Ю. И. Манин

МАТЕМАТИКА как МЕТАФОРА

Ю. И. Манин

Математика как метафора

Издательство МЦНМО
Москва 2008

УДК 51(019)
ББК 22.1г
М23

Манин Ю. И.

М23 Математика как метафора. — М.: МЦНМО, 2008. — 400 с.

ISBN 978-5-94057-287-9

В книге Ю. И. Манина собраны написанные и опубликованные в разные годы очерки по истории и философии математики и физики, теории культуры и языка, а также впервые публикуемые отрывки из воспоминаний, стихи и стихотворные переводы.

ББК 22.1г

Оформление обложки: *Михаил Панов*
Эскиз обложки: *Михаил Лаптев*
Фото на вклейке: *Ксения Семёнова*

На с. 377 воспроизведен рисунок С. Ю. Аракелова в конспекте курса Ю. И. Манина «Абелевы многообразия»

Манин Юрий Иванович

МАТЕМАТИКА КАК МЕТАФОРА

Подписано в печать 11.02.2008 г. Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная № 1.
Печать офсетная. Печ. л. 25. Тираж 2000 экз. Заказ № .

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., 6.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (495)–241–74–83.

ISBN 978-5-94057-287-9

9 785940 572879 >

Оглавление

Доказательство существования
(*вместо предисловия*)

Памяти моих родителей

В этой книге собраны примерно два десятка моих «нетехнических» текстов, по большей части написанных и опубликованных за последние тридцать лет. Жанр ее, по старинному выражению, — *маргиналии*, заметки на полях, наброски мыслей, подготовительные черновики, не превратившиеся в теоремы, определения, романы или философские трактаты.

Математика, прекрасное ремесло, которым я занимался всю жизнь, служит здесь не только поводом для нематематических размышлений, но и метафорой человеческого существования. Не следует понимать эту фразу эзотерически. Математиков мало в каждом поколении, и они общаются часто над головами современников и через прошедшие десятилетия и столетия, как это делают поэты, музыканты, философы.

Сопровождающее такую жизнь чувство, «одиночество бегуна на длинную дистанцию», разные люди компенсируют по-разному. Я с детства любил чтение обильное и беспорядочное.

* * *

Большая часть того, что меня занимало в математике, связана с алгебраической геометрией. Ее основная тема — изучение решений систем полиномиальных уравнений со многими неизвестными. Если уравнения выбраны и зафиксированы, мы представляем себе множество всех их решений, состоящее из n-ок комплексных чисел, в виде геометрического образа, формы, размещенной в n-мерном (или $2n$-мерном) пространстве. В одних направлениях эта форма уходит в бесконечность, а в других прихотливо замыкается на себе. Разнообразие и сложность таких форм бесконечно богаче, чем все, что можно увидеть на современных выставках абстрактного искусства. Математики научились находить регулярности, взаимосвязи и закономерности в этом огромном мире.

Меня больше всего привлекали приложения алгебраической геометрии к теории чисел и к физике. Одна из старейших задач теории чисел, восходящая к древней Греции и до сих пор носящая имя Диофанта Александрийского (около 300 года нашей эры), также касается решений полиномиальных уравнений, но на этот раз мы постулируем, что коэффициенты полиномов суть целые числа, и спрашиваем:

Существуют ли решения, у которых все координаты тоже целые (или рациональные)? Насколько их много?

На заре нашей науки, когда математики античности только учились ставить такие вопросы и находить на них ответы, даже простейшие уравнения приносили глубокие озарения. Тот факт, что уравнение $x^2 - 2y^2 = 0$ не имеет других целочисленных решений, кроме $x = y = 0$, открыл глаза на то, что мир геометрических величин много больше мира «рационально измеримых» величин (диагональ квадрата несоизмерима с его стороной). По существу, евклидова геометрия была также началом теоретической физики — кинематики идеально твердых тел в двумерном или трехмерном гравитационном вакууме, — а попытки связать формы с числами привели много позже к кристаллизации алгебраического, аналитического и вычислительного аппарата физики. Диагональ единичного квадрата $\sqrt{2}$, сторона куба с объемом $2(\sqrt[3]{2})$ и длина окружности единичного диаметра π были изначально физическими константами, а привычные нам вещественные числа в истории математики медленно осознавались как огромное потенциальное вместилище для значений всех физических величин. Целых и рациональных чисел для познания мира не хватало.

С другой стороны, для описания и физического мира, и мира идей, для передачи от учителя к ученику того, что уже понято, для сохранения от забвения в следующих поколениях, люди нуждались в словах, символах, знаках, в жестких правилах для обращения с ними. Силлогизмы Аристотеля оказались таким же зачатком теории языка науки, как пифагорейские открытия — зачатком теоретической физики. Медленно, через схоластов, Лейбница, Буля, Гёделя, фон Неймана и многих других, развивалось осознание того, что с текстами на языке науки можно обращаться так же, как с целыми числами.

Теория познания, принадлежа философии, находится за пределами нашего обсуждения, но можно вообразить и ее технические задачи, скажем, *можно ли из данного компендиума знаний логически из-*

влечь ответ на новый вопрос, или это требует расширения базы знаний?

Через две с лишним тысячи лет после Диофанта и Пифагора выяснилось, что в принципе любая такая задача сводится к одной, которую мы уже сформулировали: *есть ли решение у данной системы диофантовых уравнений?*

* * *

Взаимодействие алгебраической геометрии с теорией чисел привело к пониманию удивительного и фундаментального принципа: ответы на Диофантовы вопросы о системе уравнений критически зависят от геометрической формы пространства всех комплексных решений этой системы.

Например, пространство всех комплексных решений может выглядеть (топологически) как сфера, или тор, или сфера с несколькими ручками. Количество ручек называется *родом*, это очень устойчивый инвариант системы уравнений, и кажется, что он имеет мало общего с арифметическими тонкостями и дискретными точками решетки целочисленных векторов (в проективном пространстве различие между целыми и рациональными точками стирается).

Тем не менее, род определяет, когда множество всех рациональных решений может быть бесконечным: *только если ручек не больше одной*.

Это — содержание знаменитой гипотезы Морделла, которой я занимался в шестидесятые годы. Позже я попытался наметить контуры программы, которая прояснила бы взаимоотношения между геометрическими и диофантовыми свойствами в любой размерности.

