним конкретным вычислением орбиты. Лагранж видит свою роль лишь в решении математической задачи, после чего метод передается в руки вычислителей: «Я воздержусь от всяких подробностей, но я льщу себя надеждой, что не найдется ни одного сколько-нибудь понятливого вычислителя, который не был бы в состоянии применить к комете теорию, изложенную в этом труде». Создается впечатление, что у Лагранжа не было вкуса к конкретным задачам. Метод, не опробованный на практике, разумеется, несмотря на всю его глубину, содержал слабые места. Существенная адаптация метода к практике связана с именем Гаусса (1777 – 1855), который постоянно вычислял орбиты, причем ему приходилось торопиться, чтобы наблюдатели успели найти потерянный астероид или чтобы его вычисления удалось использовать для непосредственного наблюдения кометы. И соответствующий метод, в существенном созданный Лагранжем, связывается с именем Гаусса.

Основная трудность заключалась в том, что, как выяснилось, достаточно точное описание движения небесных тел требует учета взаимодействия сразу нескольких тел: на движении Луны реально сказывается взаимодействие не только с Землей, но и с Солнцем, в движении больших планет Сатурна и Юпитера должно проявляться их взаимное притяжение. Более того, сопоставляя данные наблюдения, начиная с древних времен, удалось выявить устойчивые отклонения от законов Кеплера — «неравенства». Необходимо было выяснить, в самом ли деле эти «неравенства» объясняются в рамках закона всемирного тяготения «вмешательством» третьих тел. Пафос «Начал» Ньютона был не только в том, что он вывел законы Кеплера из закона всемирного тяготения, но и в том, что ему удалось в рамках этого закона объяснить некоторые «неравенства» в движении Луны. Эстафету Ньютона приняли Эйлер, Клеро, Даламбер. Объяснение неравенств оказалось делом трудным, и не раз отчаявшиеся ученые начинали сомневаться в универсальности закона всемирного тяготения.

Самое естественное было бы явно решить задачу трех тел: описать движение тройки тел, взаимодействующих согласно закону всемирного тяготения. Довольно скоро стало ясно, что, по-видимому, это сделать невозможно, но Лагранж в работе 1772 г.

максимально проясняет ситуацию. С огромным искусством он показывает, что исходную систему дифференциальных уравнений 18 порядка можно преобразовать к системе 6 порядка, но вид этой системы уже не оставлял никаких надежд на дальнейший успех. А затем он выделяет случаи, когда интегрирование может быть выполнено: в одном случае все три тела в начальный момент времени находятся на прямой, в другом — в вершинах равностороннего треугольника при специальных соотношениях на остальные параметры. Лагранж рассматривает эти уравнения ради чистой любознательности, но про них вспомнили, когда выяснилось, что каждый из астероидов юпитеровой группы образует вместе с Юпитером и Солнцем треугольник, близкий к равностороннему.

Следующая возможность заключалась в том, что в тройке тела обычно неравноправны, и естественно рассматривать парное взаимодействие, на которое накладывается возмущение, исходящее от третьего тела. И Лагранж начинает систематически разрабатывать математическую теорию возмущений, основы которой уже были заложены его великими предшественниками. При возмущении естественно считать, что орбита остается эллиптической, но несколько варьируются ее параметры. Выделяют два типа возмущений: периодические и вековые. Периодические возмущения существенно зависят от положения тела на орбите, и они со временем в среднем компенсируются. Вековые возмущения определяются лишь взаимным положением орбит в целом, они могут накапливаться и приводить к неустойчивости Солнечной системы. Именно последнее обстоятельство было причиной пристального интереса к вековым возмущениям. С другой стороны, для изучения возмущений на сравнительно коротких отрезках времени (что необходимо в случае периодических возмущений) было еще недостаточно наблюдательного материала, в то время как для изучения вековых возмущений реально воспользоваться неточными наблюдениями древних. Периоды возмущений могут сильно превышать периоды обращения, и долгопериодические возмущения могут выглядеть как вековые. Важнейшая задача — научиться различать их.

Лагранж, занимаясь проблемой вековых возмущений, отступил от своей привычки и постоянно ориентировался на явные числовые примеры. Этими проблемами он занимался параллельно с более молодым, но уже зарекомендовавшим себя Лапласом (1749 – 1827). Они чрезвычайно отличались по стилю занятий наукой. Для Лапласа ориентирами были совершенно конкретные задачи небесной механики, и метод для него был лишь средством достижения конкретных целей. Его никогда не привлекало вычленение метода в чистом виде, его совершенствование вне потребностей конкретных задач. При работе над близкими задачами выявлялись сильные и слабые стороны каждого из великих ученых. Лаплас показывает, что в первом порядке отсутствуют вековые возмущения для больших полуосей орбит Юпитера и Сатурна (а кандидаты на эту роль оказались долгопериодическими с огромным периодом). Лаплас уверен в справедливости аналогичного утверждения для всех планет, и, хотя это не означало бы доказательства устойчивости Солнечной системы (возмущения рассматривались лишь в первом порядке), это несомненно был бы серьезный шаг в этом направлении. Лаплас безуспешно пытается найти общее доказательство, а Лагранж при помощи своего общего метода получает доказательство, как выразился Якоби, «росчерком пера».

А вот противоположный пример. Лагранж потратил много сил, пытаясь объяснить вековое ускорение среднего движения Луны, обнаруженное в 1693 г. Галлеем (1656 – 1742), первооткрывателем значительного числа известных к тому времени «неравенств». Лагранж пробует использовать свой излюбленный трюк с неполной сферичностью Луны, затем аналогичным свойством Земли. Попробовав все казавшиеся ему мыслимыми возможности, Лагранж приходит к выводу, что либо наблюдения древних содержат принципиальные огрехи, либо вообще этот эффект необъясним в рамках закона всемирного тяготения. Одновременно он разработал технику учета членов высшего порядка при рассмотрении вековых возмущений. Он обнаружил, что в случае Юпитера и Сатурна эти члены несущественны, и экстраполировал это наблюдение на все остальные случаи. Лаплас, имевший существенно больший вычислительный опыт, понял, что ситуация со спутниками из-за их быстрого вращения может быть существенно иной. Он вначале обнаружил, что члены, открытые Лагранжем, дают существенный вклад для спутников Юпитера, а затем, проделав те же вычисления для Луны, получил ускорение Галлея.

Плодотворное научное сотрудничество Лагранжа и Лапласа не переросло в ссору лишь благодаря удивительной тактичности и выдержке Лагранжа. Честолюбивый, увлекающийся Лаплас неоднократно давал повод к обиде необоснованными претензиями и даже некорректными поступками. Характерный эпизод произошел в 1774 г., когда Лаплас, живший в Париже, ознакомился с посланной туда работой Лагранжа о вековых возмущениях до ее опубликования. Он быстро увидел дополнительные возможности и опубликовал свою статью, опередившую статью Лагранжа. Лаплас предваряет статью словами: «Я не взялся бы за это дело, если бы не прочитал превосходную работу г. Лагранжа, присланную в Академию и имеющую появиться в следующих томах». Он добавляет различные аргументы в пользу своей торопливости, говорит о желании поскорее познакомить публику со всеми возможностями метода Лагранжа, но его нетактичность сомнений не вызывает. А Лагранж... поблагодарил Лапласа за усовершенствование его метода, поскольку «от этого науки смогут лишь выиграть». В 1779 году Лагранж писал Лапласу: «Я рассматриваю ссоры как совершенно бесполезные для преуспеяния науки и как ведущие только к потере времени и покоя». Всю свою жизнь он неукоснительно следовал этому правилу.

Арифметические работы. Хотя во весь берлинский период механика была главным делом Лагранжа, в его поле зрения попадают и другие математические вопросы, в том числе несколько арифметических задач. Он занимался ими под несомненным влиянием Эйлера. Арифметике посвящено всего 9 небольших работ. Они носят характер самостоятельных этюдов, это маленькие шедевры, за которыми не просматривается намерения создать большое полотно (что было характерно для его занятий механикой).

Быть может, это были упражнения в часы отдыха от главного дела жизни. Итак, Лагранж идет по следам Эйлера: он доказывает, что в периодическую цепную дробь разлагаются квадратичные иррациональности и только они (утверждение Эйлера, оставленное без доказательства), продолжает исследование уравнения Ферма-Пелля, занимается квадратичными вычетами, несколько продвинувшись в доказательстве квадратичного закона взаимности, сформулированного Эйлером. Поучительно доказательство теоремы Вильсона ($(p-1)!+1$ делится на p для простого p), основанное на связи с малой теоремой Ферма и по существу использующее многочлены над конечным полем. Популярна теорема Лагранжа о приближении вещественных чисел рациональными. Наиболее известный арифметический результат Лагранжа утверждает возможность представить любое натуральное число можно в виде суммы не более четырех квадратов. Это утверждение восходит к Ферма, и его, по-видимому, пытался доказать Эйлер.

Алгебраические размышления. Проблемы алгебраических уравнений и их систем занимали Лагранжа в разных аспектах. Некоторые задачи были инспирированы его занятиями небесной механикой. Он интересовался и приближенным вычислением корней, и отделением корней, и исключением неизвестных из системы алгебраических уравнений. Но одна из работ Лагранжа, по словам Коши, знаменовала начало новой эры в алгебре.

В 1770–71 гг. вышел мемуар «Размышления об алгебраическом решении уравнений», несомненно задуманный еще в Турине. Собственно, это целая книга, занимающая более 200 страниц. Наряду с «Аналитической механикой», это вершина творчества Лагранжа.

В XVI веке подряд были открыты формулы для решения уравнений 3 и 4 степеней, а потом два века не удавалось найти формулу для уравнения 5 степени. Появлялось немало замечательных задач, которые отвлекали математиков от этой загадочной проблемы. Однако немало достойных математиков, среди них — Лейбниц (1646 – 1716) и Эйлер, не теряли надежды. Все чувствовали, что хорошо бы вместо того, чтобы искусственно получать формулу для каждой степени, как это было фактически, найти единый прием, который годится для всех степеней. Чирнгауз (1651 – 1708) сообщает своему другу Лейбницу, что ему удалось придумать универсальную подстановку, которая преобразует общее уравнение n-й степени в двучленное $y^n + a = 0$ (а ведь это и нужно для решения в радикалах!). Эта подстановка дает известную формулу для $n = 3$ и годится для $n = 5$. Лейбниц вынужден огорчить друга: при $n = 5$ для нахождения коэффициентов подстановки придется решать уравнения более высокой степени, чем 5. Потом Эйлер обнаружил, что при $n = 3$ и $n = 4$ формулу удается получить, делая подстановки вида $x = \sqrt[n]{A} + \ldots + \sqrt[n]{F}$, но продвинуться дальше и ему не удалось.

Ситуация несомненно требовала более глубокого продумывания, и кому, как не Лагранжу, было взяться за это дело. Ведь он уже проявил себя непревзойденным мастером добираться до глубинного существа проблемы, выявлять общую структуру там, где другим видятся разрозненные ситуации. Он начинает с исследования формул при $n \leqslant 4$, обращая особое внимание на выражения, стоящие под знаками радикала n-й степени. Для квадратного уравнения $x^2 + ax + b = 0$ это $\Delta = \dfrac{a^2}{4} - b$, для кубического $x^3 + ax + b = 0$ это $\Delta_{\pm} = -\dfrac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{b}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{3}\right)^3}$ (причем $x = \sqrt[3]{\Delta_+} + \sqrt[3]{\Delta_-}$). Величины $\Delta_{\pm}$ являются корнями квадратного уравнения, коэффициенты которого рационально (т. е. при помощи арифметических операций) выражаются через коэффициенты исходного уравнения. Лагранж ищет выражение $\Delta_{\pm}$ через корни x_1, x_2, x_3 и замечает, что $\Delta = x_1 + x_2\varepsilon + x_3\varepsilon^2$, где ε — какой-то корень уравнения $y^3 = 1$, отличный от 1.

Здесь следует остановиться и обсудить, какой же корень имеет в виду Лагранж. Сегодня ответить на это вопрос не представляет труда, поскольку имеются два комплексных корня $\varepsilon_{\pm} = -\dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, но Лагранж не имел возможности работать с комплексными корнями (этому в нужном объеме научились позднее).

И все же он решительно оперирует с «воображаемыми» корнями в твердой уверенности, что у кубического уравнения всегда три корня (с учетом кратностей). Н. Бурбаки пишет: «Лагранж, как Эйлер и все их современники, без всяких сомнений формально оперирует с „полем корней“ многочлена (или, говоря его языком, рассматривает „воображаемые корни“ этого многочлена), хотя математика его времени не содержала ничего, что могло бы оправдать такой способ рассуждений. Поэтому Гаусс, который с самого начала был решительным противником безудержного формализма XVIII века, со всей силой обрушивается в своей диссертации на это злоупотребление».

Итак, два корня из 1 дают $\Delta_\pm$. На самом деле мы не имеем возможности различить заранее корни x_1, x_2 x_3, но, как бы мы их ни занумеровали, функция $\Delta(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2\varepsilon + x_3\varepsilon^2$ при любых их перестановках (а их $3! = 6$) будет принимать только два значения $\Delta_\pm$. Это — решающее наблюдение Лагранжа! Для квадратного уравнения $\Delta = (x_1 - x_2)^2$ и вообще не меняется при перестановке корней. В случае уравнения 4 степени под радикалом 4 степени возникают выражения вида $x_1x_2 + x_3x_4$, где x_j — корни, и они при $4! = 24$ способах нумерации корней могут принимать только три различных значения.

При этом легко проверяется, что если имеется функция, рационально выражающаяся через корни уравнения n-й степени и принимающая только q значений при всевозможных перестановках корней, то эта функция является корнем уравнения степени q, коэффициенты которого рационально выражаются через коэффициенты исходного уравнения. Это наблюдение Лагранж называет «истинным принципом и, так сказать, метафизикой уравнений 3 и 4 степени». Именно поэтому решение кубического уравнения сводится к квадратному, а уравнения 4 степени — к кубическому.

Выходит, надо искать рациональные функции от корней, которые принимают $q < n$ значений при всевозможных перестановках. Но этому очень мешает быстрый рост числа перестановок с ростом n. Прежде всего можно заметить, что коэффициенты исходного уравнения являются рациональными функциями корней, вообще не меняющимися при перестановках корней ($q = 1$), но надо искать менее тривиальные возможности. Лагранж называет резольвентами выражения $x_1 + x_2\varepsilon + \ldots x_n\varepsilon^{n-1}$, где $\varepsilon \neq 1$ — корень из единицы, наподобие тех, что участвовали в формулах для квадратного и кубического уравнения. Их отсутствие для биквадратного уравнения естественно связать с непростотой числа 4. Можно было ожидать, что что резольвенты должны были бы появиться и в формулах для уравнений более высокой степени, но вот что показывают вычисления: функция $\Delta(x_1, \ldots, x_n)$ принимает при перестановках $(n-1)!$ значений. Имеем $(n-1)! < n$ при $n \leqslant 3$. Итак, Δ — корень уравнения степени $(n-1)!$ с коэффициентами, рационально выражающимися через исходные.

Можно видоизменить это утверждение для простого n: Δ являются корнями уравнения степени $n-1$, коэффициенты которого, в свою очередь, суть корни уравнения степени $(n-2)!$ с коэффициентами, рационально выражающимися через исходные. В случае $n = 5$ коэффициенты уравнения 4 степени являются корнями уравнения 6 степени. Становится понятно, откуда возникали уравнения больших степеней в построениях Чирнгауза и Безу! Вывод Лагранжа: «Отсюда следует, что весьма сомнительно, чтобы методы, которые мы рассмотрели, могли дать полное решение уравнения пятой степени».

Далее естественно не ограничиваться резольвентами и выяснить, нет ли других функций от корней, принимающих небольшое число q значений. Ради этого Лагранж исследует группу перестановок, по существу закладывая основы теории групп. Как только появилась групповая терминология, ряд утверждений Лагранжа автоматически превратился в теоремы теории групп. Пусть функция $\delta(x_1, \ldots, x_n)$ от корней принимает при перестановках q значений; тогда имеется подмножество (подгруппа!) из $n!/q$ перестановок, которые функцию δ не меняют. Отсюда следует, в частности, что q — делитель $n!$. Поэтому существенно изучить подгруппы в группе перестановок. Если описать все «большие» подгруппы в этой группе, а именно подгруппы из $5!/q$ элементов, где $1 < q < 5$, то будут описаны все функции от корней, принимающие $q < 5$ значений. Здесь Лагранж остановился.

Он не сомневается, что это единственный способ получения формул, но окончательных результатов не получает: «Вот, если я не ошибаюсь, истинные принципы решения уравнений и анализ, наиболее пригодный, чтобы привести к решению; как мы видели, все сводится к некоторому исчислению комбинаций, с помощью которого получаются априори результаты, которые следует ожидать».

Группу перестановок подробно исследовал Коши. Руффини (1765 – 1822) доказал отсутствие нетривиальных функций от корней уравнений 5 степени, принимающих меньше 5 значений, будучи уверен, что он доказал неразрешимость уравнения 5 степени в радикалах. Однако оставалось доказать, что существование таких функций в самом деле необходимо для существования нужной формулы. Полное доказательство неразрешимости дал Абель (1802 – 1829). А перед этим была работа Гаусса о построении правильных многоугольников циркулем и линейкой или, что эквивалентно, о выражении корней уравнения $y^n - 1 = 0$ при помощи квадратных радикалов. В ней головоломные трюки с перестановками корней позволили решить задачу двухтысячелетней давности. Проблема разрешимости алгебраических уравнений нашла окончательное решение в теории Галуа (1811 – 1832). Но первым был Лагранж... Впрочем, связь корней с перестановками примерно в то же время обнаружил Вандермонд (1735 – 1796). Хотя он и сделал меньше, он увидел главное, и несправедливо, что в истории математики тень Лагранжа заслонила заслуги этого ученого.

Кризис. Математика была единственной страстью Лагранжа, и ее было достаточно, чтобы заполнить всю его жизнь, доставить ему немало счастливых минут. Все было подчинено занятиям наукой. Деламбр передает отношение Лагранжа к музыке: «Я ее люблю, поскольку она меня изолирует; я слышу первые три такта, на четвертом такте не различаю ничего, я предаюсь своим размышлениям, ничто меня не прерывает, и тогда я решаю наиболее трудные из проблем». Для Лагранжа было характерно, что великие цели познания истины, мировой гармонии не переплетались у него с личными амбициями, с желанием соревноваться, обгонять современников. Если он узнавал, что кто-то успешно занимается проблемой, над которой он сам думал, он немедленно прекращал размышления с искренним ощущением «освобождения от обязанности». Благодаря этому Лагранжу было присуще необычайное душевное равновесие, дававшее силы стойко переносить тяготы жизни, не прекращать напряженных занятий.

Лишь одно могло поколебать Лагранжа — потеря ориентиров, неуверенность в выборе правильных целей. И это ощущение начинает появляться вскоре после переезда в Берлин. В 1772 г. он пишет Даламберу: «Не кажется ли Вам, что высшая геометрия близится отчасти к упадку, ее поддерживаете только Вы и Эйлер». Это пишет ученый, который находится в расцвете сил (ему 36 лет), у которого начинает складываться его «Аналитическая механика», и который только что опубликовал алгебраический мемуар, определивший развитие алгебры на 100 лет вперед!

Это высказывание заслуживает обдумывания. Разумеется, Лагранж видел, чем ему заниматься в ближайшие 10 – 15 лет, но более далекие перспективы представлялись ему сомнительными. А возможно, стали сказываться особенности стиля занятий Лагранжа. Он наметил основные направления в молодости, с известной долей консерватизма следовал им, и не без оснований надеялся на выполнение поставленных задач в обозримом будущем. Вероятно, ощущение конца математики не могло возникнуть у Эйлера, который всю свою долгую научную жизнь активно искал новые задачи, переходил от одной задачи к другой, не боясь многое оставить незавершенным. Стоит обратить внимание, что Лагранж не решается поставить себя в один ряд с Эйлером и Даламбером. Это не проявление формальной скромности. Характерно также, что он завидовал своим современникам, которые легко умели находить новые задачи, например, Монжу (1746 – 1818): «Этот черт Монж всегда полон новых и смелых идей» или «Этот пострел со своей теорией образования поверхностей идет к бессмертию».

Ощущение заката математики не покидает Лагранжа. 21 сентября 1781 г. он опять пишет Даламберу: «Я начинаю чувствовать силу моей инерции, которая понемногу увеличивается, и я не могу сказать с уверенностью, что в течение будущего десятилетия я еще буду заниматься математикой. Я думаю также, что шахта становится слишком глубока, и что ее придется рано или поздно бросить, если не будут открыты новые рудоносные жилы. Физика и химия представляют ныне сокровища гораздо более блестящие и более легко эксплуатируемые; таким образом, по-видимому, все всецело обратились в эту сторону, и возможно, что места по геометрии в Академии Наук сделаются когда-нибудь тем, чем являются в настоящее время кафедры арабского языка в университетах».

Может возникнуть естественное недоумение. Что касается аналитической механики, то намеченное близилось к концу, но в алгебре пока лишь был разработан язык, получены прикидочные результаты, но программа еще была достаточно неопределенной, и нужно было разворачивать работу. Но таковы законы психологии научного творчества: один человек не может двигаться по трудной дороге бесконечно далеко. Материал должен был отстояться, да и нужен был результат типа результата Гаусса, подтвердившего на примере высокую эффективность работы с перестановками корней. Для Абеля и Галуа принципиальна была и работа Лагранжа, и работа Гаусса.

В Париже. Предчувствие не обмануло Лагранжа. В 1787 году, вскоре после смерти Фридриха II, он переехал в Париж и, по существу, прекратил активные занятия математикой. Лагранжу 51 год. В один 1783 год мир лишился и Эйлера, и Даламбера. Лагранжа восторженно встречают французские ученые, теперь он несомненно «первый геометр Европы», и лишь Лаплас может всерьез конкурировать с ним. К Лагранжу неравнодушны при дворе. Он необычно легко отвлекается от геометрии в пользу занятий философией, химией, историей, медициной. Может быть, Лагранж надеялся начать новую жизнь в науке? Обстановка в Париже располагала к разнообразной научной деятельности. Процветали научные кружки, были популярны контакты между учеными разных специальностей. Особенно активен в установлении таких связей был химик Лавуазье (1743 – 1794). Ученые активно интересовались общественными проблемами, ролью науки в жизни государства.

Лагранж не оставил математику: еще будут появляться его работы, он будет активно интересоваться работами других, мы будем еще говорить о его педагогической деятельности, об оригинальных учебниках, но пик его научной деятельности уже прошел. К тому же вскоре наступило время, когда большинство французских ученых (за исключением, возможно, Лапласа) прервали свои обычные занятия.

Впереди была революция, в которой ученые приняли самое активное участие. Никогда прежде не представлялась для них возможность непосредственно влиять на жизнь страны. Они входят в муниципалитет, Учредительное и Законодательное собрания; астроном Байи становится мэром Парижа, математик Лазар Карно возглавляет оборону Франции (его называли «организатором побед»), а Монж становится морским министром. Резко активизировалась и деятельность ученых, направленная на решение практических задач.

Лагранж держится в стороне от политики. Закон 1793 г. предписывает иностранцам покинуть Францию, но специальный декрет Комитета общественного спасения делает для Лагранжа исключение. В самые трудные дни он не покидает Франции, разделяя судьбу своих коллег. Участие в политической жизни стоило жизни Байи и Кондорсе. Лавуазье был казнен как откупщик. Лагранж пристально наблюдает за происходящим. Деламбр сохранил слова Лагранжа, сказанные после гильотинирования Лавуазье: «Нужен был один момент, чтобы снести эту голову, и, может, будет недостаточно ста лет, чтобы появилась подобная».

Как ученый, Лагранж добросовестно выполняет все поручения. Постепенно размножились многочисленные комиссии и бюро, в которые было принято включать ученых. Он занимается проблемами ремесленных промыслов, измерением долготы на море, оценивает запасы хлеба и мяса в стране, чтобы оценить вероятность возникновения голода. Пишет работу с расчетом взрывной силы пороха в орудийном стволе (она не было опубликована при жизни автора, возможно, это была одна из первых засекреченных научных работ).

Особенно энергично ученые были включены в работу Комиссии мер и весов. Сегодня непросто уяснить, почему во время голода и разрухи, при постоянной военной опасности такое колоссальное внимание уделялось реформе системы мер и весов. Разнобоем в системе мер объясняли многие беды, с большим эмоциональным накалом говорили о том, что несовершенство мер — средство эксплуатации народа. Еще одна сторона дела заключалась в том, что неудобство системы мер — проблема интернациональная, и удачно созданная система могла бы послужить укреплению престижа революции на международной арене. С этой точки зрения важно было выбрать единицы, не связанные ни с какими национальными традициями. Епископ города Отена Талейран, будущий наполеоновский дипломат, предложил воспользоваться идеей, восходящей к Гюйгенсу, и взять за основу длину секундного маятника, т. е. маятника с периодом колебаний, равным одной секунде. Но восторжествовала идея принять за единицу длины долю меридиана.

Работы были задуманы на высочайшем уровне. Лавуазье и Гаюи измерили вес воды; начались геодезические измерения, на которые не было средств, им мешали взаимоотношения с Испанией, да и положение на местах в самой Франции. Но революционному конвенту не терпелось ввести систему мер «на все времена, всем народам» (девиз, позднее выгравированный на эталоне метра). Проблемы метрической системы обсуждаются в Конвенте в 1793 г. наряду с самыми острыми вопросами. Комиссия обвиняется в медлительности, и некоторые ее члены изгоняются «по недостатку республиканской добродетели и ненависти к тиранам» — такого обвинения могло хватить для того, чтобы попасть на гильотину!

Обязанности Лагранжа в комиссии носили не столь острый, теоретический характер. Он занимался выбором базиса для новой системы и предлагал взять за основу простое число 11. Он считал важным, чтобы какие-то доли основной единицы не превратились со временем в самостоятельные единицы. В конечном счете все было построено на основе десятичной системы.

Закрытая на время Академия возрождается в виде Института Франции, и Лагранж стоит во главе физико-математического разряда.

Педагогическая деятельность. Революционная Франция в бурные, богатые переменами 1793–95 годы много внимания уделяла реформе образования. «После хлеба просвещение есть важнейшая потребность народа» — провозгласил Дантон. О народном образовании думали не меньше, чем о снабжении народа хлебом. Организуются Нормальная школа для подготовки учителей и Политехническая школа (первоначально она называлась Центральная школа общественных работ) для подготовки военных инженеров. Никогда прежде не занимавшийся преподаванием Лагранж с увлечением читает лекции в обеих школах. При его интересе к продумыванию основ, лекции — повод заново осмыслить современную математику, ее фундаментальные понятия, связи между различными областями. Из лекций родились его книги: «Теория аналитических функций» в 1797 г. и «Лекции по исчислению функций» в 1801 г.

Основной замысел Лагранжа красноречиво характеризует полное название первой книги: «Теория аналитических функций, содержащая начала дифференциального исчисления, освобожденные от всякого рассмотрения бесконечно малых, исчезающих, пределов и флюксий и сведенные к алгебраическому анализу конечных величин». Дело в том, что почти два века математики решительно пользовались бесконечно малыми, хотя понятие это оставалось расплывчатым и не существовало убедительных обоснований правил работы с ними. Однако было несомненно, что разработанный формализм позволяет получать правильные результаты, которые на другом пути получать не удавалось, и отказаться от языка бесконечно малых (что предполагалось поначалу) было уже невозможно. Непозволительно долго ситуация оставалась запутанной.

В 1784 г. Берлинская академия предлагает в качестве темы для конкурса построить «ясную и точную теорию того, что в математике называют бесконечным. Известно, что высшая геометрия постоянно принимает бесконечно большие и бесконечно малые. Однако древние геометры и даже аналисты тщательно избегали всего, что касается бесконечного, и великие современные аналисты признают, что выражение „бесконечная величина“ противоречиво. Академия поэтому желает получить объяснение того, как из противоречивого допущения было выведено столько истинных теорем, и чтобы был указан верный, ясный, словом — подлинно математический принцип, который мог бы заменить бесконечное, не делая слишком трудными или долгими производимые при помощи этого средства исследования». Инициатором конкурса, несомненно, был Лагранж.

Его точка зрения заключалась в том, что понятие бесконечно малой в самом деле является противоречивым, но исчисление построено так удачно, что возникающие ошибки взаимно компенсируются и всегда получается правильный ответ. Еще во II томе «Туринских записок» за 1760 – 61 г. Лагранж писал, что исчисление «исправляет само собой принимаемые в нем ложные допущения». Как писал Клейн (1849 – 1925), он «отказывался от анализа как от общей дисциплины, понимая под ним просто собрание формальных правил, относящихся к частным специальным функциям», и «такое самоограничение устраняло для того времени целый ряд затруднений». Итак, точка зрения Лагранжа состояла в том, что сделать исчисление бесконечно малых содержательным принципиально нельзя, что нужно смотреть на него формально, каким-то образом убедиться, что ошибки в самом деле компенсируются, и спокойно пользоваться исчислением.

Мы вновь сталкиваемся с готовностью математиков XVIII века иметь дело с чисто формальными процедурами (мы уже говорили о работе с «воображаемыми» корнями уравнений). В XX веке аналогичная точка зрения возродилась в рамках программы Гильберта обоснования математики, в которой бесконечности воспринимаются как формальные объекты, и нужно лишь убедиться в непротиворечивости правил обращения с ними с тем, чтобы быть уверенными в правильности полученных при их помощи высказываний о конечных объектах.

Прогноз Лагранжа не оправдался. Содержательное обоснование анализа на основе пределов было к тому времени уже далеко продвинуто Даламбером. Но Лагранж, как видно из названия книги, отверг это обоснование вместе со всеми другими. Его замысел очень интересен. Он замечает, что нет проблемы в построении правил дифференцирования для многочленов, и на таком же алгебраическом языке можно строить дифференциальное исчисление для функций, разложимых в бесконечные степенные ряды. Лагранж, как и его предшественники, уверен, что всякая функция допускает такое разложение (лишь Коши опроверг это мнение). Лагранж опирается на свою интуицию аналитика-практика, которая подсказывала, что все функции, встречающиеся в приложениях, допускают разложение в ряд. Через сто лет на этом пути строил теорию аналитических функций комплексного переменного Вейерштрасс, однако как способ обоснования анализа вещественных функций эта программа оказалась несостоятельной. Н. Бурбаки пишет: «Монументальная работа Лагранжа представляет попытку основать анализ на одной из наиболее спорных концепций Ньютона, именно на той, в которой спутаны понятия производной функции и функции, разложимой в степенной ряд, и извлечь из него (ряда — *С. Г.*), рассматривая коэффициент первого порядка в ряде, понятие дифференцирования. Разумеется, такой математик, как Лагранж, не мог не получить при этом важных и полезных результатов, как, например (способом, не зависящим от исходного предположения, о котором мы говорили), общее доказательство формулы Тейлора с остаточным членом в виде интеграла и его оценкой посредством теоремы о среднем. Работа Лагранжа явилась к тому же исходным пунктом метода Вейерштрасса теории функций комплексного переменного, так же как и современной теории формальных степенных рядов. Но с точки зрения его непосредственной цели она является скорее шагом назад, чем продвижением вперед».

Показательно, что Лагранж никогда не путал проблемы обоснования анализа с построением собственно анализа, его применениями. В предисловии ко второму изданию «аналитической механики» (1811 г.) Лагранж пишет: «Мы сохранили обычные обозначения дифференциального исчисления, так как они соответствуют системе бесконечно малых величин, принятой в настоящем трактате. Если дух этой системы хорошо усвоен, и если в точности его результатов убедились с помощью геометрического метода первых и последних отношений или с помощью аналитического метода производных функций, то бесконечно малые величины можно применять в качестве надежного и удобного средства для сокращения доказательств».

На страницах «теории аналитических функций» впервые появился знаменитый метод Лагранжа нахождения условного экстремума. При нахождении наибольшего и наименьшего значения функции от нескольких переменных, скажем, $f(x, y)$, неминуемо возникает задача о нахождении экстремума при каком-то условии на переменные, например, $\varphi(x, y) = 0$, причем не всегда удобно переходить к меньшему числу параметров. Нахождение экстремума функции одного переменного на отрезке сводится к сравнению значений функции во внутренних стационарных точках и на концах. Для нахождения экстремума в области D многих переменных нужно сравнить значения f во внутренних стационарных точках и значения на границе, но граница уже не состоит из двух точек, и возникает задача об условном экстремуме на границе. Однако это только одна из многочисленных ситуаций, где возникает условный экстремум.

Лагранж замечает, что указанная выше задача сводится к нахождению таких λ, что функция $f + \lambda\varphi$ имеет стационарные точки при $\varphi = 0$. Возникает система уравнений для нахождения этих точек. Аналогично рассматривается случай любого числа переменных и условий. «Метод неопределенных множителей Лагранжа» был навеян результатами Лагранжа о механических системах со связями. В приложениях множители Лагранжа часто допускают содержательную интерпретацию. Сегодня сфера применения идеи Лагранжа расширилась. В частности, ее развитием является линейное программирование, а применительно к экономическим задачам множители Лагранжа часто удается интерпретировать на языке цен.

Последние годы. При директории и консулате положение Лагранжа упрочилось. В годы империи он становится графом, сенатором, кавалером ордена Почетного Легиона. Наполеон не был равнодушен к математике и хорошо понимал истинную цену Лагранжу. Будни императора оставляли ему мало времени для покровительства наукам. Он ограничивался раздачей наград да короткими характеристиками, непосредственно предназначавшимися для истории. Лагранжа он назвал «Хеопсовой пирамидой науки».

10 апреля 1813 г. Лагранж умер. Деламбр вспоминает, с каким удивительным умиротворением встретил он свой последний час:

«Я почувствовал, что умираю; мое тело ослабело мало-помалу, мои духовные и физические способности незаметно угасают; я с любопытством наблюдаю постепенный прогресс уменьшения сил, и я достигну конца без сожаления, без печали, ибо спуск очень отлогий ⟨...⟩ Я завершил свой путь; я снискал некоторую известность в математике. Я не питал к кому-либо злобы, я никому не сделал плохого, и я хочу кончить свой путь».

В свой бурный век Лагранж смог прожить размеренную жизнь. Современники затруднялись припомнить детали, которые могли бы оживить его биографию. Про него не рассказывали анекдоты, как про Лапласа. А. Н. Крылов замечает, что история с обедом на итальянский лад в Париже (рассказанная выше), возможно, была единственным приключением в жизни Лагранжа. Вспоминали, что Лагранж помог улучшить положение Ламберта в Берлине, что он не побоялся в грозном 1793 году заступиться за Деламбра, которого хотели выгнать из комиссии мер, что он трогательно заботился о Пуассоне, когда тот был его учеником в Политехнической школе, что он умел удивительно слушать собеседника. А иногда возникает маленький, но выразительный штрих: все существо Лагранжа «было проникнуто тихой иронией».

И неожиданно именно этот скромный человек стал восприниматься как образец великого ученого и человека, причем не только математиками. Гёте писал: «Математик совершенен лишь постольку, поскольку он является совершенным человеком, поскольку он ощущает в себе прекрасное, присущее истине; только тогда его творчество становится основательным, чистым, ясным, одухотворенным, действительно изящным. Все это требуется, чтобы уподобиться Лагранжу». И в другом месте: «Лагранж был безупречным человеком и именно поэтому и великим. Если безупречный человек наделен талантами, то он всегда становится благом человечества, носителем счастья и благородства, будь то художник, исследователь природы, поэт или кто-либо другой».

Эйлер и Лагранж воспринимаются сегодня как величайшие математики XVIII века, учитель и ученик, дарования которых поразительно дополняли друг друга. Эйлер, стремившийся заглянуть как можно дальше вперед, говорить о вещах, для которых еще нет подходящего языка, оставить потомкам задачи, которые долго будут служить ориентирами, и Лагранж, во всем добиравшийся до глубинных структур, стремившийся создать картину, лишенную белых пятен, передать последующим поколениям язык и методы, которые долгое время будут достаточны для решения новых задач.

ПЬЕР-СИМОН ЛАПЛАС

> Канцлер императорского Сената, получавший более 100 тысяч ливров годовой ренты, с неменьшим усердием, чем простой академик, Лаплас стремился увязать все неправильности и возмущения в движении светил с принципом всемирного тяготения, распространить метод математического анализа на явления земной физики и подчинить своим формулам явления общественной жизни, в которых обыватель видит тайну или слепой случай. *Араго*

5 марта 1827 года в 9 часов утра умер маркиз Лаплас, пэр Франции, один из первых кавалеров ордена Почетного Легиона, удостоенный высшего отличия ордена — Большого Креста. «То, что мы знаем, так ничтожно по сравнению с тем, чего мы не знаем» — были последние его слова. Лапласа называли «французским Ньютоном»; умер он ровно через сто лет после смерти Ньютона, бывшего его кумиром.

Посмертные почести Лапласу отдавались с некоторой растерянностью. В речи Фурье говорилось: «Может быть, мне следовало бы упомянуть об успехах Лапласа на поприще политической деятельности, но все это несущественно: мы чествуем великого математика. Мы должны отделить бессмертного творца „Небесной механики“ от министра и сенатора». Окружающих смущало, что Лаплас успел побыть республиканцем и монархистом, атеистом и католиком, получать почести при империи и после Реставрации. (Впрочем, бывший якобинец Фурье тоже впоследствии стал бароном.)

Бомон – Париж, 1749 – 1789. Будущий маркиз родился 23 марта 1749 года в семье крестьянина в маленьком Бомоне (Нормандия).

Позднее он неохотно говорил о своем детстве и после 21 года никогда не виделся с родителями. Благодаря неизвестным покровителям Лаплас заканчивает колледж Ордена бенедиктинцев. В 17 лет он уже преподает математику в военной школе.

Пьер-Симон Лаплас

Лаплас начинает интенсивно заниматься математикой и механикой; в 1770 году, запасшись рекомендательным письмом к великому Даламберу, он отправляется в Париж. Ему долго не удается пустить в ход рекомендации, пока не приходит в голову счастливая идея — изложить свои соображения по механике письменно. Оригинальность мыслей юноши произвела сильное впечатление на Даламбера: «Вы зарекомендовали себя сами, и этого мне совершенно достаточно. Моя помощь к Вашим услугам».

При помощи Даламбера Лаплас устраивается преподавателем военной школы, а потом занимает освободившееся после смерти Безу место экзаменатора в королевском корпусе артиллеристов. В 1784 году ему блестяще сдал экзамен молодой Бонапарт, о чем Лаплас имел возможность вспомнить в 1804 году: «Я хочу к приветствиям народа присоединить и свое приветствие императору Франции, герою, которому двадцать лет тому назад я имел счастливую привилегию открыть карьеру, осуществленную им с такой славой и с таким счастием для Франции».

В 1772 году Лаплас баллотируется в Академию наук[1], на ме-

[1] В то время во Франции существовало пять академий. Отметим среди них Французскую академию, основанную в 1635 году кардиналом Ришелье для совершенствования французского языка и составления словаря, и Академию наук, созданную в 1666 году. Французская академия состоит из 40 пожизненных членов. Новых членов выбирают на место умерших. Членов Французской академии часто называют «бессмертными». Академию наук (L'académie des sciences) точнее было бы называть по-русски Академией естественных наук.

сто адъюнкта (младшая должность) по геометрии[2], но его не выбирают. По-видимому, одной из причин этого было не слишком благоприятное мнение французских ученых о молодом коллеге. Лагранж занимает более снисходительную и оптимистическую позицию: «Меня несколько удивляет то, что Вы мне пишете о Лапласе: кичиться первыми успехами — недостаток, свойственный, главным образом, очень молодым людям. Однако при увеличении знаний самонадеянность обычно уменьшается» (письмо непременному секретарю Академии наук Кондорсе). Лаплас уже подумывает о переезде в Берлин, к Лагранжу, но в 1774 году он получает место адъюнкта по механике.

Почти вся научная деятельность Лапласа была посвящена небесной механике (см. ниже). Но его интересы значительно шире.

Так, в 1779 – 1784 годах он сотрудничает с Лавуазье по самым разным вопросам (определение теплоемкости, проблема флогистона, атмосферное электричество): «Я, право, не знаю, каким образом я дал себя вовлечь в работу по физике, и Вы найдете, быть может, что я лучше бы сделал, если бы воздержался от этого; но я не мог устоять против настояний моего друга Лавуазье, который вкладывает в эту совместную работу столько приятности и ума, сколько лишь я мог бы пожелать. Кроме того, так как он очень богат, он не жалеет ничего, чтобы придать опытам точность, необходимую при таких тонких исследованиях». Принимает Лаплас участие и в общественной жизни: он входит в комиссию Академии наук, обследующую больницы для бедных, санитарное состояние городских боен. Авторитет Лапласа растет. В 1784 году он становится академиком (по механике).

Путь бомонского крестьянина не был уникален. К концу XVIII века во Франции почти половина членов Академии наук были простого происхождения. Например, Монж был сыном деревенского точильщика, Фурье — сын портного, Пуассон — сын солдата. Участие высшего сословия в науке обычно огра-

[2]Геометрией в XVII веке называли всю математику. До сих пор во Франции математическое отделение Академии наук называют отделением геометрии.

ничивалось меценатством и почетным членством в Академии; Даламбер жалуется: «Меценатов в наше время развелось так много, что нет возможности всех их должным образом восхвалять и благодарить».

В 1788 году Лаплас женился. Через год у него родился сын. Размеренная, благополучная жизнь была прервана событиями, решительно изменившими жизнь страны.

Революция, империя, реставрация. Революционные события захватили значительную часть французских ученых. Друг Лапласа астроном Байи был первым мэром Парижа, Кондорсе — членом муниципалитета, выдающийся математик Монж — морским министром. В 1791 году ряд академиков выдвинули свои кандидатуры в Законодательное собрание (Кондорсе, Лавуазье). В связи с этим со страстным памфлетом «Современные шарлатаны» выступил Марат. Заодно досталось и Лапласу: «К числу лучших математиков-академиков относятся Лаплас, Монж и Кузень: род автоматов, привыкших следовать известным формулам и прилагать их вслепую, как мельничная лошадь, которая привыкла делать определенное число кругов, прежде чем остановиться».

Лапласа вместе с Лагранжем, Монжем, Лавуазье привлекли к работе в Метрической комиссии, целью которой было создание единой системы мер. В период якобинской диктатуры Лапласа отозвали из комиссии ввиду «недостаточности республиканских добродетелей и слишком слабой ненависти к тиранам». В 1799 году он вернулся в комиссию, и под его наблюдением были изготовлены эталоны метра и килограмма.

Летом 1793 года по призыву Комитета общественного спасения большая группа ученых занялась научными исследованиями для организации обороны от ожидавшейся агрессии. Лапласа среди них не было. Он удалился в тихий Мелен, где приступил к работе над многотомной «Небесной механикой» — главным делом своей жизни.

В 1793 году Конвент упразднил существовавшие академии. В 1793 – 1794 годах некоторые бывшие академики кончили свои дни на гильотине. Вместе с депутатами-жирондистами был приговорен к смерти Кондорсе. По «Закону о подозрительных» был казнен как откупщик Лавуазье. На эшафоте погиб и Байи, которого Лаплас пытался спрятать у себя в доме в Мелене.

Лаплас вернулся в Париж после термидорианского переворота осенью 1794 года. Наряду с Лагранжем и другими крупнейшими учеными он занял место профессора в Нормальной школе. Это учебное заведение нового типа было задумано еще при Конвенте; оно было призвано готовить преподавателей и ученых для всей Франции. Привлечение крупных ученых в качестве преподавателей было новинкой. Позднее для подготовки инженеров на столь же высоком уровне была создана Политехническая школа. Лаплас читал лекции и там. Он становится президентом Палаты мер и весов, активно сотрудничает в Бюро долгот, созданном для упорядочения астрономо-геодезических измерений и службы времени.

В 1795 году Директория учредила Национальный институт наук и искусств (во Франции его часто называют просто «Институт»). Институт делился на разряды. Первым был назван разряд физических и математических наук.

Генерал Бонапарт всячески поддерживал контакты с Институтом, принимал активное участие в работе отделения геометрии. Во время Египетского похода свои прокламации он подписывал: «Бонапарт, главнокомандующий, член Института».