В рабочий инструментарий теоретической физики до недавнего времени входили только рудименты алгебраической геометрии. Положение стало меняться в шестидесятые годы прошлого века, когда аппарат квантовой теории поля и особенно теории струн вывел алгебраическую геометрию на первый план.

Привычный образ мировой линии точечной элементарной частицы был замещен образом мирового листа маленькой струны. Такой лист выглядит как (риманова) поверхность, и ее род — число ручек — соответствует числу петель в выражениях для фейнмановских амплитуд, которые с сороковых годов стали центральным теоретическим и вычислительным средством квантовой физики.

Мне удалось вычислить так называемую меру Полякова на пространстве модулей (параметров) римановых поверхностей, знание которой необходимо для вычисления фейнмановских интегралов.

Оказалось, что она строится из тех же арифметических компонент, которые играли центральную роль в полном доказательстве гипотезы Морделла, незадолго до того полученном Гердом Фальтингсом.

Контрапункт этих двух тем — языка и геометрии, теории чисел и физики, логики и интуиции, постоянно возникает в физико-математических частях книги.

* * *

Во второй половине прошлого века взаимный интерес гуманитариев и математиков друг к другу создавал атмосферу, в которой могло начаться сотрудничество. Разрыв «двух культур» (Ч. П. Сноу) стал казаться преодолимым, по крайней мере в Москве и в Париже. Лингвисты, побуждаемые как внутренней логикой своих задач, так и растущими возможностями компьютеров, начали разрабатывать принципы точного описания естественных языков; меня особенно увлекла замечательная общелингвистическая программа «Смысл—Текст» Игоря Мельчука. Колмогоров с учениками занялся поэтической речью и ее статистикой. Во встречном направлении шли семиотики и стиховеды. Не обходилось без разочарований и раздражения[1].

Меня, однако, не соблазняла перспектива применить свои рабочие навыки математика к гуманитарному материалу. Мне хотелось вжиться в него, как вживаются в чужую страну, и описать увиденное словами не столь точными, сколь выразительными. (В контексте литературоведения Сьюзен Зонтаг назвала такую установку «эротическим отношением к литературе».)

Плодами этих мечтаний оказались три статьи: «Архетип Пустого Города», «„Мифологический плут“ по данным психологии и теории культуры», «К проблеме ранних стадий речи и сознания (филогенез)».

В конечном счете, все три работы возникли из желания понять черты коллективной психологии человеческого поведения. Материалистические объяснения истории, сформулированные на деревянном официальном арго, не объясняли ни ее неправдоподобной жестокости, ни ее творческой страсти. Иногда казалось, что историю делают не вожди, классы и массы, а кучка садистов руками толп мазохистов.

[1] «В таблицах сумма по столбцам и сумма по строкам никак не хотели сходиться ⟨…⟩ Впрочем, таблицы с цифрами мало кто читает: в моей книге „Современный русский стих“ (1974. С. 337) неправильно суммированы подсчеты по тактовику Блока и поэтому неправильны все выводы из них, но за 25 лет никто этого не заметил». (*Гаспаров М.* Записи и выписки. М.: НЛО, 2001. С. 316).

Я услышал «архетип Пустого Города» в разных мотивах искусства и облек его в словесную оболочку аналитической психологии Юнга, рационализировав его как подсознательную тень «проектного сознания», создающего светские и религиозные утопии, иногда невероятной красоты и мощи. В недавних комментариях Г. Ревзина и А. А. Грякалова[2] этот архетип привлекается в дискурсах, посвященных искусствоведению и философии детства.

Мифологический плут требует более пространных комментариев.

Много лет я вел домашний семинар, посвященный психолингвистике и эволюции сознания и интеллекта (это был один из вариантов традиционных московских посиделок «на кухне»).

Среди его участников и докладчиков были лингвисты, нейробиологи, психиатры, филологи. Мы пытались найти общие интересы и вопросы, где соединение разных профессиональных знаний, привычек и опыта могли бы привести к чему-нибудь новому.

Я постепенно сосредоточился на раздумьях, которые мог себе позволить только дилетант. Я попытался вообразить себе зарождение языка как системы социального поведения.

Методы сравнительного языкознания позволяют реконструировать словарь и грамматику праязыковых состояний в дописьменную эпоху. Они основаны на сравнении фонетически и семантически близких слов родственных языков, затем (скажем, в ностратических реконструкциях) на сравнении фонетически и семантически близких реконструированных корней. С каждым шагом реконструкции количество сохранившегося материала убывает экспоненциально, поэтому дальше примерно $(10—13) \cdot 10^3$ лет до н. э., то есть раннего неолита, компаративистика дойти не может (конечно, эти глоттохронологические датировки могут уточняться и оспариваться). Привлечение генетических данных (Луиджи Кавалли-Сфорца) подкрепляет и углубляет полученную картину, но о собственно языках уже не сообщает ничего.

Между тем, говорить человек начал предположительно где-то между $3 \cdot 10^4$ и 10^5 лет до н. э., и я хотел вообразить, как это могло происходить.

Для краткости я представлю свои размышления в виде серии сухих и упрощенных тезисов.

[2] http://www.projectclassica.ru /v_o/11_2004/11_2004_o_01b.htm,
http://www.archi.ru/press/revzin/kom071201.htm,
http://social.philosophy.pu.ru/?cat=publications&key=105 .

(а) В исторически описанных обществах изредка появлялись люди, чей уровень речевой компетенции на порядки превосходил уровень обычных, даже образованных и активных деятелей. Можно вспомнить таких кристаллизаторов национальных языков, как Данте, Шекспир и Пушкин. В дописьменных обществах, вероятно, такими были творцы «Одиссеи» и «Гильгамеша».

Я предположил, что то же происходило на гораздо более архаичных стадиях развития речи. Появлялись люди, через которых артикулировал еще не рожденный язык, производимый мутировавшим мозгом. Эта прото-речь врывалась в безъязыковое окружение через прото-шаманов и прото-поэтов.

(б) Прото-речь развивалась параллельно с прото-сознанием.

Изначальные функции и речи, и сознания не были когнитивными. Они состояли во введении психического механизма, который мог бы *останавливать врожденные, инстинктивные, животные реакции и поведенческие стереотипы*.

Прото-речь доставляла сигнальную систему, включавшую остановку таких реакций; она могла быть интериоризована и начинала составлять основу индивидуальной психики.

Все более выраженная речь также позволяла отдельным, особо одаренным индивидуумам контролировать поведение других людей, и в конечном счете создавать «альтернативные реальности» религии, литературы, философии и науки.

(в) Наконец, развивающаяся асимметрия левого и правого полушарий головного мозга, которая сопровождала развитие лингвистической компетенции раннего человека, легко приводила к тому, что в современных терминах можно было бы описать как острое невротическое расстройство. (В литературе имеются сходные спекуляции, основанные на другом материале, например, на эволюции сексуального поведения от животного до человеческого.)

На некоторой стадии реконструкции я понял, что фигура, представшая моему воображению, разительно похожа на «мифологического плута» (в англоязычном варианте трикстера). Я начал читать обширную литературу о трикстерах. Свидетельства подтверждали, что трикстеры по всему свету обладали недюжинными языковыми способностями и в то же время были глубокими невротиками.

Дарвиновская эволюция была благосклонна к трикстерским генам, потому что его бурная сексуальная активность сопровождалась талантом манипулятора. Более того, традиционная роль трикстера как мудрого советника при центре власти давала ему дополнительные репродуктивные преимущества.

Моя статья о трикстере была опубликована в «Природе» в 1987 году.

Только недавно я узнал, что примерно тогда же, в 1988 году, группа исследователей опубликовала книгу «Макиавеллиевский интеллект»[3].

Ее содержание было вкратце резюмировано во второй части этой книги[4] так: «⟨…⟩ изначальной движущей силой эволюции интеллекта был отбор по эффективности манипулятивного социального поведения внутри групп, где самые трудные задачи, стоящие перед индивидуумом, были связаны с необходимостью взаимодействия с другими членами группы».

Авторы (или редакторы) предложили термин «Макиавеллиевский Интеллект» именно для того, чтобы метафорически выразить этот опыт социального манипулирования. Полевые исследования выявили его зачатки уже в сообществах приматов.

Воображенный мной Трикстер замечательно соответствовал этому описанию.

* * *

В 1942 году мой отец ушел на фронт, где через год погиб. В последние дни дома он хотел, я думаю, побыть со мной и научить меня чему-нибудь, что́ я бы запомнил надолго. «Завтра мы пойдем ловить рыбу», — сказал он.

Назавтра мы отправились с утра и остановились у ближайшего большого арыка (дело было в Чарджоу, куда после эвакуации из Симферополя попала часть Крымского Пединститута). В арыке текла коричневая глинистая вода. Я был почти уверен, что никакая рыба там жить не может, да и вообще, как ее ловить? (мне было пять лет).

Отец сломал два прута, очистил их от листьев и привязал к ним по нитке, на концах ниток были две гнутые булавки, заменявшие крючки. На булавки он насадил шарики хлебного мякиша. В меня начало заползать страшное подозрение: рыба проглотит эти булавки, ей будет очень больно, а мы ее вытащим, ей будет нечем дышать, и она умрет. Я боялся сказать хоть слово.

Отец забросил удочки. Ничего не происходило, нитки шевелились в мутной воде.

Наконец, отец со вздохом сказал, что пора домой, вытащил «лески» и посмотрел на хлебные шарики.

---

[3] Machiavellian Intelligence: Social expertise and the evolution of intellect in monkeys, apes and humans / Ed. by R. W. Byrne, A. Whiten. Oxford: Clarendon Press, 1988.

[4] Machiavellian Intelligence II: Extensions and evaluations / Ed. by A. Whiten and R. W. Byrne. Cambridge University Press, 1997.

Они были слегка обкусаны! Значит, рыба в арыке жила, а мы никого не убили!

Счастье, которое я испытал, сделав два этих открытия, и осталось главным уроком моего отца, и я не забыл его до нынешнего дня.

Сочиняя свой личностный миф, я решил, что это был мой первый онтологический опыт, «доказательство существования» по косвенным признакам.

* * *

Вся моя интеллектуальная жизнь была сформирована тем, что я условно стал называть Просвещенческим проектом. Его основная посылка состояла в вере, что человеческий разум имеет высшую ценность, а распространение науки и просвещения само по себе неизбежно приведет к тому, что лучшие, чем мы, люди, будут жить в лучшем, чем мы, обществе.

Ничто из того, что я наблюдал вокруг себя в течение двух третей прошлого века и подходящего к концу десятилетия нового века, не оправдывало этой веры.

И все же я верю в Просвещенческий проект.

* * *

В заключение я хочу выразить сердечную благодарность всем моим учителям, друзьям и собеседникам долгих лет. Перечислить их нет никакой возможности, но от них, а также из их книг я узнал все, что знаю (или думаю, что знаю).

Особая признательность Ксане и Мите.

Мите пришло в голову собрать эту книгу, и когда она начала завязываться, он перевел несколько важных для меня работ, которые войдут в издание ее английской версии.

Советы, критика, поощрение и любовь Ксаны сопровождали всю работу, как и всю жизнь.

Часть I

Математика как метафора

Математика и культура

0. Предисловие

> Как так может быть, что мы с одной стороны гордимся тем, что построили прекрасный мир, полностью отгороженный от запросов реальности, а с другой — утверждаем, что наши идеи лежат в основе чуть ли не всех значительных технических достижений?
>
> *Д. Мамфорд, из предисловия к книге* [11]

Чистая математика — это огромный организм, построенный полностью и исключительно из идей, возникающих в умах математиков и в этих умах живущих.

У того, кто захочет избавиться от чувства дискомфорта, вызываемого таким заявлением, есть по крайней мере три пути отхода.

Во-первых, можно попросту отождествить математику с содержанием математических рукописей, книг, статей и докладов, со все время растущей сетью из теорем, определений, доказательств, конструкций, гипотез (может быть, и математических компьютерных программ) — с тем, что современные математики рассказывают на конференциях, хранят в библиотеках и электронных архивах, чем они гордятся, за что они друг друга награждают. Короче говоря, математика — это просто то, чем занимаются математики, так же как музыка — это то, чем занимаются музыканты.