В 1799 году вышли два первых тома «Небесной механики», и Лаплас — буквально за несколько дней до переворота 18 брюмера (12 ноября) — подарил первый том Наполеону. В ответе генерала сказано: «С благодарностью принимаю, гражданин, присланный Вами экземпляр Вашего прекрасного труда. Первые же шесть месяцев, которыми я буду иметь возможность располагать, пойдут на то, чтобы прочесть Ваше прекрасное произведение».

После установления консулата Наполеон решает предоставить пост министра внутренних дел ученому. Выбор пал на Лапласа, вероятно, ввиду его большой известности и личного знакомства с Наполеоном. Однако деятельность Лапласа на посту министра была малоуспешной. В отличие от своих коллег по кабинету Талейрана и Фуше, Лаплас не сумел вовремя сориентироваться, куда направлены помыслы консула, покровительствовавшего наукам. Не без наивности преследует он роялизм и религию: «Не упускайте ни одного случая доказать вашим согражданам, что суеверие не больше роялизма выиграет от перемен, происшедших 18 брюмера» (из циркуляра министра Лапласа). Прошло немногим более месяца, и Наполеон заменил Лапласа своим братом Люсьеном. В воспоминаниях Наполеона, написанных на острове св. Елены, сказано: «Первоклассный геометр вскоре заявил себя администратором более чем посредственным; первые его шаги на этом поприще убедили нас в том, что мы в нем обманулись. Замечательно, что ни один из вопросов практической жизни не представлялся Лапласу в его истинном свете. Он везде искал тонкости, мелочи; идеи его отличались загадочностью; наконец, он весь был проникнут духом „бесконечно малых“, который он вносил и в администрацию».

Тем не менее обмен любезностями между Бонапартом и Лапласом не прекратился. Став Первым консулом, Наполеон назначает Лапласа пожизненным членом «Охранительного сената». (Впрочем, никакой роли в политической жизни этот сенат не играл.) С 1803 года Лаплас — канцлер сената. В числе немногих актов сената была отмена — по докладу Лапласа — революционного календаря. Учреждается орден Почетного Легиона, и Лаплас — в числе первых его кавалеров. В 1808 году он — граф империи.

Тем временем Лаплас продолжает работать над «Небесной механикой». В 1802 году выходит третий том, посвященный Наполеону — «герою, умиротворителю Европы, которому Франция обязана своим процветанием, своим величием и самой блестящей эпохой своей славы». В ответе Наполеона говорится: «Истинно сожалею, что сила обстоятельств удалила меня от ученого поприща». Несколько позже уже император Наполеон напишет: «Мне кажется, что „Небесная механика“ возвышает блеск нашего века». 12 августа 1812 года, находясь под Смоленском, Наполеон получает «Аналитическую теорию вероятностей» и вновь сожалеет: «В иное время, располагая досугом, я с интересом прочитал бы Вашу „Теорию вероятностей“ ». И далее: «Распространение, усовершенствование математических наук тесно соединены с благоденствием государства».

Наполеон активно вмешивается в деятельность Института. В 1801 году для членов Института ввели обязательную форму. Члены Института выстраивались после мессы в шеренгу в гостиной Тюильри для представления первому консулу. В это время ему можно было передать научные труды и получить его «отеческие» наставления. Покровительствуя точным наукам, он с недоверием относился к гуманитарным. В 1803 году Наполеон ликвидировал в Институте разряд моральных и политических наук. Когда до него дошли слухи, что в разряде французского языка и словесности ведутся разговоры о политике, он заявил Сегюру: «Вы председательствуете во втором разряде Института. Я приказываю Вам передать ему, что я не желаю, чтобы на заседаниях говорили о политике. Если разряд не будет повиноваться, я сломаю его, как негодную тросточку».

В 1814 году перед падением Парижа сенат проявил неожиданную активность: по инициативе Талейрана он призвал Бурбонов. Лаплас подписался под этим решением одним из первых. Во время «Ста дней» он не покидал провинции.

При Реставрации разряды Института снова получили наименование академий. Академия наук безропотно удалила из своих рядов неугодных монархии Монжа и Карно. На Лапласа же посыпались почести. В первый год правления Людовика XVIII он становится маркизом и пэром Франции, получает Большой Крест Почетного Легиона. В 1816 году он — президент бюро долгот и председатель комиссии по реорганизации Политехнической школы, его выбирают в «Академию бессмертных» — редкое отличие для представителя точных наук. Выступления Лапласа в палате пэров были редкими, бесцветными и бескомпромиссно монархическими. Когда часть Института протестовала против введения Карлом X цензуры, Лаплас в печати открестился от этого протеста. Сен-Симон негодовал: «Господа, изучающие неорганизованную материю, бесконечно малые величины, алгебру и арифметику! Кто дал вам право занимать теперь передовые позиции? ⟨...⟩ Вы вынесли из науки только одно наблюдение, именно, что тот, кто льстит великим мира, пользуется их благосклонностью и щедротами».

Сохранилось много рассказов о поведении Лапласа в Академии наук. Вот два из них.

Араго и Пуассон претендовали на одно место в Академии. Лаплас заявил, что надо отдать предпочтение более старшему Пуассону. Произошел резкий обмен мнениями.

Лагранж. Но Вы сами, господин де Лаплас, были избраны в члены Академии, когда не сделали еще ничего выдающегося, подавали только надежды, и все Ваши великие открытия были сделаны уже позднее.

Лаплас. А я все-таки считаю, что на звание академика нужно указывать молодым людям как на будущую награду, чтобы поощрять их усилия.

Галле. Вы похожи на кучера, который привязывает клок сена к концу дышла своей повозки для приманки лошадей. Такая хитрость кончается тем, что лошади выбиваются из сил и околевают.

Лапласу пришлось уступить.

В другой раз, в 1822 году, Фурье и Био баллотировались на должность непременного секретаря. Лаплас взял два бюллетеня вместо одного. Его сосед увидел, что он на обоих написал имя Фурье. После этого Лаплас положил бюллетени в шляпу, попросил соседа выбрать один из них, другой разорвал и громко заявил, что он не знает, кому из кандидатов отдал свой голос.

После смерти Лагранжа в 1813 году влияние Лапласа в Академии наук сделалось особенно сильным. В 1826 году, за год до смерти Лапласа, в Париже появился юный Абель. Он пишет: «Итак, „Небесная механика“ закончена. Автор такого труда может с удовлетворением оглянуться на путь, который он прошел в науке». В другом месте: «Очевидно, что любая теория Лапласа гораздо выше всего, что может создать какой-либо математик меньшего масштаба. Мне кажется, что, если желаешь чего-нибудь достигнуть в математике, нужно изучать мастеров, а не подмастерьев».

Небесная механика. Начало научной деятельности Лапласа приходится на сложное время. Завершился большой этап в построении анализа бесконечно малых. Задач, вокруг которых концентрировались бы усилия крупнейших математиков, не было. Многим казалось, что дни чистой математики сочтены. Даже разносторонний Лагранж, алгебраические работы которого опередили свое время, в какой-то момент прекратил занятия математикой. «Не кажется ли Вам, что высшая геометрия близится отчасти к упадку? Ее поддерживаете только Вы и Эйлер», — писал он Даламберу в 1772 году.

В этих условиях центр интересов переместился в сторону прикладной математики, где бесспорное первенство было за проблемой построения теории движения небесных тел на основе закона всемирного тяготения.

Предыстория этой проблемы такова. В начале XVII века Кеплер, продумывая с точки зрения теории Коперника скрупулезные наблюдения Тихо Браге, сформулировал три закона, которым подчиняется движение планет вокруг Солнца. Гениальная догадка Ньютона заключалась в том, что эти законы являются следствием единого универсального закона всемирного тяготения, который управляет и взаимодействием небесных тел, и земным притяжением. Земная и небесная механика объединились. В рамках закона тяготения удалось объяснить движение Луны, приливы и отливы, предварение равноденствий и другие эффекты. Но теория Ньютона нелегко завоевывала признание. В нее не верили Гюйгенс и Лейбниц. Иоганн Бернулли потратил много сил на объяснение эллиптичности орбит, не использующее закона тяготения. Во Франции Ньютону противостояли последователи Декарта, имевшие противоположную точку зрения по большинству вопросов. Например, в рассмотрениях Ньютона было важно, что Земля сплющена, а измерения французских геодезистов (оказавшиеся ошибочными) показывали, что она вытянута у полюсов. Вольтер шутил в 1727 году: «В Париже Землю считают вытянутой у полюсов, как яйцо, а в Лондоне она сжата, как тыква».

В одном отношении позиция противников Ньютона была сильной. Тщательный анализ наблюдений показывал, что законы Кеплера выполняются лишь приближенно, а небольшие отклонения могут с течением времени накопиться и резко нарушить устойчивость Солнечной системы. Ньютон не видит возможности разобраться в этих «вековых» возмущениях: «Едва заметные неравенства, могущие происходить от взаимодействия планет и комет ⟨...⟩, вероятно, будут увеличиваться в течение весьма долгого времени, до тех пор, пока, наконец, система не будет нуждаться в приведении ее в порядок руками Творца». В ответ на это Лейбниц заметил: «Ньютон и его приверженцы имеют чрезвычайно забавное представление о божественном творении. С их точки зрения Бог должен время от времени заводить свои мировые часы ⟨...⟩ Бог создал такую несовершенную машину, что он должен по временам очищать ее от грязи и даже чинить, как часовщик исправляет свою работу». Математические трудности состояли в том, что при выводе законов Кеплера из закона Ньютона имеют дело с задачей двух тел (Солнце и планета). Желание учесть влияние хотя бы еще одного объекта приводит к задаче трех тел, решить которую в общей ситуации не удается по сей день.

Деятельность Ньютона продолжили Эйлер, Клеро, Даламбер. Эйлер занимался возмущениями в движении Юпитера и Сатурна. Все трое дали свой вариант теории движения Луны. Клеро вывел уравнения для задачи трех тел, но отступил со словами: «Пусть интегрирует, кто сможет». Наиболее эффектным результатом было предсказание Клеро точного времени возвращения кометы Галлея. Ее ждали в 1758 году, но вычисления Клеро показывали, что под влиянием притяжения Юпитера она «задержится» более чем на год. Эйлер и Клеро построили теорию движения Земли с учетом возмущающего действия других планет.

С 70-х годов XVIII века задачами об аномалиях в Солнечной системе начинает интересоваться Лагранж. С них же начинает молодой Лаплас. Эйлер и Даламбер разобрались с рядом эффектов, связанных со взаимным притяжением Юпитера и Сатурна, но одно явление оставалось необъясненным. Это так называемые «большие неравенства», открытые в 1676 году Галлеем из сопоставления современных наблюдений с наблюдениями древних.

Оказалось, что движение Юпитера медленно, но систематически ускоряется, а Сатурна — замедляется.

Лаплас, как до него Эйлер и Лагранж, ищет приближенное решение задачи трех тел, рассматривая бесконечный ряд возмущающих членов. Для получения приближенной формулы надо решить, сколько членов в этом ряду оставить и какова погрешность от отбрасывания остальных членов. Для простых рядов такие упражнения проделывают студенты. К ряду для возмущений непонятно было, как и подойти. Лаплас рассчитывает, что можно достигнуть успеха, подбирая нужное число членов и постоянно сопоставляя полученный результат с данными наблюдений: «Чрезвычайная трудность задач, относящихся к системе мира, принудила геометров прибегнуть к приближениям, при которых всегда можно опасаться, как бы отбрасываемые величины не оказали заметного влияния. Когда наблюдения указывали им на такое влияние, они снова обращались к их анализу; при проверке они всегда находили причину замеченных отклонений; они определяли их закон, открывая неравенства, которые еще не были указаны наблюдениями. Таким образом, можно сказать, что сама природа содействует аналитическому совершенствованию теорий, основанных на принципе всемирного тяготения». В случае Юпитера и Сатурна заметные аномалии возникают из-за того, что через каждые 5 оборотов Юпитера и 3 оборота Сатурна планеты занимают почти то же самое положение и возмущения накапливаются. Все же, как показывают вычисления Лапласа, возмущения не накапливаются неограниченно; они являются не «вековыми», а периодическими с огромным периодом (913 лет). Итак, хотя компенсация происходит крайне медленно, наступит время, когда движение Юпитера начнет замедляться, а Сатурна — ускоряться.

С загадкой Галлея о «больших неравенствах» удалось покончить к 1784 году. «Когда я выяснил эти неравенства и определил с бо́льшим вниманием, чем это делалось до сих пор, те, которые были уже вычислены, я убедился, что все наблюдения, древние и современные, представлены моей теорией во всей их точности. Прежде они казались необъяснимыми при помощи закона всемирного тяготения; теперь же они служат одним из наиболее ярких его подтверждений. Такова судьба этого блестящего открытия: всякое затруднение, которое возникало тут, превращалось в его торжество, и это является вернейшим признаком его соответствия истинной системе природы».

Много усилий потребовалось от Эйлера, Даламбера, Клеро для построения теории движения Луны, согласующейся с наблюдениями. Главный эффект, который требовалось объяснить, — это быстрое (на 41° в год) перемещение эллиптической орбиты. Вычисления всех троих давали перемещение, не превышающее 20°. Лишь в 1849 году Клеро удалось уточнить вычисления настолько, что получилось нужное перемещение (а уже всерьез думали о поправочных членах в законе Ньютона!). Однако оставалась еще одна «мелочь», замеченная все тем же Галлеем в 1693 году. Анализируя «Альмагест» Птолемея и средневековые сведения о затмениях, он достоверно показал, что движение Луны ускоряется.

Эту загадку Лаплас разрешил в 1787 году. В ускорении оказалось повинно ранее обнаруженное долгопериодическое колебание эксцентриситета земной орбиты: когда эксцентриситет уменьшается (орбита становится более похожей на окружность), средняя скорость движения Луны увеличивается. Еще одно возмущение, казавшееся «вековым», оказалось долгопериодическим!

Лаплас не пропускает ни одной загадки астрономии. Он имел право сказать: «Потомство, вероятно, с благодарностью увидит, что новейшие геометры не передали ему ни одного астрономического явления, не определив его законов и причины». Он показывает, что кольца Сатурна не могут быть сплошными, а сама планета сильно сжата (Гершель подтверждает это наблюдениями еще при жизни Лапласа). Лаплас существенно уточняет теорию приливов, показывает при помощи теории возмущений, как наблюдения над Луной можно использовать для определения астрономической единицы (расстояния от Земли до Солнца), для уточнения формы Земли.

Разумеется, Лаплас не прошел мимо задачи о спутниках Юпитера, которая была традиционной для всех великих астрономов с тех пор, как эти спутники были открыты Галилеем. В 1774 году эта задача была выбрана Академией наук в качестве темы для премии. В 1789 году Лаплас строит теорию движения спутников Юпитера, учитывающую влияние Солнца и их взаимоходействия.

Главной задачей, волновавшей Лагранжа и Лапласа в течение 1773 – 1784 годов, была задача устойчивости Солнечной системы в целом. Были систематически исследованы возмущения для всех планет, и хотя строгого доказательства устойчивости не было получено, согласование всех кажущихся аномалий с теорией тяготения было бесспорным. Доверие к теории возмущений было таково, что, когда обнаружились необъяснимые отклонения в движении Урана, Леверрье решился объяснить их существованием новой планеты.

«Пять геометров: Клеро, Эйлер, Даламбер, Лагранж и Лаплас разделили между собой тот мир, существование которого открыл Ньютон. Они исследовали его во всех направлениях, проникли в области, которые считались недоступными, указали множество явлений в этих областях, которые еще не были открыты наблюдением, и, наконец, — в этом их вечная сила, — они охватили с помощью одного принципа, одного-единственного закона, самые тонкие и таинственные явления в движении небесных тел. Таким образом, геометрия осмелилась распоряжаться будущим, и ход будущих событий подтвердит во всех подробностях заключения науки» (Араго).

Публикации Лапласа делятся на два этапа: непосредственные сообщения о полученных результатах в 70 – 80-е годы и их систематизация и дополнение в пятитомной «Небесной механике». Для Лапласа характерно, что он с невероятной силой пробивался к решению конкретной задачи, не отвлекаясь на формирование и систематизацию аппарата. Противоположностью ему был Лагранж, который тратил много сил на доведение метода до формализма, пригодного для решения широкого круга задач. Поэтому современный учебник теоретической механики пестрит именем

Лагранжа, а имя Лапласа можно найти лишь в историческом очерке.

«Был ли то вопрос либрации Луны или проблема теории чисел, Лагранж, по большей части, видел лишь математическую сторону дела; поэтому он придавал большое значение элегантности формул и обобщенности методов. Для Лапласа, наоборот, математический анализ был орудием, которое он приспособлял к самым разнообразным задачам, всегда подчиняя данный специальный метод сущности вопроса. Быть может, потомство скажет, что один был великим геометром, а второй — великим философом, который стремился познать природу, заставляя служить ей самую высокую геометрию» (Пуассон).

Отношения между Лапласом и Лагранжем были непростые. Честолюбивое желание Лапласа быть первым математиком Франции постоянно наталкивалось на высочайший авторитет Лагранжа, переехавшего в Париж в 1788 году. По многочисленным свидетельствам современников, Лаплас болезненно воспринимал похвалы Лагранжу. Поведение Лагранжа в самых трудных ситуациях было безупречным, в то время как многие поступки Лапласа вызывали нарекания. Сохранение корректных отношений между Лапласом и Лагранжем — в большой степени плод терпимости Лагранжа. Характерно, что в посмертной речи Фурье о Лапласе ничего не говорится о моральных качествах Лапласа; в то же время в ней, как ни странно, много говорится о высочайших человеческих качествах Лагранжа.

Торопливый, без попыток выделить внутренние пружины стиль мог обмануть даже специалиста. В качестве курьеза можно привести мнение Пуансо, ученика Лапласа: «Лаплас никогда не видел истину, разве только случайно. Она прячется от этого тщеславного человека, который говорит о ней только в неясных выражениях. Однако он пытается превратить эту неясность в глубокомыслие, а своим затруднениям он придает благородный вид вынужденной заботы, как человек, который боится сказать слишком много и разгласить секрет, которого у него никогда не было». Про то, как часто у Лапласа встречается «легко видеть», ходили легенды. Био, читавший корректуры «Небесной механики», и Боудич (переводчик на английский язык) рассказывают о часах и днях, требовавшихся для заполнения пробелов, Самому Лапласу это тоже не всегда удавалось без напряженных размышлений (свидетельство Био).

Система мира. В Мелене Лаплас написал популярную книгу «Изложение системы мира», вышедшую в 1796 году. В этой книге излагалась гипотеза Лапласа о происхождении Солнечной системы. Лаплас, последователь Ньютона, «не измышлявшего гипотез», предлагает свои соображения «с осторожностью, подобающей всему, что не представляет результата наблюдений или вычислений». Лаплас описывает развитие Солнечной системы как замкнутый процесс, не требующий вмешательства внешних сил.

Известна легенда о разговоре, состоявшемся между Наполеоном и Лапласом, дарящим свою книгу:

Наполеон. Гражданин Лаплас, Ньютон в своей книге говорил о Боге. В вашей же книге, которую я уже посмотрел, я не встретил имени Бога ни разу.

Лаплас. Гражданин Первый консул, я не нуждался в этой гипотезе.

Слова Лапласа часто воспринимаются как демонстрация атеизма, хотя, по-видимому, здесь речь идет и о том конкретном обстоятельстве, что построения Лапласа не нуждаются во внешних факторах ни в гипотезе о возникновении Солнечной системы, ни в вопросе об ее устойчивости.

По гипотезе Лапласа все начинается с газовой туманности, вращающейся вокруг оси; туманность, остывая, сначала сплющивается вдоль экваториальной плоскости, а затем рассыпается на кольца на месте нынешних орбит планет (за счет уравновешивания центробежной силы и силы тяготения). Разнообразные неустойчивости в движении частичек кольца, их взаимное притяжение приводят к слипанию частиц в планеты. Аналогично происходит образование системы спутников планет, причем пример Сатурна показывает, что иногда слипание частиц кольца могло не произойти. Основные моменты модели Лапласа: все вращения происходят в одну сторону (отвечающую направлению первоначального вращения туманности), траектории близки к круговым, а их плоскости близки к экваториальной плоскости туманности, по мере удаления от центра период вращения увеличивается.

Первые удары по гипотезе Лапласа были нанесены Гершелем еще при жизни Лапласа: у Урана обнаружились спутники с «обратным» направлением вращения и с плоскостями орбит, почти перпендикулярными плоскости орбиты планеты. Далее число противоречий стало быстро расти. Гипотезу многократно пытались поправить, включить в более сложные построения.

Гипотеза Лапласа сыграла огромную роль в истории космогонии как первая гипотеза, опирающаяся на большой объем точных фактов механики и астрономии (предшествовавшие ей гипотезы Бюффона и Канта этим требованиям не удовлетворяли, хотя имеется много точек соприкосновения между гипотезой Лапласа и неизвестной ему гипотезой Канта). Еще в начале XX века Пуанкаре писал о гипотезе Лапласа: «Для ее возраста на ней не так уж много морщин».

«Уточненный здравый смысл». Так образно назвал Лаплас теорию вероятностей. Это вторая научная любовь Лапласа, которой он оставался верен в течение всей своей научной деятельности, начиная с первых работ 1774 года.

Стиль занятий Лапласа в этой области отличен от того, который был характерен для автора «Небесной механики». Здесь нет ни одной большой задачи и много времени уделяется осмысливанию того, что было сделано прежде, начиная с задачи о дележе ставок, стоявшей у истоков теории вероятностей.

В центре внимания находится закон больших чисел Я. Бернулли, состоящий в том, что при большом числе испытаний частота события в некотором смысле приближается к его вероятности. Отправляясь от результата Муавра, Лаплас получает оценку вероятности того, что это отклонение велико. Это одна из центральных теорем теории вероятностей — теорема Муавра – Лапласа. Ее доказательство использует средства математического анализа, что было новинкой для теории вероятностей.

Лаплас оценил и сделал достоянием науки результаты английского священника Байеса об оценке вероятности конкурирующих гипотез, если известны результаты их проверок.

Результаты деятельности Лапласа были подытожены в его «Аналитической теории вероятностей», вышедшей при его жизни тремя изданиями (первое — в 1812 году). Здесь уделяется много места созданию аппарата, прежде всего — методу производящих функций, применяющемуся ныне далеко за пределами теории вероятностей. От Лапласа идет «классическое определение» вероятности, при котором события определяются как множества равновероятных случаев: «Теория вероятностей состоит в сведении всех событий одного и того же рода к некоторому числу равновероятных случаев, то есть случаев, относительно осуществления которых мы в равной мере не осведомлены, и в определении числа тех случаев, которые благоприятны для события, вероятность которого мы ищем».

Наряду с книгой для «знатоков» Лаплас пишет книгу для широкой публики. Это его «Опыт философии теории вероятностей», выросший из лекций, читанных в Нормальной школе в 1795 году, и помещенный во второе издание «Аналитической теории вероятностей» (1814 год).

Лаплас был одним из первых авторов, который в книге по теории вероятностей приводил примеры не только из азартных игр, но и из реальной статистики. Так, он приводит цифры, показывающие, что число писем во Франции, не доставленных из-за отсутствия на них адреса, практически не меняется год от года.

Точка зрения Лапласа состоит в том, что вероятностные рассмотрения нужны только там, где часть информации неизвестна: «МЫ должны рассматривать настоящее состояние Вселенной как следствие ее предыдущего состояния и как причину последующего. Ум, которому были бы известны для какого-либо данного момента все силы, одушевляющие природу, и относительное положение всех ее составных частей, если бы вдобавок он оказался достаточно обширным, чтобы подчинить эти данные анализу, обнял бы в одной формуле движения величайших тел Вселенной наравне с движениями мельчайших атомов: не осталось бы ничего, что было бы для него недостоверно, и будущее, так же как и прошедшее, предстало бы перед его взором. Ум человеческий в совершенстве, которое он сумел придать астрономии, дает нам представление о слабом наброске того разума». Гипотетическое существо, о котором говорится в цитате, называют сейчас демоном Лапласа.

Размышления Лапласа по теории вероятностей в значительной степени стимулировались его занятиями астрономией и космогонией. Но его волновала также роль случая в общественной жизни. Чаще всего его высказывания по этому поводу не содержат конкретных вычислений. Вот пример: «Не будем противополагать бесполезного и часто опасного сопротивления неизбежным следствиям прогресса просвещения, но будем лишь крайне осторожно менять наши учреждения и обычаи, к которым мы давно уже применились. Мы хорошо знаем по опыту прошлого те неудобства, которые они представляют, но мы не знаем, как велико будет зло, которое может причинить их изменение. При такой неизвестности теория вероятностей предписывает избегать всякого изменения; особенно следует избегать внезапных изменений, которые в нравственном порядке, как и в физическом, никогда не происходят без большой потери живой силы».

Был один вопрос, на формализацию которого Лаплас рассчитывал, — применение теории вероятностей к судопроизводству. Отправной является точка зрения, что абсолютно достоверное решение в суде невозможно, а нужно заботиться лишь о том, чтобы решение было правильным с наибольшей вероятностью. Она восходит к Кондорсе и тесно связана с практикой судопроизводства при революции. Позиция Лапласа более осторожна, и все же он считает, что нужно вычислять вероятность «того, что решение суда, который может осудить только при данном большинстве, будет справедливо, то есть будет соответствовать истинному решению поставленного вопроса», и поскольку «большая часть наших суждений основана на вероятности свидетельских показаний, очень важным является подчинить их исчислению». Предполагалось включить в оценки политические симпатии судей, степень запутанности дела, интеллектуальные характеристики судей и т. д. Жизнь показала ошибочность и общественную опасность таких исчислений.

В 1899 г. во время пересмотра дела Дрейфуса в военном суде были представлены «доказательства» его виновности, основанные на вероятностных вычислениях некоего Бертильона. Заключение об их достоверности дал Анри Пуанкаре: «Даже если бы эти расчеты оказались точными, в любом случае не было бы справедливого заключения, потому что применение исчисления вероятностей к моральным наукам является скандалом для математики, поскольку Лаплас и Кондорсе, которые умели хорошо считать, дошли до результатов, лишенных всякого здравого смысла!».

В тридцатые годы в Советском Союзе прокуроры школы Вышинского тоже говорили о вероятности преступления, но до вычисления вероятностей, кажется, дело не доходило.

Мы не имели возможности остановиться на всех направлениях научной деятельности Лапласа. Многое осталось за пределами нашего рассказа: работы по капиллярности, звуку и свету, математические результаты, связанные с «преобразованием Лапласа» и «уравнением Лапласа» и т. д.

Недавно ученые имели возможность еще раз оценить прозорливость Лапласа. В «Изложении системы мира» приводится доказательство того, что «сила притяжения небесного тела могла бы быть столь велика, что от него не будет исходить свет». Это произойдет, если у тела будет та же плотность, что и у Земли, а диаметр равен 250 диаметрам Солнца. Другими словами, первая космическая скорость в поле тяготения этого тела превышает скорость света. Таким образом, Лаплас был первым, кто обратил внимание на возможность существования «черных дыр».

Жизнь Лапласа в значительной степени отражает сложность эпохи, в которую он жил. Однако через всю своею жизнь он пронес верность науке, ни при каких обстоятельствах не прерывая занятий. Роль Лапласа в истории науки трудно переоценить.

«Лаплас был рожден для того, чтобы все углублять, отодвигать все границы, чтобы решать то, что казалось неразрешимым. Он кончил бы науку о небе, если бы эта наука могла быть окончена». (Фурье)

КОРОЛЬ МАТЕМАТИКОВ

Не считать ничего сделанным, если еще кое-что осталось сделать.
Гаусс

В 1854 г. здоровье тайного советника Гаусса, как его именовали коллеги по Геттингенскому университету, решительно ухудшилось. Не могло быть и речи о продолжавшихся в течение двадцати лет ежедневных прогулках от Обсерватории до Литературного музея. Профессора, приближавшегося к восьмидесятилетнему рубежу, удалось уговорить обратиться к врачу! Летом ему стало лучше и он даже присутствовал на открытии железной дороги Ганновер — Геттинген. В январе 1855 г. Гаусс соглашается позировать художнику Геземану для медальона. По заказу Ганноверского двора уже после смерти ученого в феврале 1855 г. по этому медальону была изготовлена медаль. На медали под барельефом Гаусса было написано: Mathematicorum princeps (Король математиков). История всякого настоящего короля должна начинаться с детства, овеянного легендами. Гаусс в этом смысле не был исключением.

1. Дебют Гаусса

«Упорство, с которым Гаусс следовал по избранному им пути, бурный юношеский натиск, с которым он каждый раз, не взирая ни на что, преодолевал самые крутые подъемы, ведущие к цели, все эти трудные испытания закаляли его силы и делали его способным, после победы над препятствиями, уже устраненными другими, неудержимо идти вперед, опережая их. К этой хвале творческой самодеятельности я должен присоединить другое: похвалу юности. Я этим хочу сказать только то, что развитие математического гения подчиняется тем же законам, что и развитие всякой другой творческой способности. Для гениально одаренной личности годы юности, период, когда только что завершается процесс физического роста, являются эпохой великих, в изобилии сменяющих друг друга откровений; именно в эти годы гениально одаренный дух создает те новые, ему одному принадлежащие ценности, которые им будут впоследствии преподнесены миру» (Ф. Клейн).

Молодой Гаусс (1803 г.)

Брауншвейг, 1777 – 1795. Гаусс не получил свой титул по наследству, хотя его отец Гергард Дидерих не был вовсе чужд математике. Мастер на все руки, прежде всего фонтанный мастер, но также и садовник, как его отец, Гергард Дидерих был известен своими успехами в счетном ремесле. Его услугами пользовались купцы во время ярмарок в Брауншвейге и даже Лейпциге, а еще он имел постоянный заработок в самой большой похоронной кассе Брауншвейга (место, которое он передал по наследству сыну от первого брака Георгу — отставному солдату).

Карл Фридрих родился 30 апреля 1777 г. в доме № 1550, что стоял на канале Венденгребене в Брауншвейге. По мнению биографов, он унаследовал от родных отца крепкое здоровье, а от родных матери яркий интеллект. Ближе других был к будущему ученому дядя Фридерихс — искусный ткач, в котором, по словам племянника, «погиб прирожденный гений». Гаусс говорил о себе, что он «умел считать раньше, чем говорить». Самая ранняя математическая легенда о нем утверждает, что в три года он следил за расчетами отца с каменщиками-поденщиками и неожиданно поправил отца, причем оказался прав.

В 7 лет Карл Фридрих поступил в Екатерининскую народную школу. Поскольку считать там начинали с третьего класса, первые два года на маленького Гаусса внимания не обращали. В третий класс ученики обычно попадали в 10-летнем возрасте и учились там до конфирмации (15 лет). Учителю Бюттнеру приходилось заниматься одновременно с детьми разного возраста и разной подготовки. Поэтому он давал обычно части учеников длинные задания на вычисление, с тем чтобы иметь возможность беседовать с другими учениками. Однажды группе учеников, среди которых был Гаусс, было предложено просуммировать натуральные числа от 1 до 100. (Разные источники называют разные числа!) По мере выполнения задания ученики должны были класть на стол учителя свои грифельные доски. Порядок досок учитывался при выставлении оценок. 10-летний Гаусс положил свою доску, едва Бюттнер кончил диктовать задание. К всеобщему удивлению, лишь у него ответ был правилен. Секрет был прост: пока диктовалось задание, Гаусс успел переоткрыть формулу для суммы арифметической прогрессии! Слава о чудо-ребенке распространилась по маленькому Брауншвейгу.

В школе, где учился Гаусс, помощником учителя, основной обязанностью которого было чинить перья младшим ученикам, работал некто Бартельс, интересовавшийся математикой и имевший несколько математических книг. Гаусс и Бартельс начинают заниматься вместе; они знакомятся с биномом Ньютона, бесконечными рядами...

Как тесен мир! Через некоторое время Бартельс получит кафедру чистой математики в Казанском университете и будет учить математике Лобачевского.

В 1788 г. Гаусс переходит в гимназию. Впрочем, в ней не учат математике. Здесь изучают классические языки. Гаусс с удовольствием занимается языками и делает такие успехи, что даже не знает, кем он хочет стать — математиком или филологом. О Гауссе узнают при дворе. В 1791 г. его представляют Карлу Вильгельму Фердинанду — герцогу Брауншвейгскому. Мальчик бывает во дворце и развлекает придворных искусством счета. Благодаря покровительству герцога Гаусс смог в октябре 1795 г. поступить в Геттингенский университет. Первое время он слушает лекции по филологии и почти не посещает лекций по математике. Но это не означает, что он не занимается математикой. Приведем слова Феликса Клейна, замечательного математика, глубокого исследователя научного творчества Гаусса: «Естественный интерес, какое-то, я сказал бы, детское любопытство приводит впервые мальчика независимо от каких-либо внешних влияний к математическим вопросам. Первое, что его привлекает, это чистое искусство счета. Он беспрестанно считает с прямо-таки непреоборимым упорством и неутомимым прилежанием. Благодаря этим постоянным упражнениям в действиях над числами, например, над десятичными дробями с невероятным числом знаков, он не только достигает изумительной виртуозности в технике счета, которой он отличался всю свою жизнь, но его память овладевает таким колоссальным числовым материалом, он приобретает такой богатый опыт и такую широту кругозора в области чисел, каким навряд ли обладал кто-либо до или после него. Путем наблюдений над своими числами, стало быть, индуктивным, «экспериментальным» путем он уже рано постигает общие соотношения и законы. Этот метод, стоящий в резком противоречии с современными навыками математического исследования, был, однако, довольно распространен в XVIII столетии и встречается, например, также у Эйлера $\langle\ldots\rangle$ Все эти ранние, придуманные только для собственного удовольствия забавы ума являются подходами к значительной, лишь позже осознанной цели. В том-то именно и заключается подсознательная мудрость гения, что он уже при первых пробах сил, полуиграя, еще не сознавая всего значения своих действий, попадает, так сказать, своей киркой как раз в ту породу, которая в глубине своей таит золотоносную жилу. Но вот наступает 1795 год, о котором мы имеем более точные показания ⟨...⟩ С еще большей силой, чем до сих пор (все еще до геттингенского периода), его охватывает страстный интерес к целым числам. Незнакомый с какой бы то ни было литературой, он должен был все создавать себе сам. И здесь он вновь проявляет себя как незаурядный вычислитель, пролагающий пути в неизвестное. Гаусс составляет большие таблицы простых чисел, квадратичных вычетов и невычетов, выражает дроби $1/p$ от $p = 1$ до $p = 1000$ десятичными дробями, доводя эти вычисления до полного периода, что в иных случаях требовало несколько сотен десятичных знаков. При составлении последней таблицы Гаусс задался целью изучить зависимость периода от знаменателя p. Кто из современных исследователей пошел бы этим странным путем, чтобы получить новую теорему! Гаусса же привел к цели именно этот путь, по которому он шел с неимоверной энергией. (Он сам утверждал, что отличается от других людей только своим прилежанием.) Осенью 1795 г. Гаусс переезжает в Геттинген и прямо-таки проглатывает впервые попавшуюся в его руки литературу: Эйлера и Лагранжа».

Открытие, которого ждали две тысячи лет. 1 июня 1796 г. в газете «Jenenser Intelligenzblatt» появилась заметка следующего содержания:

«Всякому начинающему геометру известно, что можно геометрически (т. е. циркулем и линейкой) строить разные правильные многоугольники, а именно: треугольник, пятиугольник, пятнадцатиугольник и те, которые получаются из каждого из них путем последовательного удвоения числа его сторон. Это было известно во времена Евклида, и, как кажется, с тех пор было распространено убеждение, что дальше область элементарной геометрии не распространяется: по крайней мере, я не знаю удачной попытки распространить ее в эту сторону.

Тем более кажется мне заслуживающим внимания открытие, что, кроме этих правильных многоугольников, может быть геометрически построено множество других, например семнадцатиугольник».

Под заметкой стоит подпись: К. Ф. Гаусс из Брауншвейга, студент-математик в Геттингене.

Это первое сообщение об открытии Гаусса. Прежде чем подробно рассказывать о нем, освежим в памяти то, что «известно всякому начинающему геометру».

О построениях циркулем и линейкой. Предполагается заданным отрезок единичной длины. Тогда при помощи циркуля и линейки можно строить новые отрезки, длины которых получаются из длин имеющихся отрезков при помощи операций: сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня.

Последовательно проводя эти операции, при помощи циркуля и линейки можно построить любой отрезок, длина которого выражается через единицу конечным числом операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня. Такие числа называются квадратичными иррациональностями. Можно доказать, что никакие другие отрезки построить при помощи циркуля и линейки нельзя.

Задача о построении правильного n-угольника, как легко понять, эквивалентна задаче о делении окружности радиуса 1 на n равных частей. Хорды дуг, на которые делится окружность, являются сторонами правильного n-угольника, и длина каждой из них равна $2\sin(\pi/n)$. Следовательно, *при тех* n*, для которых* $\sin(\pi/n)$ *является квадратичной иррациональностью, можно построить правильные и-угольники циркулем и линейкой. Этому условию удовлетворяют, например, значения* $n = 3, 4, 5, 6, 10$. Для $n = 3, 4, 6$ это хорошо известно.

Покажем, что $\sin(\pi/10)$ — квадратичная иррациональность. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC, угол при вершине B которого равен $\pi/5 = 36°$, длина AB равна 1; пусть AD — биссектриса угла A. Положим $x = AC = AD = BD = 2\sin(\pi/10)$. Имеем

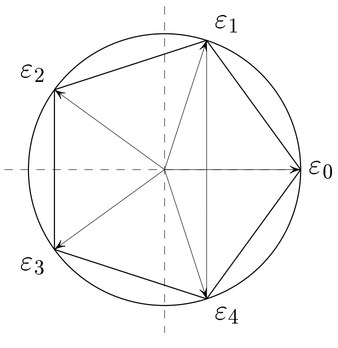
$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}; \qquad \frac{x}{1-x} = \frac{1}{x}, \quad x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Это число является квадратичной иррациональностью; тем самым мы можем построить сторону правильного 10-угольника.

Далее, из возможности деления окружности на p_1p_2 *равных частей следует, конечно, возможность ее деления на* p_1 *равных частей (в частности, можно построить правильный пятиугольник).* Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Укажем два частных случая, когда оно все же справедливо.

1) Из возможности деления окружности на p равных частей следует возможность деления на 2^kp равных частей для любого k. Это следует из возможности деления любого угла пополам при помощи циркуля и линейки.

2) Если мы умеем делить окружность на p_1 равных частей и p_2 равных частей, где p_1 и p_2 взаимно просты (например, p_1, p_2 — различные простые числа), то окружность можно разделить на p_1p_2 равных частей. Это следует из того, что наибольшая общая мера углов $2\pi/p_1$ и $2\pi/p_2$ равна $2\pi/p_1p_2$, а наибольшую общую меру двух соизмеримых углов можно найти циркулем и линейкой. В частности, $2\pi/15 = \frac{1}{2}(2\pi/3 - 2\pi/5)$, откуда следует возможность построения правильного 15-угольника.



Несколько слов о комплексных числах. Нам нужно знать про комплексные числа совсем немного: операции над ними и геометрическую интерпретацию. Напомним, что комплексному числу $z = a + ib$ ставится в соответствие точка с координатами (a, b) и вектор с концом в этой точке и с началом в $(0, 0)$. Длина вектора $z = a+ib$ называется *модулем* данного числа z. Комплексное число z можно записать в тригонометрической форме: $z = a + ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; угол φ называется аргументом числа z.

Сложению комплексных чисел соответствует сложение векторов; при умножении модули перемножаются, а аргументы складываются. Отсюда следует, что существует ровно n корней уравнения $z^n = 1$; обычно их обозначают через

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}; \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{17}$$

Легко показать, что концы векторов ε_k являются вершинами правильного n-угольника. Если мы докажем, что ε_k — квадратичные иррациональности (т. е. что этим свойством обладают их вещественные и мнимые части), то тем самым мы покажем, что правильный n-угольник можно построить при помощи циркуля и линейки.

Правильные n-угольники и корни из единицы. Преобразуем уравнение $z^n = 1$:

$$z^n - 1 = (z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1) = 0.$$

Получим два уравнения: $z = 1$ и

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1 = 0. \tag{18}$$

Уравнение (18) имеет своими корнями ε_k при $1 \leqslant k \leqslant n-1$. В дальнейшем мы будем иметь дело с уравнением (18).

При $n = 3$ получаем уравнение $z^2 + z + 1 = 0$. Его корни: $\varepsilon_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. При $n = 5$ дело обстоит сложнее, так как мы получаем уравнение четвертой степени

$$z^4 + z^3 + z^2 + 1 = 0, \tag{19}$$

имеющее четыре корня ε_1, ε_2, ε_3, ε_4. Хотя и существует формула Феррари для решения общего уравнения 4-й степени, пользоваться ею практически невозможно. В нашем случае помогает специальный вид уравнения (19). Чтобы решить его, разделим сначала уравнение (19) на z^2. Получим

$$z^2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} + 1 = 0$$

или

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)-1=0.$$

Сделаем подстановку $w=z+\dfrac{1}{z}$:

$$w^2+w-1=0. \tag{20}$$

Отсюда

$$w_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Далее можно найти и ε_k из уравнений

$$z+\frac{1}{z}=w_1, \quad z+\frac{1}{z}=w_2, \tag{21}$$

но нам это не нужно; для построения достаточно знать, что удвоенная вещественная часть ε_1 равна

$$2\cos(2\pi/5)=\varepsilon_1+\varepsilon_4=\varepsilon_1+\frac{1}{\varepsilon_1}=w_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Из того, что w_1 — квадратичная иррациональность, следует, что ε_1 и ε_4 представляют собой квадратичные иррациональности. Для ε_2 и ε_3 рассуждаем в точности так же.

Итак, для $n=5$ решение нашей задачи удалось свести к последовательному решению двух квадратных уравнений: сначала решается уравнение (20), корнями которого являются суммы $\varepsilon_1+\varepsilon_4$ и $\varepsilon_2+\varepsilon_3$ симметричных корней уравнения (19), а затем из уравнений (21) находятся и сами корни уравнения (19).

Именно таким путем Гауссу удалось осуществить построение правильного 17-угольника: здесь тоже выделяются группы корней, суммы которых находятся последовательно из квадратных уравнений. Но как искать эти «хорошие» группы? Гаусс находит удивительный путь ответить на этот вопрос...

Построение правильного 17-угольника. «30 марта 1796 года наступает для него (Гаусса) день творческого крещения $\langle\ldots\rangle$ Гаусс уже занимался с некоторого времени группировкой корней из единицы на основании своей теории «первообразных» корней. И вот однажды утром, проснувшись, он внезапно ясно и отчетливо осознал, что из его теории вытекает построение семнадцатиугольника $\langle\ldots\rangle$ Это событие явилось поворотным пунктом жизни Гаусса. Он принимает решение посвятить себя не филологии, а исключительно математике» (Ф. Клейн).

Остановимся подробнее на пути, по которому двигался Гаусс. Одна из математических игр юного Гаусса состояла в следующем. Он делил 1 на различные простые числа p, выписывая последовательно десятичные знаки, с нетерпением ожидая, когда они начнут повторяться. Иногда приходилось ждать долго. Для $p = 97$ повторение начиналось с 97-го знака, при $p = 337$ период равен 336. Но Гаусса не смущали длинные прямолинейные вычисления, он входил при их помощи в таинственный мир чисел. Гаусс не поленился рассмотреть все $p < 1000$ (ср. приведенное выше высказывание Клейна).

Известно, что Гаусс не сразу попытался доказать периодичность получающейся дроби в общем случае ($p \neq 2, 5$). Но, вероятно, доказательство не затруднило его. В самом деле, достаточно лишь заметить, что следить надо не за знаками частного, а за остатками! Знаки начинают повторяться после того, как на предыдущем шагу остаток равнялся 1 (почему?). Значит, надо найти такое k, что $10^k - 1$ делится на p. Так как имеется лишь конечное число возможных остатков (они заключены между 1 и $p-1$), для каких-то $k_1 > k_2$ числа 10^{k_1}, 10^{k_2} при делении на p дадут одинаковые остатки. Но тогда $10^{k_1-k_2} - 1$ делится на p (почему?).

Несколько труднее показать, что в качестве k всегда можно взять $p-1$, т. е. $10^{p-1} - 1$ при $p \neq 2, 5$ всегда делится на p. Это частный случай теоремы, носящий название малой теоремы Ферма. Когда Ферма (1601 – 1655) открыл ее, он писал, что его «озарило ярким светом». Теперь ее переоткрыл юный Гаусс. Он всегда будет ценить это утверждение: «Эта теорема $\langle\ldots\rangle$ заслуживает величайшего внимания как вследствие ее изящества, так и ввиду ее выдающейся пользы». Гаусса интересует наименьшее k, для которого $10^k - 1$ делится на p. Такое k всегда является делителем $p - 1$. Иногда оно совпадает с $p - 1$ (например, для $p = 7, 17, 19, 23, 29, 97, 337$). До сих пор неизвестно, конечно или бесконечно число таких p. Гаусс заменяет 10 на любое число a и интересуется, когда $a^{k-1} - 1$ не делится на p при $k < p - 1$ (предполагается, что a не делится на p). Такие a принято называть *первообразными корнями для* p. Условие того, что a — первообразный корень, равносильно тому, что среди остатков от деления $1, a, a^2, \ldots, a^{p-2}$ на p встречаются все ненулевые остатки $1, 2, \ldots, p-1$ (почему?). Гаусс не знал тогда, что первообразными корнями интересовался уже Эйлер (1707 — 1783), который предполагал (но не смог доказать), что для каждого простого числа существует хотя бы один первообразный корень. Первое доказательство гипотезы Эйлера дал Лежандр (1752 — 1833); очень изящное доказательство дал Гаусс. Но это было позднее, а пока Гаусс манипулировал с конкретными примерами. Он знал, например, что для $p = 17$ число 3 является первообразным корнем. В приводимой ниже таблице в первой строке стоят значения k, а под ними остатки от деления 3^k на 17. Обратите внимание, что второй строке встречаются все остатки от 1 до 16, что и означает первообразность 3 для 17.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	3	9	10	13	5	15	11	16	14	8	7	4	12	2	6

Эти вычисления и легли в основу группировки корней уравнения

$$z^{16} + z^{15} + z^{14} + \ldots + z + 1 \tag{22}$$

(с тем, чтобы свести решение его к цепочке квадратных уравнений). Идея Гаусса состоит в том, что надо перейти к другой нумерации корней. Присвоим корню ε_k новый номер l (обозначается $\varepsilon_{[l]}$), если 3^l при делении на 17 дает остаток k. При переходе от одной нумерации к другой можно пользоваться таблицей, находя k во второй строке, а соответствующее l над ним в первой строке,

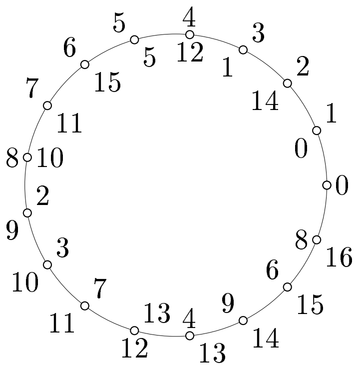


Рис. 32.

но удобнее пользоваться рисунком, где по внешней стороне окружности написаны старые номера, а по внутренней — новые. Именно эта нумерация позволила Гауссу, разбивая корни (22) на группы, свести решение (22) к цепочке квадратных уравнений.

Именно, на первом шагу берутся $\sigma_{2,0}$, $\sigma_{2,1}$ — соответственно суммы корней $\varepsilon_{[l]}$ с четными и нечетными l (в каждой сумме по 8 корней). Эти суммы оказываются корнями квадратного уравнения с целочисленными коэффициентами. Далее, берутся суммы $\sigma_{4,0}$, $\sigma_{4,1}$, $\sigma_{4,2}$, $\sigma_{4,3}$ четверок корней $\varepsilon_{[l]}$, у которых l при делении на 4 дает фиксированный остаток. Показывается, что эти величины являются корнями квадратных уравнений, у которых коэффициенты арифметически выражаются через $\sigma_{2,0}$, $\sigma_{2,1}$. Наконец, образуются суммы $\sigma_{8,i}$ пар корней $\varepsilon_{[l]}$, у которых l при делении на 8 дает остаток i. Для них выписываются квадратные уравнения с коэффициентами, просто выражающимися через $\sigma_{4,j}$. Имеем: $\sigma_{8,0} = 2\cos(2\pi/17)$ и из квадратичной иррациональности $\sigma_{8,0}$ следует возможность построения правильного 17-угольника циркулем и линейкой. Поучительно записать разбиение корней на группы в старой нумерации. Согласитесь, что в таком виде угадать разбиение невозможно! Теперь реализуем только что описанный путь.

Подробные вычисления. Мы докажем квадратичную иррациональность корней 17-й степени из единицы. Отметим, что $\varepsilon_k\varepsilon_l = \varepsilon_{k+l}$ (если $k + l > 17$, то $k + l$ заменяется остатком от его деления на 17), $\varepsilon_k = (\varepsilon_1)^k$. Прежде всего заметим, что

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{16} = \varepsilon_{[0]} + \varepsilon_{[1]} + \ldots + \varepsilon_{[15]} = -1.$$

(В этом можно убедиться, например, рассматривая это выражение как сумму геометрической прогрессии.)

Обозначим через $\sigma_{m,r}$ сумму $\varepsilon_{[k]}$ с теми k, которые дают остаток r при делении на m. Получаем

$$\sigma_{2,0} = \varepsilon_{[0]} + \varepsilon_{[2]} + \varepsilon_{[4]} + \ldots + \varepsilon_{[14]};$$
$$\sigma_{2,1} = \varepsilon_{[1]} + \varepsilon_{[3]} + \varepsilon_{[5]} + \ldots + \varepsilon_{[15]}.$$

Ясно, что

$$\sigma_{2,0} + \sigma_{2,1} = \varepsilon_{[0]} + \varepsilon_{[1]} + \ldots + \varepsilon_{[15]} = -1.$$

Можно показать, что

$$\sigma_{2,0} \cdot \sigma_{2,1} = 4(\varepsilon_{[0]} + \varepsilon_{[1]} + \ldots + \varepsilon_{[15]}).$$ [1]

Теперь, воспользовавшись теоремой Виета, мы можем составить квадратное уравнение, корнями которого будут $\sigma_{2,0}$ и $\sigma_{2,1}$:

$$x^2 + x - 4 = 0, \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Чтобы различить корни, опять воспользуемся рисунком на с. 337. В каждую из сумм корни входят вместе со своими сопряженными. Ясно, что $\sigma_{2,0} > \sigma_{2,1}$ (в первом случае нужно сложить и удвоить вещественные части корней ε_1, ε_2, ε_4, ε_8, во втором — ε_3, ε_5, ε_6, ε_7). Итак,

$$\sigma_{2,0} = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}, \quad \sigma_{2,1} = \frac{-\sqrt{17} - 1}{2}.$$

Рассмотрим суммы четверок корней:

$$\sigma_{4,0} = \varepsilon_{[0]} + \varepsilon_{[4]} + \varepsilon_{[8]} + \varepsilon_{[12]},$$
$$\sigma_{4,1} = \varepsilon_{[1]} + \varepsilon_{[5]} + \varepsilon_{[9]} + \varepsilon_{[13]},$$
$$\sigma_{4,2} = \varepsilon_{[2]} + \varepsilon_{[6]} + \varepsilon_{[10]} + \varepsilon_{[14]},$$
$$\sigma_{4,3} = \varepsilon_{[3]} + \varepsilon_{[7]} + \varepsilon_{[11]} + \varepsilon_{[15]}.$$

[1] В этом можно убедиться, проводя непосредственные перемножения и учитывая, что $\varepsilon_k \cdot \varepsilon_l = \varepsilon_{k+l}$, причем удобно пользоваться рисунком на с. 337. Однако ниже будет указан способ избежать этих утомительных выкладок.

Имеем: $\sigma_{4,0}+\sigma_{4,2}=\sigma_{2,0}$; $\sigma_{4,1}+\sigma_{4,3}=\sigma_{2,1}$. Можно показать далее, что $\sigma_{4,0}\cdot\sigma_{4,2}=\sigma_{2,0}+\sigma_{2,1}=-1$, а значит, $\sigma_{4,0}$, $\sigma_{4,2}$ — корни уравнения $x^2-\sigma_{2,0}x-1=0$. Решая это уравнение и учитывая, что $\sigma_{4,0}>\sigma_{4,2}$ (см. рис. на с. 337), получаем после несложных преобразований

$$\sigma_{4,0}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\,\right),$$
$$\sigma_{4,2}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{17}-1-\sqrt{34-2\sqrt{17}}\,\right).$$

Аналогично показывается, что

$$\sigma_{4,1}=\frac{1}{4}\left(-\sqrt{17}-1+\sqrt{34+2\sqrt{17}}\,\right),$$
$$\sigma_{4,3}=\frac{1}{4}\left(-\sqrt{17}-1-\sqrt{34+2\sqrt{17}}\,\right).$$

Переходим к заключительному этапу. Положим

$$\sigma_{8,0}=\varepsilon_{[0]}+\varepsilon_{[8]}=\varepsilon_1+\varepsilon_{16},$$
$$\sigma_{8,4}=\varepsilon_{[4]}+\varepsilon_{[12]}=\varepsilon_4+\varepsilon_{13}.$$

Можно было бы рассмотреть еще шесть такого рода выражений, но нам они не потребуются, так как достаточно доказать квадратичную иррациональность $\sigma_{8,0}=2\cos(2\pi/17)$, что уже позволяет построить правильный 17-угольник. Имеем $\sigma_{8,0}+\sigma_{8,4}=\sigma_{4,0}$, $\sigma_{8,0}\cdot\sigma_{8,4}=\sigma_{4,1}$; из рисунка видно, что $\sigma_{8,0}>\sigma_{8,4}$, а потому $\sigma_{8,0}$ — бо́льший корень уравнения $x^2-\sigma_{4,0}+\sigma_{4,1}=0$, т. е.

$$\sigma_{8,0}=2\cos(2\pi/17)=\frac{1}{2}\left(\sigma_{4,0}+\sqrt{\sigma_{4,0}^2-4\sigma_{4,1}}\,\right)=$$
$$=\frac{1}{8}\left(\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\,\right)+\frac{1}{4}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}}}.$$

Мы несколько преобразовали непосредственно получаемое выражение для $\sqrt{\sigma_{4,0}^2 - 4\sigma_{4,1}}$, однако не будем утомлять читателя воспроизведением этих простых выкладок.

Пользуясь полученной формулой для $\cos(2\pi/17)$, построение правильного 17-угольника можно выполнить при помощи элементарных правил построения выражений, являющихся квадратичными иррациональностями. Разумеется, получится весьма громоздкая процедура. В настоящее время известны довольно компактные способы построения. Один из них будет приведен (без доказательства) в приложении. В одном отношении формула для $\cos(2\pi/17)$ не оставляет сомнения. Прийти к ней в рамках традиционных геометрических идей времени Евклида невозможно. Решение Гаусса принадлежало другой эпохе в математике. Отметим, что наиболее содержательное утверждение — принципиальная возможность построения правильного 17-угольника. Сама процедура построения не столь существенна. Для доказательства возможности построения было достаточно убедиться, что на каждом шаге возникали квадратные уравнения с коэффициентами — квадратичными иррациональностями, не выписывая точных выражений (это становится особенно существенным при переходе к большим показателям).

В рассказанном решении уравнения (22) остался совершенно невыясненным вопрос о том, почему оказалось удачным разбиение корней, использующее нумерацию $\varepsilon_{[l]}$, как можно было догадаться положить ее в основу решения? Сейчас мы, по существу, еще раз повторим решение, обнажив ключевую идею — исследование симметрий в множестве корней.

Симметрии в множестве корней уравнения (22)*.* Прежде всего, задача о корнях из единицы тесно связана с арифметикой остатков от деления на n (по модулю n). Действительно, если $\varepsilon^n = 1$, то ε^k — также корень n-й степени из единицы, причем число ε^k зависит только от остатка от деления k на n. Положим $\varepsilon = \varepsilon_1$ (см. формулу (17)); тогда ε_k есть просто ε в степени k, поэтому $\varepsilon_k \cdot \varepsilon_l = \varepsilon_{k+l}$, где сумма берется по модулю n (остаток от деления на n); в частности, $\varepsilon_k \cdot \varepsilon_{n-k} = \varepsilon_0 = 1$.

Задача 1. Если p — простое число и δ — любой комплексный корень p-й степени из единицы, то множество δ^k, $k = 0, 1, \ldots, p-1$, содержит все корни p-й степени из единицы.

Указание. Нужно доказать, что в этом случае для всякого $0 < m < p$ среди остатков от деления чисел km, $k = 0, 1, \ldots, p-1$ на p содержатся все числа $0, 1, \ldots, p-1$.

Обозначим через T_k следующее преобразование (возведение в степень k): $T_k\varepsilon_l = (\varepsilon_l)^k = \varepsilon_{lk}$.

Задача 2. Докажите, что если $n = p$ — простое число, то каждое из преобразований T_k $(k = 1, 2, \ldots, p-1)$ осуществляет взаимно однозначное отображение множества корней на себя (т. е. множество $\{T_k\varepsilon_0, T_k\varepsilon_1, \ldots, T_k\varepsilon_{p-1}\}$ совпадает с множеством всех корней $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{p-1}\}$).

Задача 1 показывает, что для всякого $1 \leqslant l \leqslant p-1$ множество $\{T_k\varepsilon_0, T_k\varepsilon_1, \ldots, T_k\varepsilon_{p-1}\}$ совпадает с множеством всех корней. Из задач 1 и 2 следует такой вывод: *составим таблицу, в которой на пересечении k-й строки и l-го столбца стоит $T_k\varepsilon_l$, $1 \leqslant k, l \leqslant p-1$; тогда в каждой строке и каждом столбце стоят все корни $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{p-1}$ в некотором порядке без повторений.* Отметим, что $T_{p-1}\varepsilon_l = \varepsilon_{-l} = (\varepsilon_l)^{-1}$. Тем, кто знает определение группы, советуем проверить, что преобразования T_k образуют группу относительно умножения $T_k \cdot T_l = T_{kl}$.

Далее мы рассматриваем случай $p = 17$. Будем говорить, что множество корней M инвариантно относительно преобразования T_k, если $T_k\varepsilon_l \in M$ для всех $\varepsilon_l \in M$. Относительно всех преобразований T_k инвариантно лишь множество всех корней $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{16}\}$.

Кардинальная догадка заключается в том, что *группа корней тем «лучше», чем большее число преобразований оставляет эту группу инвариантной.*

Введем для T_k еще одну нумерацию $T_{[l]}$, как это было сделано для ε_k: $T_{[l]} = T_k$, $k = 3^l$. В новых обозначениях $T_{[k]}\varepsilon_{[l]} = \varepsilon_{[k+l]}$, $T_{[m]}(T_{[k]}\varepsilon_{[l]}) = T_{[m+k]}\varepsilon_{[l]}$ (сумму в квадратных скобках надо брать по модулю 16).

Читатель, конечно, обнаружит аналогию с переходом к логарифмам, что не удивительно, так как $\varepsilon_{[l]} = \varepsilon_{3^l}$.

Задача 3. Доказать, что если некоторое множество корней инвариантно относительно некоторого $T_{[k]}$, где k нечетно, то это множество инвариантно относительно всех преобразований $T_{[m]}$, т. е. если оно не пусто, то совпадает с множеством всех корней.

Указание. Достаточно показать, что если k нечетно, то существует такое m, что km дает при делении на 16 остаток 1.

С другой стороны, имеются две группы корней, инвариантные относительно всех $T_{[k]}$ с четными k: корни $\varepsilon_{[l]}$ с четными l и корни с нечетными l. Их суммы мы обозначили через $\sigma_{2,0}$, $\sigma_{2,1}$.

Ясно, что $\sigma_{2,0} + \sigma_{2,1} = -1$. Исследуем $\sigma_{2,0} \cdot \sigma_{2,1}$. Это произведение является суммой попарных произведений $\varepsilon_{[k]}\varepsilon_{[l]}$, где k — четное, l — нечетное, каждое из которых является некоторым корнем $\varepsilon_{[m]}$, а всего — 64 слагаемых. Мы покажем, что среди них каждый из корней $\varepsilon_{[0]}, \varepsilon_{[1]}, \ldots, \varepsilon_{[15]}$ встречается одинаковое число раз (четыре раза), а в результате $\sigma_{2,0} \cdot \sigma_{2,1} = -4$. Воспользуемся тем, что преобразования T_k сохраняют группы корней при k четном и переводят их одна в другую при k нечетном. Каждое слагаемое в $\sigma_{2,0} \cdot \sigma_{2,1}$ однозначно представимо в виде $\varepsilon_{[m]}\varepsilon_{[m+r]}$, где $0 \leqslant m \leqslant 15$, $r = 1, 3, 5, 7$ (докажите!). Сгруппируем слагаемые с одинаковыми r. Полученные суммы будут иметь вид

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{[0]}\varepsilon_{[r]} + \varepsilon_{[1]}\varepsilon_{[r+1]} + \varepsilon_{[2]}\varepsilon_{[r+2]} + \ldots + \varepsilon_{[15]}\varepsilon_{[r+15]} = \\
&\qquad = T_{[0]}(\varepsilon_{[0]}\varepsilon_{[r]}) + T_{[1]}(\varepsilon_{[0]}\varepsilon_{[r]}) + \ldots + T_{[15]}(\varepsilon_{[0]}\varepsilon_{[r]}) = \\
&\qquad = T_{[0]}\varepsilon_{[r]} + T_{[1]}\varepsilon_{[r]} + \ldots + T_{[15]}\varepsilon_{[r]} = \varepsilon_{[0]} + \ldots + \varepsilon_{[15]} = -1.
\end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что

$$T_{[m]}\varepsilon_{[k]} \cdot T_{[m]}\varepsilon_{[l]} = T_{[m]}(\varepsilon_{[k]}\varepsilon_{[l]})$$

и уже упоминавшимися свойствами $T_{[m]}$.

Значения $\sigma_{2,0}$, $\sigma_{2,1}$ найдены выше.

Переходим к следующему шагу. Мы хотим ввести в рассмотрение новые, меньшие группы корней, инвариантные относительно каких-нибудь $T_{[k]}$. По аналогии с задачей 3 можно показать, что при этом k обязательно должно делиться на 4. Поэтому имеются четыре группы корней, инвариантные относительно всех $T_{[4l]}$ и меньшие, чем уже рассмотренные; запишем суммы корней в каждой группе: $\sigma_{4,0}$, $\sigma_{4,1}$, $\sigma_{4,2}$, $\sigma_{4,3}$. Мы уже отмечали, что $\sigma_{4,0}+\sigma_{4,2}=\sigma_{2,0}$; $\sigma_{4,1}+\sigma_{4,3}=\sigma_{2,1}$.

Вычислим произведение $\sigma_{4,0}\cdot\sigma_{4,2}$; оно представляется в виде суммы 16 слагаемых вида $\varepsilon_{[4k]}\varepsilon_{[4l+2]}$. Каждое такое слагаемое однозначно записывается в виде $\varepsilon_{[2m]}\varepsilon_{[2m+2r]}$, $r=1,3$, $m=0,1,2,3,4,5,6,7$. Сгруппируем слагаемые с одним r и заметим, что $\varepsilon_{[0]}\varepsilon_{[2]}=\varepsilon_1\varepsilon_9=\varepsilon_{10}=\varepsilon_{[3]}$, $\varepsilon_{[0]}\varepsilon_{[6]}=\varepsilon_{[1]}\varepsilon_{[15]}=\varepsilon_{[8]}$. При $r=1$ получаем сумму

$$T_{[0]}\varepsilon_{[3]}+T_2\varepsilon_{[3]}+\ldots+T_{[14]}\varepsilon_{[3]}=\sigma_{2,1};$$

при $r=3$ — сумму $\sum_k T_{[2k]}\varepsilon_{[8]}=\sigma_{2,0}$, т.е. $\sigma_{[4,0]}\cdot\sigma_{[4,2]}=\sigma_{2,0}+\sigma_{2,1}=$ $=-1$. Решая квадратные уравнения, мы нашли $\sigma_{[4,0]}\cdot\sigma_{[4,2]}$.

На последнем шаге мы рассмотрим группы корней, инвариантные относительно $T_{[8]}$; их восемь. В частности, $\sigma_{8,0}+\sigma_{8,4}=$ $=\sigma_{4,0}$. Вычислим $\sigma_{8,0}\cdot\sigma_{8,4}$. Учитывая, что $\varepsilon_{[0]}\cdot\varepsilon_{[4]}=\varepsilon_1\varepsilon_{13}=\varepsilon_{[14]}=$ $=\varepsilon_9$, получаем $\sigma_{8,0}\cdot\sigma_{8,4}=T_{[0]}\varepsilon_{[9]}+T_{[4]}\varepsilon_{[9]}+T_{[8]}\varepsilon_{[9]}+T_{[12]}\varepsilon_{[9]}=\sigma_{4,1}$. Это позволило найти $\sigma_{8,0}=2\cos(2\pi/17)$ и тем самым закончить решение.

Мы видели, что рассуждение Гаусса целиком построено на использовании преобразований, переставляющих корни. Первым, кто обратил внимание на роль таких преобразований в вопросах разрешимости уравнений, был Лагранж (1736 — 1813). Вероятно, Гаусс в этот период еще не был знаком с работами Лагранжа. Позднее Галуа (1811 — 1832) положил изучение этих преобразований в основу замечательной теории, ныне носящей его имя. По существу для уравнения деления круга Гаусс построил теорию Галуа в полном объеме.

Возможные обобщения и простые числа Ферма. Если не стремиться получить явное выражение для корней, а доказывать лишь их квадратичную иррациональность, то выкладки можно почти полностью опустить, обыгрывая лишь соображения инвариантности. Именно, $\sigma_{2,0}\cdot\sigma_{2,1}$ — сумма каких-то корней $\varepsilon_{[l]}$, а поскольку эта сумма переходит в себя под действием всех преобразований $T_{[k]}$, все корни входят в нее одинаковое число раз, а значит $\sigma_{2,0}\cdot\sigma_{2,1}$ — целое число. Аналогично, $\sigma_{4,0}\cdot\sigma_{4,2}$ не меняется при всех преобразованиях вида $T_{[2k]}$, а потому является комбинацией $\sigma_{2,j}$; $\sigma_{8,0} \cdot \sigma_{8,4}$ сохраняется всеми $T_{[4k]}$, а значит, является комбинацией $\sigma_{4,j}$.

Это сокращенное рассуждение позволяет выявить, на какие простые p обобщается доказательство Гаусса квадратичной иррациональности корней p-й степени из 1. Анализ показывает, что мы пользовались лишь тем, что $p-1 = 2^k$ (на каждом шаге группы делились пополам), и нумерацией корней, опирающейся на первообразность 3 для простого числа 17. Для нумерации можно было пользоваться любым первообразным корнем. Как мы уже отмечали, для любого простого p хотя бы один первообразный корень существует (кстати, можно показать (докажите!), что 3 является первообразным корнем для всех p вида 2^k+1). Заметим также, что если $p = 2^k + 1$ — простое число, то $k = 2^r$. Итак, *доказана возможность построения циркулем и линейкой правильного p-угольника для всех простых p вида* $2^{2^r}+1$.

Простые числа вида $2^{2^r}+1$ имеют свою историю. Эти простые числа принято называть *числами Ферма.* Ферма предполагал, что все числа такого рода являются простыми. Действительно, при $r = 0$ получаем 3, при $r = 1$ — 5, при $r = 2$ — 17. Далее при $r = 3$ получается 257, при $r = 4$ — 65 537. Оба эти числа простые. При $r = 5$ получается число 4 294 967 297. Ферма и у него не обнаружил простых делителей, но Эйлер выяснил, что Ферма «просмотрел» делитель 641. Сейчас известно, что числа Ферма являются составными при $r = 6, 7, 8, 9, 11, 12, 15, 18, 23, 36, 38, 73$ (например, при $r = 73$ имеется простой делитель $5 \cdot 2^{75} + 1$). Имеется гипотеза, что существует лишь конечное число простых чисел Ферма.

Что касается правильных n-угольников для составного n, то в силу обстоятельств, отмеченных выше (с. 332), мы сразу получаем возможность искомого построения для всех $n > 2$ вида $2^k p_1 p_2 \ldots p_l$, где $p_1, p_2, \ldots, p_l$ — различные простые числа Ферма. Замечательно, что других n, для которых возможно построение, вообще не существует. Доказательство этого утверждения Гаусс не опубликовал: «Хотя границы нашего сочинения не позволяют провести этого доказательства, мы думаем, что надо все же на это указать для того, чтобы кто-либо не пытался искать еще других случаев, кроме тех, которые указаны нашей теорией, например, не надеялся бы свести на геометрические построения (т. е. на построения циркулем и линейкой — С. Г.) деление окружности на $7, 11, 13, 19, \ldots$ частей и не тратил бы зря своего времени». Из результата Гаусса следует принципиальная возможность построения правильного p-угольника при $p = 257$ и 65537, однако вычисление корней, не говоря уже о явном описании построения, требует колоссальной, но совершенно автоматической работы. Замечательно, что нашлись желающие ее провести не только при $p = 257$ (Ришело это сделал в сочинении из 80 страниц; есть сведения, что это построение проделал и сам Гаусс), но и при $p = 65537$ (решение, полученное Гермесом, содержится в чемодане солидных размеров в Геттингене). Вот какую шутку придумал по этому поводу английский математик Дж. Литтлвуд: «Один навязчивый аспирант довел своего руководителя до того, что тот сказал ему: «Идите и разработайте построение правильного многоугольника с 65537 сторонами». Аспирант удалился, чтобы вернуться через 20 лет с соответствующим построением».

Заключительные замечания. Мы уже отмечали, что день 30 марта 1796 г., когда было найдено построение правильного 17-угольника, определил судьбу Гаусса. Ф. Клейн пишет:

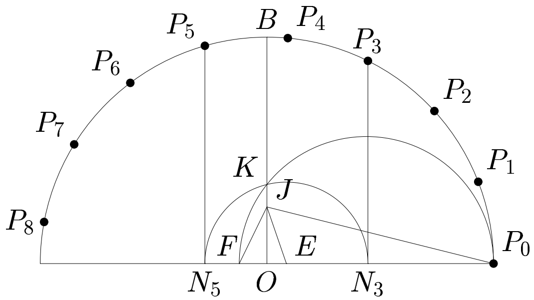
«С этой даты начинается дневник $\langle \ldots \rangle$ Перед нашими глазами проходит гордый ряд великих открытий в арифметике, алгебре и анализе $\langle \ldots \rangle$ И среди всех этих проявлений, мощных порывов гениального духа, можно сказать, трогательно находить до мелочей добросовестно выполненные ученические работы, от которых не освобождены и такие люди как Гаусс. Мы находим здесь записи добросовестных упражнений в дифференцировании, и непосредственно перед делением лемнискаты здесь встречаются совершенно банальные подстановки в интегралах, в которых должен упражняться любой студент».

Работа Гаусса надолго становится недосягаемым образцом математического открытия. Один из создателей неевклидовой геометрии Янош Бойяи (1802—1860) называл его «самым блестящим открытием нашего времени или даже всех времен». Только трудно было это открытие постигнуть! Благодаря письмам на родину великого норвежского математика Абеля (1802 — 1829), доказавшего неразрешимость в радикалах уравнения 5-й степени, мы знаем о трудном пути, который он прошел, изучая теорию Гаусса. В 1825 г. Абель пишет из Германии: «Если даже Гаусс — величайший гений, он, очевидно, не стремился, чтобы все это сразу поняли». Он решает не встречаться с Гауссом, но позднее пишет из Франции: «Мне в конце концов удалось приподнять завесу таинственности, окружавшую до сих пор теорию деления круга, созданную Гауссом. Теперь ход его рассуждений ясен мне, как божий день». Работа Гаусса вдохновляет Абеля на построение теории, в которой «столько замечательных теорем, что просто не верится». Он собирается в Германию, чтобы «взять Гаусса штурмом». Несомненно влияние Гаусса и на Галуа.

Сам Гаусс сохранил трогательную любовь к своему первому открытию на всю жизнь:

«Рассказывают, что Архимед завещал построить над своей могилой памятник в виде шара и цилиндра в память о том, что он нашел отношение объемов цилиндра и вписанного в него шара — 3 : 2. Подобно Архимеду Гаусс выразил желание, чтобы в памятнике на его могиле был увековечен семнадцатиугольник. Это показывает, какое значение сам Гаусс придавал своему открытию. На могильном камне Гаусса этого рисунка нет, но памятник, воздвигнутый Гауссу в Брауншвейге, стоит на семнадцатиугольном постаменте, правда, едва заметном зрителю» (Г. Вебер).

Приложение. Приведем выдержку из книги Г. Кокстера «Введение в геометрию» (М.: Наука, 1966, с. 49), содержащую рецепт Ричмонда для построения правильного 17-угольника: Соединим точку P_0 с точкой J, лежащей на радиусе OB на расстоянии $OB/4$ от центра. На диаметре, проходящем через точку P_0, выберем точки E и F так, чтобы $\angle OJE$ был равен четверти угла OJP_0, а $\angle FJE$ был равен $45°$. Пусть окружность, построенная на FP_0 как на диаметре, пересекает OB в точке K и пусть окружность с центром E и радиусом EK пересекает OP_0 в точках N_3 (между



O и P_0) и N_5. Восставим перпендикуляры к OP_0 в этих двух точках до пересечения с первоначальной окружностью в точках P_3 и P_5. Тогда дуга P_3P_5 (и равная ей дуга P_1P_3) равна $\frac{2}{17}$ окружности. В доказательстве несколько раз используется тот факт, что корни уравнения $x^2 + 2x \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha - 1 = 0$ равны $\operatorname{tg} \alpha$ и $-\operatorname{ctg} \alpha$.

2. Золотая теорема

> Я случайно натолкнулся на одну изумительную арифметическую истину, и, так как она не только показалась мне прекрасной сама по себе, но и навела на мысль, что она связана и с другими выдающимися фактами, я со всей энергией взялся за то, чтобы выяснить принципы, на которых она основывается, и получить строгое ее доказательство. После того как это желание, наконец, осуществилось, прелесть этих исследований настолько увлекла меня, что я уже не мог их оставить.
>
> *Гаусс*

30 марта 1796 г., в день когда был построен правильный 17-угольник, начинается дневник Гаусса — летопись его замечательных открытий. Следующая запись в дневнике появилась уже 8 апреля. В ней сообщалось о доказательстве теоремы, которую он назвал «золотой». Ее частные случаи доказали Ферма, Эйлер, Лагранж. Эйлер сформулировал общую гипотезу, неполное доказательство которой дал Лежандр. 8 апреля Гаусс нашел полное доказательство гипотезы Эйлера. Впрочем, Гаусс еще не знал о работах своих великих предшественников. Весь нелегкий путь к «золотой теореме» он прошел самостоятельно!

Все началось с детских наблюдений. Иногда, глядя на очень большое число, можно сразу сказать, что из него нельзя точно извлечь квадратный корень. Например, можно воспользоваться тем, что квадраты целых чисел не могут оканчиваться ни на 2, ни на 3, ни на 7, ни на 8. А иногда можно воспользоваться тем, что квадрат целого числа может либо делиться на 3, либо давать остаток 1 (но никогда 2). Оба эти свойства имеют одну природу, поскольку последняя цифра — это остаток от деления на 10. Гаусса интересует общая проблема: какими могут вообще быть остатки от деления квадратов на различные простые числа. Исследуем и мы этот вопрос.

Квадратичные вычеты. Всюду ниже мы будем предполагать, что p — простое число, причем $p \neq 2$. Делить целые числа можно «с недостатком» или «с избытком». Иными словами, остатки можно считать положительными или отрицательными. Условимся выбирать остаток наименьшим по абсолютной величине.

Нетрудно доказать, что если p нечетно, то всякое целое число n единственным образом представляется в виде

$$n = pq + r, \qquad |r| \leqslant \frac{p-1}{2}, \tag{23}$$

где q и r — целые.

Будем называть r остатком от деления n на p или вычетом числа n по модулю p. Это обозначается так:

$$n \equiv r \pmod{p}.$$

Выпишем в табл. 1 вычеты[1] для нескольких первых простых чисел $p > 2$. Нас интересует, какие вычеты (остатки) могут иметь квадраты целых чисел. Эти остатки мы будем называть квадратичными вычетами, а остальные — квадратичными невычетами.

Числа n^2 и r^2, где r — остаток числа n по модулю p, имеют один и тот же остаток при делении на p. Поэтому, если мы хотим

[1]То, что мы называем вычетом (остатком), обычно называют абсолютно наименьшим вычетом (остатком). Мы сократили название, так как других вычетов нам не встретится. Обозначение $n \equiv r \pmod{p}$ также используется обычно в более общей ситуации: оно означает, что $n - r$ делится на p.

p	$k = \dfrac{p-1}{2}$	Вычеты (остатки) по модулю p
3	1	$-1\ 0\ 1$
5	2	$-2\ -1\ 0\ 1\ 2$
7	3	$-3\ -2\ -1\ 0\ 1\ 2\ 3$
11	5	$-5\ -4\ -3\ -2\ -1\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5$
13	6	$-6\ -5\ -4\ -3\ -2\ -1\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6$
17	8	$-8\ -7\ -6\ -5\ -4\ -3\ -2\ -1\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8$

Таблица 1.

p	$k = \dfrac{p-1}{2}$	Квадратичные вычеты и невычеты по модулю p
3	1	$-1\ \mathbf{0}\ \mathbf{1}$
5	2	$-2\ -\mathbf{1}\ \mathbf{0}\ \mathbf{1}\ 2$
7	3	$-\mathbf{3}\ -2\ -1\ \mathbf{0}\ \mathbf{1}\ 2\ 3$
11	5	$-5\ -4\ -3\ -\mathbf{2}\ -1\ \mathbf{0}\ \mathbf{1}\ 2\ \mathbf{3}\ \mathbf{4}\ 5$
13	6	$-6\ -5\ -\mathbf{4}\ -\mathbf{3}\ -2\ -\mathbf{1}\ \mathbf{0}\ \mathbf{1}\ 2\ \mathbf{3}\ \mathbf{4}\ 5\ 6$
17	8	$-\mathbf{8}\ -7\ -6\ -5\ -\mathbf{4}\ -3\ -\mathbf{2}\ -\mathbf{1}\ \mathbf{0}\ \mathbf{1}\ \mathbf{2}\ 3\ \mathbf{4}\ 5\ 6\ 7\ \mathbf{8}$

Таблица 2.

найти квадратичные вычеты, то достаточно возводить в квадрат лишь вычеты, т. е. целые числа r, $|r| \leqslant k = (p-1)/2$. При этом, разумеется, достаточно рассматривать $r \geqslant 0$.

Проведем вычисления для простых чисел из предыдущей таблицы. Составим новую таблицу, в которой «жирные» числа отвечают квадратичным вычетам (табл. 2).

Попытаемся подметить некоторые закономерности и оценить степень их общности. Во-первых, *в каждой строке есть в точности* $k+1$ *жирное число.* Покажем, что так обстоит дело для всех простых $p > 2$. Из сказанного выше следует, что для каждого нечетного p (даже не простого) квадратичных вычетов не больше $k+1$. Мы покажем, что их точно $k+1$, если убедимся, что все числа r^2 $(0 \leqslant r \leqslant k)$ дают при делении на p различные остатки. Если $r_1 > r_2$ и при этом r_1^2 и r_2^2 дают одинаковые остатки, то $r_1^2 - r_2^2$ делится на p. Поскольку p — простое число, то r_1+r_2 или $r_1 - r_2$ должно делиться на p, чего не может быть, так как $0 < r_1 + r_2 < 2k < p$. Здесь мы впервые воспользовались простотой p (покажите, что для составных чисел наше утверждение неверно).

Теорема Ферма и критерий Эйлера. Далее, очевидно, что 0 и 1 являются жирными во всех строчках. Что касается остальных столбцов, то сразу не видна закономерность, согласно которой в них появляются жирные числа. Начнем с $a = -1$. Оно является жирным при $p = 5, 13, 17, \ldots$ и не является при $p = 3, 7, 11 \ldots$. Вы, может быть, заметили, что простые числа первой группы при делении на 4 дают остаток 1, а второй — остаток -1 (заметьте, что простые числа $p \neq 2$ других остатков вообще давать не могут) . Итак, можно предположить, что -1 является квадратичным вычетом для простых чисел вида $p = 4l+1$ и квадратичным невычетом для $p = 4l - 1$. Эту закономерность первым заметил Ферма, однако оставил ее без доказательства. Попытайтесь найти доказательство самостоятельно! Вы убедитесь, что главная трудность в том, что не видно, как воспользоваться простотой p, а без этого предположения утверждение становится неверным.

Первое доказательство после нескольких неудачных попыток нашел в 1747 г. Эйлер. В 1755 г. Эйлер нашел другое, очень изящное доказательство, использующее «малую теорему Ферма»: *Если p — простое число, то для всякого целого a, $0 < |a| < p$,*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}. \tag{24}$$

Доказательство. При $p = 2$ утверждение очевидно, и можно считать p нечетным. Рассмотрим p чисел $0, \pm a, \pm 2a, \pm 3a, \ldots, \pm ka$; $k = (p-1)/2$. Все эти числа при делении на p дают разные остатки, так как в противном случае $r_1 a - r_2 a$, $r_1 > r_2$, $|r_1| \leqslant k$, $|r_1| \leqslant k$, делится на p, но a не делится на p и $r_1 - r_2$ не делится на p, так как $0 < r_1 - r_2 < p$. Перемножим те из рассматриваемых чисел, которые отличны от нуля; получим $(-1)^k(k!)^2a^{p-1}$. Поскольку среди остатков сомножителей содержатся все ненулевые вычеты и учитывая правило вычисления остатка произведения, получаем, что произведение имеет тот же вычет, что и $(-1)^k(k!)^2$, т. е. $(k!)^2(a^{p-1}-1)$ делится на p. Так как $k!$ не делится на p $(0 < k < p)$, то на p делится $a^{p-1}-1$, и доказательство окончено.

Следствие (критерий Эйлера квадратичности вычета). *Вычет* $b \neq \neq 0$ *является квадратичным тогда и только тогда, когда*

$$b^k \equiv 1 \pmod p, \qquad k = \frac{p-1}{2}. \tag{25}$$

Доказательство. Необходимость условия (25) устанавливается легко. Если $a^2 \equiv b \pmod p$, $0 < a < p$, то $a^{2k} = a^{p-1}$ и b^k должны иметь одинаковые вычеты, равные, в силу (25), единице. Достаточность показывается сложнее. Мы выведем ее из следующей леммы.

Лемма 1. *Если* $P(x)$ — *многочлен степени* l, p — *простое число и имеется более* l *различных вычетов* r *по модулю* p, *для которых*

$$P(r) \equiv 0 \pmod p, \tag{26}$$

то (26) *имеет место для всех вычетов.*

Доказательство будем вести индукцией по l. При $l = 0$ утверждение очевидно. Пусть оно справедливо для многочленов степени не выше $l-1$. Пусть далее $r_0, r_1, \ldots r_l$, $0 \leqslant r_j < p$, удовлетворяют сравнению $P(r) \equiv 0 \pmod p$. Представим $P(x)$ в виде $P(x) = (x-r_0)Q(x) + P(r_0)$, где $Q(x)$ — многочлен степени $l-1$, а $P(r_0)$ делится на p. Тогда, поскольку $P(r_0)$ делится на p, $(r_j - r_0)Q(r_j)$ делится на p при $1 \leqslant j \leqslant l$. Так как $r_j - r_0$ не может делиться на p, то $Q(r_j)$ делится на p, а тогда по предположению индукции $Q(r)$ будет делиться на p при всех r. Следовательно, $P(r)$ делится на p при всех r.

Применим лемму к многочлену $P(x) = x^k - 1$. Тогда соотношению (26) удовлетворяет k ненулевых квадратичных вычетов. Однако имеется вычет $(r = 0)$, не удовлетворяющий (26); значит, по лемме, все квадратичные невычеты должны не удовлетворять (26) и, следовательно, условие (25) достаточно.

Замечание. *Для квадратичного невычета b имеем: $b^{(p-1)/2} \equiv -1 \pmod p$.*
Действительно, если $b^{(p-1)/2} \equiv r \pmod p$, то $r^2 \equiv 1 \pmod p$, откуда $r = -1$. (Сравнению $r^2 \equiv 1 \pmod p$ удовлетворяют только два вычета: $r \equiv 1 \pmod p$, $r \equiv -1 \pmod p$.)

Критерий Эйлера позволяет мгновенно решить вопрос о том, для каких p вычет -1 является квадратичным. Подставляя в (25) $b = -1$, получаем, что при $p = 4l+1$ соотношение (25) выполняется (k — четно), а при $p = 4l - 1$ — не выполняется (k — нечетно). Сформулированная выше гипотеза стала теоремой.

Задача 1. Доказать, что если $p \neq 2$ есть простой делитель числа $n^2 + 1$, то $p = 4l + 1$.

Итак, мы доказали, что -1 — квадратичный вычет для $p = 4l + 1$ и квадратичный невычет для $p = 4l - 1$.

Обсудим некоторые особенности приведенного доказательства. Это утверждение состоит из двух частей: отрицательное утверждение для $p = 4l - 1$ и положительное для $p = 4l + 1$. В первом случае естественно пытаться найти некоторое свойство, которому квадратичные вычеты удовлетворяют, а -1 не удовлетворяет, что и сделал Эйлер. Найденное свойство оказалось характеристическим, т. е. одновременно удалось доказать и вторую часть гипотезы. Если вы пробовали доказать эту часть утверждения самостоятельно, то вы, вероятно, пытались явно построить по $p = 4l + 1$ число n^2, дающее при делении на p остаток -1. Доказательство Эйлера неэффективно в том смысле, что оно не дает явной конструкции для числа n по p, а лишь утверждает его существование. Иными словами, гарантируется, что если мы будем перебирать числа $1, 2, \ldots, 2l$, возводить их в квадраты, брать остатки от деления квадратов на p, то рано или поздно мы получим -1. Остается открытым вопрос, нельзя ли указать более явную конструкцию n и p, не использующую процедуры перебора. Положительный ответ дал Лагранж (1736 — 1813) в 1773 г., используя следующую теорему.

Теорема Вильсона.[1] *Если $p = 2k+1$ есть простое число, то*

$$(-1)^k (k!)^2 \equiv -1 \pmod{p}. \tag{27}$$

Для доказательства этой теоремы воспользуемся леммой 1. Положим $P(x) = (x^2-1)(x^2-4)\ldots(x^2-k^2)$, $Q(x) = x^{2k}-1$. Тогда $R(x) = P(x) - Q(x)$ — многочлен степени не выше $2k-1$, который при $x = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm k$ делится на p (этим свойством обладают P и Q). По лемме $R(x) \equiv 0 \pmod{p}$ для всех x. Собственно, новым фактом является лишь то, что $R(0) \equiv 0 \pmod{p}$. Поскольку $R(0) = (-1)^k(k!)^2 + 1$, получаем (27).

Следствие Лагранжа. *При $p = 4l+1$ имеем:* $[(2l!)]^2 \equiv -1 \pmod{p}$.

Задача 2. Доказать, что если (27) верно, то p — простое число.

Эта задача дает повод отметить, что в конструкции Лагранжа простота p существенна.

Выяснив, когда $a = -1$ является квадратичным вычетом, Эйлер, используя огромный числовой материал, пытается найти аналогичные условия для других a. Он подмечает, что при $a = 2$ все зависит от остатка при делении p на 8; 2 оказывается квадратичным вычетом для простых $p = 8l \pm 1$ и невычетом при $p = 8l \pm 3$ (простое число $p > 2$ при делении на 8 может давать остатки $\pm 1, \pm 3$). Далее, 3 является квадратичным вычетом при $p = 12l \pm 1$ и квадратичным невычетом при $p = 12l \pm 5$. Эйлер высказывает гипотезу, что и в общем случае все определяется остатком от деления p на $4a$.

Гипотеза Эйлера.[1] *Число a одновременно является или квадратичным вычетом или квадратичным невычетом для всех простых чисел, входящих в арифметическую прогрессию $4aq + r$, $q = 0, 1, 2, \ldots$; $0 < r < 4a$.*

Ясно, что если $4a$ и r имеют общий делитель $s > 1$, то в арифметической прогрессии не будет ни одного простого числа. Если же первый член и разность прогрессии взаимно просты, то, как утверждает теорема Дирихле (1805 — 1859), в этой прогрессии

[1] Вильсон (1741 — 1793) — юрист, изучавший математику в Кембридже.

[1] Гаусс назвал ее «золотой теоремой».