Во-вторых, можно возразить, что математика — это вид человеческой деятельности, глубоко укорененный в реальности и постоянно к этой реальности возвращающийся. От счета на пальцах до высадки на Луне и поисковой системы Google — мы занимаемся математикой, чтобы понимать и создавать реальные объекты и оперировать ими, и возможно, именно *это понимание* является математикой, а не трудноуловимое бормотание сопутствующих абстракций. При таком подходе математики становятся более или менее ответственными деятелями истории человечества, подобно Архимеду, помогавшему

Статья написана для трехтомника «Matematica e cultura» (в печати). *Перевод с английского С. М. Львовского.*

защищать Сиракузы (и заодно местного тирана), Алану Тьюрингу, анализировавшему перехваченные шифрованные послания маршала Роммеля в Берлин, или Джону фон Нейману, предложившему детонацию на больших высотах в качестве эффективной тактики бомбометания. Если принять такую точку зрения, то математики могут защищать свое ремесло, подчеркивая его общественную полезность. Математик в такой роли может сталкиваться с моральными проблемами так же, как и любой другой человек; если бы я хотел продемонстрировать некоторые особенности этих проблем, специфические для профессии математика, то я не нашел бы ничего лучше, чем горькая ирония из [2, с. 11]: «…математика может также оказаться совершенно незаменимым инструментом. Так, когда изучалось воздействие кассетных бомб на человека, но *испытания на свиньях были невозможны по соображениям гуманности* (курсив мой. — *Ю. М.*), в игру вступило математическое моделирование».

В-третьих, имеется грандиозная картина великого Замка Математики, возвышающегося где-то в платоновском мире идей, каковой замок мы скромно и преданно исследуем (а не конструируем). Величайшим математикам удается ухватить какие-то контуры Великого замысла, но даже тем, кому открылся всего лишь узор плитки на кухне, это открытие может принести счастье и блаженство. Тот, кто предпочитает выразить эту же мысль иными словами, с помощью семиотической метафоры, мог бы сказать, что математика — это прототекст, существование которого только постулируется, но который тем не менее лежит в основе тех его искаженных и фрагментарных копий, с которыми мы обречены иметь дело. О личности автора этого прототекста (или строителя Замка) все могут только строить догадки, но Георг Кантор с его ви́деньем бесконечности бесконечностей как напрямую вдохновленной Богом и Курт Гёдель с его «онтологическим доказательством» сомнений на этот счет, кажется, не испытывали.

Различные оттенки и комбинации этих трех подходов, социальных позиций и вытекающих из этого выборов стратегии индивидуального поведения окрашивают все дальнейшее обсуждение. Единственная цель этого краткого предисловия — продемонстрировать читателю те внутренние напряжения, которые будут присутствовать в нашем изложении, а вовсе не имитировать (отсутствующее) ясное понимание и не предложить (отсутствующие) определенные суждения.

Наше последнее предупреждение касается присутствующих в нашем изложении исторических экскурсов. Есть два разных способа читать старые тексты: при одном способе читатель стремится понять время, когда они были написаны, и культуру, к которой этот текст относился, при другом читатель стремится пролить свет на ценности и предрассудки нашего времени. В истории математики эти подходы представлены историей в стиле «этноматематика» и историей в стиле Бурбаки соответственно.

В этом тексте я в явном виде и сознательно принимаю «модернизаторскую» точку зрения.

Зилке Виммер-Загир снабдила меня некоторыми источниками по истории китайской и японской математики и обсудила со мной их связь с этим проектом. Д. Ю. Манин объяснил мне принятую в Google стратегию ранжирования страниц. Я благодарен им обоим за щедрую помощь.

1. Математическое знание

1.1. Взгляд с птичьего полета. Сэр Майкл Атья начинает свой доклад [1] с такого обобщающего вступления: «Три большие раздела математики — это, в порядке их появления, геометрия, алгебра и анализ. Геометрией мы обязаны в основном греческой цивилизации, алгебра имеет индо-арабское происхождение, а с созданием Ньютоном и Лейбницем анализа пришла новая эра». Затем он объясняет, что в царстве физики эти разделы математики соответствуют исследованию пространства, времени и континуума соответственно: «Вряд ли кто-нибудь будет спорить с тем, что геометрия занимается исследованием пространства; возможно, менее очевидно, что алгебра занимается исследованием времени. Заметим, однако, что для любой алгебраической системы необходимо выполнение последовательных операций (сложения, умножения и т. п.) и что эти операции воспринимаются как выполняемые одна после другой. Иными словами, алгебре необходимо время, чтобы придать ей смысл, пусть даже обычно при этом речь идет о дискретных отрезках времени».

Можно было бы предложить и альтернативную точку зрения на алгебру, согласно которой она теснее всего связана не с физикой, а с языком. Если посмотреть на постепенное зарождение позиционной системы записи чисел, а в дальнейшем — алгебраических обозначений для переменных и операций, то можно выделить два исторических этапа.

На первом этапе обозначения используются в первую очередь для нужд сокращения и унификации символического представления некоторого набора значений. На этом этапе ту же роль мог играть (и играл) также естественный язык — но менее эффективно. Поэтому описанный процесс правомерно сравнить с развитием специализированного поддиалекта в естественном языке. Римские цифры, до сих пор использующиеся в декоративных целях — это ископаемые, оставшиеся от указанного периода. Другая полезная аналогия — возникновение и развитие химической нотации (возможно, это развитие было более прямым, и во всяком случае оно лучше документировано).

На втором этапе разрабатываются алгоритмы для сложения и умножения (а позднее и для деления) чисел, записанных в позиционной системе. Параллельно этому из переменных и алгебраических операций начинают строить тождества и уравнения, а затем и последовательности уравнений, удовлетворяющие единообразным правилам вывода (тождественных преобразований). На этом этапе высказывания на новом (математическом) диалекте становятся не столь носителями определенных значений, сколь сырьем для переработки на фабрике, производящей вычисления. Именно этот сдвиг смысла, от более или менее явной семантики обозначений к скрытой семантике алгоритмов, преобразующих строки символов, был ключевым событием в процессе зарождения алгебры.

Ничего похожего на этот второй этап не происходило с естественными языками. Напротив, когда в 60-х годах XX века с появлением больших компьютеров начались первые попытки алгоритмической обработки текстов на английском, французском или русском языках (например, для целей автоматического перевода), стало ясно, насколько естественные языки неудобны для компьютерной обработки. Оказалось, что невозможно обойтись без огромных словарных баз данных. Морфология, порядок слов и сочетания грамматических конструкций подчинялись запутанным и нелогичным правилам; хуже того, в разных языках эти правила прихотливым образом противоречили друг другу. Невзирая на все усилия, автоматический перевод без последующего редактирования человеком так и не приводит к удовлетворительным результатам.

Эта характерная для человеческих языков сопротивляемость к алгоритмической обработке является, возможно, глубинной причиной того, что только математика способна обеспечить адекватный язык для физики. Не то чтобы нам не хватало слов для выражения всех этих $E = mc^2$ и $\int e^{iS(\varphi)} D\varphi$ — слова-то как раз есть, и они легко придумываются, но мы так бы ничего и не могли делать с этими великими открытиями, если бы для их описания мы располагали исключительно словами.

С другой стороны, не можем мы также и опустить слова и иметь дело только с формулами. Слова в математических и естественнонаучных текстах играют три основные роли. Во-первых, они обеспечивают многочисленные связи между физической реальностью и миром математических абстракций. Во-вторых, слова несут оценочные суждения (иногда явные, иногда неявные), которыми мы руководствуемся при выборе тех или иных цепочек математических рассуждений в огромном дереве «всех» допустимых, но по большей части бессодержательных формальных выводов. Наконец (последнее по счету, но не по важности), слова позволяют нам общаться, учить и учиться.

В заключение приведу глубокое замечание Поля Самуэльсона, сравнивающего использование слов и математических символов в экономических моделях (цитируется по [4]): «Когда мы приступаем к решению этих проблем [из экономики] с помощью слов, мы решаем те же уравнения, что и в случае, когда мы эти уравнения явно выписываем. ⟨…⟩ По-настоящему серьезные ошибки происходят на этапе формулировки исходных предпосылок. ⟨…⟩ Одно из преимуществ такого посредника, как математика (точнее говоря, математических канонов изложения доказательств, будь то словесно или с использованием символики) состоит в том, что нам приходится выложить карты на стол, так что наши исходные предпосылки будут видны всем».

Возвращаясь к карте математических провинций Геометрии, Алгебры и Анализа, заметим, что на ней надо найти место и для (математической) Логики, с ее современными воплощениями — Теорией Алгоритмов и Теоретической Информатикой (Computer Science). Имеются очень сильные доводы в пользу того, чтобы, вопреки Фреге, рассматривать ее как часть широко понимаемой алгебры. Если согласиться с этим, то догадка Атьи насчет связи между алгеброй и понятием времени получает подтверждение. Именно, серьезные сдвиги в развитии логики в 30-е годы XX века произошли тогда, когда Алан Тьюринг воспользовался физической метафорой «машины Тьюринга» для описания алгоритмизованного вычисления. До его работы логика обсуждалась почти исключительно в паралингвистических терминах, как и у нас выше. Тьюринговское представление о конечном автомате, передвигающемся дискретными шагами вдоль одномерной ленты и записывающем на ней биты или стирающего их, вместе с теоремой существования универсальной машины такого типа, подчеркивает именно этот временной аспект всякого вычисления. Еще важнее то обстоятельство, что представление о вычислении как о физическом процессе не только помогло сконструировать современные компьютеры, но и открыло пути для продумывания в физических терминах (как классических, так и квантовых) общих закономерностей хранения и обработки информации.

1.2. Математика: предмет изучения. Когда мы занимаемся биологией, мы изучаем живые организмы. Когда мы занимаемся астрономией, мы изучаем небесные тела. Когда мы занимаемся химией, мы изучаем разновидности материи и их взаимопревращения.

Мы наблюдаем и измеряем нечто в реальном мире, мы разрабатываем специализированные эксперименты в точно определенных условиях (впрочем, не в астрономии), и в результате всего этого мы строим объясняющую парадигму, которая становится на текущий момент вехой в развитии науки.

Но что же мы изучаем, когда занимаемся математикой?

Один из возможных ответов таков: *мы изучаем идеи, с которыми можно обращаться так, как если бы они были реальными предметами* (П. Дэвис и Р. Херш называют их «умственными объектами с воспроизводимыми свойствами»).

Каждая такая идея должна быть достаточно жесткой, чтобы сохранять свою форму во всяком контексте, где она может быть использована. В то же время у каждой такой идеи должен быть богатый потенциал для создания связей с другими математическими идеями. Когда первоначальный комплекс идей сформировался (исторически или педагогически), связи между этими идеями также могут приобрести статус математических объектов, образуя тем самым первый уровень гигантской иерархии абстракций.

В самом низу этой иерархии лежат мысленные образы самих вещей и способов манипулирования ими. Чудесным образом оказывается, что даже абстракции высокого уровня могут каким-то образом отражать реальность: знания о мире, полученные физиками, можно выразить только на языке математики.

Вот несколько основных примеров.

1.2.1. Натуральные числа. Это, возможно, старейшая *протоматематическая* идея. «Жесткость» таких объектов, как 1, 2, 3..., такова, что первые натуральные числа обретают символический и религиозный смысл во многих культурах. На ум тут же приходят христианская Троица и и буддистская нирвана: слово ‘нирвана’ происходит от санскритского nir-dva-n-dva, где dva так и значит ‘два’, а все выражение подразумевает, что состояние абсолютного блаженства будет достигнуто, когда человек подавит индивидуальное существование и будет составлять «одно» с Вселенной. (Эти отрицательные коннотации слова ‘два’ сохранились даже в некоторых современных европейских языках, в которых у слова ‘два’ имеются ассоциации с идеей сомнения; см. латинское dubius, немецкое Zweifeln и описание Мефистофеля у Гёте.)

Натуральное число является также и *протофизической* идеей: подсчет материальных объектов (а позднее — и нематериальных, например, дней и ночей) является первым проявлением идеи измерения (см. ниже).

Натуральное число становится *математической* идеей, когда:

а) изобретаются способы обращения с натуральными числами так, как если бы они были предметами (сложение, умножение);

б) выявляются первые абстрактные свойства внутренней структуры совокупности всех натуральных чисел (простые числа, их бесконечность, существование и единственность разложения на простые множители).

Эти два открытия весьма отдалены друг от друга и исторически, и географически (возможно, также и в культурном и философском аспектах). Позиционная система счисления знаменует начало того, что мы сегодня называем *прикладной математикой*, а простые числа — того, что раньше называли *чистой математикой*. Скажем об этом немного подробнее.

Первоначально и числа, и способы обращения с ними кодировались специфическими материальными объектами: пальцами и другими частями тела, палочками, предназначенными для счета, зарубками. Зарубка — это уже знак, а не вещь в собственном смысле слова; она может означать не только 1, но и 10, и 60 — в зависимости от того, где она расположена в ряду других символов. Тем самым открывается дорога к великому математическому открытию — позиционной системе счисления. Впрочем, непротиворечивой позиционной системе необходим еще и знак для нуля, который появился достаточно поздно, ознаменовав переход на новый уровень математической абстракции.