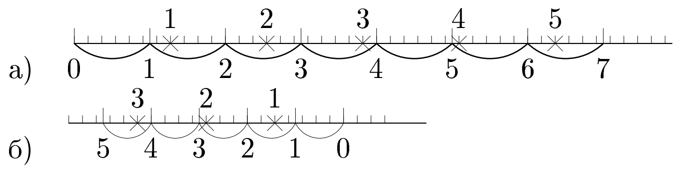


Рис. 33. а) $p = 11$ $(k = 5)$, $a = 7$, $\nu = 3$; *б)* $p = 7$ $(k = 3)$, $a = -5$, $\nu = 2$.

имеется бесконечное число простых чисел (обобщение теоремы о бесконечности числа простых чисел в натуральном ряду).

Возвратимся к гипотезе Эйлера. Оказалось, что критерий Эйлера, который сослужил нам добрую службу при $a = -1$, отказывает уже при $a = 2$. Эйлеру не удалось разобраться в этом случае. Ему удалось доказать свою гипотезу, не считая $a = -1$, лишь при $a = 3$. Затем Лагранж, которого мы уже упоминали, доказал гипотезу при $a = 2, 5, 7$; Лежандр в 1785 г. предложил доказательство гипотезы для общего случая, которое, однако, содержало существенные пробелы.

Доказательство Гаусса. Вначале Гаусс, как и его предшественники, замечает утверждение для $a = -1$, затем, уже угадав результат для общего случая, последовательно разбирает случай за случаем, продвинувшись дальше других: им рассмотрены $a = \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 7$. Общий случай (гипотеза Эйлера) не поддался первой атаке: «Эта теорема мучила меня целый год и не поддавалась напряженнейшим усилиям». Заметим, что это было то место, где Гаусс «догнал» современную математику: усилия крупнейших математиков, пытавшихся доказать гипотезу Эйлера, были безрезультатными.

Наконец, 8 апреля 1796 г. он находит общее доказательство, которое Кронекер (1823 — 1891) очень метко назвал «пробой сил гауссова гения». Доказательство проводится двойной индукцией по a и p; Гауссу приходится придумывать существенно различные соображения для рассмотрения восьми (!) различных случаев. Нужно было иметь не только поразительную изобретательность, но и удивительное мужество, чтобы не остановиться на этом пути. Позднее Гаусс нашел еще шесть доказательств «золотой» теоремы (ныне их известно около пятидесяти). Как это часто бывает, после того как теорема доказана, удается найти доказательства много более простые, чем первоначальное. Мы приведем здесь доказательство, мало отличающееся от третьего доказательства Гаусса. В его основе лежит ключевая лемма, доказанная Гауссом не ранее 1808 г.

Лемма 2. Пусть $p = 2k + 1$ — *простое число,* a — *целое число,* $0 < |a| \leqslant 2k$; $r_1, r_2, \ldots, r_k$ — *вычеты чисел* $a, 2a, \ldots, ka$; ν — *число отрицательных среди них. Тогда*

$$a^k \equiv (-1)^\nu \pmod p. \tag{28}$$

Применяя критерий Эйлера, получаем такое следствие:

Критерий Гаусса квадратичности вычета. Вычет является квадратичным тогда и только тогда, когда фигурирующее в лемме 2 число ν *четно.*

Доказательство леммы 2. Заметим, что все вычеты $r_1, \ldots, r_k$ различны по абсолютной величине. Это следует из того, что сумма и разность любых двух из них не делится на p: $r_i \pm r_j = (i \pm j)a$, $i \neq j$, $|i \pm j| < p$, $|a| < p$. Таким образом, набор модулей $|r_1|, \ldots, |r_k|$ — это числа $1, 2, \ldots, k$ в некотором порядке. В результате $a \cdot 2a \cdot \ldots \cdot ka = a^k k!$ при делении на p дает тот же остаток, что и $r_1 \ldots r_k = (-1)^\nu k!$. Учитывая, что $k!$ не делится на простое число p, получаем (28).

Доказательство гипотезы Эйлера. Заметим, что в приводимом рассуждении уже не используется простота p — она в полной мере использована в лемме Гаусса. Отметим на числовой оси точки $mp/2$, если $a > 0$, и $-mp/2$, если $a < 0$ (рис. 33а, б). Занумеруем интервалы с концами в этих точках по номерам левых концов. Отметим теперь крестиками точки $a, 2a, \ldots, ka$; так как a — целое, не делящееся на p, то крестики не могут совпасть с ранее отмеченными точками, причем все крестики попадут в какие-то из построенных интервалов ($|a|p/2 > |a|k$). Легко заметить, что фигурирующее в лемме *число* ν — *это число крестиков, попавших в интервалы с нечетными номерами* (докажите!).

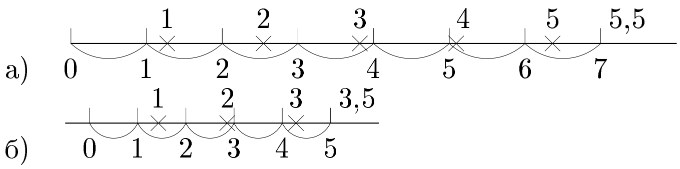


Рис. 34.

Подвергнем теперь нашу картинку преобразованию подобия с коэффициентом $1/a$ (рис. 33 перейдет в рис. 34). При этом точки $mp/2$ перейдут в точки, делящие отрезок $[0, p/2]$ на $|a|$ равных частей, а крестики — в целочисленные точки $1, 2, \ldots, k$.

Нумерация интервалов теперь будет зависеть от знака a: при $a > 0$ они нумеруются номерами левых концов, при $a < 0$ — номерами правых концов; ν — число целочисленных точек в интервалах с нечетными номерами. Если мы увеличим p на $4al$, то в каждый интервал добавится точно $2l$ целых точек. Это следует из того, что при сдвиге интервала на целое число количество целых точек в нем не меняется, а на любом отрезке целочисленной длины n или интервале длины n с нецелочисленными концами имеется ровно n целых точек (докажите!). Итак, при замене p на $p+4al$ величина ν изменится на четное число, а $(-1)^\nu$ не изменится. Значит, для всех p в арифметической прогрессии $p = 4aq + r$ значение $(-1)^\nu$ одно и то же, и гипотеза Эйлера доказана.

Одновременно указан некоторый способ выяснить, является ли a квадратичным вычетом для p. Нужно взять остаток r от деления p на $4a$ (для удобства положительный); разделить $(0, r/2)$ на $|a|$ частей, занумеровав их номерами левых (правых) концов, если a положительно (отрицательно); сосчитать число ν целых точек, попавших в интервалы с нечетный номерами; a — квадратичный вычет в том и только в том случае, когда ν четно.

Проделаем эти вычисления для $a = 2$, чтобы подтвердить наблюдения Эйлера, о которых говорилось на с. 353. Пусть $a = 2$; тогда достаточно рассмотреть $r = 1, 3, 5, 7$, поскольку в остальных случаях арифметическая прогрессия не будет содержать простых чисел. Как видно из рис. 35, число 2 является квадратичным вычетом для $p = 8q + 1$, $p = 8q + 7$, т. е. $p = 8q \pm 1$.

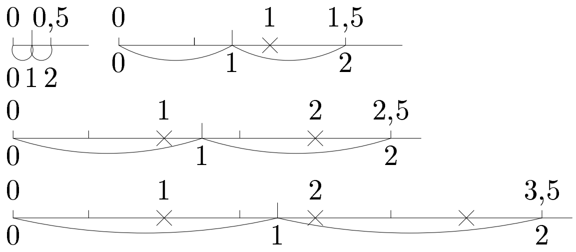


Рис. 35. $r = 1$, $a = 2$, $\nu = 0$; $r = 3$, $a = 3$, $\nu = 1$; $r = 5$, $a = 2$, $\nu = 1$; $r = 7$, $a = 2$, $\nu = 2$.

Упражнение. Покажите, что -2 есть квадратичный вычет для $p = 8q + 1$, $p = 8q + 3$.

Аналогично рассматривается случай $a = \pm 3$. Приведем итоги вычислений (таблица для ν):

	$r = 1$	$r = 3$	$r = 5$	$r = 7$
$a = 3$	0	1	1	2
$a = -3$	0	1	2	3

Таким образом, 3 — квадратичный вычет при $p = 12l \pm 1$ (невычет при $p = 12l \pm 5$), а (-3) — квадратичный вычет для $p = 12l + 1$, $p = 12l + 5$.

Для случая $a = 2, 3$ вы, конечно, заметили еще одну закономерность: простые числа, имеющие при делении на $4a$ остатки, равные по абсолютной величине, одновременно являются либо квадратичными вычетами, либо квадратичными невычетами. Это обстоятельство, разумеется, не осталось незамеченным для Эйлера, и он сформулировал гипотезу в более сильной форме, чем мы ее привели.

Сформулируем теперь

Дополнение к гипотезе Эйлера. *Пусть p и q — простые числа и $p + q = 4a$. Тогда a или является квадратичным вычетом и по модулю p, и по модулю q, или квадратичным невычетом и по модулю p, и по модулю q.*

Доказательство. Выполним построения, указанные при доказательстве гипотезы Эйлера, для интервалов $(0, p/2)$, $(0, q/2)$, $a =$

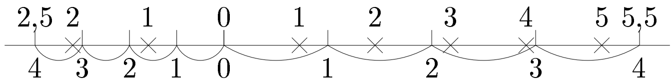


Рис. 36. $p = 11$, $q = 5$, $a = (p+q)/4$, $\nu(p) = 2$, $\nu(q) = 2$.

$= (p+q)/4$. Для удобства расположим интервалы так, чтобы они имели точку 0 общей, находясь по разные стороны от нее; при этом интервал $(0, q/2)$ мы перевернем (рис. 36). Пусть $\nu(p), \nu(q)$ — число целых точек в интервалах с нечетными номерами для p и q соответственно. Нам достаточно доказать, что $\nu(p)+\nu(q)$ четно. Пусть $\nu_j(p)$, $\nu_j(q)$ — число целых точек в соответствующих интервалах с номерами j. Легко видеть, что $\nu_j(p) + \nu_j(q) = 2$ при $j > 0$, откуда и будет следовать нужный результат.

Действительно, на интервале между j-ми левой и правой точками ($j > 0$) лежит $2j$ целых точек, поскольку, как мы уже отмечали, на интервале длины $2j$ с нецелочисленными концами лежит $2j$ целых точек.

Квадратичный закон взаимности. В 1798 г. Лежандр указал очень удобное утверждение, эквивалентное гипотезе, — квадратичный закон взаимности. Введем обозначение — так называемый символ Лежандра:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} +1, & \text{если } a \text{ — квадратичный вычет по модулю } p, \\ -1, & \text{если } a \text{ — квадратичный невычет.} \end{cases}$$

В силу критерия Эйлера (и замечания к нему, с. 352)

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{(p-1)/2} \pmod p. \tag{29}$$

Отсюда сразу следует мультипликативное свойство символа Лежандра:

$$\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right). \tag{30}$$

Отметим также, что символ Лежандра можно доопределить для всех a, не делящихся на p, с сохранением (29), (30), полагая

$$\left(\frac{a+p}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right). \tag{31}$$

Теперь мы можем сформулировать квадратичный закон взаимности:
Если p, q — нечетные простые числа, то

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}. \tag{32}$$

Другими словами, $\left(\frac{p}{q}\right)$ *и* $\left(\frac{q}{p}\right)$ *имеют противоположные знаки, если $p = 4l+3$, $q = 4m+3$, и совпадают в остальных случаях.*

Название закона связано с тем, что в нем устанавливается «взаимность» между вопросами о том, когда p — квадратичный вычет по модулю q и когда q — квадратичный вычет по модулю p.

Доказательство. Всегда или $p - q = 4a$, или $p + q = 4a$.

Случай 1. Пусть $p-q = 4a$, т. е. p и q имеют одинаковые остатки при делении на 4. Тогда $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q+4a}{q}\right) = \left(\frac{4a}{q}\right) = \left(\frac{a}{q}\right)$ (мы воспользовались (31), (30) и тем, что $\left(\frac{4}{q}\right) = 1$ при всех q). Далее, $\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p-4a}{p}\right) = \left(\frac{-4a}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{a}{p}\right)$. В силу уже доказанной гипотезы Эйлера $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a}{q}\right)$, т. е. $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$ при $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$ и $\left(\frac{p}{q}\right) = -\left(\frac{q}{p}\right)$ при $\left(\frac{-1}{p}\right) = -1$. Остается вспомнить, что $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$ при $p = 4l+1$, $\left(\frac{-1}{p}\right) = -1$ при $p = 4l+3$.

Случай 2. Пусть $p+q = 4a$, т. е. p и q имеют разные остатки при делении на 4. Имеем $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{4a-q}{q}\right) = \left(\frac{a}{q}\right)$. Аналогично,

$\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)$. В силу дополнения к гипотезе Эйлера $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a}{q}\right)$, т. е. $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$. Доказательство окончено. Нетрудно заметить, что проведенные рассуждения можно обратить и вывести из квадратичного закона взаимности гипотезу Эйлера и дополнение к ней (проделайте это!). Отметим еще, что формулы (30) – (32) дают способ вычисления $\left(\frac{p}{q}\right)$ существенно более простой, чем описанный выше комбинаторный способ. Проиллюстрируем это на примере:

$$\left(\frac{59}{269}\right) = \left(\frac{269}{59}\right) = \left(\frac{59\cdot 4 + 33}{59}\right) = \left(\frac{3}{59}\right)\cdot\left(\frac{11}{59}\right) = -1,$$

так как $\left(\frac{3}{59}\right) = -\left(\frac{59}{3}\right) = -\left(\frac{2}{3}\right) = 1$; $\left(\frac{11}{59}\right) = -\left(\frac{59}{11}\right) = -\left(\frac{4}{11}\right) = -1$. Легко показать, что вычисление символа Лежандра всегда можно свести к случаю, когда p или q равно 2.

Упражнение. Сосчитайте $\left(\frac{37}{557}\right)$, $\left(\frac{43}{991}\right)$.

В заключение отметим, что задача о квадратичных вычетах послужила отправной точкой большой и плодотворной математической деятельности. Многочисленные попытки Гаусса получить новые доказательства квадратичного закона взаимности далеко не в первую очередь диктовались желанием упростить доказательства. Гаусса не оставляла мысль, что им по-настоящему не вскрыты глубокие закономерности, следствием которых является закон взаимности. В полной мере это удалось сделать лишь позднее, в рамках теории алгебраических чисел. Гаусс потратил много сил на обобщение квадратичного закона на кубический и биквадратный случаи, получив замечательные результаты. Эти исследования были продолжены, и изучение различных законов взаимности остается одним из центральных вопросов теории чисел по сей день.

3. Королевские будни

Мы подробно рассказали о двух первых великих открытиях Гаусса, сделанных им в Геттингене, на протяжении 10 дней, за месяц до того, как ему исполнилось 19 лет. Второе из этих открытий целиком относилось к арифметике (теории чисел), а первое в существенном опиралось на арифметические рассмотрения. Теория чисел — первая любовь Гаусса.

Любимейшая наука величайших математиков. Это один из многочисленных эпитетов, которыми Гаусс наделял арифметику (теорию чисел). К тому времени арифметика из набора изолированных наблюдений и утверждений уже превратилась в науку.

Позднее Гаусс напишет: «Главным образом, более поздним исследователям, правда немногочисленным, но завоевавшим непреходящую славу, — таким, как Ферма, Эйлер, Лагранж, Лежандр, мы обязаны тем, что они нашли доступ к сокровищнице этой божественной науки и показали, какими богатствами она наполнена».

Одна из самых удивительных сторон «феномена Гаусса» заключается в том, что он в своих первых работах практически не опирался на достижения предшественников, переоткрыв за короткий срок то, что было сделано в теории чисел за полтора века трудами крупнейших математиков.

Гаусс использует пребывание в Геттингене для изучения трудов классиков, он переосмысливает их достижения, сопоставляет с тем, что он открыл сам. По его замыслу результаты этой деятельности должны были быть подытожены во всеобъемлющем труде. К написанию этой книги Гаусс приступает после возвращения в Брауншвейг в 1798 г. после окончания университета. В книгу должны были войти собственные результаты, все еще остававшиеся неопубликованными, если не считать газетной заметки, в которой кстати обещалось: «Это открытие является собственно лишь следствием одной еще не совсем законченной большой теории. Как только она получит эту законченность, она будет предложена публике». На осуществление грандиозного замысла ушло четыре года напряженной работы.

В 1801 г. вышли знаменитые «Арифметические исследования» Гаусса. Эта огромная книга (более 500 страниц крупного формата) содержит основные результаты Гаусса: квадратичный закон взаимности, задачу деления круга, вопрос о представимости целых чисел в виде $am^2 + bmn + cn^2$ (в частности, в виде суммы квадратов). Книга была издана на средства герцога и ему посвящена. В изданном виде книга состояла из семи частей. На восьмую часть денег не хватило. В этой части речь должна была идти об обобщении закона взаимности на степени выше второй, в частности — о биквадратичном законе взаимности. Полное доказательство биквадратичного закона Гаусс нашел лишь 23 октября 1813 г., причем в дневниках он отметил, что это совпало с рождением сына.

Клейн писал: «В своих „Арифметических исследованиях“ Гаусс в полном смысле этого слова создал современную теорию чисел и предопределил все ее дальнейшее развитие до нынешнего дня. Восхищение этим трудом возрастает еще больше, когда наблюдаешь, как Гаусс без всякого внешнего побуждения с самого начала черпает этот мир из самого себя».

За пределами «Арифметических исследований» Гаусс, по существу, теорией чисел больше не занимался. Он лишь продумывал и доделывал то, что было задумано в те годы. Например, он придумал еще шесть разных доказательств квадратичного закона взаимности. «Арифметические исследования» сильно опередили свое время. В процессе их создания Гаусс не имел серьезных математических контактов, а вышедшая книга долго не была доступна никому из немецких математиков. Во Франции, где можно было рассчитывать на интерес Лагранжа, Лежандра и др., книге не повезло: обанкротился книготорговец, который должен был распространять книгу, и большая часть тиража пропала. В результате ученикам Гаусса приходилось позднее переписывать отрывки из книги от руки. Положение в Германии стало меняться лишь в 40-х годах, когда Дирихле основательно изучил «Исследования» и читал по ним лекции.

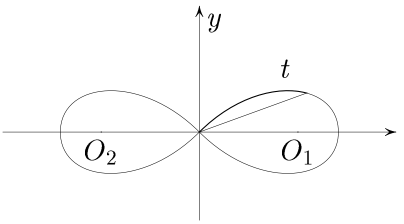
А в Казань — к Бартельсу и его ученикам — книга попала в 1807 г.

«Арифметические исследования» оказали огромное влияние на дальнейшее развитие теории чисел и алгебры. Отталкиваясь от работы Гаусса о делении круга, Галуа пришел к решению вопроса о разрешимости уравнений в радикалах. Законы взаимности до сих пор занимают одно из центральных мест в алгебраической теории чисел.

Гельмштадтская диссертация. В Брауншвейге Гаусс не имел литературы, необходимой для работы над «Арифметическими исследованиями». Поэтому он часто ездил в соседний Гельмштадт, где была хорошая библиотека. Здесь в 1798 г. Гаусс подготовил диссертацию, посвященную доказательству «основной теоремы алгебры» — утверждения о том, что всякий многочлен с комплексными (в частности, с действительными) коэффициентами имеет комплексный корень (если хотеть оставаться в области действительных чисел, то основную теорему алгебры можно сформулировать так: всякий многочлен с действительными коэффициентами раскладывается в произведение многочленов первой и второй степени). Гаусс критически разбирает все предшествующие попытки доказательства и с большой тщательностью проводит идею Даламбера. Безупречного доказательства все же не получилось, так как не хватало строгой теории непрерывности. В дальнейшем Гаусс придумал еще три доказательства основной теоремы (последний раз — в 1848 г.).

Лемниската и арифметико-геометрическое среднее. Расскажем еще об одной линии в работах Гаусса, начавшейся в детстве. В 1791 г., когда Гауссу было 14 лет, его занимала следующая игра. Он брал два числа a_0, b_0 и строил для них среднее арифметическое $a_1 = (a_0 + b_0)/2$ и среднее геометрическое $b_1 = \sqrt{a_0 b_0}$. Затем он вычислял средние от a_1, b_1: $a_2 = (a_1 + b_1)/2$, $b_2 = \sqrt{a_1 b_1}$, и т. д. Гаусс вычислял обе последовательности с большим числом знаков. Очень скоро он уже не мог различить a_n и b_n — все вычисленные знаки совпадали. Другими словами, обе последовательности быстро стремились к общему пределу $M(a, b)$

(называемому *арифметико-геометрическим средним*). В те же годы Гаусс много возился с кривой, называемой *лемнискатой* (или лемнискатой Бернулли), — множеством точек, произведение расстояний каждой из которых до двух фиксированных точек O_1, O_2 (фокусов) постоянно и равно $(O_1O_2/2)^2$. К систематическому изучению лемнискаты Гаусс перешел в 1797 г. Он



долго пытается найти длину лемнискаты, пока не догадывается, что она равна $\dfrac{2\pi}{M(\sqrt{2},2)}O_1O_2$. Мы не знаем, как Гаусс сообразил это, но знаем, что было это 30 мая 1799 г. и что, не имея вначале доказательства, он сосчитал обе величины с одиннадцатью (!) десятичными знаками. Гаусс придумал для лемнискаты функции, аналогичные тригонометрическим функциям для окружности. Например, для лемнискаты, расстояние между фокусами которой равно $\sqrt{2}$, лемнискатный синус $\operatorname{sl} t$ — это просто длина хорды, соответствующей дуге длины t. Последние годы XVIII столетия у Гаусса уходят на построение теории лемнискатных функций. Для них были получены теоремы сложения и приведения, аналогичные теоремам для тригонометрических функций.

От лемнискатных функций Гаусс переходит к их обобщению — эллиптическим функциям. Он понимает, что речь идет «о совершенно новой области анализа». После 1800 г. Гаусс уже не смог уделять эллиптическим функциям столько времени, сколько было необходимо для доведения теории до состояния, удовлетворяющего его своей полнотой и строгостью. С самого начала он отказался от регулярных публикаций, надеясь опубликовать все разом, как это было с его арифметическими работами. Однако заботы так никогда и не доставили ему необходимого времени.

В 1808 г. он пишет своему другу и ученику Шумахеру: «С круговыми и логарифмическими функциями мы умеем теперь обходиться как единожды один, но великолепный золотой родник, хранящий сокровенное высших функций, остается пока почти terra incognita[1]. Я очень много работал над этим прежде и со временем дам собственный большой труд об этом, на что я намекал еще в моих „Арифметических исследованиях“. Приходишь в изумление от чрезвычайного богатства новых и в высшей степени интересных истин и соотношений, доставляемых этими функциями».

Гаусс считал, что может не торопиться с публикацией своих результатов. Тридцать лет так и было. Но в 1827 г. сразу два молодых математика — Абель и Якоби — опубликовали многое из того, что было им получено.

«Результаты Якоби представляют часть моей собственной большой работы, которую я собираюсь когда-нибудь издать. Она будет представлять исчерпывающий труд на эту тему, если только небесам будет угодно продлить мою жизнь и даровать мне силы и душевный покой» (письмо Шумахеру).

«Господин Абель предвосхитил многие мои мысли и примерно на треть облегчил мою задачу, изложив результаты с большой строгостью и изяществом. Абель шел тем же путем, что и я в 1798 г., поэтому нет ничего невероятного в том, что мы получили столь похожие результаты. К моему удивлению, это сходство распространяется даже на форму, а местами и на обозначения, поэтому многие его формулы кажутся списанными с моих. Но чтобы никто не понял меня неправильно, я должен добавить, что не помню ни одного случая, когда я говорил об этих исследованиях с кем-нибудь из посторонних» (письмо Бесселю).

Наконец, в письме Креллю: «Поскольку Абель продемонстрировал такую проницательность и такое изящество в вопросах изложения, я чувствую, что могу совершенно отказаться от опубликования полученных мной результатов» (май 1828 г.).

Следует отметить, что замечание Гаусса в «Арифметических исследованиях» о том, что теорию деления круга можно перенести на лемнискату, оказало большое влияние на Абеля.

С наступлением нового века научные интересы Гаусса решительно сместились в сторону от чистой математики. Он много

[1] Неизведанная область (лат.).

раз эпизодически будет обращаться к ней и каждый раз получать результаты, достойные гения. В 1812 г. он опубликовал работу о гипергеометрической функции. (Эта функция зависит от трех параметров. Придавая им конкретные значения, можно получить большинство функций, встречающихся в математической физике.) Широко известна заслуга Гаусса в геометрической интерпретации комплексных чисел. О его геометрических работах мы расскажем ниже. Однако никогда математика уже не будет главным делом его жизни. Характерный внешний штрих: в 1801 г. Гаусс прекращает регулярно вести дневник (хотя отдельные записи появляются до 1814 г.). Мы редко отдаем себе отчет, как короток был «математический век» Гаусса — менее 10 лет. При этом бóльшую часть времени заняли работы, оставшиеся неизвестными современникам (эллиптические функции).

Малые планеты. Расскажем теперь о новом увлечении Гаусса. Биографы много спорили о причинах, по которым Гаусс начал заниматься астрономией. Прежде всего надо иметь в виду, что, начиная с работ Кеплера, Галилея и Ньютона, астрономия была наиболее ярким местом приложения математики. Эта традиция была продолжена в трудах Эйлера, Даламбера, Клеро, Лагранжа, Лапласа. Предсказывая и объясняя небесные явления, математики чувствовали себя как бы допущенными к тайнам мироздания. Гаусс, с его ранним интересом к конкретным вычислениям, не мог, конечно, не попробовать своих сил на этом традиционном поприще.

Впрочем, были причины и прозаические. Гаусс занимал скромное положение приват-доцента в Брауншвейге, получая 6 талеров в месяц. Пенсия в 400 талеров от герцога-покровителя не настолько улучшила его положение, чтобы он мог содержать семью, а он подумывал о женитьбе. Получить где-нибудь кафедру по математике было непросто, да Гаусс и не очень стремился к активной преподавательской деятельности. Расширяющаяся сеть обсерваторий делала карьеру астронома более доступной.

Гаусс начал интересоваться астрономией еще в Геттингене. Кое-какие наблюдения он проводил в Брауншвейге, причем часть герцогской пенсии он израсходовал на покупку секстанта. Он ищет достойную вычислительную задачу, решая пока мелкие задачи. Так, он публикует простой способ вычисления времени пасхи и других циклических праздников вместо чрезвычайно путаных рецептов, которыми пользовались раньше. Мысль о настоящей задаче появилась в 1801 г. при следующих обстоятельствах.

1 января 1801 г. астроном Пиацци, составлявший звездный каталог, обнаружил неизвестную звезду 8-й звездной величины. Пронаблюдав за ней 40 дней, Пиацци обратился к крупнейшим астрономам с просьбой продолжить наблюдения. По разным причинам его просьба не была выполнена. В июне эти сведения дошли до Цаха, издававшего единственный в то время астрономический журнал. Цах высказал гипотезу, что речь идет «о давно подозреваемой между Марсом и Юпитером, а теперь, по-видимому, открытой, новой большой планете». Гипотеза Цаха показалась правдоподобной, и надо было срочно искать «потерянную» планету. А для этого надо было вычислить ее траекторию. Определить эллиптическую траекторию по дуге в 9°, которую знал Пиацци, было за пределами вычислительных возможностей астрономов. В сентябре 1801 г., оставив все свои дела, вычислением орбиты занялся Гаусс. В ноябре вычисления были закончены. В декабрьском номере журнала Цаха они были опубликованы, а в ночь с 31 декабря на 1 января — ровно через год после наблюдений Пиацци — известный немецкий астроном Ольберс, основываясь на траектории, вычисленной Гауссом, нашел планету (ее назвали Церерой). Это была подлинная сенсация!

25 марта 1802 г. Ольберс открывает еще одну планету — Палладу. Гаусс быстро вычисляет ее орбиту, показав, что и она располагается между Марсом и Юпитером. Действенность вычислительных методов Гаусса стала для астрономов несомненной.

К Гауссу приходит признание. Одним из признаков этого было избрание его членом-корреспондентом Петербургской академии наук. Вскоре его пригласили занять место директора Петербургской обсерватории. Гаусс пишет, что ему лестно получить приглашение в город, где работал Эйлер, и серьезно думает о переезде. В письмах Гаусс пишет, что в Петербурге часто плохая погода, а потому он не будет слишком занят наблюдениями, и будет оставаться время для занятий. Он пишет, что 1000 рублей, которые будет получать, больше 400 талеров, которые он имеет сейчас, но жизнь в Петербурге дороже.

В то же время Ольберс предпринимает усилия, чтобы сохранить Гаусса для Германии. Еще в 1802 г. он предлагает куратору Геттингенского университета пригласить Гаусса на пост директора вновь организованной обсерватории. Ольберс пишет при этом, что Гаусс «к кафедре математики имеет положительное отвращение». Согласие было дано, но переезд состоялся лишь в конце 1807 г. За это время Гаусс женился («жизнь представляется мне весной со всегда новыми яркими цветами»). В 1806 г. умирает от ран герцог, к которому Гаусс, по-видимому, был искренне привязан. Теперь ничто не удерживает его в Брауншвейге.

Жизнь Гаусса в Геттингене складывалась несладко. В 1809 г. после рождения сына умерла жена, а затем и сам ребенок. Вдобавок Наполеон обложил Геттинген тяжелой контрибуцией. Сам Гаусс должен был заплатить непосильный налог в 2000 франков. За него попытались внести деньги Ольберс и, прямо в Париже, Лаплас. Оба раза Гаусс гордо отказался. Однако нашелся еще один благодетель, на этот раз — аноним, и деньги возвращать было некому (много позднее узнали, что это был курфюрст Майнцский, друг Гете). «Смерть мне милее такой жизни», — пишет Гаусс между заметками по теории эллиптических функций. Окружающие не ценили его работ, считали его, по меньшей мере, чудаком. Ольберс успокаивает Гаусса, говоря, что не следует рассчитывать на понимание людей: «их нужно жалеть и им служить».

В 1809 г. выходит законченная в 1807 г. знаменитая «Теория движения небесных тел, обращающихся вокруг Солнца по коническим сечениям». Задержка произошла отчасти из-за опасений издателя, что книга на немецком языке не найдет спроса, а Гаусс из патриотических соображений отказался печатать книгу по-французски. Компромисс состоял в издании книги на латыни. Это единственная книга Гаусса по астрономии (сверх этого он напечатал несколько статей). Гаусс излагает свои методы вычисления орбит. Чтобы убедиться в силе своего метода, он повторяет вычисление орбиты кометы 1769 г., которую в свое время за три дня напряженного счета вычислил Эйлер (по некоторым сведениям, потерявший после этого зрение). Гауссу на это потребовался час. В книге был изложен метод наименьших квадратов, остающийся по сей день одним из самых распространенных методов обработки результатов наблюдений. Гаусс указывает, что он знает этот метод с 1794 г., а с 1802 г. систематически им пользуется. (За два года до выхода «Теории движения» Гаусса метод наименьших квадратов был опубликован Лежандром.)

На 1810 г. пришлось большое число почестей: Гаусс получил премию Парижской академии наук и Золотую медаль Лондонского королевского общества, был избран в несколько академий.

В 1804 г. Парижская академия выбрала в качестве темы для большой премии (золотая медаль весом 1 *кг*) теорию возмущений Паллады. Срок дважды переносился (до 1816 г.) в надежде, что Гаусс представит работу. Гауссу помогал в вычислениях его ученик Николаи («юноша, неутомимый в вычислениях»), и все же вычисления не были доведены до конца. Гаусс прервал их, находясь в тяжелой депрессии.

Регулярные занятия астрономией продолжались почти до самой смерти. Знаменитую комету 1812 г. (которая «предвещала» пожар Москвы!) всюду наблюдали, пользуясь вычислениями Гаусса. 28 августа 1851 г. Гаусс наблюдал солнечное затмение. У Гаусса было много учеников-астрономов (Шумахер, Герлинг, Николаи, Струве). Крупнейшие немецкие геометры Мёбиус и Штаудт учились у него не геометрии, а астрономии. Он состоял в активной переписке со многими астрономами, регулярно читал статьи и книги по астрономии, печатал рецензии. Из писем астрономам мы многое узнаем и о занятиях математикой. Как не похож облик Гаусса-астронома на представление о недоступном отшельнике, существовавшее у математиков!

Геодезия. К 1820 г. центр практических интересов Гаусса переместился в геодезию. Еще в начале века он пытался воспользоваться результатами измерений дуги меридиана, предпринятых французскими геодезистами для установления эталона длины (метра), чтобы найти истинное сжатие Земли. Но дуга оказалась слишком мала. Гаусс мечтал провести измерение достаточно большой дуги меридиана. К этой работе он смог приступить только в 1820 г. Хотя измерения растянулись на два десятилетия, Гаусс не смог осуществить свой замысел в полном объеме. Большое значение имели полученные в связи с геодезией исследования по обработке результатов измерений (к этому времени относятся основные публикации о методе наименьших квадратов) и различные геометрические результаты, связанные с необходимостью проводить измерения на поверхности эллипсоида.

В 20-е годы обсуждался вопрос о переезде Гаусса в Берлин, где он должен был стать во главе института. Сюда должны были быть приглашены наиболее перспективные молодые математики, прежде всего Якоби и Абель. Переговоры затянулись на четыре года; разногласия были по поводу того, должен ли Гаусс читать лекции, и сколько ему должны платить в год — 1200 или 2000 талеров. Переговоры окончились безрезультатно, Впрочем, не совсем: в Геттингене Гауссу стали платить то жалование, на которое он претендовал в Берлине.

Внутренняя геометрия поверхностей. Геодезии мы обязаны тем, что на сравнительно короткое время математика вновь стала одним из главных дел Гаусса. В 1816 г. он думает об обобщении основной задачи картографии — задачи об отображении одной поверхности на другую «так, чтобы отображение было подобно отображаемому в мельчайших деталях». Гаусс посоветовал Шумахеру выбрать этот вопрос при объявлении конкурса на премию Копенгагенского научного общества. Конкурс был объявлен в 1822 г. В том же году Гаусс представил свой мемуар, в котором вводятся характеристики, позволяющие полностью решить проблему, частные случаи которой изучались Эйлером и Лагранжем (отображение сферы или поверхности вращения на плоскость). Гаусс подробно описывает выводы из его теории для многочисленных конкретных случаев, часть из которых возникает из задач геодезии.

В 1828 г. вышел в свет основной геометрический мемуар Гаусса «Общие исследования о кривых поверхностях». Мемуар посвящен внутренней геометрии поверхности, т. е. тому, что связано со структурой самой этой поверхности, а не с ее положением в пространстве.

Образно говоря, внутренняя геометрия поверхности — это то, что можно узнать о геометрии поверхности, «не покидая ее». На поверхности можно измерять длины, натягивая нить так, чтобы она целиком лежала на поверхности. Возникающая кривая называется геодезической (аналог прямой на плоскости). Можно измерять углы между геодезическими, изучать геодезические треугольники и многоугольники. Если мы будем изгибать поверхность (считая ее нерастяжимой и неразрываемой пленкой), то расстояния между точками будут сохраняться, геодезические будут оставаться геодезическими и т. д.

Оказывается, «не покидая поверхности», можно узнать, кривая она или нет. «Настоящую» кривую поверхность ни при каком изгибании нельзя развернуть на плоскость; Гаусс предложил числовую характеристику меры искривления поверхности.

Рассмотрим около точки A на поверхности окрестность площади ε. В каждой точке этой окрестности проведем нормаль (перпендикуляр к поверхности) единичной длины. Для плоскости все нормали будут параллельны, а для кривой поверхности будут расходиться. Перенесем нормали так, чтобы их начала оказались в одной точке. Тогда концы нормалей заполнят некоторую фигуру на единичной сфере. Пусть $\varphi(\varepsilon)$ — площадь этой фигуры. Тогда $k(A) = \lim_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon}$ дает меру кривизны поверхности в точке A.

Оказывается, ни при каком изгибании $k(A)$ не меняется. Для того, чтобы кусок поверхности можно было развернуть на плоскость, необходимо, чтобы во всех точках A этого куска было $k(A) = 0$. Мера кривизны связана с суммой углов геодезического треугольника.

Гаусс интересуется поверхностями постоянной кривизны. Сфера является поверхностью постоянной положительной кривизны (во всех ее точках $k(A) = 1/R^2$, где R — радиус). В записях Гаусса упоминается поверхность вращения постоянной отрицательной кривизны. Потом ее назовут *псевдосферой,* и Бельтрами обнаружит, что ее внутренняя геометрия есть геометрия Лобачевского.

Неевклидова геометрия. По некоторым сведениям, Гаусс интересовался постулатом о параллельных еще в Брауншвейге в 1792 г. В Геттингене он много обсуждал проблему параллельных со студентом из Венгрии Фаркашем Бойяи. Из письма 1799 г., адресованного Ф. Бойяи, мы узнаем, насколько ясно понимал Гаусс, что имеются многочисленные утверждения, приняв которые, можно доказать пятый постулат: «Я достиг многого, что для большинства могло бы сойти за доказательство». И вместе с тем: «Однако дорога, которую я выбрал, ведет скорее не к желательной цели, а к тому, чтобы сделать сомнительной истинность геометрии». Отсюда до понимания возможности неевклидовой геометрии один шаг, но он все-таки еще не был сделан, хотя эта фраза часто ошибочно воспринимается как свидетельство того, что Гаусс пришел к неевклидовой геометрии уже в 1799 г.

Заслуживают внимания слова Гаусса, что он не имеет возможности уделить достаточно времени этим вопросам. Характерно, что о проблеме параллельных нет ничего в дневнике. По-видимому, она никогда не находилась в центре внимания Гаусса. В 1804 г. Гаусс опровергает попытки Ф. Бойяи доказать постулат о параллельных. Письмо заканчивается так: «Однако я еще надеюсь на то, что некогда, и еще до моего конца, эти подводные камни позволят перебраться через них». Похоже, что эти слова означают надежду, что доказательство будет найдено.

Вот еще несколько свидетельств: «В теории параллельных мы до сих пор не опередили Евклида. Это позорная часть математики, которая, рано или поздно, должна принять совершенно другой вид» (1813 г.). «Мы не продвинулись дальше того места, где был Евклид 2000 лет назад» (1816 г.). Однако в том же 1816 г. он говорит о «пробеле, который нельзя заполнить», а в 1817 г. в письме Ольберсу мы читаем: «Я все больше прихожу к убеждению, что необходимость нашей геометрии не может быть доказана, по крайней мере, человеческим умом и для человеческого ума. Может быть, в другой жизни мы придем к другим взглядам на природу пространства, которые нам теперь недоступны. До тех пор геометрию следует ставить в ряд не с арифметикой, существующей чисто априори, а скорее с механикой».

Примерно в то же время к мысли о невозможности доказать пятый постулат пришел юрист из Кенигсберга Швейкарт. Он предположил, что наряду с евклидовой геометрией существует «астральная геометрия», в которой постулат о параллельных не имеет места. Работавший в Кенигсберге ученик Гаусса Герлинг написал учителю о мыслях Швейкарта и приложил заметку последнего. В ответе Гаусс пишет: «Почти все списано с моей души». Деятельность Швейкарта продолжил его племянник Тауринус, с которым Гаусс обменялся несколькими письмами, начиная с 1824 г.

В письмах Гаусс подчеркивает, что его высказывания носят сугубо частный характер и их ни в коем случае не следует предавать гласности. Он не верит, что эти идеи могут быть восприняты, и боится заинтересованности толпы дилетантов. Гаусс пережил немало тяжелых лет и очень дорожит возможностью спокойно работать. Он предупреждает Герлинга, который собирался лишь упомянуть, что постулат о параллельных может оказаться неверен: «Но осы, гнездо которых Вы разрушаете, поднимутся над Вашей головой». Постепенно зреет решение записать результаты, но не публиковать их: «Вероятно, я еще не скоро смогу обработать свои пространные исследования по этому вопросу, чтобы их можно было опубликовать. Возможно даже, я не решусь на это во всю свою жизнь, потому что боюсь крика беотийцев[1], который поднимется, если я выскажу свои воззрения целиком» (письмо Бесселю 1829 г.). В мае 1831 г. Гаусс начинает систематические записи: «Вот уже несколько недель, как я начал излагать письменно некоторые результаты моих собствен-

[1] По преданию, жители Беотии славились в Древней Греции своей глупостью.

ных размышлений об этом предмете, частично имеющих уже 40-летнюю давность, но никогда мною не записанных, вследствие чего я должен был 3 или 4 раза возобновлять весь труд в моей голове. Мне не хотелось бы, однако, чтобы это погибло вместе со мной» (письмо Шумахеру).

Однако в 1832 г. он получил от Фаркаша Бойяи небольшое сочинение его сына Яноша «Аппендикс» (название связано с тем, что оно было издано в виде приложения к большой книге отца). «Мой сын ставит на твое суждение больше, чем на суждение всей Европы». Содержание книги поразило Гаусса: в ней полно и систематически строилась неевклидова геометрия. Это были не отрывочные замечания и догадки Швейкарта-Тауринуса. Такое изложение собирался получить сам Гаусс в ближайшее время. Он пишет Герлингу: «Я нашел все мои собственные идеи и результаты, развитые с большим изяществом, хотя, вследствие сжатости изложения, в форме, трудно доступной тому, кому чужда эта область $\langle\ldots\rangle$; я считаю, что этот юный геометр Бойяи — гений первой величины». А вот что написано отцу: «Все содержание работы, путь, по которому твой сын пошел, и результаты, которые он получил, — почти сплошь совпадают с моими, которые я частично получил уже 30 – 35 лет тому назад. Я действительно этим крайне поражен. Я имел намерение о своей собственной работе, кое-что из которой я теперь нанес на бумагу, при жизни ничего не публиковать $\langle\ldots\rangle$ я имел намерение $\langle\ldots\rangle$, чтобы эти мысли, по, крайней мере, не погибли со мной. Я поэтому чрезвычайно поражен случившимся — оно освобождает меня от этой необходимости; и меня очень радует, что именно сын моего старого друга таким удивительным образом меня предвосхитил». Никакой публичной оценки или поддержки Янош Бойяи от Гаусса не получил. По-видимому, одновременно Гаусс прервал систематические записи по неевклидовой геометрии, хотя сохранились эпизодические заметки, относящиеся к 40-м годам.

В 1841 г. Гаусс познакомился с немецким изданием работы Лобачевского (первые публикации Лобачевского относятся к 1829 г.). Верный себе, Гаусс, интересуется другими публикациями автора, ограничиваясь высказываниями о нем в переписке с близкими корреспондентами. Впрочем, по предложению Гаусса, в 1842 г. Лобачевского «как одного из превосходнейших математиков русского государства» избрали членом-корреспондентом Геттингенского ученого королевского общества. Гаусс лично известил Лобачевского об избрании. Однако ни в представлении Гаусса, ни в дипломе, выданном Лобачевскому, неевклидова геометрия не упоминалась.

О работах Гаусса по неевклидовой геометрии узнали лишь при публикации посмертного архива. Так Гаусс обеспечил себе возможность спокойно работать отказом обнародовать свое великое открытие, вызвав не смолкающие по сей день споры о допустимости занятой им позиции,

Следует отметить, что Гаусса интересует не только чисто логический вопрос о доказуемости постулата о параллельных. Его интересует место геометрии в естественных науках, вопрос об истинной геометрии нашего физического мира (см. выше высказывание от 1817 г.). Он обсуждает возможность астрономической проверки, с интересом отзываясь о соображениях Лобачевского по этому поводу. При занятиях геодезией Гаусс не удержался от измерения суммы углов треугольника с вершинами Высокий Гаген, Брокен, Инсельберг. Отклонение от π не превысило 0,2°.

Электродинамика и земной магнетизм. К концу 20-х годов Гаусс, перешедший 50-летний рубеж, начинает поиски новых для себя областей научной деятельности. Об этом свидетельствуют две публикации 1829 и 1830 гг. Первая из них несет печать размышлений об общих принципах механики (здесь строится «принцип наименьшего принуждения» Гаусса); другая посвящена изучению капиллярных явлений. Гаусс решает заниматься физикой, но его узкие интересы еще не определились. В 1831 г. он пытается заниматься кристаллографией. Это очень трудный год в жизни Гаусса: умирает его вторая жена, у него начинается тяжелейшая бессонница. В этом же году в Геттинген приезжает приглашенный по инициативе Гаусса 27-летний физик Вильгельм Вебер. Гаусс познакомился с ним в 1828 г. в доме Гумбольдта. О замкнутости

Гаусса ходили легенды, и все же в Вебере он нашел сотоварища по занятиям наукой, какого он никогда не имел прежде.