Выразительный отрывок из [2] рисует такую картину.

> В 2074 году до н. э. царь Шульги провел военную реформу в шумерском государстве, а на следующий год — административную реформу (кажется, объявленную как временную в связи с чрезвычайными обстоятельствами, но вскоре ставшую постоянной), согласно которой бо́льшая часть трудоспособного населения была организована в почти что рабские рабочие бригады, а писцы-надсмотрщики были сделаны ответственными за производительность этих бригад, исчисляемую в абстрактных единицах, равных 1/60 рабочего дня (12 минут), согласно четким нормативам. Вся работа и все результаты труда должны были скрупулезно подсчитываться и при учете переводиться в эти абстрактные единицы; для этого требовалось в массовом порядке проводить умножение

и деление. При этом была введена и использовалась для промежуточных подсчетов позиционная система с основанием 60. Наличие такой системы предполагает существование таблицы умножения, таблицы обратных и таблицы технических констант и изучение этих таблиц в школах. Тем самым создание системы, основная идея которой «носилась в воздухе» в течение уже нескольких столетий, потребовало решения на государственном уровне и весьма энергичного проведения этого решения в жизнь. Как и во множестве случаев позднее, только война создала возможность для проявления такой политической воли.

С другой стороны, представляется, что простые числа возникли из чистого созерцания, так же как и идея совершенно конкретной бесконечности: как самих натуральных чисел, так и простых чисел.

Доказательство бесконечности простых чисел, включенное в «Начала» Евклида, является одним из красивейших математических рассуждений древности. Напомним его вкратце (в современных обозначениях): если у нас есть конечный список простых чисел $p_1, \ldots, p_n$, то к нему можно добавить еще одно, взяв любой простой делитель числа $p_1 \ldots p_n + 1$.

Это — идеальный пример обращения с математическими идеями так, как если бы они были жесткими материальными объектами. На этой стадии это уже чистые идеи, откровенно не имеющие даже отдаленного отношения к *материальным обозначениям* на шумерский или еще какой-нибудь лад. И сегодня, глядя на число, записанное в десятичной системе, легко сказать, четно ли оно и делится ли оно на 5 — но невозможно сходу увидеть, что оно является простым. Целые поколения математиков после Евклида дивились тому, как, на первый взгляд, случайно рассыпаны простые числа в натуральном ряду.

Наблюдение, эксперимент в точно определенных условиях, а с недавних пор — даже промышленное производство простых чисел (построение и выявление больших простых чисел с помощью практически реализуемых алгоритмов используется в задачах криптографии) стали отличительной чертой значительной части современной теории чисел.

1.2.2. Действительные числа и «геометрическая алгебра». Целые числа возникли из счета, но остальные действительные числа возникли в геометрии в качестве длин, площадей и объемов. Пифагоровское открытие несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной продемонстрировало также и то, что «величин» больше, чем «чисел». В дальнейшем величины стали действительными числами.

Арифметические операции над целыми числами развивались от соединения двух кучек палочек и составления двух шестов с зарубками до регламентированных действий с систематизированными обозначениями. Алгебраические операции над действительными числами начинались с рисования и разглядывания рисунков, которые могли быть то планами местности или будущих строений, то изображениями евклидовских квадратов, окружностей и углов.

В XX веке историки математики спорили о том, правильно ли рассматривать значительную часть греческой математики как «геометрическую алгебру». Один из примеров геометрической алгебры — рисунок, изображающий квадрат, разделенный двумя прямыми, параллельными двум перпендикулярным сторонам, на четыре части, две из которых также являются квадратами. Этот рисунок можно понять как геометрическую запись и доказательство алгебраического тождества $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

Наш модернизаторский подход к истории подсказывает необходимость рассмотрения нескольких режимов мышления, в особенности мышления, связанного с математикой. Вот основное разделение.

а) Сознательное манипулирование конечной и дискретной системой символов с явно зафиксированными правилами построения осмысленных строк символов и менее явными правилами, согласно которым некоторые строки признаются «интересными» (левое полушарие: лингвистическая и алгебраическая деятельность).

б) В большой степени подсознательное манипулирование со зрительными образами, неявно опирающееся на прошлый опыт и оценку вероятностей возможных результатов, но также использующее в качестве критерия равновесие, гармонию и симметрию (правое полушарие: пластические искусства, музыка, геометрия).

В сознании математика, занимающегося исследованием, эти два режима мышления должны сочетаться многими сложными способами. Это непросто, в частности, и потому, что скорости обработки информации в двух режимах чрезвычайно сильно различаются: порядка 10 битов в секунду для сознательной обработки символов и порядка 10^7 битов в секунду для подсознательной визуальной деятельности (см. [26]).

Возможно, именно из-за внутреннего напряжения, создаваемого этим (и другими) несоответствиями взгляды на два указанные режима мышления часто являются эмоционально окрашенными; два полушария рассматриваются как воплощения разных ценностей: холодный интеллект против теплого чувства, голая логика против проницательной интуиции. См. прекрасные статьи Дэвида Мамфорда [22] и [23], в которых он красноречиво выступает за статистику и против логики, но при этом пользуется математической статистикой, которая, как и всякий раздел математики, построена в высшей степени логично.

Возвращаясь к действительным числам и «геометрической алгебре» греков, мы узнаем в ней пример правополушарного подхода к предмету, который в дальнейшем развился в нечто управляемое в основном левым полушарием. Мамфорд по этому поводу говорит, что современная алгебра представляет собой грамматику операций с объектами, являющимися по сути своей геометрическими, а греческая алгебра — это ранний компендиум таких операций.

Возможно, влияние непрерывности греческого геометрического мышления как когнитивного феномена можно обнаружить не только в современной геометрии, но и в теоретической физике. В течение последних десятилетий из физики в математику шел такой мощный поток догадок, гипотез и изощренных конструкций, что был даже изобретен термин «физическая математика». Теоретическое мышление, на котором основано творческое использование фейнмановских интегралов, поражает нас богатством результатов, построенных на основе, которая по любым математическим критериям должна считаться весьма шаткой. Это можно рассматривать как дополнительную иллюстрацию того тезиса, что «геометрическая алгебра» существовала в реальности и не является исключительно результатом нашей реконструкции.