«Внутреннее различие этих людей достаточно выражалось также и в их внешнем облике. Гаусс — приземистый, крепкого телосложения, настоящий представитель Нижней Саксонии, малоразговорчивый и замкнутый в себе. Своеобразной противоположностью ему является небольшой, изящный, подвижный Вебер, чрезвычайная любезность и разговорчивость которого сразу же обнаруживали коренного саксонца; он был действительно родом из Виттенберга, этой страны „саксонцев в квадрате“. На геттингенском памятнике Гауссу и Веберу эта противоположность из художественных соображений смягчена, и даже по возрасту они кажутся более близкими, чем это было в действительности» (Ф. Клейн).

Интересы Гаусса и Вебера лежали в области электродинамики и земного магнетизма. Их деятельность имела не только теоретические, но и практические результаты. В 1833 г. они изобретают электромагнитный телеграф (это событие запечатлено в их общем памятнике). Первый телеграф связывал обсерваторию и физический институт. По финансовым причинам внедрить телеграф в жизнь его создателям не удалось.

Карл Фридрих Гаусс

В процессе занятий магнетизмом Гаусс пришел к выводу, что системы физических единиц надо строить, вводя некоторое количество независимых величин и выражая остальные величины через них. Изучение земного магнетизма опиралось как на наблюдения в магнитной обсерватории, созданной в Геттингене, так и на материалы, которые собирались в разных странах «Союзом для наблюдения над земным магнетизмом», созданным Гумбольдтом после возвращения из Южной Америки. В это же время Гаусс создает одну из важнейших глав математической физики — теорию потенциала. Совместные занятия Гаусса и Вебера были прерваны в 1843 г., когда Вебера вместе с шестью другими профессорами изгнали из Геттингена за подписание письма королю, в котором указывались нарушения последним конституции (Гаусс не подписал письма). Возвратился в Геттинген Вебер лишь в 1849 г., когда Гауссу было уже 72 года. Мы закончим наш рассказ о Гауссе словами Клейна: «Гаусс напоминает мне образ высочайшей вершины баварского горного хребта, какой она предстает перед глазами наблюдателя, глядящего с севера. В этой горной цепи в направлении с востока на запад отдельные вершины подымаются все выше и выше, достигая предельной высоты в могучем, высящемся в центре великане; круто обрываясь, этот горный исполин сменяется низменностью новой формации, в которую на много десятков километров далеко проникают его отроги, и стекающие с него потоки несут влагу и жизнь».

Добавление. Задачи на построение, приводящие к кубическим уравнениям

В «Арифметических исследованиях» Гаусс сообщает без доказательства, что нельзя построить циркулем и линейкой правильные n-угольники для простых n, не являющихся простыми числами Ферма, в частности, правильный 7-угольник. Этот отрицательный результат должен был удивить современников не меньше, чем возможность построения правильного 17-угольника. Ведь $n = 7$ — первое значение n, для которого, несмотря на многочисленные попытки, построение правильного n-угольника не получалось. Несомненно, что греческие геометры подозревали, что с этой задачей дело обстоит неблагополучно, и неспроста, скажем, Архимед предложил способ построения правильного n-угольника, использующий конические сечения. Однако вопрос о доказательстве невозможности построения, по-видимому, даже не вставал.

Надо сказать, что доказательства отрицательных утверждений всегда играли в истории математики принципиальную роль. Доказательство невозможности требует так или иначе обозреть все мыслимые способы решения, построения или доказательства, в то время как для положительного решения достаточно указать один конкретный способ.

Доказательства невозможности в математике имели знаменательное начало, когда пифагорейцы (VI век до н. э.), стремившиеся всю математику свести к целым числам, собственными руками похоронили эту идею: оказалось, что не существует дроби, квадрат которой равен 2. Другая формулировка: диагональ и сторона квадрата несоизмеримы. Итак, целых чисел и их отношений недостаточно для описания очень простой ситуации. Это открытие удивило величайших мыслителей Древней Греции. Легенда утверждает, что боги покарали пифагорейца, сообщившего этот факт людям (он погиб при кораблекрушении). Платон (429 – 348 до н. э.) рассказывает о том, как поразило его существование иррациональных величин. Однажды Платон столкнулся с «практической» задачей, заставившей его переосмыслить возможности геометрии.

«Эратосфен рассказывает в своем сочинении „Платоник“, что когда бог возвестил через оракула делийцам, что, дабы избавиться от чумы, они должны построить жертвенник вдвое больше старого, строители стали в тупик перед задачей построить тело, в два раза большее данного. Они обратились за советом к Платону, и тот сказал им, что бог дал им это предсказание не потому, что ему нужен вдвое больший жертвенник, но что он возвестил это в укор грекам, которые не думают о математике и не дорожат геометрией» (Теон Смирнский). Платону не откажешь в умении использовать подходящий момент для пропаганды науки! По свидетельству Евтония, аналогичная задача (об удвоении надгробного камня Главку) фигурировала уже в одном варианте легенды о Миносе.

Итак, речь идет о нахождении стороны куба с удвоенным объемом, т. е. о построении корня уравнения $x^3 = 2$. Платон направил делийцев к Евдоксу и Геликону. Разные решения предложили Менехм, Архит и Евдокс, но никто из них не нашел построения при помощи циркуля и линейки. Позднее Эратосфен, построивший механический прибор для решения задачи об удвоении куба, в стихотворении, высеченном на мраморной доске в храме Птолемея в Александрии, квалифицирует решения своих предшественников как слишком сложные: «Нужды тебе уж не будет в премудром цилиндре Архита, в конусе не для тебя высек триаду Менехм, и с богоравным Евдоксом изогнутых линий не надо». Менехм заметил, что решаемая задача эквивалентна задаче о двух средних пропорциональных (для заданных a, b): $a : x = x : y = y : b$. Его решение использовало конические сечения. Об «изогнутых линиях» Евдокса мы ничего не знаем. Что касается механического решения, то Эратосфен не был первым. По свидетельству Плутарха, «сам Платон порицал друзей Евдокса, Архита и Менехма, которые хотели свести удвоение куба к механическим построениям; ибо они думали получить средние пропорциональные не из теоретических соображений, но ведь таким образом уничтожается и гибнет благо геометрии, и этим путем геометрия возвращается обратно к чувственному, вместо того чтобы подыматься выше этого и твердо держаться вечных, нематериальных образов, пребывающий в коих Бог есть вечный Бог». Впрочем, Евтоний приписывает самому Платону (по-видимому, ошибочно) некое механическое решение делийской задачи, использующее плотничьи угольники с пазами и подвижными рейками. Платону с его отвращением к «материальным вещам, которые требуют длительной обработки недостойным ремеслом» (Плутарх) нередко противопоставляют Архимеда (287 – 212 до н. э.), прославившегося многочисленными изобретениями, в частности, машинами, примененными при обороне Сиракуз. Впрочем, тот же Плутарх утверждает, что Архимед лишь поддался уговорам царя Гиерона «отвлечь свое искусство от абстракций $\langle\ldots\rangle$, и осязательным образом заняться тем, чего требует действительность», хотя и считал, что практика — «дело низкое и неблагородное; сам же он стремился лишь к тому, что по красоте своей и совершенству находится далеко от царства необходимости».

Наряду с делийской задачей греческая геометрия оставила еще несколько задач, в которых построение не удавалось осуществить циркулем и линейкой: трисекция угла (деление угла на три равные части), квадратура круга и задача о построении правильного n-угольника, в частности, 7-угольника и 9-угольника. Связь некоторых из этих задач с кубическими уравнениями сознавали греческие и еще в большей степени арабские математики.

Задача о правильном 7-угольнике сводится к уравнению $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ (см. с. 333) или

$$\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) + \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = 0.$$

Переходя к переменной $x = z + \dfrac{1}{z}$, получаем уравнение

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Мы покажем, что корни уравнений удвоения куба и семиугольника не могут быть квадратичными иррациональностями, откуда и будет следовать невозможность построения циркулем и линейкой. Мы докажем результат, который обслуживает весьма общую ситуацию:

Теорема. *Если кубическое уравнение $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ с целыми коэффициентами имеет корень, являющийся квадратичной иррациональностью, то оно имеет и рациональный корень.*

Доказательство. Пусть x_1 — такой корень. Он получается из целых чисел при помощи арифметических операций и извлечения квадратного корня. Проанализируем эту конструкцию. Вначале корень извлекается из некоторого количества рациональных чисел: $\sqrt{A_1}$, $\sqrt{A_2}, \ldots, \sqrt{A_a}$, затем из некоторых чисел, получающихся при помощи арифметических операций из рациональных чисел и $\sqrt{A_i}$ ($\sqrt{B_1}$, $\sqrt{B_2}, \ldots, \sqrt{B_b}$) и т. д.; на каждом шаге корень извлекается из каких-то чисел, арифметически выражающихся через полученные на всех предыдущих шагах. Возникают «этажи» квадратичных иррациональностей. Пусть $\sqrt{N}$ — одно из чисел, полученных на последнем шаге перед образованием x_1. Сконцентрируем внимание на том, как $\sqrt{N}$ входит в x_1. Оказывается, можно считать, что $x_1 = \alpha + \beta\sqrt{N}$, где $\sqrt{N}$ не входит в квадратичные иррациональности α и β. Достаточно заметить, что арифметические операции над выражениями вида $\alpha + \beta\sqrt{N}$ приводят к таким же выражениям: для сложения и вычитания это очевидно, для умножения проверяется непосредственно, для деления надо исключить $\sqrt{N}$ из знаменателя:

$$\frac{\alpha + \beta\sqrt{N}}{\gamma + \delta\sqrt{N}} = \frac{(\alpha + \beta\sqrt{N})(\gamma - \delta\sqrt{N})}{\gamma^2 - \delta^2 N}.$$

Если теперь подставить $x_1 = \alpha + \beta\sqrt{N}$ в уравнение и выполнить действия, то получится соотношение вида $P + Q\sqrt{N} = 0$, где P, Q — многочлены от α, β, a_i. Если $Q \neq 0$, то $\sqrt{N} = -P/Q$, и подставляя выражение для $\sqrt{N}$ в x_1, можно получить для x_1 представление, уже не содержащее $\sqrt{N}$. Если же $Q = 0$, то проверяется, что $x_2 = \alpha - \beta\sqrt{N}$ — также корень, а учитывая, что $-a_2/a_3 = x_1 + x_2 + x_3$ — сумма корней (теорема Виета), получаем: $x_3 = -a_2/a_3 - 2\alpha$, т. е. опять-таки имеется корень, являющийся квадратичной иррациональностью, выражающейся через $\sqrt{A_i}$, $\sqrt{B_i}$,…, как и x_1, но без $\sqrt{N}$. Продолжая этот процесс дальше, мы избавимся в выражении для корня уравнения ото всех радикалов поэтажно, начиная с последнего этажа. После этого получится рациональный корень, и доказательство окончено.

Остается проверить, что у интересующих нас уравнений нет рациональных корней. Предположим, что у уравнения старший коэффициент $a_3 = 1$. Тогда всякий рациональный корень является целым: если подставить в уравнение $x = p/q$ (p и q взаимно просты) и умножить обе части на q^3, то будет видно, что p^3, а значит и p, делится на q, т. е. $q = 1$. Далее, если x — (целый) корень, то из равенства $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ вытекает, что x является делителем a_0. Для интересующих нас уравнений легко проверяется отсутствие таких корней, а значит, отсутствие корней, являющихся квадратичными иррациональностями.

ФЕЛИКС КЛЕЙН

Славу великого математика Феликсу Клейну принесли работы, выполненные на протяжении одного десятилетия. Клейн прекратил активные занятия математикой в 33 года, но до конца дней оставался в центре научно-организационной жизни, полностью посвятив себя педагогической и литературной деятельности.

Рыцарские шпоры. Ф. Клейн родился в 1849 году в Дюссельдорфе. Здесь он окончил гимназию; в 1865 году поступил в Боннский университет. Уже на следующий год профессор Юлиус Плюккер (1801 — 1868) привлек семнадцатилетнего студента в качестве ассистента по физике. Плюккер начинал свою научную деятельность как геометр, но постепенно переключился на занятия экспериментальной физикой. Однако в последние годы жизни, после двадцатилетнего перерыва, Плюккер возвратился к геометрии. «Этот поворот сыграл решающую роль в моем собственном развитии» — писал Клейн. Посмертное издание последнего мемуара Плюккера (1869 г.) было подготовлено Клейном. Возможно, это и послужило причиной тому, что его диссертация (1868 г.), которой, по словам самого Клейна, он «заслужил рыцарские шпоры», и его первая публикация (1869 г.) были геометрическими.

Лишившись учителя, Клейн становится «странствующим рыцарем». Он посещает основные математические центры Германии (Геттинген, Берлин), устанавливает личные контакты с Клебшем, Вебером, Вейерштрассом. На подающего надежды молодого ученого, который хочет и умеет учиться, сразу обращают внимание. Не менее важны контакты Клейна со сверстниками. Особенно счастливой была дружба Клейна с великим норвеж-

Феликс Клейн

цем Софусом Ли (1842 – 1899); они познакомились в 1870 году в Берлине. С. Ли был на семь лет старше Клейна, но в 1870 году делал лишь первые шаги в геометрии. Вскоре Клейн и Ли отправляются в Париж. Здесь они знакомятся с приемами французских геометров, которые умели с удивительной легкостью, «по воздуху» (С. Ли), получать важные геометрические результаты. Особое значение для дальнейшей научной судьбы Клейна и Ли имели встречи с Камиллом Жорданом (1838 – 1922). Как раз в 1870 году Жордан выпустил обширный труд по теории конечных групп, привлекший широкое внимание к работам Галуа (1811 – 1832). Возможно, «пропуском» к Жордану послужила для друзей первая работа Клейна, посвященная геометрическому исследованию так называемой поверхности Куммера, алгебраическое исследование которой перед этим предпринял Жордан.

Покинуть Францию Клейна заставила франко-прусская война. В самом начале войны Клейн заболел тифом; оправившись от болезни, он поселяется в Геттингене. Для Клейна наступает время великих свершений. Н. Бурбаки пишет, что Клейн завершил «золотой век» геометрии. Но прежде чем рассказывать о блестящем завершении этого века, вспомним о его начале.

«Золотой век» геометрии. Еще в XVII веке Дезаргу (1593 – 1662) и Паскалю (1623 – 1662) удалось при помощи центрального проек-

тирования получить замечательные геометрические результаты. Об этих результатах забыли почти на полтора века. На большие возможности метода проектирования вновь обратил внимание Гаспар Монж (1746 – 1818); он рассказывал об этом в курсе начертательной геометрии, который читал в Политехнической школе. От «Описательной геометрии» Монжа (1795) и отсчитывает Н. Бурбаки «золотой век» геометрии.

Среди слушателей Монжа был Виктор Понселе (1788 – 1867). «Черта, которая возвышает его над всеми предшественниками, — это новый вид геометрической интуиции, — „проективное мышление“» (Клейн). Проективную геометрию Понселе создал в течение двух лет, проведенных им в плену в Саратове после войны 1812 года. Свои результаты Понселе рассказывал товарищам по плену, также слушавшим Монжа в Политехнической школе. Опубликованы эти результаты были в 1822 году в «Трактате о проективных свойствах фигур».

Как и его предшественники, Понселе каждую прямую пополняет бесконечно удаленной точкой, считая, что все параллельные друг другу прямые имеют общую бесконечно удаленную точку («пересекаются» в ней). Все бесконечно удаленные точки образуют бесконечно удаленную прямую. На пополненной плоскости параллельность становится частным случаем пересечения и не требует специального рассмотрения (например, утверждение, что через точку вне прямой проходит единственная прямая, ей параллельная, превращается в утверждение, что через две различные точки, одна из которых обычная, а другая — бесконечно удаленная, проходит единственная прямая). При центральном проектировании конечная точка может не иметь образа («уйти на бесконечность»), но на пополненной бесконечно удаленными точками плоскости это отображение уже взаимно однозначно.

Центральное проектирование переводит одну плоскость в другую; выполнив же несколько проектирований подряд, мы можем вернуться на исходную плоскость, получив преобразование этой плоскости. К таким преобразованиям (их стали называть проективными) относятся перемещения, гомотетии, растяжения. Проективные преобразования взаимно однозначны (на пополненной плоскости) и переводят прямые в прямые (позднее выяснилось, что всякое преобразование с этими свойствами проективно). Проективные преобразования, переводящие в себя бесконечно удаленную прямую, называются аффинными; аффинные преобразования взаимно однозначны на обычной плоскости. Понселе исследовал геометрические объекты, сохраняющиеся при проективных преобразованиях. Оказывается, при проективных преобразованиях коническое сечение также переходит в коническое сечение (но, например, гипербола может перейти в параболу, а всякое коническое сечение проективным преобразованием можно перевести в окружность). Чрезвычайно плодотворным оказалось следующее наблюдение. Пусть A, B, C, D — точки, лежащие на одной прямой, $\{A, B, C, D\} = \dfrac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC}$ — *двойное,* или *ангармоническое* отношение четырех точек. Пусть при некотором проективном преобразовании точки A, B, C, D перешли в точки A', B', C', D' (они обязательно будут лежать на одной прямой). Тогда $\{A, B, C, D\} = \{A', B', C', D'\}$, то есть при проективных преобразованиях двойное отношение четырех точек сохраняется. Если одна из точек, например, D — бесконечно удаленная точка, то $\{A, B, C, D\}$ полагается равным $\dfrac{AC}{BC}$, и мы получаем, что при аффинных преобразованиях сохраняются отношения длин отрезков, лежащих на одной прямой (почему?).

Далее Понселе пытается устранить исключительные случаи взаимного расположения конических сечений. Почему, например, два эллипса могут пересекаться в четырех точках, а пара окружностей — не более чем в двух? На этот вопрос дается удивительный ответ. Кроме пары *вещественных* точек пересечения, у окружностей имеется *универсальная* (одна и та же для всех окружностей на плоскости!) пара общих точек, не замеченных из-за того, что они являются... мнимыми и бесконечно удаленными одновременно. Эти точки называются *циклическими.*

Теперь — несколько слов о четырех немецких математиках: Фердинанде Мёбиусе (1790 – 1868), Якобе Штейнере (1796 – 1863), Христиане фон Штаудте (1798 – 1867) и уже упоминавшемся Плюккере. С их именами связана ожесточеннейшая борьба между аналитическим и синтетическим направлениями в геометрии.

Здесь слова «анализ» и «синтез» употребляются в нестандартном смысле: аналитическая геометрия использует метод координат, в результате чего делается возможным применение алгебры и анализа в геометрии; синтетическая геометрия оперирует с непосредственными пространственными конструкциями.

Наиболее ожесточенным был поединок между аналитиком Плюккером и синтетиком Штейнером; Мёбиус (аналитик) и Штаудт (синтетик) держались в стороне от борьбы. Клейну было очень легко оказаться вовлеченным в борьбу на стороне аналитиков, но он сумел остаться над схваткой, возможно, руководствуясь правилом его знакомого физиолога Людвига: «Нужно удалиться на 600 километров от места споров и оттуда пересмотреть отношения».

Деятельность аналитиков прежде всего требовала усовершенствовать метод координат. В плане синтетическом важно было дать бескоординатные определения объектов проективной геометрии, например, кривых второго порядка. Это сделал Штейнер — очень колоритная фигура в истории математики. Швейцарский крестьянин, до 19 лет ходивший за плугом, он начал заниматься математикой в зрелом возрасте. Штейнер был решительно настроен против мнимых величин в геометрии, называя их «призраками» или «царством теней». Впрочем, фон Штаудт показал, что с мнимыми объектами, возникающими в проективной геометрии, можно связать эквивалентные им чисто вещественные конструкции. Другое важное достижение Штаудта состояло в том, что он сумел определить двойное отношение четырех точек непосредственно, без использования расстояний (которые не сохраняются при проективных преобразованиях).

И наконец, еще одно имя — английского математика Артура Кэли (1821 – 1895), долгое время занимавшегося математикой без отрыва от адвокатской практики. Мы остановимся на одном сочинении Кэли — знаменитом «Шестом мемуаре о формах» (1859 г.). Кэли заметил, что евклидовы перемещения выделяются из всех проективных преобразований тем, что сохраняют циклические точки. В результате, с использованием циклических точек, все объекты евклидовой геометрии (расстояния, величины углов и т. д.) можно определить через проективные понятия (сохраняющиеся при проективных преобразованиях). Кэли называет проективную геометрию *дескриптивной,* а евклидову — *метрической* и пишет: «Метрическая геометрия есть, таким образом, часть дескриптивной, а дескриптивная геометрия — вся геометрия». Следует иметь в виду, что раньше положение казалось прямо противоположным, а именно, что проективная геометрия — сравнительно бедная часть евклидовой. Далее Кэли замечает, что исходя из проективной геометрии можно ввести расстояния, отличные от евклидова (*метрики* или *мероопределения Кэли*): каждое такое расстояние на плоскости связывается с некоторой кривой второго порядка (вещественной или мнимой), так что это расстояние не меняется при всех проективных преобразованиях, сохраняющих рассматриваемую кривую.

Модель Кэли–Клейна. В 1869 году Клейн познакомился с теорией Кэли, а в конце того же года — довольно поверхностно — с геометрией Лобачевского. Тотчас же у него возникла мысль, что одна из метрик Кэли приводит к геометрии Лобачевского. Это была догадка, почти лишенная аргументации. Теория Кэли и теория Лобачевского радикально отличались внешне (вычисления с двойным отношением у Кэли и аксиоматическое изложение у Лобачевского), а геометрии Кэли были еще недостаточно разработаны для того, чтобы можно было проверять аксиомы геометрии Лобачевского. В феврале 1870 года Клейн, делая доклад по теории Кэли на семинаре Вейерштрасса, решился обнародовать свою гипотезу. На этом семинаре было не принято обсуждать фантастические проекты: «зарвавшемуся» молодому человеку объяснили, что «это две далеко отстоящие друг от друга системы»; Клейн же был столь мало подготовлен к защите своей гипотезы, что «позволил переубедить себя». Позднее он жаловался на Вейерштрасса, что у того «не было склонности распознавать с отдаления очертания еще не достигнутых высот». Но Клейн не перестал верить в свою гипотезу. Летом 1871 года он с помощью своего друга Штольца уже основательно изучил неевклидову геометрию и убедился в справедливости своей догадки. Даже обладая доказательством, Клейну было нелегко убедить окружающих в своей правоте. Вероятно, наиболее досадно было Клейну то, что среди несогласных с его утверждением до конца своей жизни оставался Кэли. «Состарившийся дух не в состоянии сделать выводы из созданных им самим положений», — писал Клейн.

Несколько слов о самой модели Кэли–Клейна. «Точками» в этой модели являются внутренние точки круга (круг можно заменить областью, ограниченной любой кривой второго порядка), а «прямыми» — хорды этого круга (без концов). Точки пересечения «прямых» определяются естественным образом; ясно, что через «точку» вне «прямой» проходит бесконечное число «прямых», не пересекающих исходную, то есть налицо отрицание аксиомы параллельных из евклидовой геометрии. Надо еще убедиться в том, что все остальные евклидовы аксиомы для описанной модели выполняются: это и будет означать, что модель Клейна — это модель геометрии Лобачевского. Сравнительно просто проверяются аксиомы, касающиеся взаимного положения точек и прямых. Но когда дело доходит до проверки аксиом равенства, то прежде всего надо договориться, какие отрезки считать равными; унаследовать соответствующие понятия евклидовой геометрии нельзя. Клейн, следуя Кэли, полагает длину отрезка AB равной $|\ln\{A, B, \alpha, \beta\}|$, где α и β — точки пересечения «прямой» AB с границей рассматриваемого круга (эту окружность называют абсолютом). Проективные преобразования, сохраняющие абсолют, сохраняют так определенное «расстояние», т. е. являются перемещениями в модели Кэли–Клейна геометрии Лобачевского.

Итальянский математик Эудженио Бельтрами (1835 – 1900) наметил другой путь к обоснованию геометрии Лобачевского еще в 1868 году. Он обнаружил поверхность — псевдосферу, — кратчайшие линии на которой (геодезические) ведут себя так, как прямые в геометрии Лобачевского. Затем Бельтрами отобразил некоторым образом псевдосферу в круг и получил те же формулы, что позже и Клейн в своей теории.

Клейн исследовал другие неевклидовы геометрии, к которым приводят метрики Кэли, обнаружив, в частности, модель геометрии Римана (в геометрии Римана сумма углов треугольника больше π, в геометрии Лобачевского она всегда меньше π).

Обсудим теперь, что же дает модель Кэли – Клейна для геометрии Лобачевского. Прежде всего — это отличный от аксиоматического способ изложения, более наглядный. Клейн предваряет свою публикацию (1871 г.) словами, что его цель — «дать новое наглядное изложение математических результатов работ, относящихся к теории параллельных, и сделать их доступными ясному пониманию» (примерно так же формулирует свою цель и Бельтрами). Однако построение модели решает далеко не только методическую проблему. Ныне модель Кэли – Клейна рассматривается прежде всего как средство доказательства непротиворечивости геометрии Лобачевского. В модели Кэли – Клейна объекты геометрии Лобачевского формируются на языке евклидовой геометрии, так что после перевода на этот язык теоремы геометрии Лобачевского превращаются в теоремы евклидовой геометрии, и, таким образом, геометрия Лобачевского непротиворечива, если непротиворечива евклидова геометрия.

Клейн видел основное значение построенной им модели в другом. Он ставил во главу угла проективную геометрию, равноправными и независимыми частями которой являются геометрии Евклида и Лобачевского. В этом плане подчеркивалась независимость построенной модели геометрии Лобачевского от евклидовой геометрии, для чего, в свою очередь, была важна возможность строить проективную геометрию, не пользуясь евклидовой (по Штаудту). Именно этот момент вызывал у Кэли подозрения в существовании порочного круга. Клейн писал: «Вместо того чтобы внутри нашей метрической геометрии строить образы неевклидовой геометрии, мы обосновываем свободную от всяких метрическими представлений проективную геометрию, которая содержит в себе как частные случаи, поддающиеся отчетливой классификации, все известные геометрические системы».

Эрлангенская программа. Веками слово «геометрия» употреблялось только в единственном числе. Но вот появилась геометрия Лобачевского, затем геометрия Римана, и наконец, математики поняли, что существует много различных геометрий. Возник естественный вопрос: что же такое геометрия? В 1872 году Клейн высказал свою точку зрения в лекции, прочитанной им в связи со вступлением в профессорскую должность в Эрлангене. Так появилась «Эрлангенская программа», по-видимому, самое известное сочинение Клейна. По существу в нем нет новых результатов, все внимание сконцентрировано на поисках принципа, позволяющего систематизировать очень аморфное образование, в которое превратилась к тому времени геометрия.

По Клейну, *основным атрибутом всякой геометрии является некоторый набор G взаимно однозначных преобразований некоторого множества M.* Преобразований должно быть достаточно много для того, чтобы каждую точку множества M можно было перевести в другую некоторым преобразованием из G (в этом случае говорят, что G действует на M транзитивно).

Такая точка зрения была навеяна, конечно, проективной геометрией, в которой с самого начала первичными были некоторые преобразования (центральные проектирования), в то время как в евклидовой геометрии (в традиционном изложении) первичны другие объекты: прямые, отрезки, равные фигуры и т. д.

Следующее положение состоит в том, что набор преобразований G должен быть *группой.* Это означает, что любые два преобразования из G, выполненные подряд, можно заменить одним преобразованием, также из G; кроме того, вместе с каждым преобразованием $g \in G$ в G входит и *обратное к нему:* g^{-1} (если g переводит x в y, то g^{-1} переводит y в x). Например, движения плоскости или ее проективные преобразования образуют группу.

Итак, с каждой *группой преобразований* G связывается некоторая геометрия. Что же составляет содержание такой геометрии? Прежде всего — нахождение *инвариантов группы* G — свойств, которые сохраняются при действии преобразований из G (точнее, если какой-то объект нашей геометрии обладает инвариантным свойством, то каким бы преобразованием из G мы на него ни действовали, получится объект, также обладающий этим свойством). Для группы перемещений евклидовой геометрии инвариантами являются все известные геометрические свойства, так как мы не различаем положения фигур на плоскости. Однако и в традиционном курсе геометрии имеются нетривиальные утверждения об инвариантах преобразований, не являющихся перемещениями. При гомотетиях сохраняются равенство углов, свойство кривой быть окружностью, отношение длин отрезков, отношение площадей. Имея некоторый запас инвариантных свойств, можно конструировать новые. Относительно гомотетий инвариантными будут свойство прямой быть биссектрисой угла, свойство кривой быть полуокружностью. Относительно осевых растяжений свойство кривой быть окружностью уже не будет инвариантом, но будет инвариантом свойство кривой быть эллипсом (а также гиперболой или параболой); сохраняется отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой (но не на разных), отношение площадей. Следствием является инвариантность свойства точки делить отрезок в данном отношении, свойства прямой быть медианой треугольника. Можно показать, что всякое аффинное преобразование можно представить в виде композиции перемещений и осевых растяжений, а потому все указанные свойства инвариантны относительно аффинных преобразований (пример проективного инварианта — двойное отношение — приведен на с. 385).

Выделение инвариантов — только первый слой геометрии. Ее основное содержание составляют *теоремы о соотношениях между инвариантными свойствами* (эти соотношения называют *сизигиями*). Например, теорема о том, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит их в отношении 1 : 2, сконструирована из аффинных инвариантов: быть точкой пересечения прямых, делить отрезок в данном отношении, быть медианой треугольника. Именно поэтому, если она справедлива для одного треугольника, она справедлива для его образа при аффинном преобразовании, и ее достаточно проверить для одного треугольника, например, равностороннего (аффинным преобразованием можно преобразовать любой треугольник в любой другой). В теоремах о пересечении биссектрис и высот выводится зависимость между инвариантами гомотетий.

На возможность использования геометрических преобразований для получения новых теорем обратил внимание в 1837 году Шаль: «Теперь каждый в состоянии взять какую-нибудь известную истину и применить к ней различные общие принципы преобразований; так он получит другие истины ⟨...⟩ Гений больше не является необходимым для того, чтобы вносить свою лепту в построение величественного храма науки». Однако если понимать рецепт Шаля буквально: взять любую теорему и применить к ней произвольное преобразование, — то получится верное утверждение, но с такой корявой формулировкой, что у него будет мало шансов остаться в «храме науки». Подумайте, например, во что превратится теорема о пересечении биссектрис, если сделать осевое растяжение. Как объяснить, в какую прямую перейдет биссектриса? Клейн объясняет, что важно, напротив, понять, какие из преобразований утверждения не меняют, подобрать преобразования, максимально упрощающие картину, и доказать утверждение в полученной (более простой) форме. Вот традиционный пример. Аффинным преобразованием любой треугольник можно превратить в равносторонний, и поскольку в теореме о точке пересечения медиан речь идет о соотношении между аффинными инвариантами, то эту теорему достаточно проверить для равностороннего треугольника (что уже очень просто).

Эти соображения позволяют уточнить рецепт Шаля. Пусть подмечено некоторое соотношение между аффинными инвариантами в равностороннем треугольнике единичной площади: например, пусть λ — площадь шестиугольника, образованного «тридианами» — прямыми, соединяющими вершины треугольника с точками, делящими противоположную сторону на три равные части. Тогда *в любом* треугольнике отношение площади шестиугольника, образованного тридианами, к площади всего треугольника равно λ. Теперь вы легко можете придумать другие теоремы такого рода.

Один из важнейших моментов в рассуждениях Клейна — это выяснение взаимоотношения между геометриями, связанными с группами G_1, и G_2, если $G_1 \subset G_2$. (Говорят, что G_1 — подгруппа группы G_2.) У большей группы G_2 меньше инвариантов, чем у G_1, и все теоремы, связанные с группой G_2, верны и для геометрии, связанной с меньшей группой G_1.

Поэтому в каждой конкретной геометрии важно найти такие утверждения, которые останутся справедливыми и для геометрий с более широкими группами преобразований. Иногда возможность «перенесения» утверждения в геометрию с более широкой группой преобразований становится ясной лишь после переработки формулировки утверждения.

Идеология Кэли на языке эрлангенской программы состоит в том, что можно двигаться обратным путем, рассматривая группу преобразований, сохраняющих некоторый фиксированный объект. При этом часто инварианты для подгруппы можно конструировать при помощи инвариантов для группы (расстояния в евклидовой и неевклидовых геометриях — при помощи двойного отношения).

Инварианты для большей группы и соотношения между ними обычно описывать проще. В частности, для проективной группы задачу нахождения инвариантов можно сделать полностью алгебраической и решить.

«Эрлангенская программа» завершила «золотой век» классической геометрии. Число новых геометрий возрастает; постепенно геометрический язык пронизывает значительную часть математики. «Классическая геометрия переросла себя и из живой самостоятельной науки превратилась в универсальный язык современной математики, обладающий исключительной гибкостью и удобством» (Н. Бурбаки).

Экстерн в школе Римана. После «Эрлангенской программы» Клейн обращается к теории алгебраических функций — области, в которой работали Гаусс, Лежандр, Абель, Якоби, Вейерштрасс, Риман. Наиболее близкими Клейну оказались идеи Римана (1826 – 1866), с которым он не был лично знаком. По словам Клейна, он был «экстерном в школе Римана, $\langle\ldots\rangle$ а экстерны, как известно, если берутся за какое-нибудь дело, то работают с особенным рвением, ибо к работе их побуждает только глубокий интерес». Позднее Клейн писал, что видел свою задачу в сочетании Римана с Галуа, — то есть в проникновении теории групп в геометрическую теорию функций комплексного переменного. По собственному мнению Клейна, это была главная область его научной деятельности.

К сожалению, об этой деятельности Клейна рассказать мы не сумеем, поскольку здесь уже нужно требовать от читателя специальных знаний, далеко выходящих за рамки школьной программы. Но все же об одном обстоятельстве мы упомянем.

Клейн занимался так называемой *проблемой униформизации.* Рассматривая важные частные случаи, он надеялся со временем разобраться и с общей задачей. Но в 1881 году Клейн обнаружил серию статей никому не известного французского математика Анри Пуанкаре (1854 – 1912), который по существу проблему униформизации решил[1]. Это драматическое событие Клейн встретил достойно. Он начал переписку с Пуанкаре; они обменялись 26 письмами. Клейн, уже известный математик (хотя только на 5 лет старший Пуанкаре), выступает в роли очень тактичного учителя. Он знакомит Пуанкаре с теорией Римана, о которой тот не имел представления, но мгновенно усвоил. Клейн решается на соревнование с Пуанкаре: улучшает доказательство основного

[1]Общая проблема униформизации еще фигурировала в числе проблем Гильберта (1900 г.) и была полностью решена в 1907 году независимо Пуанкаре и Кёбе.

результата и намечает его обобщение. Эта история окончилась для Клейна печально: «Цена, которую мне пришлось заплатить за мои работы, была во всяком случае очень велика, так как мое здоровье оказалось совершенно расшатанным ⟨...⟩ Только к осени 1884 года положение несколько улучшилось, но прежней степени творческой активности я уже не достиг никогда ⟨...⟩ Моя собственная творческая деятельность в области теоретической математики закончилась в 1882 году».

Последние 40 лет. Начиная с 1886 года Клейн работает в Геттингене. Благодаря Клейну этот город превратился в подлинную столицу математики. По его инициативе в Геттинген приглашаются талантливые молодые математики (среди них — Гильберт). Клейн никогда не переставал интересоваться новыми идеями. Его лекционные курсы, частично записанные и изданные, посвящены самым разным областям математики, механики, физики. Многогранна организационная и общественная деятельность Клейна. 50 лет руководил он изданием одного из основных математических журналов «Mathematische Annalen». Своеобразной лебединой песней Клейна были его «Лекции о развитии математики в XIX столетии», читанные в 1914–1919 годах и изданные посмертно его учениками Курантом и Нейгебауэром. Приведем выдержку из их предисловия: «Эти лекции являются зрелым плодом богатой жизни, проведенной в центре научных событий, выражением проникновенной мудрости и глубокого исторического понимания, высокой человеческой культуры и мастерского дара изложения».

Значительную часть времени и сил тратил Клейн на разработку проблем школьного преподавания математики и подготовку учителей, чем, вероятно, до него не занимался ни один математик такого масштаба. «Вряд ли есть предмет, — писал Клейн, — в преподавании которого царила бы такая рутина, как в преподавании математики. Курс элементарной математики вылился в определенные рамки и точно замер раз навсегда в установившихся пределах. Время от времени по тому или иному поводу одни задачи заменяются другими, исключаются одни параграфы и вводятся другие; но по существу на всем материале школьной математики это почти не отражается. Новые учебники алгебры носят отпечаток алгебры Эйлера, как новые учебники геометрии отпечаток геометрии Лежандра. Можно подумать, что математика — мертвая наука, что в ней ничто не меняется, что в этой области знания нет новых идей, по крайней мере таких, которые могли бы сделаться достоянием неспециалистов, предметом общего образования».

Клейн стремится учесть в преподавании состояние современной науки, связь математики и физики. Он рекомендует систематически пользоваться преобразованиями в геометрии, отказаться от традиционного разбиения школьной математики на предметы. Школьный курс должен быть пронизан понятием функции; тщательно продумываются пути воспитания у учеников «функционального мышления». Изложение геометрии, по мнению Клейна, должно начинаться в неаксиоматическом варианте, а аксиоматический метод должен появляться уже тогда, когда ученики в состоянии его осознать.

С большим тактом поддерживал Клейн контакты с людьми, занимающимися школьной математикой, четко ограничив круг своей компетенции, никогда не вмешиваясь в вопросы, требовавшие опыта непосредственной работы в школе. Клейн читал лекции для учителей, которые частично изданы. Наиболее известна его «Элементарная математика с точки зрения высшей». Это не лекции по методике математики и не расширенный курс школьной математики. «Я хочу, чтобы настоящая книга оказалась полезной тем, что побудит иного учителя нашей средней школы к самостоятельному размышлению о новом, более целесообразном изложении того учебного материала, который он преподает. Исключительно с такой точки зрения надо смотреть на мою книгу, а не считать ее готовым учебным планом; разработку последнего я всецело предоставляю тем, кто работает в школе. Если кто-нибудь предполагает, что я иначе понимал свою деятельность, то это недоразумение» (Клейн).

ВОЛШЕБНЫЙ МИР АНРИ ПУАНКАРЕ

Я описал воображаемый мир, обитатели которого неминуемо должны были бы прийти к созданию геометрии Лобачевского.
А. Пуанкаре

Когда сегодня рассказывают историю геометрии Лобачевского, может сложиться впечатление, что докажи создатели неевклидовой геометрии ее непротиворечивость — и она была бы благосклонно принята. Однако прежде всего критиков смущало не отсутствие этого доказательства. Люди привыкли, что геометрия имеет дело с нашим реальным пространством, и что это пространство описывается евклидовой геометрией. Характерно, что Гаусс выделял геометрию среди остальных разделов математики, считая ее, подобно механике, экспериментальной наукой. Но при этом Гаусс, так же как Лобачевский и Бойяи, понимал, что, во-первых, возможны логически стройные геометрические построения, за которыми не стоит физическая реальность, — «воображаемые» геометрии, и, во-вторых, не столь бесспорно, что в астрономических масштабах в нашем мире царит геометрия Евклида. Однако то, что понимали лишь немногие математики, было абсолютно недоступно непрофессионалам. Утверждения геометрии Лобачевского они мерили на евклидов аршин своей геометрической интуиции — и получали неисчерпаемый источник для остроумия. Н. Г. Чернышевский писал сыновьям из ссылки, что над Лобачевским смеялась вся Казань: «Что такое „кривизна луча“ или „кривое пространство“? Что такое геометрия без аксиомы параллельных линий?» Он сравнивает это с «возведением сапог в квадраты» и «извлечением корней из голенищ», и говорит, что это столь же нелепо, как «писать по-русски без глаголов» (здесь достается Фету: «шепот, робкое дыханье, трели соловья», над которым, оказывается, тоже «хохотали до боли в боках»).

Новый этап в развитии неевклидовой геометрии наступил, когда появились первые ее модели. Сейчас мы воспринимаем эти модели как средство для доказательства непротиворечивости геометрии Лобачевского, но они были замечательны не только этим. Даже при благожелательном взгляде геометрия Лобачевского казалась чересчур изощренной, не связанной с остальной математикой, а модель Кэли–Клейна показала, что она естественным образом возникает на столбовой дороге проективной геометрии, очень популярной в то время! С другой стороны, рассмотрение модели, основные понятия которой конструируются из образов привычной нам евклидовой геометрии, давало возможность заменить формальное аксиоматическое изложение неевклидовой геометрии более наглядным.

Еще одну модель придумал Анри Пуанкаре, занимаясь чисто аналитическими вопросами теории функций комплексного переменного. Он неожиданно обнаружил, что появляющиеся у него преобразования можно интерпретировать как *перемещения* в плоскости Лобачевского. Это открытие произвело на него настолько сильное впечатление, что много лет спустя он вспоминал, как оно пришло ему в голову: «без всяких, казалось бы, предшествовавших раздумий», когда он поднимался на подножку омнибуса во время экскурсии в Кутанс. Через десять лет Пуанкаре сделал замечательное дополнение к своей модели — подвел под нее «физическое» основание. Рассказу о модели Пуанкаре и посвящена эта глава.

Экскурс в физику. Наши геометрические представления имеют физические предпосылки. Например, как прямые мы воспринимаем световые лучи. Идущий к нам световой луч продолжает казаться прямым, даже если он преломился по дороге (например, войдя из воздуха в воду). Чтобы рассеять эту иллюзию, нужно поставить эксперимент или посмотреть на происходящее со стороны.

Пусть у нас есть оптически неоднородная среда на верхней полуплоскости ($y > 0$), в которой величина скорости света меняется по закону $c(x, y) = y$ (независимо от направления луча). Из принципа Ферма следует, что путь распространения света между двумя точками есть такой путь, для прохождения которого свету требуется наименьшее возможное время. В нашей среде (где $c(x, y) = y$) свет между двумя точками будет распространяться по таким кривым L (рис. 37), для которых

$$\frac{\sin \alpha(y)}{y} = k, \tag{33}$$

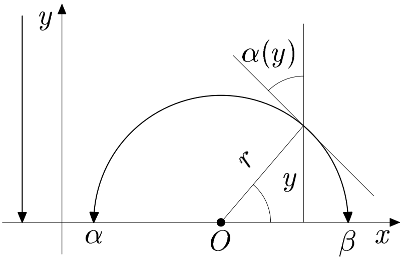


Рис. 37.

где $\alpha(y)$ — угол, который касательная, проведенная к L в точке с ординатой y, образует с вертикалью; k — фиксированное для всех точек кривой L число (ср. формулу (11) на с. 156). Ясно, что условию (33) удовлетворяют все окружности с центрами на оси Ox (то есть перпендикулярные этой оси); для каждой такой окружности $k = \dfrac{1}{r}$, где r — ее радиус. При $k = 0$ мы получаем вертикальные прямые. Можно показать, что других кривых, удовлетворяющих условию (33), нет; этому есть и физическое объяснение (например, такое: свет распространяется из заданной точки в заданном направлении по единственному пути).

Окружности, перпендикулярные к оси Ox, и вертикальные прямые (вернее, их части, расположенные в верхней полуплоскости) и будут играть главную роль в нашем рассказе.

«Пуанкария» и ее геометрия. Мир Пуанкаре (назовем его в честь создателя *Пуанкарией*) представляет собой верхнюю полуплоскость $\{(x, y),\ y > 0\}$ без границы $\{y = 0\}$ (это важно!)[1]. Суще-

---

[1] Можно было бы рассмотреть и «трехмерный» мир, но на плоскости проще рисовать картинки, и ради этого мы будем иметь дело с плоскими существами.

ства, населяющие Пуанкарию (*пуанкаряне*), воспринимают как «прямые» верхние полуокружности с центрами на оси Ox (без концов!) и вертикальные лучи (рис. 38). Будем называть эти прямые P-прямыми (читается «пэ-прямые»). P-прямые кажутся пуанкарянам бесконечными (свет распространяется по ним неограниченно долго), а концы P-прямых, — как и вся ось Ox, — невидимыми. Итак, пуанкаряне считают, что их Пуанкария неограниченна во все стороны. Назовем невидимые точки P-прямой ее *бесконечно удаленными точками*; для луча одной из его бесконечно удаленных точек будем считать точку ∞ (бесконечность). P-прямые однозначно определяются парой своих бесконечно удаленных точек (почему?); так мы их и будем различать и обозначать через $L(\alpha, \beta)$, где α, β — вещественные числа (одно из них может быть ∞) — координаты бесконечно удаленных точек на оси Ox.

Попробуем вместе с пуанкарянами построить геометрию их пространства. Как и нам, — при жизни в евклидовом пространстве, — некоторые утверждения кажутся пуанкарянам очевидными, они принимают их без доказательства (аксиомы) и выводят из них более сложные утверждения (теоремы). Для нас, смотрящих на Пуанкарию со стороны, все эти утверждения будут выглядеть иначе, чем для пуанкарян (например, P-прямые для нас полуокружности или лучи!), поэтому мы будем «переводить» формулировки пуанкарян на свой «прозаический» евклидов язык и доказывать по-своему.

Например, пуанкаряне знают, что через две различные точки проходит P-прямая и притом единственная. Для нас же это означает, что через две различные точки полуплоскости проходит единственная полуокружность, перпендикулярная к оси Ox, или вертикальный луч (докажите!); см. рисунок 38. Заметим, что физическое объяснение этого

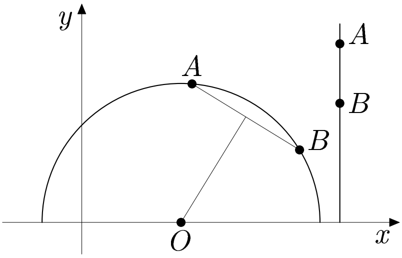


Рис. 38.

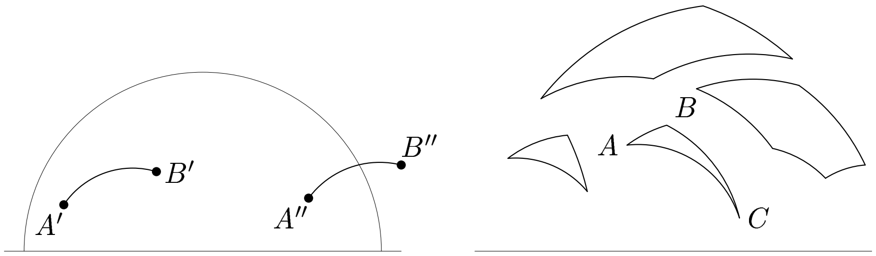


Рис. 39.

утверждения, состоящее в том, что свет между двумя точками распространяется по единственному пути — одно и то же и для пуанкарян, и для нас (впрочем, для геометрии это объяснение доказательной силы не имеет). Нетрудно убедиться, что в Пуанкарии справедливы все аксиомы евклидовой геометрии, касающиеся взаимного расположения точек и прямых и порядка точек на прямой. (Чтобы привыкнуть к Пуанкарии, разберитесь с P-отрезками, P-полуплоскостями, на которые P-прямая делит Пуанкарию так, что P-отрезки, соединяющие точки в одной P-полуплоскости, не пересекают граничную P-прямую, а P-отрезки, соединяющие точки в разных P-полуплоскостях — ее пересекают; нарисуйте P-треугольники, P-многоугольники; подумайте о P-выпуклости, если вы знаете об «обычной» выпуклости. Вам поможет рис. 39.)

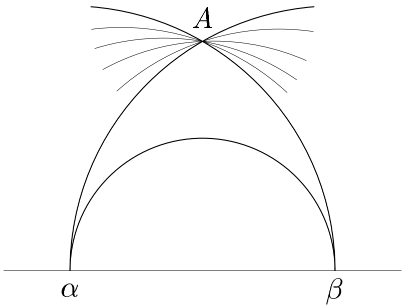


Рис. 40.

Отличие геометрии Пуанкарии от евклидовой проявляется при рассмотрении взаимного расположения пары P-прямых. Мы уже знаем, что две различные P-прямые могут пересекаться не более чем в одной точке. Если же они не пересекаются, то они имеют общую бесконечно удаленную точку (невидимую!) или не имеют общих точек даже на невидимой границе. В первом случае мы будем называть такие P-прямые параллелями, а во втором — сверхпараллелями. Если имеется P-прямая $L(\alpha, \beta)$, то через точку вне ее проходят только две параллельные $L(\alpha, \beta)$ P-прямые (отвечающие бесконечно удаленным точкам α и β соответственно; рис. 40) и бесчисленное множество сверхпараллельных, лежащих между параллелями. Таким образом, в Пуанкарии несправедлива аксиома параллельных (нас, наблюдателей, впрочем, это не очень удивляет — ведь пуанкаряне не знают, что их «прямые» — «не настоящие»!); это позволяет нам надеяться на то, что геометрия Пуанкарии и окажется геометрией Лобачевского.

Главное, что теперь нам нужно сделать, — определить в Пуанкарии *расстояния* и *перемещения*.

Расстояния и перемещения. С точки зрения оптики естественнее всего в качестве расстояния между двумя точками A и B взять в Пуанкарии время, за которое свет доходит из точки A в точку B: тогда P-прямые будут кратчайшими линиями между лежащими на них точками. Из физических соображений следует, что определенное таким образом расстояние $\rho(A, B)$ обладает обычными свойствами евклидова расстояния:

1) $\rho(A, B) = \rho(B, A)$;
2) если A, B, C лежат на одной P-прямой и $B \in [AC]$, то $\rho(A, B) + \rho(B, C) = \rho(A, C)$ (свет распространяется из A в C по P-прямой и пройдет через точку B);
3) для любых точек A, B, C: $\rho(A, B) + \rho(B, C) \geqslant \rho(A, C)$ — *неравенство треугольника*, причем равенство имеет место лишь тогда, когда $B \in [AC]$ (если бы это неравенство не выполнялось, то свету на путь по P-ломаной ABC понадобилось бы меньше времени, чем на путь по P-прямой AC — наибыстрейшему пути, чего не может быть).

Для пуанкарян введенное расстояние ρ первично (заметим, что относительно этого расстояния свет распространяется с единичной скоростью), и у них нет причин выражать ρ через что-то еще; нам же естественно выразить ρ через наше евклидово расстояние. Это не просто: приходится иметь дело с неравномерным движением света, и для вычисления времени, затраченного им, нужно считать интегралы. Поэтому приведем лишь окончательный ответ:

$$\rho(A, B) = \ln \frac{r' + r}{r' - r}, \tag{34}$$

где r — евклидово расстояние между точками A и B, r' — евклидово расстояние между точкой A и точкой B', симметричной точке B относительно оси Ox; логарифм берется по основанию e (при другом основании логарифма мы получим ρ с точностью до постоянного множителя). Евклидово расстояние замечательно тем, что имеется много преобразований плоскости, его сохраняющих; такие преобразования и называются *перемещениями*. Посмотрим, как выглядят перемещения в Пуанкарии (P-*перемещения*) — преобразования, сохраняющие ρ, а значит, переводящие P-прямые в P-прямые.

Начнем с преобразований, не оставляющих ни одной точки на месте. Это прежде всего — обычные *параллельные переносы* вдоль оси Ox: $T_a(x, y) = (x + a, y)$. Эти параллельные переносы сохраняют и евклидово расстояние, и скорость света $c(x, y) = y$, а потому и время, которое требуется свету на путь между двумя точками A и B, то есть P-расстояние $\rho(A, B)$, и, конечно, P-прямые переводят в P-прямые. С другой стороны, *гомотетия* $F_b(x, y) = (bx, by)$, $b > 0$, пропорционально изменяя и евклидово расстояние, и величину скорости света $c(x, y)$, также не меняет времени, затраченного светом, то есть P-расстояния $\rho(A, B)$. Итак, то, что нам представляется гомотетией (с центром на оси Ox), пуанкарянам кажется перемещением. С помощью указанных P-перемещений можно любую точку перевести в любую. Например, точка (x_0, y_0) переходит в точку $(0, 1)$ при P-перемещении $\left(\dfrac{x - x_0}{y_0}, \dfrac{y}{y_0}\right)$. Относительно введенных P-перемещений — назовем их P-*сдвигами* — P-прямые распадаются на два класса: отдельно можно перевести друг в друга полуокружности, а отдельно — лучи (почему?).

Поясним сейчас, как, используя P-сдвиги и свойства введенного P-расстояния ρ, можно просто получить формулу (34), выражающую

ρ через евклидовы расстояния, в том частном случае, когда обе точки A и B находятся на оси y-ов: $A = (0, y_1)$, $B = (0, y_2)$. Положим $\rho(A, B) = \varphi(y_1, y_2)$, и найдем вид функции φ. Поскольку ρ сохраняется при евклидовых гомотетиях с центром в точке O, то

$$\varphi(by_1, by_2) = \varphi(y_1, y_2). \tag{35}$$

Кроме того, если $C = (0, y_3)$ — третья точка на оси y-ов, то в силу сказанного выше

$$\varphi(y_1, y_2) + \varphi(y_2, y_3) = \varphi(y_1, y_3) \tag{36}$$

Положим $\psi(z) = \varphi(z, 1)$. Согласно (35)

$$\begin{aligned}\varphi(y_1, y_2) &= \psi(y_1/y_2) = \psi(z_1),\\ \varphi(y_2, y_3) &= \psi(y_2/y_3) = \psi(z_2),\\ \varphi(y_1, y_3) &= \psi(y_1/y_3) = \psi(z_3).\end{aligned}$$

Учитывая соотношение (36) и последние три равенства, получим

$$\psi(z_1 \cdot z_2) = \psi(z_1) + \psi(z_2),$$

откуда, в предположении, что ψ — достаточно «хорошая» функция с положительными значениями, получаем, что $\psi(z) = k \cdot \ln|z|$, где k — постоянный множитель, который вычисляется непосредственно.

Найденных P-перемещений еще недостаточно: у нас нет преобразований, с помощью которых мы могли бы P-прямые одного типа (полуокружности) перевести в P-прямые другого типа (лучи). Добавим для этого *P-симметрии* относительно P-прямых. Для лучей — это обычная *осевая симметрия*, а для полуокружностей — *инверсия*. (Например, P-симметрия относительно P-прямой $L(-1, 1)$ — это инверсия относительно окружности с центром $O = (0, 0)$ радиуса 1; она переводит точку A, отличную от центра O, в точку A', лежащую на луче OA, такую, что $|OA| \cdot |OA'| = 1$.) Мы знаем, что при инверсии окружности и прямые переходят в окружности или прямые, причем величины углов сохраняются. На языке Пуанкарии это значит, что, например, при P-симметрии относительно P-прямой $L(-1, 1)$ P-прямая $L(\alpha, \beta)$ переходит в P-прямую $L\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right)$. В частности, P-пря-

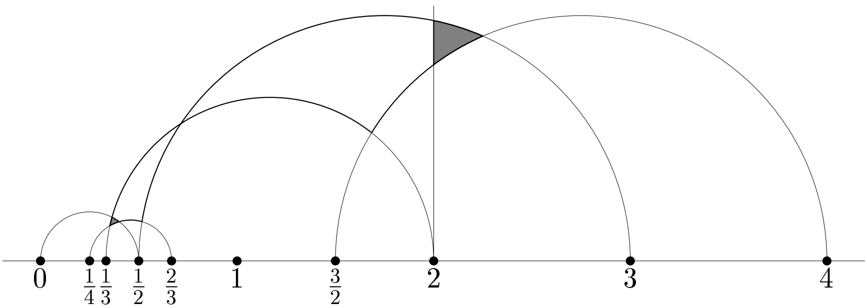
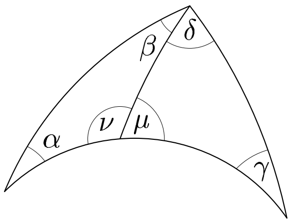


Рис. 41.

мые $L(\alpha, 0)$, являющиеся при $\alpha \neq \infty$ полуокружностями, переходят в P-прямые $L\left(\dfrac{1}{\alpha}, \infty\right)$, являющиеся лучами. Итак, P-симметрии переводят Пуанкарию в себя, причем P-прямые переходят в P-прямые. Отдельно проверяется (мы эту проверку опускаем), что P-симметрии не меняют P-расстояния ρ. (Впрочем, в Пуанкарии всякое преобразование, переводящее P-прямые в P-прямые, сохраняет ρ (здесь нет гомотетий); в этом — важнейшее отличие геометрии Лобачевского от геометрии Евклида.)

P-перемещений, которые можно получить, комбинируя P-симметрии с P-сдвигами, уже хватает для того, чтобы любую P-прямую перевести в любую P-прямую; более того, при этом любую заданную точку первой P-прямой можно совместить с заданной точкой второй, и любой P-луч с другим P-лучом (докажите!). Значит, этими P-перемещениями можно совместить любые P-отрезки равной P-длины, и мы получаем, что такие отрезки P-равны. Можно показать, что все P-перемещения сводятся к описанным.

При P-перемещениях угол переходит в угол, равный ему в евклидовом смысле (поскольку это так для параллельных переносов, гомотетий, осевых симметрий и инверсий). Поэтому понятие равенства углов в Пуанкарии не отличается от евклидова. С учетом этого обстоятельства пуанкаряне, точно так же как и мы, докажут два признака равенства треугольников: по двум сторонам и углу между ними и по стороне и двум прилежащим к ней углам. Сложнее обстоит дело с доказательством третьего признака равенства треугольников — по трем сторонам: ведь наше доказательство этого признака использует тот факт, что окружности пересекаются не более чем в двух точках. К счастью, оказывается, что P-окружности совпадают с евклидовыми (целиком лежащими в верхней полуплоскости), только P-центр у них не совпадает с обычным (это — довольно непростой факт), а потому и с признаком равенства по трем сторонам в Пуанкарии все в порядке. Однако в Пуанкарии есть еще один признак равенства треугольников: *равны треугольники с попарно равными углами*! (Переведите это утверждение на язык евклидовой геометрии и попытайтесь доказать его; см. рис. 41 и задачу 4.) Значит, площадь треугольника в Пуанкарии (как и сам треугольник) определяется величинами его углов α, β и γ. В геометрии Лобачевского сумма углов треугольника меньше π. Величина $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ называется дефектом треугольника. Можно заметить, что дефект треугольника ведет себя так же, как площадь; точнее: если данный треугольник разрезать прямой, проходящей через его вершину, то площадь его будет равна сумме площадей получившихся треугольников; то же будет справедливо и для дефекта всякого треугольника: он равен сумме дефектов образовавшихся треугольничков (рис. 42). Отсюда можно вывести, что величина площади треугольника в геометрии Лобачевского пропорциональна дефекту $\pi - \alpha - \beta - \gamma$.



$$\pi - (\alpha + \beta + \gamma) =$$
$$[\pi - (\alpha + \beta + \nu)] + \pi - (\mu + \delta + \gamma)$$

Рис. 42.

Несколько задач. 1. а) Убедитесь, что все P-прямые, перпендикулярные к фиксированной P-прямой, сверхпараллельны (рис. 43).

б) Покажите, что для пары сверхпараллелей существует единственный общий P-перпендикуляр (рисунки 44, *а* и *б*).

2. Проверьте, что P-биссектрисы P-треугольника пересекаются в

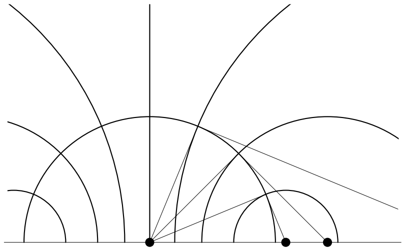


Рис. 43.

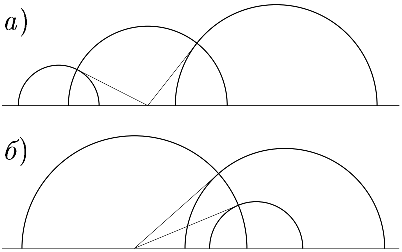


Рис. 44.

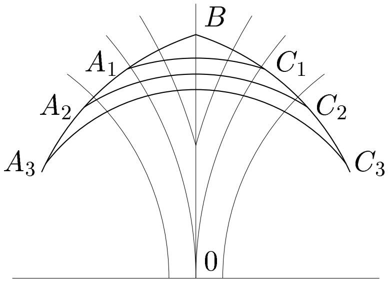


Рис. 45.

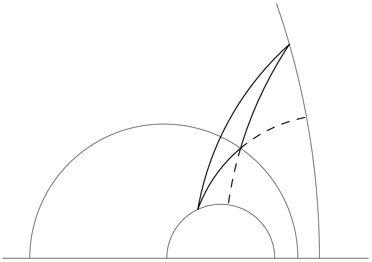


Рис. 46.

одной точке — центре вписанной P-окружности. Подумайте, что можно сказать об описанной P-окружности — всегда ли она существует (см. рисунок 45: на этом рисунке P-треугольники A_iBC_i — равнобедренные, с осью симметрии $L(0,\infty)$; $i = 1, 2, 3$; на рисунке отмечены перпендикуляры к P-серединам сторон этих треугольников)?

3. Убедитесь, что у тупоугольного (но не остроугольного) P-треугольника высоты могут быть сверхпараллельны (на рис. 46). Что можно сказать о медианах?

4. Покажите, что у равнобедренного P-треугольника углы при основании равны, а биссектриса угла при вершине является медианой и высотой. Докажите для этого случая четвертый признак P-равенства треугольников.

5. Пусть $L(\alpha,\beta)$, $L(\alpha,\beta_1)$, $L(\alpha,\beta_2)$ — три параллельные P-прямые (рис. 47). Докажите, что существует P-перемещение, переводящее $L(\alpha,\beta)$ в себя, а $L(\alpha,\beta_1)$ — в $L(\alpha,\beta_2)$.

Отсюда следует, что в геометрии Лобачевского нельзя определить

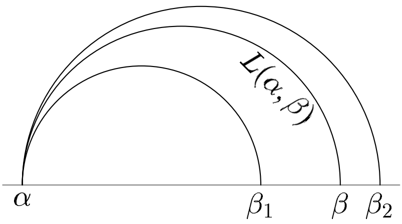


Рис. 47.

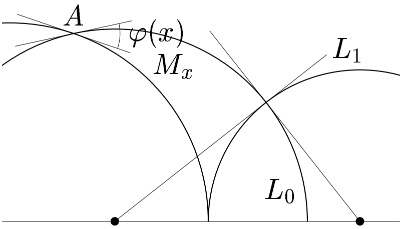


Рис. 48.

расстояние между параллелями.

6. Если P-прямая L_1, пересекает P-прямую L_0 или сверхпараллельна ей, то она проектируется на L_0 в виде конечного P-интервала; если же L_1, параллельна L_0, то проекцией является P-луч.

7. Пусть P-прямая L_0, перпендикулярна к L_1, и пусть A — точка на L_0, отстоящая от L_1 на расстояние x (рис. 48). Проведем через точку A P-прямую M_x, параллельную L_1, и обозначим через $\varphi(x)$ величину угла, который P-прямая M_x образует с L_0. Найдите $\varphi(x)$ и покажите, что $\varphi(x) \to \frac{\pi}{2}$ при $x \to 0$ и $\varphi(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

Функция $\varphi(x)$ называется *функцией Лобачевского*; эта функция связывает величины углов и длины, и поскольку для углов существует абсолютная единица измерения — полный угол, то в геометрии Лобачевского есть такая абсолютная единица измерения и для длин (она с помощью функции φ переносится с углов). В геометрии Евклида $\varphi(x) \equiv \frac{\pi}{2}$, а потому аналогичной абсолютной единицы измерения длины нет.

Твердые тела в Пуанкарии. Пока во всех наших геометрических рассмотрениях мы руководствовались только оптическими предпосылками. Здесь нужно подчеркнуть, что геометрия Пуанкаре получилась неевклидовой не из-за того, что в Пуанкарии иные законы оптики, чем наши: мы строим (*моделируем*) Пуанкарию в нашем собственном мире и законов физики не меняем! Оптические же иллюзии пуанкарян объясняются оптической неоднородностью их мира.

Хотя, безусловно, самой яркой реализацией прямой линии является световой луч, мы все же не измеряем длин при помощи времени распространения света — для этих целей у нас есть линейка. Вероятно, стоит обзавестись линейкой и пуанкарянам. Конечно же, пуанкаряне изготовят линейку «P-прямой»; но если пуанкарянин перенесет такую линейку из одного места в другое, то она «прямой» (P-прямой) ему уже не покажется. С точки зрения пуанкарянина при движении твердого тела меняется его форма. Как же пуанкарянин должен реагировать на это? Ясно, что нужно как-то увязать понятие твердого тела с геометрией Пуанкарии, иначе пуанкарянам придется поверить в существование сверхъестественных сил. Анри Пуанкаре придумал остроумный выход из этого, казалось бы, безнадежного положения: *он воспользовался явлением теплового расширения тел*. Пусть в Пуанкарии у всех тел одинаковый коэффициент теплового расширения и нулевая теплопроводность, а размеры тел пропорциональны абсолютной температуре T. (Заметим, что в этих условиях при помощи обычного термометра пуанкаряне не могут измерить температуру, поскольку такое измерение предполагает сравнение расширения тел с разными коэффициентами теплового расширения.) Твердое тело характеризуется тем, что при движении в среде с постоянной температурой расстояние $r(A, B)$ (евклидово) между любыми двумя его точками A и B сохраняется. Но если тело переместится из области с температурой T_1 в область с температурой T_2, то расстояние между его точками умножится на T_2/T_1 (другими словами, останется прежним отношение $r(A, B)/T$). А что будет, если тело сразу окажется в области с разными температурами?

Какая величина будет сохраняться в этих условиях? Пусть, например, достаточно большое твердое тело перемещается в среде, где по одну сторону от некоторой прямой m температура T_1, а по другую — T_2, пусть A — точка тела, находящаяся в области с температурой T_1, а B — точка тела, находящаяся в области с температурой T_2. Возьмем ломаную с концами в точках A и B и вершиной C на прямой m. Обозначим $|AC| = r_1$, $|CB| = r_2$ и рассмотрим величину $r_1/T_1 + r_2/T_2$. Оказывается, что при движении в такой температурной среде сохраняется наименьшее значение величины $r_1/T_1 + r_2/T_2$, взятое по всем ломаным с вершинами на прямой m и с концами в двух данных точках A и B! Далее можно в точности повторить те же рассуждения, что и при применении принципа Ферма, например, к выводу закона преломления Снеллиуса, и мы получим, что искомое наименьшее значение будет отвечать ломаной, для которой $\dfrac{\sin\alpha_1}{T_1} = \dfrac{\sin\alpha_2}{T_2}$, где α_i — угол соответствующего звена ломаной с нормалью к прямой m.

Пусть теперь в Пуанкарии в точке x, y постоянно поддерживается абсолютная температура $T(x, y) = y$. Тогда за счет выбранного температурного режима при движении твердых (в нашем смысле!) тел будут сохраняться уже не евклидовы расстояния, а P-расстояния, и с точки зрения пуанкарян (ведь они не чувствуют разницы температур!) размер тела, движущегося в такой среде, сохраняется, то есть оно — P-твердое. Осталось позаботиться лишь о том, чтобы все предметы имели малые теплоемкости и перемещались настолько медленно, чтобы находиться в тепловом равновесии, и чтобы изменение температуры было для пуанкарян незаметно. В результате пуанкаряне не только не увидят границы мира, но и не смогут никогда добраться до нее: при приближении к границе температура стремится к абсолютному нулю, а потому будут стремиться к нулю и размеры предметов, без изменения пропорций между предметами. Анри Пуанкаре старался исключить для пуанкарян все возможности узнать, что их неевклидов мир всего лишь сконструирован в нашем евклидовом. Но все ли он предусмотрел? Если вы обнаружите какие-либо неучтенные возможности пуанкарян, напишите нам об этом.

ЗАГАДКА РАМАНУДЖАНА

> Рамануджан любил говорить, что формулы ему внушает во сне богиня Намаккаль. Интересно отметить, что действительно он часто, вставая по утрам с кровати, тут же записывал готовые формулы.
> *Сешу Айар и Рамачандра Рао*

Письмо в Кембридж. В самом начале 1913 года профессор Кембриджского университета Г. Х. Харди получил письмо из далекого Мадраса. В свои 36 лет Харди был уже одним из крупнейших специалистов по анализу и теории чисел, автором ряда великолепных математических работ. Отправитель же письма, Сриниваза Рамануджан, работал клерком в бухгалтерии почтового ведомства Мадраса с более чем скромным окладом в 20 фунтов в год. Он сообщал о себе, что не имеет университетского образования и после окончания школы самостоятельно занимается математикой, не следуя принятой системе, а «избрав свою дорогу». Математическое содержание письма выглядит достаточно неуклюже — вполне можно принять автора за самоуверенного любителя.

Само по себе такое письмо не могло произвести на Харди сильного впечатления. Но к письму было приложено некоторое количество формул, которые предлагалось опубликовать, если они интересны, чего сам автор не мог сделать из-за своей бедности. Просмотр формул насторожил Харди: он понял, что имеет дело с незаурядным явлением. Он заинтересованно отвечает Рамануджану, между ними завязывается интенсивная переписка. Постепенно у Харди собирается около 120 разнообразных формул.

Вставка 1. Пример бесконечной суммы, вычисленной Рамануджаном.

$$1 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3 - 13\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^3 + \ldots = \frac{2}{\pi}$$

Эта удивительная формула — одна из приложенных Рамануджаном к первому письму Харди. Каким образом сумма знакочередующегося ряда $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ с общим членом

$$a_n = (-1)^n(4n+1)\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}\right)^3$$

может вдруг оказаться равной $2/\pi$, Харди долго не мог понять. В справедливости этой формулы как приближенного равенства читатель может убедиться с помощью калькулятора. Доказательство точного равенства неэлементарно.

Формулы Рамануджана касались в основном соотношений между бесконечными радикалами (вставка 2), бесконечными рядами, произведениями и цепными дробями (вставки 1, 3, 4), тождеств между интегралами. Прежде всего было ясно, что они далеко выходят за пределы элементарной математики. Далее возникает цепь вопросов: известны ли они; если да, то самостоятельно ли получены автором письма; если нет, то верны ли они? Вскоре Харди понимает, что ситуация парадоксальна: он, несомненно, выдающийся специалист по современному анализу, имеет дело с россыпью неизвестных ему формул!

Большое впечатление на Харди произвели формулы с бесконечными рядами (см. вставку 1). После их изучения он приходит к выводу: «В распоряжении Рамануджана должны быть какие-то очень общие теоремы, которые он от меня скрывает».

Но особо удивили Харди соотношения с бесконечными цепными дробями (одно из более поздних соотношений этого типа показано на вставке 3): «Эти соотношения поставили меня полностью в тупик; я никогда не видел ничего подобного. Достаточно бросить на них один взгляд, чтобы убедиться в том, что они могли быть написаны только математиком самого высшего класса».

Вставка 2. Бесконечно повторяющиеся радикалы.

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\ldots}}}} = 3.$$

Эту красивую формулу Рамануджан получил еще в школьные годы следующим образом: он написал последовательность очевидных равенств

$$n(n+2) = n\sqrt{1+(n+1)(n+3)} = \\ = n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)(n+4)}} = \ldots,$$

а затем подставил $n = 1$. Вопрос о законности перехода к пределу Рамануджана не интересовал. Действуя так же, читатель может попробовать самостоятельно получить похожую формулу

$$\sqrt{6+2\sqrt{7+3\sqrt{8+4\sqrt{9+\ldots}}}} = 4.$$

Чудо из Кумбаконама. Как же сложился математик, который так удивил Харди? Сриниваза Рамануджан Айенгор родился 22 декабря 1887 г. на юге Индии в селении Эрод. Его детство в основном протекало в маленьком городке Кумбаконам (в 260 км от Мадраса), где его отец работал бухгалтером в небольшой текстильной лавке. Рамануджан принадлежал к касте браминов, но богатство уже давно не было уделом его родственников. Его родители, а мать особенно, были глубоко религиозны. Рамануджан получил воспитание в традициях касты. Детство, проведенное в городе, где каждый камень связан с древней религией, в окружении людей, постоянно ощущающих свою принадлежность к высшей касте, сыграло большую роль в становлении Рамануджана.

С 5 лет Рамануджан в школе, к 10 годам он заканчивает начальную школу. Он начинает проявлять незаурядные способности, получает стипендию, обеспечивающую обучение в средней школе за половинную плату. В 14 лет студент из Мадраса дает ему двухтомное руководство по тригонометрии Лони. Вскоре Рамануджан изучил тригонометрию, и студент имел возможность

Вставка 3. Числовое тождество с бесконечной суммой и цепной дробью.

$$1+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+\ldots+$$
$$+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\ldots}}}}}=\sqrt{\frac{\pi e}{2}}.$$

Это, возможно, самая красивая формула Рамануджана, истинное произведение математического искусства. Она неожиданно связывает бесконечный ряд и бесконечную цепную дробь. Удивительно, что ни ряд, ни цепная дробь не выражаются через известные постоянные π и e, а их сумма непостижимым образом оказывается равной $\sqrt{\pi e/2}$!

пользоваться его консультацией в решении задач. К этому периоду относятся первые рассказы и легенды. Утверждается, что он сам открыл «формулу Эйлера о синусе и косинусе» и был очень расстроен, найдя эту формулу во втором томе Лони.

«Маленький брамин» полагает, что в математике, как и в других науках, следует искать присущую ей «высшую истину», расспрашивает учителей. Старшие дают маловразумительные ссылки на теорему Пифагора, а то и на вычисления с процентами.

«Синопсис элементарных результатов чистой и прикладной математики». Это двухтомное руководство английского математика Карра, написанное в 1880 – 1886 гг., попало к Рамануджану в 1903 г. — ему было тогда 16 лет. Эта книга сыграла огромную роль в формировании Рамануджана. В ней было собрано 6165 теорем и формул, почти без доказательств, с минимальными пояснениями. В основном книга посвящена алгебре, тригонометрии, анализу, аналитической геометрии.

Книга Карра стимулировала мальчика к самостоятельному выводу формул. Об этом говорят те, кто знал Рамануджана в эти годы. Постепенно меняется область его основных интересов:

магические квадраты, потом квадратура круга (он находит π с точностью, позволяющей вычислить длину экватора с ошибкой, не превышающей $1-2$ *м*, гласит легенда) и, наконец, наступает очередь бесконечных рядов. Это уже начало подлинной математической жизни!

Книга Карра оказалась достаточно удачной для того, чтобы сформировать математический мир Рамануджана. Но ориентация на эту книгу имела и другие последствия. Поскольку книга не содержала доказательств, а в лучшем случае — наводящие соображения, у Рамануджана складывается своеобразный метод установления математической истины. К тому же он лишен в Индии подходящих руководств для того, чтобы проводить строгие доказательства.

«Его понимание сущности математического доказательства было более чем туманным; он пришел ко всем своим результатам, как ранним, так и более поздним, как верным, так и неверным, при помощи странной смеси интуитивных догадок, индуктивных соображений и логических рассуждений».

Математическая судьба Рамануджана фактически полностью решилась в эти годы — направление научных поисков, способ думать он уже никогда не менял. Здесь можно выразить сожаление, что Рамануджан формировался в тяжелых условиях. В нормальных условиях он, несомненно, стал бы математиком с лучшей профессиональной подготовкой, но можно ли быть уверенным, что он был бы столь же уникален? Смог бы Рамануджан увидеть так много, если бы с детства был обучен правилам поведения в математике и доводил бы свои результаты до публикаций со строгими доказательствами, строил бы свой математический мир на базе всего достигнутого человечеством, а не на сравнительно небольшом числе фактов?

От чисел к формулам. В формировании математического мира Рамануджана было важно, что начальный запас математических фактов (в основном почерпнутый из книги Карра) объединился у него с огромным запасом наблюдений над конкретными числами. Он коллекционировал такие факты с детства. Его школьный товарищ вспоминал, что Рамануджан знал огромное число знаков в разложениях e, π и других чисел в десятичные дроби. Он обладал поразительными способностями подмечать арифметические закономерности, терпеливо рассматривая огромный числовой материал — искусство, которым виртуозно владели Эйлер и Гаусс, но которое было в значительной степени утрачено к XX веку. Многое в числовой кладовой открывалось при случайных обстоятельствах. Харди позднее вспоминал, как он навестил в больнице Рамануджана и сказал, что он приехал на такси со «скучным» номером 1729. Рамануджан разволновался и воскликнул: «Харди, ну как же, Харди, это наименьшее натуральное число, представимое в виде суммы кубов двумя различными способами!» ($1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$). В книге Харди о творчестве Рамануджана метко сказано, что «каждое натуральное число было личным другом Рамануджана».

Рамануджан стремительно пополняет запас фактов, почерпнутый у Карра. Он при этом с удивительной скоростью переоткрывает результаты Эйлера, Гаусса, Якоби. Так некогда юный Гаусс в Брауншвейге, лишенный литературы, реконструировал в короткий срок то, на что у его великих предшественников ушли десятилетия. Можно только удивляться, что реконструкции математики с такими скоростями возможны.

Постепенно коллекция наблюдений над конкретными числами уходит у Рамануджана на второй план перед миром формул. Формулы для него — не вспомогательное средство для доказательств или вычислений, но представляют самостоятельную цель. Внутренняя красота формулы имеет для Рамануджана бесконечную ценность. Его формулы можно рассматривать как прекрасные картины.

Выбор профессии. В 1904 г. Рамануджан поступает в Мадрасский университет, делает первые успехи не только в математике, но и в английском языке. Однако математика начинает занимать его целиком, и это не замедлило сказаться. Он не кончает даже первого курса, странствует с другом, делает попытку вернуться в университет, а затем закончить его экстерном (1907 г.). Но все безуспешно. В 1909 г. он женится; его жене девять лет, и она доживет до наших дней, трогательно сохраняя память о великом супруге. Рамануджан вынужден думать о средствах на жизнь, но он не может найти подходящего занятия. В 1910 г. он показывает свои математические результаты Рамасвари Айару, основателю Индийского математического общества, затем Сешу Айару, преподавателю Кумбаконамского колледжа, и Рамачандра Рао, крупному чиновнику, получившему математическое образование; позднее они стали биографами Рамануджана.

Рао помогает ему из своих средств, а затем устраивает клерком в почтовое управление. В 1911 г. появляется в печати сообщение Сешу Айара о результатах Рамануджана, а затем и его собственная статья. В судьбе Рамануджана начинают принимать участие влиятельные английские чиновники; с 1 мая 1913 г. на два года он обеспечен специальной стипендией в 75 рупий (5 фунтов) в месяц. Этого хватает на скромную жизнь, и Рамануджан оставляет карьеру клерка. Он становится «профессиональным математиком».

Итак, Рамануджан встретил среди окружающих определенное признание, но не понимание. Мы помним, что в начале 1913 г. он пишет Харди. Чего он ожидал от Харди? Найти, наконец, человека, способного понять и оценить его результаты, помочь и направить его дальнейшие исследования? Скорее повод был более прозаическим: от внешнего мира ему требовались не слава и признание, но обеспечение возможности существовать.

Надо сказать, что в научном плане адресат был выбран исключительно удачно: трудно было бы найти другого математика в мире, который смог бы так быстро и эффективно сориентироваться в результатах Рамануджана. Очень скоро Харди понимает, что от него требуется не оценка результатов безвестного любителя или младшего коллеги, но спасение огромного дарования. Одновременно его не оставляет мысль, что Рамануджан сообщает лишь немногое из того, что знает, что он обладает очень общими результатами, приводя лишь частные иллюстрации. Но главное — он не может реконструировать метод Рамануджана, и ему не терпится узнать, каким путем двигался его удивительный

Вставка 4. Тождество Роджерса — Рамануджана.

Это тождество

$$1+\frac{x}{1-x}+\frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)}+\frac{x^9}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}+\ldots=$$
$$=\frac{1}{(1-x)(1-x^6)(1-x^{11})\cdot\ldots\cdot(1-x^4)(1-x^9)(1-x^{14})\ldots}$$

Рамануджан нашел в 1911 году, но не сумел его доказать. Не сумел его доказать и Харди. В 1917 году, просматривая журнальную литературу (что он делал довольно редко), Рамануджан наткнулся на оставшуюся незамеченной статью английского математика Роджерса 1894 года, где эта формула была доказана. Оказалось, далее, что это тождество тесно связано с числом $p(n)$ разбиений на слагаемые (см. вставку 5). А совсем недавно оно появилось в исследованиях... по статистической физике.

корреспондент. Неожиданно Рамануджан твердо отказывается описывать свой метод. В письме от 27 февраля 1913 г.: «Вы просите меня сообщить мои методы доказательств $\langle\ldots\rangle$ Вот что я хочу Вам сказать: проверьте мои результаты, и если они совпадают с Вашими, то Вы должны, по крайней мере, согласиться с тем, что в моих основных рассуждениях имеется какое-то зерно истины».

Харди подозревает, что Рамануджан боится, что его методами могут воспользоваться, пытается рассеять опасения, но 17 апреля получает ответ: «Ваше последнее письмо причинило мне боль $\langle\ldots\rangle$ Я нисколько не опасаюсь того, что мои методы будут использованы другими. Напротив, я работаю моими методами 8 лет и не нашел никого, кто бы понимал или оценил их. Как я уже писал в моем последнем письме, я нашел в Вас внимательного и понимающего друга и готов передать в Ваше полное распоряжение те немногие результаты, которыми я располагаю. Только в силу новизны моих методов я не решаюсь даже сейчас сообщить Вам мой путь вывода тех формул, которые я сообщил Вам в моих предыдущих письмах».

Для Харди не было сомнений: для Рамануджана необходимы контакты с настоящими математиками. Обеспечить в Индии это невозможно, и ему необходимо срочно перебраться в Англию. Удалось договориться о стипендии в Кембридже. Однако предстояло убедить в необходимости поездки самого Рамануджана, которого нынешнее положение вполне устраивало. К тому же против поездки категорически возражала мать, согласие которой было для сына обязательным. Друзья пытаются сформировать общественное мнение, активно действует кембриджский математик Невил, в начале 1914 г. посетивший Мадрас. Он обращается к ректору университета за поддержкой, но безуспешно.

То, что было не под силу ученым, легко осилила... богиня Намаккаль (согласно легенде, из ее уст во сне Рамануджан узнавал новые формулы). Мать увидела во сне сына, сидящего в большом зале в окружении европейцев, и богиня повелела не противиться отъезду. 17 марта 1914 г. Рамануджан отбыл в Англию. Он будет два года получать стипендию по 250 фунтов стерлингов в год. Из них 50 фунтов будет получать мать. По приезде вскоре стипендия была еще увеличена на 60 фунтов.

В Кембридже. Рамануджану 27 лет. Лучшие годы для становления математика прожиты в Индии без контакта с серьезными учеными, без доступа к математической литературе. В разных странах, в разные времена человек ощущает себя сложившимся в разном возрасте. Для Индии начала века, с очень низкой продолжительностью жизни, 27 лет — возраст зрелого человека. Вдова Рамануджана вспоминала, что он любил составлять гороскопы, и его собственный гороскоп предсказывал ему смерть до достижения 35-летнего возраста.

Харди предстояло принять очень ответственное решение: надо ли прервать занятия Рамануджана с тем, чтобы он смог освоить современную математику? Выбор Харди был, по-видимому, единственно возможным: не менять стиля и направлений исследования Рамануджана, лишь по возможности корректируя их с учетом современной математики и стараясь объяснять новые вещи, обращая внимание на подходящую литературу. Харди писал:

«Его ум уже сложился, и он так и не стал „ортодоксальным“ математиком. Однако он еще был способен учить новые

Вставка 5. Теорема Харди – Рамануджана.

Эта теорема дает оценку числа $p(n)$ разбиений натурального числа n на натуральные слагаемые. (Например, $p(5) = 7$, так как $5 = 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1$.) Именно,

$$p(n) \sim A_n e^{\pi\left(\sqrt{\frac{2}{3}\left(n-\frac{1}{24}\right)}\right)},$$

где $A_n = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{2}}\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{6}\left(n-\frac{1}{24}\right)} - \dfrac{1}{2\left(n-\frac{1}{24}\right)^{3/2}}\right)$ — функция от n. Например, при $n = 200$ «приближенная» формула Харди – Рамануджана дает $p(200) = 3\,972\,999\,029\,388$. Это — точный ответ! Наиболее загадочна в формуле для $p(n)$ маленькая «поправочка» $(-1/24)$, придуманная Рамануджаном. Никто — ни Харди, ни даже сам Рамануджан — не сумел объяснить, откуда она взялась. Опять вмешательство богини Намаккаль? Так или иначе, именно эта таинственная поправка обеспечила точность оценки. Однако Харди и Рамануджан не ограничились приближенной формулой: впоследствии они получили точное *равенство* для вычисления $p(n)$.

вещи и делал это весьма хорошо. Было невозможно обучать его систематически, но мало-помалу он воспринимал новые точки зрения. В частности, он усвоил, что такое доказательство, и его поздние статьи, при том, что в некоторых отношениях они оставались необычными и индивидуальными, воспринимались как работы хорошо информированного математика. Однако его методы оставались по существу прежними».

Работает Рамануджан очень интенсивно и плодотворно. У него много общих интересов с Харди. Фантастическая интуиция Рамануджана, объединившись с рафинированной техникой Харди, дает замечательные плоды. К Рамануджану приходит признание: в 1918 г. он становится профессором университета в Кембридже; его выбирают в Королевское общество (английскую академию наук). Никогда прежде индус не удостаивался таких почестей.

Жилось Рамануджану непросто. Он строго следовал всем религиозным ограничениям, как и обещал родителям. В частности, он был вегетарианцем и был вынужден готовить себе сам. Он отказывался нарушать правила, даже когда тяжело заболел в 1917 г. Вероятно, нерегулярность в питании ускорила болезнь (так считал и сам Рамануджан, как вспоминала его вдова). Оставшиеся два года в Англии Рамануджан провел в больницах и санаториях, вынужденный ослабить интенсивность занятий математикой.

Непросто было вписаться Рамануджану в кембриджскую жизнь, полную чуждых условностей и традиций. Природная вежливость, стремление не быть источником для дискомфорта окружающим, так присущие индийской культуре, помогали Рамануджану по крайней мере внешне приспособиться к университетской жизни.

Харди очень много делал для Рамануджана: следил за его занятиями, стремился восполнить пробелы в его образовании, заботился о его положении в обществе и быте. Рамануджан до последней минуты был полон трогательной признательности и любви к нему...

Возвращение и смерть. Заболев, Рамануджан начинает думать о возвращении на родину. Лишь к началу 1919 г. его здоровье улучшилось настолько, чтобы совершить далекую поездку по морю. Ему было готово место в Мадрасском университете — слава его достигла Индии. Рамануджан пишет ректору благодарственное письмо, извиняется за то, что последнее время болезнь не давала возможности работать достаточно интенсивно. Но он так и не смог приступить к работе в университете. Жить на родине (и вообще жить) ему оставалось менее года. После трех месяцев в Мадрасе Рамануджан перебрался в Кумбаконам. В январе 1920 г. он посылает последнее письмо Харди, где сообщает о работе над новым классом тэта-функций. Ни врачи, ни родные не могут уговорить смертельно больного ученого прервать работу. 26 апреля 1920 г. Рамануджан умер. Ему еще не исполнилось 33 года.

Память. Весть о смерти Рамануджана потрясла его друзей и в Индии, и в Англии. Они чувствовали свой долг разобраться в том удивительном явлении, каким был Рамануджан. Харди пишет: «Возможно, что великие дни формул окончились и Рамануджану следовало бы родиться на 100 лет раньше; но он был величайшим создателем формул своего времени».

Друзья и коллеги старались оценить место Рамануджана в современной математике. Они не сомневались в его удивительных способностях, фантастической красоте формул, но все сходились на том, что сам выбор сюжетов, которых настойчиво держался Рамануджан, не позволяет ему занять достойное место в истории математики.

Прошло более полувека, и сегодня мы отчетливо видим то, что не могли предвидеть Харди и его современники. Гений Рамануджана оказался созвучен не только прошлому, но и будущему математики. Арифметические формулы Рамануджана нередко оказывались ключевыми на новых этапах алгебраической теории чисел, и можно было только удивляться, как он смог увидеть их, не зная того, без чего их увидеть нельзя. А потом пришло возрождение интереса к конкретным явным формулам как внутри математики, так и в сфере ее приложений. Современная математическая и теоретическая физика обращаются порой к весьма абстрактным разделам математики, и при этом очень изысканные явные формулы играют важную роль. Вот два недавних примера, связанные с Рамануджаном.