1.2.3. $e^{\pi i} = -1$: повесть о трех числах. Не исключено, что формула Эйлера $e^{\pi i} = -1$ — самая красивая одиночная формула во всей математике.

В ней в высшей степени неожиданным образом объединены три (или четыре, если включить в счет и -1) константы, открытые в различные эпохи и с очень разной мотивацией.

Говоря очень кратко, $\pi = 3{,}1415926\ldots$ принадлежит (опять) к наследию греков. Само его существование как действительного числа (то есть как чего-то подобного длине отрезка или площади квадрата) нельзя осознать без дополнительного мыслительного усилия. Проблема квадратуры круга — это не просто очередная геометрическая задача; это тест на легитимность с неясным результатом.

Напротив, число $e = 2{,}718281828\ldots$ является продуктом уже зрелой, хоть и не полностью развитой, западной математики (середина XVII века). Это — теоретический побочный продукт, с одной стороны, изобретенных в это время таблиц логарифмов, являвшихся средством оптимизации численных алгоритмов (замена умножения сложением), и с другой стороны — задачи о «квадратуре гиперболы». Никакие классические геометрические конструкции не приводили к числу e и не наводили на мысль о существовании соотношения между e и π.

Наконец, определение «мнимого» числа $i=\sqrt{-1}$, рассматривавшегося многими современниками как нечто чудовищное, было для Кардано буквально вынужденным шагом, предпринятым в связи с формулами для решения кубического уравнения в радикалах. Когда все три корня являются вещественными, при использовании этих формул в промежуточных вычислениях появляются комплексные числа.

Формула Эйлера представляет собой замечательный пример «бесконечных» тождеств, с которыми он (а позднее — Сринаваса Рамануджан) блестяще умел обращаться. На самом деле тождество $e^{\pi i}=-1$ является частным случаем ряда $e^{ix}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(ix)^n/n!$, дающего более общее выражение для $e^{ix}=\cos x+i\sin x$.

Дальнейший прогресс в понимании действительных чисел и теории пределов отодвинул великие таланты Эйлера и Рамануджана в обращении с «бесконечными тождествами» на второй план. Уже когда Г. Харди описывал математическое мышление Рамануджана, ему никак не удавалось мысленно поставить себя на его место. Это история что-то говорит нам о противопоставлении «логика — статистика», но я не могу ухватить даже приблизительную формулировку.

Вне связи с предыдущим, позднее формула $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ оказалась основой для адекватного описания одного из самых важных и неожиданных открытий в физике XX столетия: квантовых амплитуд вероятности, их волнового поведения и квантовой интерференции.

1.2.4. Множество по Кантору: минимальный математический объект. Согласно исходному описанию Кантора,

> Unter einer ‘Menge’ verstehen wir jede <u>Zusammenfassung</u> M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‘Elemente’ von M genannt werden) <u>zu einem Ganzen</u>.

> Под «множеством» мы понимаем всякое <u>соединение</u> M определенных и различных объектов m (называемых «элементами» множества M), существующих в нашем восприятии или в нашей мысли.

Благодаря немецкому синтаксису структура канторовской фразы аккомпанирует ее смыслу: «Objekten m unserer Anschauung…» заключены между словами «Zusammenfassung» и «zu einem Ganzen», как между открывающей и закрывающей скобками.

Видя это определение в первый раз, трудно представить себе, какого рода математикой (и шире: какого рода умственной деятельностью) можно заниматься на столь скудной основе. Собственно говоря, именно эта скудость и позволила Кантору изобрести свой «диагональный процесс», сравнивать бесконечности, как если бы они были физическими объектами, и открыть, что бесконечность действительных чисел строго больше, чем бесконечность чисел натуральных.

При этом на канторовской интуиции основывается бо́льшая часть работы по основаниям математики в XX веке: она может резко отвергаться логиками различных направлений, и она же является основой для проекта великого объединения, сначала под названием «теория множеств», а затем — «теория категорий».

1.2.5. «Все люди смертны. Кай — человек...»: от силлогизмов к программам. Аристотель кодифицировал элементарные разновидности утверждений и основные правила логического вывода. Аналогия между этими правилами и элементарной арифметикой была понята давно, но описана в явном виде относительно недавно (важную роль в этом сыграл Дж. Буль). Философы науки расходятся во мнениях по поводу того, что здесь первично. Фреге, например, настаивал на том, что арифметика является частью логики.

XX век оказался свидетелем сложнейшего соединения логики с арифметикой, когда в 30-е годы Гёдель, Тарский и Чёрч создали математические модели математических рассуждений, далеко выходящие за пределы комбинаторики конечных текстов. Одним из важных инструментов была восходящая к Лейбницу идея воспользоваться вычислимой нумерацией всех возможных текстов, чтобы заменить логические выводы арифметическими операциями.

Тарский в качестве модели истины предложил «истинность во всех интерпретациях» и обнаружил, что множество (номеров) арифметических истин невыразимо арифметической формулой. Инфинитарность понятия истины по Тарскому связана с тем, что в логических формулах допускаются кванторы всеобщности и существования, вследствие чего интерпретация конечной формулы подразумевает потенциально бесконечную последовательность проверок.

Гёдель, пользуясь аналогичным приемом, показал, что множество арифметических истин, выводимых из любой данной конечной системы аксиом и правил вывода, не может совпадать с множеством всех истинных формул. Существенной общей чертой обоих доказательств была ауторефферентность.

Помимо прочего, Гёдель и Тарский показали, что основное иерархическое отношение — это отношение между языком и метаязыком.

Более того, объективный смысл имеют только взаимоотношения языка и метаязыка, а не их абсолютный статус. Можно пользоваться логикой для описания арифметики, и можно пользоваться арифметикой при обсуждении логики. Искусная комбинация обоих уровней однозначно демонстрирует ограничения, внутренне присущие чистой логике как познавательному инструменту, даже когда он применяется «только» к самóй чистой логике.

В течение того же десятилетия Тьюринг и Чёрч проанализировали понятие вычислимости, изначально более «арифметичное». При этом Тьюринг сделал решительный шаг, поставив физический образ (машину Тьюринга) на место традиционных лингвистических воплощений логики и вычислимости, доминировавших в рассуждениях Тарского и Гёделя. Это был серьезный шаг, подготовивший последующее развитие техники: возникновение программируемых электронных вычислителей.