Р. Бакстер, прославившийся построением точно решаемых моделей статистической механики, при исследовании модели «жесткого гексагона» неожиданно обнаружил, что постоянно имеет дело с тождествами Роджерса – Рамануджана (вставка 4 на с. 417) и Рамануджана.

Нобелевский лауреат С. Вайнберг недавно вспоминал, как, занимаясь в начале 70-х годов очень популярной сейчас теорией струн, он столкнулся с задачей об оценке функции разбиений $p(n)$ для больших n. Выяснилось, что нужные формулы получили Харди и Рамануджан в 1918 г. (вставка 5 на с. 419)

Красота формул Рамануджана даровала им способность возрождаться при самых необычных обстоятельствах.

О ПОЛЬЗЕ КООРДИНАТ И ИСКУССТВЕ СЦЕПЛЯТЬ ГИПЕРБОЛОИДЫ

> Таким образом мы коротко и ясно изложили все, что оставили невыясненным древние относительно плоских и телесных мест. *П. Ферма*

> Я полагаю, что теперь ничего не пропустил из начал, необходимых для познания кривых линий. *Р. Декарт*

Пионерские идеи великих математиков претерпевают многочисленные изменения, прежде чем попасть на страницы учебников. В рафинированном виде их проще усваивать, яснее сфера их применимости, но что-то трудноуловимое при этом исчезает. Возможно, это логика открытия, ощущение материала, да и просто волнение перед открывающимися возможностями. Как разнятся энтузиазм создателей аналитической геометрии и ощущения студента, изучающего ее сегодня! Мы вспомним здесь лишь несколько эпизодов из истории создания аналитической геометрии, не пытаясь сколько-нибудь полно воссоздать эту историю, а закончим рассказ небольшим эпизодом в стиле аналитической проективной геометрии прошлого века, но на сравнительно современном материале. Очень соблазнительно попробовать рассуждать так, как это умели делать сто лет назад! Именно, мы докажем теорему о пяти гиперболоидах в пятимерном пространстве. Два однополостных двумерных гиперболоида называются сцепленными, если они имеют общую образующую и не лежат в одной трехмерной плоскости. Несколько гиперболоидов называются сцепленными, если они попарно сцеплены, причем образующие сцепления принадлежат одному семейству образующих. Если прямые сцепления разных пар гиперболоидов различны, то сцепление называется невырожденным.

Теорема. *Если в пятимерном пространстве невырожденно сцеплены четыре однополостных двумерных гиперболоида, то всякий пятый гиперболоид, сцепленный с тремя из них, сцеплен и с четвертым.*

Важной компонентой профессионализма у математика является умение априори оценить трудность задачи. В некотором смысле математики верят, что существует закон сохранения «нетривиальности», а потому у них заранее имеется предубеждение против легко решенной задачи, которую эксперты оценивали как трудную. Одно из проявлений этой традиции — уверенность, что любителю не по силам решить давнюю проблему. История математики показывает, что, хотя и можно привести противоречащие примеры, в среднем эти правила хорошо выполняются, по крайней мере на отрезках времени, сравнимых с жизнью человека. Те же случаи, когда происходит резкая переоценка трудности задач, отвечают революционным изменениям в математике. Когда они созревают в течение заметного времени (как было с алгебраической символикой или исчислением бесконечно малых), к ним успевают привыкнуть. Иная ситуация возникает, когда новая возможность, приводящая к решительной переоценке ценностей, открывается неожиданно. Нередко даже возникает желание объявить новые приемы незаконными. Выразительной иллюстрацией является реакция Гордана на решение Гильбертом его проблемы конечности числа инвариантов: «Это теология, а не математика». Дело в том, что Гильберт вместо привычного тогда непосредственного построения инвариантов, что удавалось в отдельных случаях с большим трудом, одним ударом доказал их существование в общем случае.

Однако, вероятно, ни одна революция в математике не происходила так остро, как проникновение аналитических методов в геометрию. Рушились представления о трудности геометрических задач, девальвировалась роль геометрической интуиции — гордости математиков. То, что требовало изысканных рассуждений, получалось в результате прямолинейных выкладок. В связи с этим возникло консервативное течение, борющееся за истинную геометрию, которую пытаются подменить скучной алгеброй. Для сравнения заметим, что куда более безболезненным было создание аналитической механики, когда Эйлер и Лагранж, отказываясь от геометрических методов Ньютона, превращали при помощи метода координат механику в раздел математического анализа. Ситуация в геометрии несколько напоминает переход к машинному производству, когда искусство кустарей терялось в однообразном потоке автоматической деятельности. Сегодня мы ясно видим, что аналитические методы не убили геометрическую интуицию, а напротив, позволяли «экономить» ее в сравнительно простых ситуациях и создавать интуицию более высокого уровня. Однако нельзя отрицать, что многое из того, что делалось в синтетической геометрии (так называют традиционную геометрию, не использующую координат), безвозвратно утрачено.

Итак, в 30-х годах XVII века два крупнейших математика того времени Ферма и Декарт открыли, что при помощи координат уравнению с двумя неизвестными можно поставить в соответствие кривую на плоскости. Это был неожиданный поворот воззрений, в частности, потому, что считалось, что раз одно уравнение с двумя неизвестными имеет бесконечное число решений, его нет смысла рассматривать (так и сейчас иногда говорят в школе). Благодаря же геометрическому подходу это бесконечное множество неожиданно приобрело право гражданства. Не менее плодотворна и обратная возможность ставить в соответствие кривым задающие их уравнения. С этого и начинается аналитическая геометрия.

Решающее открытие состояло в том, что уравнениям первой степени в плоскости отвечают прямые, а уравнениям второй степени — конические сечения. Тем самым два основных объекта греческой геометрии оказались простейшими с аналитической точки зрения. Мечта геометров того времени состояла в том, чтобы усвоить и превзойти теорию конических сечений Аполлония. Ферма и Декарт убеждаются, что большинство утверждений на аналитическом языке получается удивительно просто. Декарту удается аналитически решить несколько недоступных грекам задач на геометрические места точек. Как показывают высказывания, взятые в качестве эпиграфов, создатели аналитической геометрии не видят пределов для ее возможностей (плоскими местами греки называли прямую и окружность, а телесными — конические сечения). Еще многое не прояснено (не рассматриваются отрицательные координаты, нет четкой теоремы о приведении уравнения второго порядка к каноническому виду и т. д.), но все основания для оптимизма есть.

Прежде всего перед геометрией открываются новые горизонты, совершенно иной предстает ее структура. Не вызывает сомнений, что следующая еще не созданная глава геометрии — это теория кривых третьего порядка. Некоторые кривые этого класса рассмотрел Декарт, но естественно было попытаться построить общую теорию столь же подробно, как в случае кривых второго порядка. Прежде всего предстояло дать классификацию таких кривых. Задача эта оказалась очень не простой, и ее решил Ньютон в 60-е годы XVII века (рукопись была опубликована много позже — в 1704 г.). О сложности задачи красноречиво говорит ответ: имеется 72 различных вида кривых третьей степени. Впрочем, ответ достаточно обозрим благодаря тому, что все виды кривых распределяются по четырем типам

$$xy^2 + cy = P(x), \quad xy = P(x), \quad y^2 = P(x), \quad y = P(x),$$

где P — многочлен третьей степени от x.

Здесь автоматически возникает вопрос о том, что означает классификация. Для кривой, заданной уравнением в какой-то системе координат, ищется система координат, в которой ее уравнение выглядит особенно просто. Часто такую систему удается фиксировать почти однозначно, и тогда соответствующее уравнение естественно считать каноническим. Более общим образом, геометрию кривой составляют такие свойства ее уравнений, которые не зависят от системы координат, — инварианты. Мы видим, что на аналитическом языке очень рано начинает вырисовываться определение предмета геометрии. На синтетическом языке, вместо того чтобы менять систему координат, преобразуются сами фигуры и, как стало ясно лишь к концу XIX века (эрлангенская программа Клейна), изучаются их свойства, не меняющиеся при преобразованиях. Итак, в аналитической геометрии различные разделы отвечают различным классам систем координат, а в синтетической — группам преобразований.

Ньютон, занимаясь кривыми третьей степени, выяснил много общих вещей, необходимых для того, чтобы вычленять геометрическую компоненту из алгебраических фактов об уравнениях.

1. Прежде всего нужно было выявить геометрический смысл исходной аналитической характеристики кривой — порядка (степени задающего ее уравнения). Ньютон замечает, что порядок совпадает с наибольшим числом точек, по которым прямая может пересечь кривую (в случае кривой порядка n для их определения возникает уравнение n-й степени от одного переменного). Тут появляются трудности с мнимыми точками пересечения, для рассмотрения которых еще нет средств.

2. Упомянем важнейшее обобщение этого утверждения: если кривые порядков k и l пересекаются более чем в kl точках, то они имеют бесконечное число точек пересечения. Иначе говоря, в последнем случае они имеют общую компоненту (алгебраическая кривая может распадаться на несколько компонент, например, кривая $Q_1Q_2 = 0$ распадается на $Q_1 = 0$ и $Q_2 = 0$). Если же в этом случае одна кривая в естественном смысле неприводима (не распадается на компоненты), то она целиком содержится в другой. Эту теорему сформулировал Маклорен, младший современник Ньютона, а доказал почти через сто лет Безу, именем которого она и называется теперь. Более точная формулировка включает комплексные точки пересечения и точки пересечения, лежащие на бесконечности.

3. Ньютон имел много возможностей убедиться в эффективности метода координат. Он продемонстрировал это в процессе переноса на алгебраические кривые высокой степени различных фактов о конических сечениях. Вот, например, как обстоит дело с теорией диаметров. Напомним, что если для конического сечения, скажем для эллипса, провести хорды, параллельные некоторому направлению, то их середины лежат на одной прямой, называемой диаметром. Если для кривой порядка n провести пучок параллельных прямых и в пересечении каждой прямой

получится n точек $x_1, \ldots, x_n$, то рассмотрим их центры тяжести $(x_1 + \ldots + x_n)/n$ (заметим, что они не зависят от выбора координаты на прямой; как и Ньютон, мы не обсуждаем случай мнимых точек пересечения). Теорема Ньютона утверждает, что все центры тяжести лежат на одной прямой.

В самом деле, выберем систему координат так, что параллельные прямые задаются уравнениями $y = \mathrm{const}$. Пусть $F(x, y) = 0$ — уравнение кривой в этой системе,

$$F(x, y) = ax^n + bx^{n-1}y + cx^{n-1} + \ldots .$$

Тогда точки пересечения $x_1, \ldots, x_n$ являются корнями уравнения $F(x, y) = 0$ по x при фиксированном y. По теореме Виета $(x_1 + \ldots + x_n)/n = -(by + c)/an$, т. е. все центры тяжести лежат на одной прямой $anx + by + c = 0$ — диаметре Ньютона.

4. Почти одновременно с созданием аналитической геометрии Дезарг, а вслед за ним Паскаль заложили основы проективной геометрии. Исходное наблюдение состояло в том, что применение центральной проекции позволяет упростить геометрические рассмотрения (например, все конические сечения получаются одно из другого проектированием). Возникает конкурирующий с аналитической геометрией способ упростить и продвинуть теорию Аполлония. Паскаль подготовил всеобъемлющий трактат, но он был утерян, и о работах по проективной геометрии забыли на сто лет. Видимо, не знал о них и Ньютон. Однако от него не ускользнуло, что использование проектирования (рассмотрение «тени от светящейся точки») очень упрощает теорию не только конических сечений, но и общих алгебраических кривых. Важнейшее наблюдение Ньютона состоит в том, что при проектировании сохраняется порядок кривой. Применительно к кривым третьего порядка он устанавливает, что любая кривая может быть приведена проектированием к одной из кривых вида $y^2 = P(x)$, где P — кубический многочлен. Это доказал позднее Клеро.

5. Геометрия кривых третьего порядка существенно богаче геометрии кривых второго порядка. Прежде всего, могут появиться особые точки: двойные (точки самопересечения, как

$(0,0)$ у кривой $y^2 = x^2(x+1)$) и точки возврата (как $(0,0)$ у кривой $y^2 = x^3$). Далее, касательная в точке касания в общем случае имеет двукратную точку пересечения (соответствующий многочлен от одного переменного имеет двойной корень), но может иметь и трехкратную точку пересечения (для уравнений большей степени она может иметь еще большую кратность). Такие точки называются точками перегиба ($(0,0)$ у кривой $y = x^3$). У кривых третьей степени может быть до трех точек перегиба (точки $(0,0),(1,0),(2,0)$ у кривой $y^3 = x(x-1)(x-2)$). Маклорен заметил, что в этом случае все эти точки обязательно лежат на одной прямой (в примере прямая $y = 0$). В XVIII веке алгебраические кривые, прежде всего третьей и четвертой степеней, были в центре внимания математиков. Эти вопросы излагались в первых учебниках аналитической геометрии. Однако многое оставалось невыясненным. Становилось ясно, что для построения гармоничной теории необходимо добавить точки, лежащие на бесконечности, а также мнимые точки, поскольку все время приходится решать алгебраические уравнения высоких степеней (уже в 1717 г. Стирлинг упоминает кривую с двойной мнимой точкой на бесконечности).

Учесть эти два обстоятельства можно в рамках комплексной проективной геометрии, начало которой положил Понселе. Его первое удивительное наблюдение состояло в том, что все окружности пересекаются в двух бесконечных удаленных мнимых точках. Эти точки, названные циклическими, управляют всей конформной геометрией плоскости. Другое великое открытие Понселе (он делит его с Жергонном) — это принцип двойственности, в силу которого каждое планиметрическое утверждение имеет двойник, где прямые заменяются на точки и обратно. В связи с этим естественно связывать с кривой не только множество ее точек, но и множество ее касательных. Возникает инвариант, двойственный порядку, — класс p. Это наибольшее число касательных, проходящих через точку. Для неособой кривой третьей степени $p = 6$. Общая формула для неособой кривой имеет следующий вид:

$$p = n(n-1). \tag{37}$$

Удивительно, что замечательные открытия Понселе, знаменовавшие создание нового типа геометрической интуиции, были сделаны на синтетическом языке, поскольку проективную геометрию еще не удалось объединить с аналитической. Еще не придумали координаты, которые обслуживали бы все точки проективной плоскости, включая бесконечно удаленные.

Такие координаты появились в 1827 – 1828 гг. у Мёбиуса и Плюккера. Особенно простой и удобной является конструкция однородных координат Плюккера. Он ставит в соответствие точке проективной плоскости тройку чисел $x = (x_0, x_1, x_2) \neq (0,0,0)$ с точностью до постоянного множителя: $(x_0, x_1, x_2) = (\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2)$. Всякая прямая на проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ задается уравнением $(\xi, x) := \xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 = 0$, где $\xi \neq (0,0,0)$; ξ и $\lambda\xi$ соответствуют одной и той же прямой. Поэтому прямые на $\mathbb{P}^2$ естественно образуют другую проективную плоскость $\mathbb{P}^2_\xi$ с однородными координатами ξ. Прямым на $\mathbb{P}^2_\xi$ соответствуют точки $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2_x$. В результате совершенно нетривиальный на синтетическом языке принцип двойственности на аналитическом становится почти очевидным.

Общее проективное преобразование координат имеет вид $\bar{x} = \sum a_{ji} x_i$, где $\det(a_{ji}) \neq 0$. Оно характеризуется тем, что взаимно однозначны на $\mathbb{P}^2$ и переводит прямые в прямые.

Чтобы фиксировать аффинную структуру на $\mathbb{P}^2$, нужно некоторую прямую, например $x_0 = 0$ (но не обязательно ее), объявить бесконечно удаленной. Вне $x_0 = 0$ всегда можно выбирать координаты вида $(1, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$. Тогда $\tilde{x}_1 = x_1/x_0$, $\tilde{x}_2 = x_2/x_0$ будут декартовыми. При аналитическом подходе с самого начала бесконечно удаленная прямая ничем не выделена.

Отправляясь от предложенной Плюккером интерпретации принципа двойственности, естественно наряду с кривой $\Gamma = \Gamma_x$ на $\mathbb{P}^2_x$ рассмотреть двойственную кривую Γ_ξ на двойственной плоскости $\mathbb{P}^2_\xi$: точкам Γ_ξ отвечают касательные к Γ_x. Класс Γ_x совпадает с порядком Γ_ξ. Плюккер разрешил загадку, которую не смог разгадать Понселе (парадокс Понселе). Дело в том, что, как легко видеть, формула (37) не является двойственной самой себе. Плюккер обнаружил, что эта формула справедлива лишь для кривых без особенностей. Например, если Γ — неособая кривая третьей степени, то двойственная кривая обязательно имеет особенности. Плюккер нашел такую формулу для класса кривой с особенностями:

$$p = n(n-1) - 2d - 3r, \tag{38}$$

Здесь d — число двойных точек, а r — число точек возврата. Эта формула уже является самодвойственной. Заметим, что двойные точки двойственной кривой Γ_ξ (пусть δ — их число) соответствуют двойным касательным к исходной кривой, то есть прямым, имеющим две точки касания с Γ. Точки возврата Γ_ξ соответствуют касательным в точках перегиба Γ (пусть ρ — их число). Тогда $n = p(p-1) - 2\delta - 3\rho$. Одновременно получается формула для числа точек перегиба

$$\delta = 3n(n-2) - 6d - 8r. \tag{39}$$

В случае, когда особых точек нет, ее нетрудно получить непосредственно, записывая условие того, что точка является точкой перегиба, в виде системы алгебраических уравнений, и применяя теорему Безу. В частности, если Γ — неособая кривая третьего порядка, то $p = 6$, у нее нет двойных касательных и имеется девять точек перегиба, некоторые из которых могут оказаться комплексными.

Строго говоря, формула (38) верна, если у кривой нет более сложных особенностей, чем простейшие точки самопересечения и возврата, а формула (39) — если все точки перегиба являются простейшими (кратность касания равна трем) и никакая прямая не может коснуться кривой более чем в двух точках; полные формулировки более громоздки.

Плюккер глубоко продумал вопрос о комплексных особых точках вещественных кривых. Собственно, приведенные формулы являются точными для комплексных особых точек и точек перегиба. Вопрос же о том, какие из этих точек могут быть вещественными, весьма нетривиален. Совсем не обязательно, чтобы все точки перегиба, число которых задается формулой (39), были вещественны. Например, среди девяти точек перегиба кривой третьего порядка без особенностей не более трех могут быть вещественными. «Необходим новый взлет пространственной интуиции, чтобы охватить то, что во всех случаях мнимо и остается мнимым», — писал Плюккер.

С Плюккером связан один из самых замечательных периодов в истории аналитической геометрии. Его ученик Клейн писал: «Целью Плюккера в геометрии и его достижением является новое построение аналитической геометрии. Он придерживался при этом метода, возникшего из традиций Монжа: полного сращения построения и аналитической формулы... В геометрии Плюккера простое комбинирование формул переводится на язык геометрических соотношений, и наоборот, последними направляются аналитические операции. Вычисления у Плюккера по возможности опускаются, но зато развивается и широко применяется доходящая до виртуозности острота внутреннего восприятия, геометрического истолкования имеющихся аналитических уравнений».

Плюккер оказался объектом нападок со стороны Штейнера, замечательного геометра, но агрессивного противника аналитических методов в геометрии: использования уравнений, работы с мнимыми объектами. Атака Штейнера была столь энергична, что Плюккер более чем на 20 лет прервал занятия геометрией и вернулся к ним лишь незадолго до смерти.

Приведем несколько примеров геометрических конструкций Плюккера. Однако прежде вспомним, что в уравнение n-й степени от двух переменных входит $(n+3)n/2+1$ коэффициентов, которые определены с точностью до постоянного множителя (это нетрудно доказать по индукции). Поэтому кривая порядка n определяется заданием $(n+3)n/2$ точек (для определения коэффициентов уравнения возникает нужное число линейных уравнений). В частности, для определения прямой нужно задать две точки, конического сечения — пять, кривой третьего порядка — девять. Однако эти точки должны быть общего положения, и с ростом n это условие становится все более деликатным. Обратим внимание, что по теореме Безу две кривые порядка n обычно пересекаются в n^2 точках. Но $n^2 > n(n+3)/2$ при $n > 3$, а через эти n^2 точек проходит две (на самом деле бесконечное число) кривых порядка n. Это обстоятельство, получившее название парадокса Крамера, очень волновало геометров от Маклорена до Эйлера, и, вероятно, лишь Плюккер в нем окончательно разобрался.

Посмотрим, как доказал Плюккер теорему Паскаля. Напомним, что шесть точек $A_1, A_2, \ldots, A_6$ на коническом сечении $Q = 0$ последовательно соединяются в замкнутую ломаную — шестиугольник Паскаля (эта ломаная может иметь самопересечения). Пусть p_i — это сторона A_iA_{i+1}, $L_i = 0$ — уравнение прямой, проходящей через p_i. Пусть B_1, B_2, B_3 — точки пересечения противоположных сторон: $(p_1, p_4), (p_2, p_5), (p_3, p_6)$ соответственно. Утверждается, что B_1, B_2, B_3 лежат на одной прямой. Паскаль свел общий случай к случаю окружности, но и для окружности доказательство не слишком просто.

А вот как рассуждал Плюккер. Он провел через девять точек $\{A_i, B_j\}$ кривые третьего порядка. В общем положении через девять точек проходит единственная кривая, но $\{A_i, B_j\}$ не является общим набором (см. выше о парадоксе Крамера). Через $\{A_i, B_j\}$ будут проходить все кривые из пучка кривых

$$L_1L_3L_5 + \mu L_2L_4L_6 = 0, \tag{40}$$

зависящих от произвольного параметра μ. Заметим, что для каждой из точек A_i, B_j в каждом из двух слагаемых есть множитель, аннулирующийся на ней. Пусть C — какая-либо точка кривой $Q = 0$, отличная от A_j; подберем μ так, чтобы координаты C удовлетворяли (40). Мы фиксировали кривую третьего порядка, но при ее пересечении с кривой второго порядка $Q = 0$ или должно возникать не более $2 \cdot 3 = 6$ точек, или число точек пересечения бесконечно. Поскольку мы имеем, по крайней мере, семь точек пересечения $A_1, \ldots, A_6, C$, то число точек пересечения бесконечно и ввиду неприводимости кривой $Q = 0$ она должна целиком содержаться в кривой (40), то есть левая часть (40) должна делиться на Q. После деления на Q возникает линейное выражение M, и на прямой $M = 0$ должны лежать точки B_1, B_2, B_3, поскольку они не могут лежать на коническом сечении $Q = 0$ (иначе бы какая-то из прямых $L_j = 0$ пересекала $Q = 0$ в трех точках).

Прием, в котором используются пучки кривых и выбор подходящей кривой из пучка, которая в силу теоремы Безу должна распадаться (в примере — на коническое сечение и прямую), очень характерен для Плюккера. Неопределенный множитель μ постоянно присутствует в его рассмотрениях (его часто так и называли — «плюккерово μ»).

Плюккер по-новому ставит вопрос о приведении уравнения кривой к каноническому виду, стремясь к тому, чтобы уравнение выглядело попроще и его алгебраическая структура отражала непосредственно какие-то геометрические свойства кривой Например, Плюккер показывает, что уравнение третьей степени всегда может быть записано в виде

$$L_1L_2L_3 - M^3 = 0, \tag{41}$$

где $\{L_i, M\}$ — линейные формы от координат. Для доказательства возможности представления подсчитывается число независимых параметров, которые входят в (41). В линейной форме три коэффициента, в четырех формах $\{L_i, M\}$ их 12, но (41) сохраняется, если L_1, L_2, L_3 умножить на $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, а M — на $\sqrt[3]{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$. Поэтому независимых параметров равно $12 - 3 = 9$, а поскольку общее уравнение третьей степени, как мы видели, содержит девять независимых параметров (на один меньше, чем число коэффициентов), то Плюккер сделал вывод, что общее уравнение всегда можно преобразовать в равенство (41). К этим рассуждениям нужно еще добавить некоторые моменты, чтобы они стали строгим доказательством. Вероятно, это был один из первых примеров, когда подсчет числа параметров использовался как эвристический прием и как средство доказательства.

Какая же геометрия стоит за представлением (41)? Пусть A_j — точки пересечения прямых $L_j = 0$ и $M = 0$. Эти точки лежат на кривой, причем A_j — трехкратная точка пересечения кривой (41) и прямой $L_j = 0$. Это означает, что A_1, A_2, A_3 — точки перегиба, а $L_j = 0$ — касательные в этих точках. Кроме того,

$M = 0$ — прямая, на которой лежат три точки перегиба A_1, A_2, A_3 Такие прямые называют прямыми перегиба. Если перейти к рассмотрению комплексных точек перегиба, то их, как отмечалось, для неособой кривой девять. Оказывается, что прямая (комплексная), проходящая через любые две точки перегиба, обязательно содержит третью. Так что возникает двенадцать прямых перегиба. Эта конфигурация из девяти точек и двенадцати прямых перегиба очень интересна, и она специально изучалась в проективной геометрии.

Специальную структуру предложил Плюккер и для уравнения четвертой степени

$$L_1 L_2 L_3 L_4 - \Omega^2 = 0, \tag{42}$$

где $\{L_i\}$ — линейные формы, а Ω — многочлен второй степени. Вспомним, что в общее уравнение четвертой степени входит 14 независимых параметров. В квадратном многочлене шесть коэффициентов, так что в (42) участвует $3 \cdot 4 + 6 = 18$ коэффициентов. При этом можно умножить $\{L_i\}$ на числа $\{\alpha_i\}$ и одновременно Ω — на число $\sqrt{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}$. В результате число независимых параметров равно $18 - 4 = 14$. Плюккер делает вывод, что представление (42) является общим.

Далее, точки пересечения каждой прямой $L_i = 0$ с коническим сечением $\Omega = 0$ являются двукратными точками пересечения с кривой (42). Таким образом, каждая прямая $L_i = 0$ имеет две точки касания с кривой (вместо четырех точек пересечения для общих прямых). Такие касательные называют двойными. Итак, в уравнении (42) участвуют четыре двойных касательных, причем восемь их точек касания лежат на одном коническом сечении. С этим открытием Плюккера связан следующий курьез. У кривой четвертого порядка имеется, как нетрудно подсчитать, 28 двойных касательных (считая комплексные). Плюккер ошибочно предположил, что точки касания любой четверки из них лежат на коническом сечении. На самом деле каждая пара двойных касательных входит лишь в пять четверок, обладающих этим свойством. Ошибку Плюккера обнаружил не кто иной, как Штейнер. Алгебраические кривые фактически возникали и в синтетической геометрии, а приведенный пример показывает, что представителям этой школы пока хватало геометрической интуиции, чтобы на равных соревноваться с аналитиками. Демонстративный отказ от использования аналитических средств лишь постепенно выявил слабые стороны школы Штейнера.

Точки трехмерного проективного пространства $\mathbb{P}^3$, согласно Плюккеру, задаются четверками однородных координат $x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0,0)$, $x \sim \lambda x$, $\lambda \neq 0$. Плоскости в $\mathbb{P}^3$ составляют двойственное проективное пространство $\mathbb{P}^3_\xi$, $\xi \in \mathbb{P}^3_\xi$ отвечает плоскость $\langle \xi, x\rangle = 0$. В то же время многообразие прямых G является совершенно новым геометрическим объектом. Его изучение — одно из основных достижений Плюккера. Прямые в $\mathbb{P}^3$ задаются четырьмя параметрами, например, можно фиксировать две различные плоскости, и тогда почти все прямые задаются точками пересечения с этими плоскостями. Таким образом, многообразие G четырехмерно. На G естественно вводятся координаты (Штифеля), которые можно воспринимать как обобщение однородных координат. Зададим прямую парой ее различных точек x, y. Расположим x, y в матрицу $X = \binom{x}{y}$ с двумя строками и четырьмя столбцами. Прямая состоит из точек вида $z = \lambda_1 x + \lambda_2 y$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0)$, то есть λ — однородные координаты на ней. Матрица X определяется по прямой с точностью до левых умножений на невырожденную матрицу второго порядка: $X \mapsto gX$ (соответствует переходу к другой паре точек на прямой). Положим $X = (X_1, X_2)$, где X_1, X_2 — квадратные матрицы второго порядка. Тогда если $\det X_1 \neq 0$, то координаты можно выбрать так, что $X_1 = E$ — единичная матрица (берутся точки x с $x_0 = 1$, $x_1 = 0$ и y с $y_0 = 0, y_1 = 1$). На G возникает аффинная координатная карта с координатами $X_2 = (u_{ij})$, ее замыкание совпадает с G. Плюккер перешел от матрицы X к ее минорам. Это знаменитые плюккеровы координаты, которые очень удобны при построении геометрии прямых. Рассмотрим две задачи, связанные с геометрией прямых.

1. Представим пространство $\mathbb{P}^3$ в виде объединения попарно непересекающихся прямых. Заметим, что если фиксировать аффинную структуру в $\mathbb{P}^3$, то проективно пересекающиеся прямые переходят либо в пересекающиеся, либо в параллельные (пересекаются «на бесконечности»). В то же время непересекающимся прямым соответствуют скрещивающиеся прямые в аффинном пространстве. Поэтому на аффинном языке речь идет о представлении пространства в виде объединения попарно скрещивающихся прямых.

Мы явно укажем разбиение, а именно, рассмотрим прямые, соединяющие x с $\sigma(x) = (-x_1, x_0, -x_3, x_2)$ то есть $X = \binom{x}{\sigma(x)}$. Надо лишь проверить, что $\sigma(x) \neq \lambda x$, и что если y — точка такой прямой, то $\sigma(y)$ также лежит на этой прямой. Это следует из непосредственно проверяемого соотношения $\sigma(\lambda_0 x + \lambda_1 \sigma(x)) = -\lambda_1 x + \lambda_0 \sigma(x)$. Указанное свойство означает, что прямые или не пересекаются, или совпадают. В G возникает двумерное подмногообразие прямых.

2. Исследуем в пространстве $\mathbb{P}^3$ поверхности с двумя семействами прямолинейных образующих. В аналитической геометрии учат, что среди поверхностей второго порядка в $\mathbb{R}^3$ имеется два типа поверхностей, обладающих этим свойством: однополостные гиперболоиды (их уравнение приводится к виду $x^2 + y^2 - z^2 = 1$) и гиперболические параболоиды (их канонические уравнения: $z = x^2 - y^2$). Покажем, что даже в классе всех поверхностей (а не только второго порядка) других поверхностей с этим свойством нет. Разумеется, есть большое число поверхностей с одной системой образующих (развертывающиеся поверхности), однако условие существования двух систем оказывается очень жестким и оставляет лишь однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид. Заметим, что в проективном пространстве однополостные гиперболоиды и гиперболические параболоиды (проективно) эквивалентны: в подходящих однородных координатах их уравнение имеет вид $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$. Таким образом, с проективной точки зрения можно говорить лишь об однополостных гиперболоидах.

Уточним используемые термины. Будем говорить, что на поверхности S имеются два семейства прямолинейных образующих, если через каждую ее точку проходят по крайней мере две различные прямые, целиком лежащие на S. Такая поверхность S называется неприводимой, если не существует меньшей поверхности $S_0 \subset S$, на которой также лежат два семейства прямолинейных образующих. Мы хотим избежать в дальнейшем обсуждения аналитических тонкостей, связанных с точным определением понятия поверхности, и поэтому будем апеллировать лишь к интуитивным представлениям о поверхностях. Эта часть наших рассуждений не будет строгой, но те, кто владеют соответствующей техникой, без труда обнаружат, как превратить эти рассуждения в строгие, скажем, для аналитических поверхностей.

Теорема. *Всякая неплоская неприводимая (аналитическая) поверхность в $\mathbb{P}^3$ с двумя семействами прямолинейных образующих является однополостным гиперболоидом.*

Доказательство. 1. Если указанная поверхность имеет плоский кусок, то она совпадает с плоскостью. Грубо говоря, образующие, проходящие через точки плоского куска, порождают плоскость.

2. Фиксируем на поверхности образующую l. Тогда все образующие, пересекающие l, порождают поверхность. Очевидно, что точки объединения зависят от двух параметров, а аналитические уточнения мы договорились опускать.

3. Если имеются две непересекающиеся образующие l_1, l_2, то образующие, пересекающие обе образующие l_1, l_2, также порождают поверхность.

В самом деле, поскольку образующие, пересекающие l_1, порождают поверхность, то через каждую точку l_2 проходит образующая, пересекающая l_1. Объединение этих образующих также должно совпадать с поверхностью.

4. Аналогично для любого числа попарно непересекающихся образующих объединение образующих, их все пересекающих, совпадает с поверхностью.

5. Для пары пересекающихся образующих l_1, l_2 почти все образующие, пересекающие одну из них, не пересекают другую. Действительно, пусть m — отрезок на l_2. Через каждую точку m должна проходить образующая, отличная от l_2. Если все они пересекают l_1, то они порождают часть плоскости, проходящей через l_1, l_2.

Таким образом, на поверхности имеется бесконечное множество попарно непересекающихся образующих. Нам достаточно, что есть три таких образующих.

6. Покажем, что поверхность, указанная в теореме, однозначно определяется тройкой своих попарно непересекающихся образующих. Она совпадает с объединением всех прямых в $\mathbb{P}^3$, пересекающих все три фиксированные прямые.

В правдоподобности этого утверждения можно убедиться, пользуясь излюбленным приемом Плюккера с подсчетом числа параметров. Множество всех прямых зависит от четырех параметров. Пересечение с каждой прямой — это одно условие на параметры (иначе, через каждую точку пространства проходит двухпараметрическое семейство, поэтому через точки прямой проходит трехпараметрическое семейство прямых). Требуя пересечения с тремя прямыми, мы накладываем три условия, так что остается однопараметрическое семейство прямых, которое порождает поверхность.

Для корректности нужно убедиться, что эти условия независимы. Поэтому осуществим отбор прямых более эффективно. Пусть l_1, l_2, l_3 — попарно непересекающиеся прямые. Найдем прямые, их все пересекающие. Пусть $A \in l_1$, тогда $A \notin l_2$. Проведем плоскость через A и l_2. Эта плоскость пересечет l_3 в некоторой точке B. Дело в том, что в проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ прямая, не лежащая в плоскости, пересекает ее, а прямая l_3 не может лежать в плоскости, поскольку l_2 и l_3 не пересекаются. Прямая AB будет единственной прямой, пересекающей все три прямые l_1, l_2, l_3 и проходящей через A. Итак, множество прямых, пересекающих тройку попарно непересекающихся прямых, можно параметризовать точками пересечения с одной из них.

7. Докажем, что объединение этих прямых является однополостным гиперболоидом. Проведем доказательство аналитически. Одновременно докажем, что через три попарно непересекающиеся прямые проходит в $\mathbb{P}^3$ однополостный гиперболоид, причем единственный.

Пусть l_1, l_2, l_3 — три попарно непересекающиеся прямые в $\mathbb{P}^3$. Будем задавать прямые как пересечения плоскостей, то есть системами двух линейных уравнений $\langle \xi, y \rangle = 0$ и $\langle \eta, y \rangle = 0$. Выберем однородные координаты так, чтобы l_1 задавалась системой $y_0 = 0, y_1 = 0$, а l_2 — системой $y_2 = 0, y_3 = 0$. Это можно сделать, поскольку они не пересекаются (и левые части задающих их уравнений можно принять за координаты). Пусть тогда l_3 задается системой

$$\begin{cases} \xi_0 y_0 + \xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3 = 0, \\ \eta_0 y_0 + \eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \eta_3 y_3 = 0 \end{cases}$$

Векторы (ξ_0, ξ_1), (η_0, η_1) не могут оба быть нулевыми, поскольку тогда бы l_2 и l_3 совпадали. Более того, эти векторы не могут быть пропорциональны и, в частности, ни один из них не может быть нулевым. Действительно, если $(\eta_0, \eta_1) = (\lambda\xi_0, \lambda\xi_1)$, то точка $(-\xi_1, \xi_0, 0, 0)$ будет общей для l_2 и l_3. Аналогично показывается, что (ξ_2, ξ_3) и (η_2, η_3) не могут быть пропорциональными. Поэтому можно сделать следующую замену координат:

$$\begin{aligned} x_0 &= \xi_0 y_0 + \xi_1 y_1, & x_1 &= \eta_0 y_0 + \eta_1 y_1, \\ x_2 &= \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3, & x_3 &= \eta_2 y_2 + \eta_3 y_3. \end{aligned}$$

В силу сказанного выше о пропорциональности векторов такая замена допустима. В этих координатах l_1 задается уравнениями $x_0 = x_1 = 0$, l_2 — уравнениями $x_2 = x_3 = 0$, и l_3 — уравнениями $x_0 + x_2 = x_1 + x_3 = 0$. Однако все эти прямые лежат на однополостном гиперболоиде

$$x_0 x_3 - x_1 x_2 = 0. \tag{43}$$

Рассматриваемые три прямые входят в однопараметрическое семейство образующих

$$\begin{aligned} &\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 = 0, \\ &\lambda_0 x_2 + \lambda_1 x_3 = 0, \quad (\lambda_0, \lambda_1) \neq (0,0). \end{aligned} \tag{44}$$

Второе семейство образующих состоит из прямых

$$\begin{aligned} &\mu_0 x_0 + \mu_1 x_2 = 0, \\ &\mu_0 x_1 + \mu_1 x_3 = 0, \quad (\mu_0, \mu_1) \neq (0,0). \end{aligned} \tag{45}$$

Напомним, что образующие одного семейства попарно не пересекаются, а любые образующие из разных семейств пересекаются, так что через каждую точку проходит по образующей каждого семейства.

Прямые в каждом семействе параметризуются точками проективной прямой $\mathbb{P}^1_\lambda$, $\mathbb{P}^1_\mu$ (λ, μ — однородные координаты). С каждым гиперболоидом связываются на многообразии прямых G две кривые. Кривые, которые допускают взаимно однозначное отображение на проективную прямую, называются рациональными (допускающими рациональную параметризацию). Рациональными кривыми являются не только прямые в проективном пространстве, но и кривые второго порядка. Таким образом, с каждым однополостным гиперболоидом в $\mathbb{P}^3$ связываются две замечательные рациональные кривые на G. В духе геометрического подхода Плюккера один и тот же геометрический объект проявляется либо в виде однополостных гиперболоидов в точечной геометрии $\mathbb{P}^3$, либо в виде простейших рациональных кривых на многообразии прямых G (класс этих кривых можно описать непосредственно).

При переходе на аффинный язык могут встретиться две возможности: либо никакая образующая не лежит в бесконечно удаленной плоскости, и тогда мы получаем однополостный гиперболоид в аффинном смысле, либо такая образующая есть, и тогда мы получаем гиперболический параболоид. В последнем случае в бесконечно удаленной плоскости лежит на самом деле пара пересекающихся образующих (по одной из каждого семейства). Это связано с тем, что в любой плоскости, проходящей через образующую, лежит одна образующая, пересекающая первую. Сказанное можно перефразировать следующим образом: если в трехмерном аффинном пространстве $\mathbb{R}^3$ имеется тройка попарно непересекающихся прямых, то на них можно натянуть однополостный гиперболоид, если не существует плоскости, параллельной всем трем, или гиперболический параболоид, если такая плоскость существует. Бесконечно удаленная прямая этой плоскости принадлежит второму семейству образующих. Иначе, для каждого семейства образующих гиперболического параболоида имеется плоскость, им всем параллельная.

Доказанное утверждение об однополостных гиперболоидах можно интерпретировать как утверждение о «жесткости» поверхностей, образованных двумя семействами прямолинейных образующих. Такую конструкцию нельзя «пошевелить», если зафиксированы три прямые одного семейства. Это обстоятельство используется в реальных конструкциях из прямолинейных стержней в виде гиперболоида, например, в знаменитой шуховской радиобашне в Москве.

Переходим к заключительной части, посвященной сцеплению гиперболоидов. Центральный объект классической проективной геометрии — различного рода конфигурации точек, прямых, плоскостей. В ней коллекционируются случаи, когда одни геометрические соотношения (например, тройка прямых проходит через одну точку, три точки лежат на одной прямой, шесть точек лежат на одном коническом сечении и т. д.) влекут другие: конфигурации Дезарга, Паскаля и т. п. Приведенный результат позволяет исследовать конфигурации в многомерном проективном пространстве, включающие двумерные однополостные гиперболоиды. Поскольку будут рассматриваться лишь двумерные гиперболоиды (то есть гиперболоиды в $\mathbb{P}^3$), то мы далее слово «двумерный» часто опускаем.

Точки n-мерного проективного пространства $\mathbb{P}^n$ будем задавать однородными координатами $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Зафиксируем геометрические соотношения для прямых в $\mathbb{P}^n$. Через любые две непересекающиеся прямые в $\mathbb{P}^n$ можно провести единственную трехмерную плоскость. Для тройки попарно непересекающихся прямых возникает геометрическое соотношение: «лежать в одной трехмерной плоскости». Для четверки попарно непересекающихся прямых, лежащих в одной трехмерной плоскости, возникает соотношение: «принадлежать одному (двумерному) однополостному гиперболоиду». Напротив, три попарно непересекающиеся прямые, лежащие в одной трехмерной плоскости, всегда порождают однополостный гиперболоид.

Как уже говорилось в начале, два двумерных однополостных гиперболоида в $\mathbb{P}^n$ называют сцепленными, если они имеют общую образующую и не лежат в одной трехмерной плоскости. Несколько двумерных однополостных гиперболоидов в $\mathbb{P}^n$ называют сцепленными, если они попарно сцеплены и прямые сцепления на каждом из них принадлежат одному семейству образующих, которое называют отмеченным. Сцепление называется невырожденным, если каждая прямая сцепления принадлежит лишь двум гиперболоидам.

Пусть в пятимерном проективном пространстве $\mathbb{P}^5$ имеется четверка невырожденно сцепленных двумерных однополостных гиперболоидов. Задание такой четверки равносильно заданию четверки трехмерных плоскостей в $\mathbb{P}^5$, находящихся в общем положении. Расшифруем, что это означает. Напомним, что, как правило, k-мерная и l-мерная плоскости в $\mathbb{P}^n$ пересекаются по $(k+l-n)$-мерной плоскости (а в вырожденной ситуации по плоскости большей размерности). Тогда две трехмерные плоскости в $\mathbb{P}^5$ обычно пересекаются по прямой ($3 + 3 - 5 = 1$), а три — вообще не пересекаются ($1 + 3 < 5$). Итак, тройка трехмерных плоскостей в $\mathbb{P}^5$ в общем положении не имеет общих точек. Следовательно, любые две из этих плоскостей пересекаются по прямой (если бы две из них пересекались по двумерной плоскости, то она в пересечении с третьей плоскостью дала бы точку: $2+3-5 = 0$).

Соответственно, четверка плоскостей находится в общем положении, если любые три из них не имеют общих точек, а следовательно, любые две пересекаются по прямым. В каждой такой трехмерной плоскости возникает тогда тройка прямых, по которым она пересекается с другими плоскостями. Эти прямые попарно не пересекаются, и на них можно натянуть (двумерный) однополостный гиперболоид. Возникает четверка невырожденно сцепленных гиперболоидов. С другой стороны, если имеется четверка невырожденно сцепленных гиперболоидов, то порождаемые ими трехмерные плоскости, очевидно, будут находиться в общем положении. Теперь можем сформулировать основное утверждение, которое несколько сильнее, чем сформулированная в начале статьи теорема о пяти гиперболоидах.

Теорема. *Пусть имеется четверка невырожденно сцепленных двумерных однополостных гиперболоидов в пятимерном проективном пространстве $\mathbb{P}^5$. Тогда всякая трехмерная плоскость, пересекающая два из них по образующим из отмеченных семейств, пересекает два остальных гиперболоида также по образующим из отмеченных семейств. Четверка прямых пересечения с гиперболоидами на секущей плоскости лежит на одном однополостном гиперболоиде.*

Следствие (о пяти гиперболоидах). *Если имеется четверка невырожденно сцепленных однополостных двумерных гиперболоидов в $\mathbb{P}^5$, то всякий гиперболоид, сцепленный с тремя из них, сцеплен с четвертым.*

Следствие имеет место в силу того, что плоскость пятого гиперболоида удовлетворяет условиям теоремы. Утверждение теоремы является более сильным, чем следствие. Мы можем произвольно выбрать по одной образующей из отмеченных семейств на двух гиперболоидах Они не будут пересекаться, и через них проходит единственная трехмерная плоскость. Эта плоскость пересечется с плоскостями двух других гиперболоидов по прямым. Утверждается, что эти прямые лежат на гиперболоидах. Это очень сильное утверждение, поскольку на трехмерной плоскости имеется четырехпараметрическое семейство прямых, а мы утверждаем, что прямая пересечения попадает на однопараметрическое подсемейство образующих гиперболоида. К этому добавим, что четыре прямых пересечения лежат на одном гиперболоиде.

Имеем двухпараметрическое семейство плоскостей, удовлетворяющих условию теоремы: их можно задавать, произвольно выбирая по одной образующей из отмеченных семейств на двух гиперболоидах. На каждой плоскости возникает по гиперболоиду. Все эти гиперболоиды (двухпараметрическое семейство) попарно сцеплены в силу теоремы.

Вернемся к доказательству теоремы. Мы проведем его аналитически, аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Зададим трехмерные плоскости в $\mathbb{P}^5$ как пересечения гиперплоскостей, то есть системой двух линейных уравнений $\langle \xi, y\rangle = \langle \eta, y\rangle = 0$ в однородных координатах. Пусть имеем четыре трехмерных плоскости l_1, l_2, l_3, l_4, из которых никакие три не имеют общих точек. Выберем однородные координаты так, чтобы l_1 задавалась системой $y_0 = y_1 = 0$, l_2 — системой $y_2 = y_3 = 0$, l_3 — системой $y_4 = y_5 = 0$. Это можно сделать, поскольку l_1, l_2, l_3 не имеют общих точек, а следовательно, левые части уравнений, задающих их, независимы (одновременно обращаются в нуль лишь на нулевом наборе). Пусть l_4 задается в этой системе координат уравнениями

$$\sum_{i=0}^{5} \xi_i y_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{5} \eta_i y_i = 0.$$

Векторы (ξ_0, ξ_1), (η_0, η_1) не могут быть одновременно нулевыми, поскольку это означало бы, что плоскости l_2, l_3, l_4 имеют общую прямую $y_2 = y_3 = y_4 = y_5 = 0$, по которой пересекаются l_2 и l_3. Покажем, что они не могут быть также пропорциональными, в частности, ни один из них не может быть нулевым. Пусть $(\eta_0, \eta_1) = (c\xi_0, c\xi_1)$. Тогда точка $(-\xi_1, \xi_0, 0, 0, 0, 0)$ будет принадлежать трем плоскостям l_2, l_3, l_4, а мы предположили, что они не имеют общих точек. Аналогично можно показать, что пары векторов $(\xi_2, \xi_3), (\eta_2, \eta_3)$ и $(\xi_4, \xi_5), (\eta_4, \eta_5)$ непропорциональны. В результате сделаем замену координат

$$x_0 = \xi_0 y_0 + \xi_1 y_1, \qquad x_1 = \eta_0 y_0 + \eta_1 y_1, \qquad x_2 = \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3,$$
$$x_3 = \eta_2 y_2 + \eta_3 y_3, \qquad x_4 = \xi_4 y_4 + \xi_5 y_5, \qquad x_5 = \eta_4 y_4 + \eta_5 y_5.$$

В этих координатах плоскости l_1, l_2, l_3, l_4 задаются соответственно системами уравнений:

$$x_0 = x_1 = 0, \quad x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = x_5 = 0,$$
$$x_0 + x_2 + x_4 = x_1 + x_3 + x_5 = 0.$$

Все эти четыре плоскости включаются в семейство трехмерных плоскостей

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_4 = 0, \quad \lambda_0 x_1 + \lambda_1 x_3 + \lambda_2 x_5 = 0. \tag{46}$$

Обозначим плоскость, задаваемую (46), через Σ_λ. Параметры естественно считать однородными координатами на двумерной проективной плоскости $\mathbb{P}^2$: $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0, 0)$; λ и $c\lambda$ задают одну и ту же плоскость. Плоскости l_1, l_2, l_3, l_4 соответствуют параметрам $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$.

Исследуем попарные пересечения $\Sigma_\lambda \cap \Sigma_\mu$, $\lambda \neq c\mu$. Это прямая в $\mathbb{P}^5$, точки которой удовлетворяют системе четырех уравнений, полученных объединением (46) для λ и μ. При этом очевидно, что $\Sigma_\lambda \cap \Sigma_\mu$ зависит лишь от прямой $\{\lambda, \mu\}$ на параметрической плоскости $\mathbb{P}^2$, соединяющей точки λ и μ. Поэтому если фиксировать λ, то прямым $\Sigma_\lambda \cap \Sigma_\mu$ на параметрической плоскости $\mathbb{P}^2$ соответствуют прямые, которые проходят через λ. На множестве прямых на проективной плоскости $\mathbb{P}^2$, которые проходят через фиксированную точку, естественно вводится структура проективной прямой. Исследуем прямые $\Sigma_\lambda \cap \Sigma_\mu$ при фиксированном λ более конкретно. Пусть для определенности $\lambda_0 \neq 0$ (это фактически не ограничивает общности,так как λ_0 можно заменить другим λ_j). В качестве однородных координат на Σ_λ возьмем набор (x_2, x_3, x_4, x_5). В этих координатах прямые $\Sigma_\lambda \cap \Sigma_\mu$ задаются системой:

$$\begin{gathered} \bar{x}_0 x_2 + \bar{x}_1 x_4 = 0, \quad \bar{x}_0 x_3 + \bar{x}_1 x_5 = 0, \\ \bar{x}_0 = \mu_0 \lambda_1 - \lambda_0 \mu_1, \quad \bar{x}_2 = \mu_0 \lambda_2 - \lambda_0 \mu_2. \end{gathered} \tag{47}$$

Если λ, μ не пропорциональны, то $\bar{x} = (\bar{x}_0, \bar{x}_1) \neq (0, 0)$. Таким образом, $\Sigma_\lambda \cap \Sigma_\mu$ зависит лишь от прямой $\{\lambda, \mu\}$. Из системы (47) видно, что прямые $\Sigma_\lambda \cap \Sigma_\mu$ при фиксированном λ являются семейством образующих некоторого однополостного гиперболоида H_λ в трехмерной плоскости Σ_λ. Следовательно, мы получили семейство сцепленных гиперболоидов H_λ, зависящих от двух параметров $\lambda \in \mathbb{P}^2$. Это сцепление является вырожденным, поскольку через образующую $\Sigma_\lambda \cap \Sigma_\mu$ проходят все гиперболоиды H_ν, где ν принадлежит прямой $\{\lambda, \mu\}$.

Осталось доказать, что всякая трехмерная плоскость, пересекающая два различных гиперболоида H_λ, H_μ по образующим из отмеченных семейств, является одной из плоскостей семейства Σ_λ. Дело в том, что все плоскости семейства пересекают все гиперболоиды H_λ по образующим из отмеченных семейств, в том числе и четверку исходных. Пусть теперь трехмерная плоскость порождается различными прямыми $\Sigma_\lambda \cap \Sigma_{\lambda'}$ и $\Sigma_\mu \cap \Sigma_{\mu'}$, и ν — точка на параметрической плоскости $\mathbb{P}^2$, являющаяся пересечением прямых $\{\lambda, \lambda'\}$ и $\{\mu, \mu'\}$ (они не могут совпадать). Тогда Σ_ν содержит $\Sigma_\lambda \cap \Sigma_{\lambda'}$, $\Sigma_\mu \cap \Sigma_{\mu'}$, а потому совпадает с рассмотренной плоскостью. (Фактически мы доказали разрешимость некоторой системы линейных уравнений на ν, которую можно было бы рассмотреть непосредственно.) Итак, доказательство теоремы о сцеплении гиперболоидов завершено.

КОМПЛЕКСНЫЙ МИР РОДЖЕРА ПЕНРОУЗА

Нельзя придумать ничего столь странного и невероятного, что не было бы уже высказано кем-либо из философов.

Р. Декарт

На математическом конгрессе, который проходил в Хельсинки летом 1978 г., Роджер Пенроуз сделал пленарный доклад «Комплексная геометрия реального мира». Основная идея Пенроуза заключалась в том, что точки четырехмерного пространства-времени Минковского или Евклида (в евклидовой теории поля) естественно интерпретировать как комплексные прямые в трехмерном комплексном пространстве. Эта идея разрабатывалась Пенроузом в течение ряда лет в рамках его «твисторной программы» (твисторами он называет точки вспомогательного трехмерного комплексного пространства). Незадолго перед конгрессом появились первые результаты, которые уже нельзя было рассматривать как чисто интерпретационные (инстантонные решения уравнения Янга–Миллса и комплексные автодуальные решения уравнения Эйнштейна).

Что касается подхода Пенроуза, то он по существу не был новым: комплексная реализация пространства Минковского содержалась в теории однородных многообразий, восходящей к Эли Картану (1869 – 1951). Однако существенно не само по себе геометрическое наблюдение, а идея сделать его систематическим источником аналитических конструкций, а именно интегральных представлений для решений некоторых важных линейных и нелинейных уравнений математической физики. По счастливой случайности именно в это время в математике (алгебраической геометрии и теории функций многих комплексных переменных) появился весьма неэлементарный аппарат, необходимый для реализации этих планов (расслоения над проективным пространством, когомологии Коши–Римана...).

Возвращаясь к геометрической идее Пенроуза, вероятно, нельзя не удивиться тому, что при изучении совершенно вещественного объекта — пространства-времени — появляются комплексные образования. Впрочем, геометрам второй половины XIX века такая возможность не показалась бы удивительной. Конструкция Пенроуза связана с математическими идеями, которым более ста лет и которые в последние десятилетия незаслуженно (быть может, из-за большой конкретности) стали забывать. Речь идет об идее Юлиуса Плюккера (1801–1868) рассматривать пространство, элементами (точками!) которого являются прямые из обычного трехмерного пространства. Эта идея разрабатывалась Плюккером на протяжении многих лет и в окончательном виде содержалась в посмертно изданном в 1868–1869 гг. Ф. Клейном и Р. Клебшем мемуаре «Новая геометрия пространства, основанная на рассмотрении прямой линии в качестве пространственного элемента». Размерность пространства прямых равна четырем, и это, вероятно, первое четырехмерное пространство, появившееся в науке. Кажется удивительным, что в период появления четырехмерия в теории относительности и всеобщего увлечения четырехмерными образованиями никто не сопоставил четырехмерие Минковского с появившимся на 50 лет раньше четырехмерием Плюккера. В некотором смысле это и сделал Пенроуз (еще через 50 лет). Попытаемся и мы проследить возможный путь от Юлиуса Плюккера к Герману Минковскому (1864–1909), но для этого припомним еще более ранние события.

«Золотой век геометрии». Так Н. Бурбаки назвал XIX век — век развития проективной геометрии с ее фантастическим полетом геометрической интуиции и мощными аналитическими методами. Ведущее место проективной геометрии в геометрии XIX века было бесспорным. Характерно, что признание неевклидовой геометрии многими математиками было связано с реализацией ее

как части проективной геометрии (интерпретация Клейна). Но зародилась проективная геометрия (ее называли еще новой геометрией) гораздо раньше. Лионский архитектор Жерар Дезарг (1593 – 1662) опубликовал в 1639 г. брошюру «Черновой набросок исследования того, что происходит при встрече конуса с плоскостью». Дезарг строил теорию перспективы и изучал центральную проекцию одной плоскости на другую. Заметив, что при этом на первой плоскости есть точки, которые никуда не проектируются, а на второй — точки, в которые не проектируются никакие точки, он решил исправить это, введя идеальные бесконечно удаленные точки на плоскости. В модернизированном виде его идея состоит в том, что все параллельные между собой прямые «пересекаются» в одной общей бесконечно удаленной точке, а все бесконечно удаленные точки на плоскости образуют одну бесконечно удаленную прямую, которой следует дополнить плоскость. На расширенной (проективной) плоскости все утверждения о параллельности превращаются в частные случаи обычных утверждений о пересечении прямых, к тому же не имеющие ограничений (любые две различные прямые пересекаются в единственной точке, быть может, бесконечно удаленной). Идеи проективной геометрии воспринимались с большим трудом, и к тому же Дезарг не смог придать им удобную для понимания форму. Среди участников кружка Марена Мерсенна (1588 – 1648) — предвестника Парижской Академии наук — он нашел лишь одного последователя. Это был 16-летний Блез Паскаль (1623 – 1662), доказавший знаменитую теорему о шестиугольнике, вписанном в коническое сечение. Техника проективной геометрии позволила Паскалю свести общий случай к случаю окружности, так как по определению любое коническое сечение получается из окружности в результате центрального проектирования. Вообще, основные планы Дезарга и Паскаля состояли в том, чтобы с помощью проективной геометрии пролить свет на теорию конических сечений Аполлония — вершину греческой геометрии. Уже давно новая европейская математика, имевшая огромные успехи в алгебре и анализе, стремилась сразиться с великими греками на их собственной территории — геометрии. Казалось, что Дезарг и

Паскаль достигли успеха, но сочинений Дезарга никто не мог понять, а Паскаль так и не закончил своего всеобъемлющего сочинения по проективной геометрии, оставив потомкам лишь маленькую афишу со своей теоремой о шестиугольнике. Об их работах забыли на 200 лет, а когда благодаря Мишелю Шалю (1793 – 1880) вспомнили, большинство результатов было открыто заново.

Новая жизнь проективной геометрии началась в работах Гаспара Монжа (1746 – 1818) и его учеников, среди которых был Виктор Понселе (1788 – 1867). В работах Понселе, по словам Феликса Клейна (1849 – 1925), появляется новый вид геометрического мышления — проективное мышление. Находясь в плену в Саратове после похода Наполеона 1812 г., Понселе предавался буйной геометрической фантазии, делясь своими открытиями с товарищами по Политехнической школе, учениками Монжа. Свои результаты он собрал в «Трактат о проективных свойствах фигур», вышедший лишь через десять лет. К систематическим занятиям геометрией он больше не вернулся: отвлекали государственные и военные дела, преподавание, занятия фортификацией, теорией машин («водяное колесо Понселе»). К концу жизни он снова занялся геометрией, но в основном огорчался, что не смог регулярно уделять внимание математике, что другие разрабатывают проективную геометрию не так, как по его мнению следовало бы, и что Шаль некстати вспомнил о Дезарге.

Понселе исходит из того, что так как на проективной плоскости не бывает исключений во взаимном положении прямых, то не должно быть исключений и во взаимном положении кривых второго порядка. Но почему же тогда эллипсы обычно пересекаются в четырех точках, а их частный случай — окружности — только в двух? И Понселе находит ответ: все окружности проходят через две фиксированные точки (их называют циклическими). Однако мы не замечаем этих точек, поскольку они, с одной стороны, являются бесконечно удаленными, а с другой — мнимыми. Так в вещественной геометрии впервые появились комплексные числа (к которым и в алгебре только начинали привыкать!). Циклические точки стали одним из основных объектов геометрии: с их помощью можно объяснить все вещественные метрические соотношения на плоскости.

Другое поразительное открытие Понселе, честь которого он делит с Жозефом Жергонном (1771 – 1859), — это закон двойственности — новый способ получения геометрических утверждений. Грубо говоря, он состоит в том, что в теореме о взаимном положении точек и прямых на проективной плоскости можно всюду поменять местами слова «прямая» и «точка» и несколько отредактировать текст (заменить «пересекается» на «проходит» и т. д.), чтобы сделать его осмысленным, после чего получается новая теорема. Например, утверждение «Две различные прямые имеют единственную общую точку» (пересекаются) переходит в новое утверждение «Через две различные точки проходит единственная прямая».

Отныне проективизм становится господствующим методом в геометрии. Впрочем, долгое время проективные идеи воспринимались как некоторое устройство («черный ящик») для получения евклидовых теорем. Бесконечно удаленные элементы воспринимались как идеальные чужеродные элементы, упрощающие рассмотрения (так сначала воспринимались и комплексные числа). Однако последовательный проективизм требует рассматривать бесконечно удаленные точки как неотличимые от конечных и при этом не интересуется, например, поведением кривых на бесконечности (асимптотами и т. д.). Дискуссии об идеях проективной геометрии надолго заняли умы геометров. Это становится особенно заметным, если обратиться к немецкой геометрии середины XIX века, когда творили такие замечательные геометры, как Фердинанд Мёбиус (1790 – 1868), Юлиус Плюккер, Якоб Штейнер (1796 – 1863), Кристиан фон Штаудт (1798 – 1867). Их деятельность проходила в обстановке ожесточенной борьбы между «аналитиками» и «синтетиками», разногласия между которыми могут показаться сегодня не более аргументированными, чем противоречия между остроконечниками и тупоконечниками у Свифта. Аналитики пользовались преимущественно координатным представлением геометрических образов, открывавшим возможность для использования методов алгебры и анализа. Синтетики считали, что эти методы лишают геометрию ее истинного духа, подлинной геометрической интуиции.

Среди синтетиков наиболее активен был Штейнер, крестьянский сын, который до 19 лет ходил за плугом, затем был учеником и сподвижником знаменитого педагога Иоганна Песталоцци (1746 – 1827), и лишь в зрелом возрасте обратился к математике. Штейнер обладал удивительной геометрической интуицией, полет его пространственного воображения нельзя было передать даже чертежами, и он отказывался от них на лекциях, которые читались в затемненных аудиториях, чтобы помочь слушателям сосредоточиться. Решительный протест вызывали у Штейнера комплексные числа, эти «призраки», «царство теней в геометрии», которыми так много пользовались аналитики. По мнению Клейна, возможно, нетерпимость Штейнера была причиной того, что Плюккер (типичный аналитик) прекратил надолго занятия геометрией и возобновил их лишь после смерти Штейнера.

Проективные координаты. Аналитики ставили перед собой задачу такого введения координат на проективной плоскости, при котором можно было охватить не только конечные, но и бесконечно удаленные точки. Здесь решающая конструкция (однородные координаты) принадлежит Юлиусу Плюккеру. Он предложил характеризовать точки проективной плоскости не двумя, а тремя числами $(x_0, x_1, x_2) \neq (0, 0, 0)$, но считать, что отличающиеся общим множителем тройки (x_0, x_1, x_2) и $(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2)$ соответствуют одной и той же точке плоскости. Тогда можно считать, например, точки с $x_0 \neq 0$ «конечными» и для них всегда брать тройки с $x_0 = 1$, т. е. $(1, X_1, X_2)$, где $X_1 = x_1/x_0, X_2 = x_2/x_0$ — неоднородные (декартовы) координаты. Точки с $x_0 = 0$ составляют бесконечно удаленную прямую. Впрочем, эту прямую можно фиксировать произвольно. Проективные преобразования плоскости, при которых прямые переходят в прямые, соответствуют линейным преобразованиям однородных координат. Прямые на проективной плоскости задаются уравнениями $\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 = 0$, где $(\xi_0, \xi_1, \xi_2) \neq (0, 0, 0)$ определяется с точностью до скалярного множителя. Это навело Плюккера на мысль считать (ξ_0, ξ_1, ξ_2)

однородными координатами прямых, и тогда получается, что прямые образуют другой (двойственный) экземпляр проективной плоскости. Такая интерпретация делает предельно прозрачным принцип двойственности Понселе–Жергонна.

С помощью однородных координат легко понять и теорему Понселе о пересечении окружностей, которая в синтетическом варианте требует высокой геометрической интуиции. В неоднородных координатах уравнения окружностей имеют вид $X_1^2 + X_2^2 + aX_1 + bX_2 + c = 0$, или в однородных координатах

$$x_1^2 + x_2^2 + ax_1x_0 + bx_2x_0 + cx_0^2 = 0.$$

Ясно, что на всех этих кривых лежит пара точек $(0, 1, i)$, $(0, 1, -i)$, т. е. это в самом деле мнимые бесконечно удаленные точки ($\{x_0 = 0\}$ — бесконечно удаленная прямая).

В трехмерном проективном пространстве точки характеризуются четырьмя числами $(x_0, x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0, 0)$, заданными с точностью до пропорциональности. Можно считать, что $\{x_0 = 0\}$ — бесконечно удаленная плоскость. Плоскости задаются уравнениями $x_0\xi_0 + \ldots + x_3\xi_3 = 0$, т. е. имеется двойственность между проективным пространством точек и проективным пространством плоскостей.

Многообразие прямых (плюккеровы координаты). Следующий естественный вопрос, который заинтересовал Плюккера, — это конструкция совокупности прямых в проективном пространстве $\mathbb{P}^3$. Оказалось, что в отличие от ситуации с плоскостями (и с прямыми на плоскости) мы приходим здесь к совершенно новому геометрическому образованию. Множество прямых в $\mathbb{P}^3$ зависит от четырех параметров. В декартовых координатах X_1, X_2, X_3 почти все прямые можно записать в виде $X_1 = \alpha_1X_3 + \beta_1$, $X_2 = \alpha_2X_3 + \beta_2$. Этой параметризацией не охвачены прямые, параллельны плоскости X_1OX_2, а есть еще и бесконечно удаленные прямые.

Плюккер предлагает ввести координаты на всей совокупности прямых. Он рассуждает следующим образом. Прямая определяется парой своих различных точек, т. е. $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$,

$\tilde{x} = (\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ (однородные координаты в $\mathbb{P}^3$), где x и $\tilde{x}$ не пропорциональны. Однако эти пары можно выбирать разными способами. Чтобы избавиться от этой неопределенности, следует рассмотреть выражения

$$p_{ij} = x_i \tilde{x}_j - x_j \tilde{x}_i, \tag{48}$$

уже не зависящие (с точностью до пропорциональности) от выбора точек. При этом $p_{ii} = 0$, $p_{ij} = -p_{ji}$. Назовем набор шести чисел $p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}, p_{23}$ *плюккеровыми координатами прямой.* Поскольку точки задавались однородными координатами, наборы $\{p_{ij}\}$ и $\{\lambda p_{ij}\}$ соответствуют одной и той же прямой. Если все p_{ij} равны нулю, то x и $\tilde{x}$ пропорциональны, что мы исключили. В результате естественно рассматривать ненулевой набор из шести чисел $\{p_{ij}\}$ с точностью до пропорциональности в качестве однородных координат точки в пятимерном проективном пространстве $\mathbb{P}^5$.

Итак, множество прямых оказалось естественно вложенным в $\mathbb{P}^5$. Поскольку оно зависит от четырех параметров, числа p_{ij} должны удовлетворять еще одному соотношению. И действительно, можно проверить, что всегда выполнено тождество

$$p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0. \tag{49}$$

Нетрудно также убедиться, что других соотношений нет, а именно: по любому ненулевому набору чисел $\{p_{ij}\}$, удовлетворяющих соотношению (49), можно найти x, $\tilde{x}$, удовлетворяющие условию (48).

С геометрической точки зрения уравнение (49) задает в $\mathbb{P}^5$ поверхность второго порядка. Если перейти к координатам

$$\begin{aligned} p_{01} &= u_0 - u_3, & p_{23} &= u_0 + u_3, & p_{02} &= u_4 - u_1, \\ p_{13} &= u_4 + u_1, & p_{03} &= u_2 - u_5, & p_{12} &= u_2 + u_5, \end{aligned}$$

то уравнение (49) запишется в виде

$$u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 - u_5^2 = 0. \tag{50}$$

Таким образом, множество прямых в трехмерном проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ вкладывается, как поверхность второго порядка («квадрика») (50) (или (49)), в пятимерное проективное пространство $\mathbb{P}^5$. Это открытие Плюккера сыграло принципиальную роль в формировании современных математических идей; оно устанавливало изоморфизм двух совершенно различных геометрических структур: многообразия прямых в $\mathbb{P}^3$ и квадрики в $\mathbb{P}^5$. После этого лучшие геометры Софус Ли (1842 – 1899), Феликс Клейн, Эли Картан с любовью коллекционировали подобные изоморфизмы. Но потом интересы сместились в сторону общего взгляда на многообразия, когда работают лишь с координатами, не интересуясь геометрической природой точек.

Последователей Плюккера интересовал в первую очередь следующий вопрос: если рассматривать уравнение квадрики в $\mathbb{P}^5$ не с тремя плюсами и тремя минусами (сигнатура $(3, 3)$), как в (50), а с сигнатурой $(4, 2)$ или $(5, 1)$, то будут ли допускать эти квадрики аналогичную геометрическую интерпретацию? Софус Ли обнаружил, что на множестве сфер в трехмерном пространстве можно таким естественным образом ввести однородные координаты, что в $\mathbb{P}^5$ получится квадрика сигнатуры $(4, 2)$ (геометрия сфер Ли). Феликс Клейн ввел в четырехмерном пространстве некоторые довольно изысканные координаты, которые он назвал «гексосферическими», и эти координаты заполнили в $\mathbb{P}^5$ квадрику сигнатуры $(5, 1)$.

Нас также будет интересовать эта задача, но мы рассмотрим другой путь ее решения. Дело в том, что при переходе к комплексному пространству исчезает различие между квадриками с различными сигнатурами, так как, умножая на i, всегда можно перейти к координатам, в которых уравнение имеет вид $z_0^2 + \ldots + z_5^2 = 0$ (все вещественные квадрики являются вещественными формами одной комплексной). Привычная логика проективной геометрии заключается в том, что если мы хотим перейти от одной вещественной формы к другой, то нужно «окомплексить» задачу и осуществить переход в комплексном пространстве.

Комплексная картина. Пусть $\mathbb{CP}^3$ — комплексное проективное пространство, $z = (z_0, z_1, z_2, z_3)$ — комплексные однородные координаты; через точки $z, \tilde{z}$ проходит комплексная прямая, состоящая из точек вида $\lambda z + \mu \tilde{z}$. В множестве комплексных прямых вводятся комплексные плюккеровы координаты p_{ij}, удовлетворяющие уравнению (49), которое приводится к виду (50), где u_j комплексны.

На комплексной квадрике $Q \subset \mathbb{CP}^5$, задаваемой уравнением (50), рассмотрим вещественные подповерхности. Если считать все u_j вещественными, то будем иметь случай, рассмотренный выше. Однако u_0, u_1, u_2, u_5 можно считать вещественными, а $u_3 = iv_3$, $u_4 = iv_4$ — чисто мнимыми, или только $u_3 = iv_3$ чисто мнимым, а остальные координаты вещественными. Тогда получим вещественные поверхности (u и v вещественны!):

$$u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + v_3^2 + v_4^2 - u_5^2 = 0, \tag{S}$$

$$u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + v_3^2 - u_4^2 - u_5^2 = 0. \tag{H}$$

Это соответственно сфера и однополостный гиперболоид (в однородных координатах). Поскольку эти вещественные поверхности лежат на комплексной квадрике Q, а точкам Q соответствуют комплексные прямые, то естественно попытаться выяснить, какие комплексные прямые соответствуют точкам поверхностей (S) и (H).

Интерпретация вещественных квадрик на языке комплексных прямых (случай сферы). В случае (S) имеем:

$$p_{01} = u_0 - iv_3, \qquad p_{23} = u_0 + iv_3, \qquad p_{02} = iv_4 - u_1,$$
$$p_{13} = iv_4 + u_1, \qquad p_{03} = u_2 - u_5, \qquad p_{12} = u_2 + u_5.$$

Таким образом, точкам (S) соответствуют плюккеровы координаты, удовлетворяющие условиям:

$$p_{23} = \bar{p}_{01}, \quad p_{13} = -\bar{p}_{02}, \quad \operatorname{Im} p_{03} = \operatorname{Im} p_{12} = 0. \tag{51}$$

Этими условиями точки (S) полностью характеризуются. Тогда, если прямая с такими плюккеровыми координатами проходит через $z = (z_0, z_1, z_2, z_3)$, то можно считать, что второй точкой будет $\tilde{z} = (-\bar{z}_3, \bar{z}_2, -\bar{z}_1, \bar{z}_0)$. Итак, точкам вещественной квадрики (S) соответствуют комплексные прямые в $\mathbb{CP}^3$, проходящие через точки (z_0, z_1, z_2, z_3) и $(-\bar{z}_3, \bar{z}_2, -\bar{z}_1, \bar{z}_0)$.

Чем примечательны эти прямые? Через каждую точку $z \in \in \mathbb{CP}^3$ проходит прямая такого вида, причем единственная. В результате все пространство $\mathbb{CP}^3$ разбивается в объединение непересекающихся прямых. Это разбиение (расслоение) играет важную роль в математике, и появилось оно не слишком давно, вне связи с рассмотрениями Плюккера. Если пересечь полученное расслоение $\mathbb{CP}^3$ с вещественным проективным пространством $\mathbb{P}^3$, то получится расслоение $\mathbb{P}^3$ на прямые, соединяющие (x_0, x_1, x_2, x_3) и $(-x_3, x_2, -x_1, x_0)$. На простом языке мы получаем разбиение обычного трехмерного пространства на попарно скрещивающиеся прямые (в таком виде задача была предложена на Московской математической олимпиаде в 1979 г.). Реализация (S) в качестве расслоения $\mathbb{CP}^3$ — это первая из основных конструкций теории твисторов.

Реализация гиперболоида как семейства прямых. В случае (H) имеем:

$$p_{23} = \bar{p}_{01}, \quad \operatorname{Im} p_{13} = \operatorname{Im} p_{02} = \operatorname{Im} p_{03} = \operatorname{Im} p_{12} = 0. \tag{52}$$

Пусть сначала для простоты $p_{03} \neq 0$. Ввиду однородности координат можно считать $p_{03} = 1$ и выбирать точки на соответствующей прямой с координатами $z_0 = \tilde{z}_3 = 1$, $z_3 = \tilde{z}_0 = 0$. После этого они находятся однозначно. Из условия (52) следует, что $z = (1, a, c, 0)$, $\tilde{z} = (0, c, b, 1)$, где a и b вещественны. Чем же примечательны прямые, проходящие через данные пары точек? Непосредственно проверяется, что все точки, лежащие на этих прямых (т. е. точки вида $w = \lambda z + \mu \tilde{z}$, λ, μ комплексные), должны удовлетворять условию

$$\operatorname{Im}(w_1 \bar{w}_0 + w_2 \bar{w}_3) = 0. \tag{53}$$

Если снять ограничение $p_{03} \neq 0$, то окажется, что других прямых, все точки которых удовлетворяют условию (53), нет. Следовательно, условие (53) задает в $\mathbb{CP}^5$ поверхность N вещественной размерности 5 так, что все комплексные прямые, лежащие на N, — это прямые, плюккеровы координаты которых удовлетворяют условию (52), а, стало быть, это прямые, соответствующие точкам вещественной поверхности (H). Заметим, что поверхность N полностью содержит вещественное проективное пространство $\mathbb{P}^3$ и что, вообще говоря, семейство комплексных прямых, зависящее от четырех вещественных параметров, как следует из подсчета размерностей, заполняет область в $\mathbb{CP}^3$. Поэтому можно ожидать, что поверхность N обладает уникальными свойствами. Действительно, это единственная, с точностью до проективных преобразований, поверхность, на которой умещается четырехпараметрическое семейство комплексных прямых. Этот результат имеет вещественный аналог. Имеется много линейчатых поверхностей в трехмерном пространстве, на которых лежит однопараметрическое семейство прямых, но лишь на однополостном гиперболоиде лежат два различных семейства (этим свойством из неплоских поверхностей обладает еще гиперболический параболоид $X_3 = X_1^2 - X_2^2$, но с проективной точки зрения он эквивалентен однополостному гиперболоиду).

Подведем некоторые итоги. Мы начинали с квадрики вещественных прямых в $\mathbb{P}^3$, затем перешли к квадрике комплексных прямых в $\mathbb{CP}^3$. Среди вещественных поверхностей второго порядка, лежащих на этой комплексной поверхности, имеются как поверхность вещественных прямых, так и два других типа поверхностей: одни поверхности соответствуют расслоениям комплексного проективного пространства $\mathbb{CP}^3$ на комплексные прямые, а — другие пятимерным вещественным поверхностям в $\mathbb{CP}^3$, на которых имеется семейство комплексных прямых, зависящее от четырех вещественных параметров. На этом примере отчетливо виден феномен, который «выстрадали» геометры XIX века. Во-первых, вещественные объекты часто допускают интерпретацию на комплексном языке. Во-вторых, если мы делаем вещественную задачу комплексной, а затем, обратно, смотрим, какие вещественные задачи приводят к той же комплексной, то часто получаем новые содержательные геометрические задачи.

Метрика в многообразии прямых. Плюккер и его последователи занимались также изучением геометрии многообразия прямых $Q \subset \mathbb{CP}^5$. Они исследовали, как преломляются на языке Q различные геометрические факты об исходном проективном пространстве $\mathbb{CP}^3$. Точкам в $\mathbb{CP}^3$ соответствуют на Q двумерные поверхности прямых, проходящих через эти точки, плоскостям — двумерные поверхности прямых, лежащих в этих плоскостях (два семейства плоских образующих квадрики Q). Результативным был и обратный путь, когда в $\mathbb{CP}^3$ рассматривались семейства прямых, плюккеровы координаты которых удовлетворяли одному соотношению (комплексы) или двум (конгруэнции). В качестве примера рассмотрим такой факт.

Прямые в трехмерном пространстве иногда пересекаются. Как выражается это в плюккеровых координатах? Оказывается, что если $\{p_{ij}\}$ и $\{p'_{ij}\}$ — плюккеровы координаты двух прямых, то они пересекаются тогда и только тогда, когда

$$p_{01}p'_{23} - p_{02}p'_{13} + p_{03}p'_{12} + p_{23}p'_{01} - p_{13}p'_{02} + p_{12}p'_{03} = 0. \qquad (54)$$

Мы выведем тождество (54) при упрощающем предположении (которое уже однажды делалось), что $p_{03} \neq 0$, $p'_{03} \neq 0$. Тогда $p_{03} = p'_{03} = 1$, и прямые проходят соответственно через точки $(1, \alpha_1, \alpha_2, 0), (0, \beta_1, \beta_2, 1)$ и $(1, \alpha'_1, \alpha'_2, 0), (0, \beta'_1, \beta'_2, 1)$ (по существу мы перешли от однородных координат к неоднородным). В этом случае точки прямой p задаются уравнениями

$$z_1 = \alpha_1 z_0 + \beta_1 z_3, \quad z_2 = \alpha_2 z_0 + \beta_2 z_3,$$

и аналогично для p':

$$z_1 = \alpha'_1 z_0 + \beta'_1 z_3, \quad z_2 = \alpha'_2 z_0 + \beta'_2 z_3.$$

Прямые пересекаются, если имеется общее решение (z_0, z_1, z_2, z_3) этой системы четырех уравнений или системы двух уравнений с двумя неизвестными (z_0, z_3):

$$\begin{cases} z_0(\alpha_1 - \alpha'_1) + z_3(\alpha_2 - \alpha'_2) = 0, \\ z_0(\beta_1 - \beta'_1) + z_3(\beta_2 - \beta'_2) = 0. \end{cases} \qquad (55)$$

Таким образом, прямые пересекаются тогда и только тогда, когда равно нулю выражение

$$\rho(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = (\alpha_1 - \alpha_1')(\beta_2 - \beta_2') - (\alpha_2 - \alpha_2')(\beta_1 - \beta_1'). \tag{56}$$

Современный математик назвал бы выражение (56) «расстоянием». Правда, это выражение может быть равно нулю при $p \neq p'$, и вообще комплексно. Но это не смущало даже геометров XIX века. Клейн вспоминает, как любили они пользоваться прямыми, расстояние вдоль которых равно нулю (изотропные прямые). Ли называл эти прямые «сумасшедшими» и говорил, что французские геометры умеют с их помощью получать доказательства «по воздуху». Назовем и мы величину ρ расстоянием между прямыми $p = (\alpha, \beta)$ и $p' = (\alpha', \beta')$.

Итак, расстояние ρ равно нулю тогда и только тогда, когда прямые пересекаются. Этим условием расстояние определяется почти однозначно. Более строго, расстояние определяется с точностью до конформной замены (гомотетии). Это означает, что однозначно определяются углы и отношения расстояний в окрестности любой фиксированной точки с точностью до величин, малых относительно расстояний до этой точки.

Свяжем с каждой точкой $p \in Q$ множество точек $V_p \subset Q$, находящихся от p на нулевом расстоянии ($\rho(p, p') = 0$, прямые p, p' пересекаются). Множество V_p называется конусом изотропии; оно совпадает с пересечением квадрики Q и касательной плоскости к Q в точке p.

Расстояние на поверхностях (S), (H). Найдем след расстояния ρ на поверхности (S). Мы опять ограничимся точками, у которых $p_{03} \neq 1$. Тогда из условия (51) следует, что $\beta_1 = \bar{\alpha}_2$, $\beta_2 = -\alpha_1$, и в качестве координат на (S) можно брать только пару комплексных чисел (α_1, α_2). Следовательно,

$$\rho_{(S)}(\alpha; \alpha') = |\alpha_1 - \alpha_1'|^2 + |\alpha_2 - \alpha_2'|^2. \tag{57}$$

Это расстояние уже лишено всех недостатков расстояния ρ в общем случае: оно неотрицательно и обращается в нуль только при

$\alpha = \alpha'$. Полученный факт согласуется с тем, что прямые, которые соответствуют точкам (S), не пересекаются. Мы получили обычное евклидово расстояние на четырехмерной вещественной сфере в пятимерном евклидовом пространстве.

Теперь ограничим ρ на гиперболоид (H) и вновь возьмем точки $p_{03} = 1$. Пусть $M \subset$ (H) — множество таких точек на (H). Тогда, в силу условий (52), α_1, β_2 вещественны, а $\beta_1 = \bar{\alpha}_2$. Сделаем замену: $\alpha_1 = t - x_1$, $\beta_2 = t + x_1$, $\beta_1 = x_2 + ix_3$, где все (t, x) вещественны. В результате выражение (56) примет вид

$$\rho_{(H)}(t, x; t', x') = (t - t')^2 - (x_1 - x_1')^2 - (x_2 - x_2')^2 - (x_3 - x_3')^2. \quad (58)$$

Это в точности метрика Минковского (она вещественна, но не положительно определена). Если пересечь конус V_p при $p \in M$ с поверхностью M, то получится световой конус с вершиной p. Итак, естественно возникающее из геометрии прямых расстояние на квадрике Q индуцирует на сфере (S) евклидово расстояние, а на гиперболоиде (H) расстояние Минковского.

Точкам $M \subset$ (H) соответствуют те прямые на поверхности N, которые не пересекают прямую $z_0 = z_3 = 0$. Многообразие (H) играет важную роль в физических теориях — это конформное расширение пространства Минковского M. Оно получается из M приклеиванием на «бесконечности» светового конуса (подобно тому, как у евклидова пространства имеется расширение с помощью одной бесконечно удаленной точки, а не целой бесконечно удаленной плоскости, как в случае проективного расширения). Если рассматривать проективные преобразования пространства $\mathbb{CP}^3$, сохраняющие поверхность N, то они будут переводить прямые на N в прямые на N, пересекающиеся прямые — в пересекающиеся прямые. Тем самым на (H) будут индуцироваться преобразования, переводящие друг в друга световые конусы V_p. Таким образом получаются все конформные преобразования пространства Минковского (движения, гомотетии, инверсии), относительно которых нередко инвариантны физические теории (безмассовые). Чтобы получить группу собственно движений (группу Пуанкаре), надо ограничиться преобразованиями, которые сохраняют также и прямую $z_0 = z_3 = 0$. Итак, геометрия пространства Минковского в полной мере возникает в рамках геометрии Плюккера пространства прямых.

Имеется ли естественный путь в обратном направлении? Как, исследуя пространство Минковского, обнаружить то вспомогательное трехмерное пространство (пространство твисторов по Пенроузу), прямые в котором соответствуют точкам пространства Минковского? Это можно сделать с помощью световых конусов V_p. Напомним, что точкам V_p соответствуют прямые, пересекающие прямую p. Все прямые, соответствующие точкам, лежащим на одной образующей V_p (световой прямой), пересекают прямую p в одной и той же точке. В результате возникает соответствие между точками поверхности N и световыми прямыми; N можно рассматривать как множество световых прямых на (H). Если перейти к комплексной картине, то точки $\mathbb{CP}^3$ отождествляются с комплексными «световыми» прямыми на Q (половиной двумерных образующих конусов V_p).

Замечание об аналитических приложениях. Поучительность изложенной геометрической картины не вызывает сомнений. Но, как уже отмечалось, в рамках теории Пенроуза она лишь повод для новых аналитических построений. К сожалению, мы имеем возможность лишь очень поверхностно остановиться на них. Идея Пенроуза заключается в том что аналитическим объектам на четырехмерном многообразии M (в евклидовой теории на (S)) должны соответствовать в некотором смысле эквивалентные объекты на N или $\mathbb{CP}^3$. Эти объекты должны быть проще, чем их двойники на M и (S), и значительная часть уравнений математической физики на M и (S) является просто следствием того, что объекты, первоначально заданные на трехмерном многообразии, каким-то путем переносятся на четырехмерное многообразие. Следует отметить, что многие дифференциальные уравнения возникают как соотношения при переходе (интегральном преобразовании) на многообразия большего числа измерений. Это важный и пока недостаточно изученный источник получения и решения уравнений. В простейшем примере, который принадлежит Фрицу Йону, при интегрировании функции в трехмерном пространстве (вещественном) по прямым получаем на четырехмерном пространстве прямых решения некоторого (ультрагиперболического) дифференциального уравнения второго порядка. Пенроуз и его последователи сталкиваются с аналогичными эффектами в более сложной комплексной ситуации. Поэтому приходится иметь дело не с функциями, а со значительно более сложным объектом — когомологиями. Оказалось, что при переходе от M и (S) к $\mathbb{CP}^3$ действительно получаются более простые и классические уравнения: какой-то вариант уравнений Коши–Римана из теории аналитических функций. При этом удалось рассмотреть не только линейные уравнения математической физики (Дирака–Вейля, Максвелла, линеаризованное уравнение Эйнштейна), но и некоторые нелинейные (Янга–Миллса).

Автодуальные метрики. В заключение остановимся еще на одном направлении в исследованиях Пенроуза. Пока мы имели дело с плоским пространством-временем Минковского. В общей теории относительности интересуются искривленными четырехмерными многообразиями, которые должны удовлетворять сильным нелинейным ограничениям (например, вакуумному уравнению Эйнштейна). Построение решений уравнений Эйнштейна — трудная задача. Пенроуз, исходя из реализации пространства Минковского как семейства прямых в $\mathbb{CP}^3$, ищет многообразия, которые удовлетворяли бы уравнению Эйнштейна, как семейства кривых на каких-то трехмерных многообразиях. Метрика при этом должна получаться из условия пересечения кривых (пересекающиеся кривые находятся на нулевом расстоянии). Он с самого начала ограничивается комплексной ситуацией. Для этого в неплоском случае имеются дополнительные причины: на многообразии кривых не бывает неплоской метрики Эйнштейна сигнатуры $(3, 1)$, как у метрики Минковского, но бывает риманова сигнатуры $(4, 0)$.

Переход к комплексным рассмотрениям замечательным образом упрощает ситуацию, делает ее более геометричной. Ряд инвариантов кривизны многообразия, которые в вещественном случае вводятся аналитически, в комплексном случае приобретает ясный геометрический смысл (тензоры Риччи и Вейля). Пенроуз показывает, что некоторый класс комплексных решений уравнения Эйнштейна (автодуальных) получается, если определенным образом возмутить комплексную структуру в окрестности одной прямой в $\mathbb{CP}^3$ и рассмотреть некоторое семейство кривых, «близких» к прямым. К сожалению, этот путь содержит чрезвычайно неэффективный момент при нахождении семейства кривых. Однако в некоторых случаях вычисления удалось довести до явного выражения для метрики.

Позднее появились некоторые другие геометрические идеи, как строить явные решения нелинейных уравнений, включая уравнение Эйнштейна, пользуясь языком твисторов. Одна из них состоит в том, что в восьмипараметрическом семействе кривых второго порядка в $\mathbb{CP}^3$ описываются такие четырехпараметрические подсемейства, что условия пересечения индуцируют на них метрики Эйнштейна. Таким образом получаются некоторые известные решения, а также много новых. Эта идея — вполне в русле идеологии Плюккера: условие пересечения прямых дает плоскую метрику, а пользуясь кониками, мы строим неплоские метрики.

Идеи твисторной программы за последние годы получили существенное развитие, хотя, быть может, первоначальные надежды на роль твисторов в теоретической физике оказались слишком оптимистичными. Внутри математики твисторы нашли замечательные применения в многомерном комплексном анализе, но прежде всего — в геометрии и топологии, где они привели к революции в теории четырехмерных многообразий.