С теоретической точки зрения можно сказать, что и Чёрч, и Тьюринг открыли, что существует «окончательное» понятие вычислимости, воплощенное в универсальной рекурсивной функции или универсальной машине Тьюринга. Это не математическая теорема — скорее это «физическое открытие в метафизической области», которое обосновывается не доказательством, но тем фактом, что все последующие попытки дать альтернативное определение вычислимости приводили к равносильным понятиям. Скрытая (по крайней мере, в популярных изложениях) часть этого открытия состоит в осознании того, что правильное определение вычислимости содержит в себе элементы невычислимости, которых невозможно избежать никоим образом: рекурсивная функция в общем случае определена не везде, и мы не можем выяснить, где она определена, а где — нет.

Современные компьютеры являются технологически отчужденным воплощением этих великих открытий.

1.3. Определения, теоремы, доказательства. Теперь я вкратце опишу, каким образом проявляет себя «чистая» математика в качестве коллективной деятельности современного профессионального сообщества. Речь в основном пойдет не столько об организационных формах этой деятельности, сколько о том, как отражается вовне внутренняя структура мира математических идей.

Давайте посмотрим на любую современную статью в каком-нибудь из ведущих математических журналов, например, Annals of Mathematics или Inventiones mathematicae. В типичном случае она делится на относительно короткие фрагменты, называемые определениями, теоремами (с такими подвидами, как лемма и предложение) и доказательствами (эти последние могут быть значительно длиннее). Это — основные строительные блоки современного математического текста; для оживления добавляются таких украшения, как мотивировки, примеры, контрпримеры, разбор частных случаев и пр.

Эта традиция организации математического знания унаследована нами от греков (особенно важным источником были «Начала» Евклида). Цель определения — ввести математический объект. Цель теоремы — сформулировать какие-то свойства объекта или взаимоотношения между различными объектами. Цель доказательства — сделать эти утверждения убедительными, представив рассуждение, разделенное на цепочку мелких утверждений, каждое из которых обосновывается с помощью «стандартных» средств убеждения.

Попросту говоря, сначала мы объясняем, о чем мы говорим, а затем — почему то, что мы утверждаем, является верным (вопреки Бертрану Расселу).

Определения. С эпистемологической точки зрения это предмет тонкий и противоречивый, поскольку речь идет о чрезвычайно специфических умственных образах, как правило, отсутствующих в нетренированном уме (что такое действительное число? случайная величина? группа?). Когда выше я описывал некоторые из основных объектов, я пользовался нарративными средствами для того, чтобы сделать их наглядными и ощутимыми, но я не приводил настоящих определений в техническом смысле слова.

У Евклида определения обычно представляют собой смесь из пояснений, использующих зрительные образы, и «аксиом», в которых речь идет об идеализированных свойствах, приписываемых нами определяемым объектам.

В современной математике можно более или менее явно ограничить себя фундаментальным мысленным образом канторовского «множества» и ограниченным набором свойств множеств и конструкций, позволяющих строить множества из уже имеющихся. При этом каждое из наших определений можно воспринимать как стандартизированное описание некоторой структуры, состоящей из множеств, их подмножеств и т. д. Это — подход, разработанный группой «Бурбаки» и оказавшийся в итоге чрезвычайно влиятельным, удобным и широко принятым способом организации математического знания. Как и следовало ожидать, впоследствии этот подход стал мишенью для критики, направленной по большей части на систему ценностей, поддерживающую эту неоевклидовскую традицию, но прагматическая польза бурбакистского подхода неоспорима. Уж по крайней мере, ему мы обязаны существенным облегчением общения между математиками разных специальностей.

Если принять какую-нибудь из форм теории множеств как основу для дальнейших построений, то только аксиомы теории множеств остаются «аксиомами» в евклидовском смысле — интуитивно очевидными свойствами, принимаемыми без дальнейшего обсуждения (впрочем, см. ниже), тогда как аксиомы действительных чисел или планиметрии становятся доказываемыми свойствами явно строящихся теоретико-множественных объектов.

Бурбаки в своем многотомном трактате современной математики развили эту картину, добавив к ней красивое понятие «порождающих структур» (structures-mères). См. работу [31], посвященную истории группы «Бурбаки».

Подходя к вопросу шире, можно сказать, что математики развили специфическую дискурсивную практику, которую можно назвать «культурой определений». В этой культуре много усилий вкладывается в уяснение содержания (семантики) основных абстрактных *понятий* и синтаксиса их взаимоотношений, в то время как выбор слов (и в еще большей мере *обозначений*) признается делом не первостепенной важности, а в большой степени — и произвольным соглашением, основанным на соображениях удобства, эстетики или на стремлении вызвать подходящие ассоциации. Можно сравнить это с некоторыми традициями гуманитарного дискурса, в котором такие термины, как Dasein или différance, жестко используются как маркеры определенной традиции при том, что об их точном определении никто особо не заботится[1].

1.4. Проблемы, гипотезы, исследовательские программы. Время от времени появляется статья, в которой решается, или по крайней мере предстает в новом свете, серьезная проблема или доказывается гипотеза, которая была известна в течение десятилетий или даже столетий и не поддавалась решению, несмотря на множество усилий. Такие названия, как великая теорема Ферма (доказанная Эндрю Уайл-

[1] Возможно, этому высказыванию не хватает широты взгляда. Несколько дней назад я ехал в трамвае, мысленно подвергая деконструкции следующие две строки Огдена Нэша: Some people after a full day's work sit up all night getting a college education by correspondence, // While others seem to think they'll get just as far by devoting their evenings to the study of the difference in temperament between brunettance and blondance.

Я размышлял о том, что в основе этого анализа лежит в точности «deferral» в смысле Дерриды, когда мой взгляд упал на вывеску мебельного магазина. Там было написано буквально следующее: DESIGN FÜR DASEIN.

сом), гипотеза Пуанкаре, гипотеза Римана или P-NP проблема, в наши дни попадают даже в газетные заголовки.

Давид Гильберт построил свой доклад на ознаменовавшем начало XX века Втором международном математическом конгрессе (Париж, 8 августа 1900 года) вокруг обсуждения десяти выдающихся математических проблем; они вошли в список из 23 проблем, перечисленных в печатной версии доклада. Можно спорить по поводу их сравнительной ценности с чисто научной точки зрения, но бесспорно, что они сыграли значительную роль в концентрации усилий математиков на четко намеченных направлениях исследований и в создании ясных целей и мотивировок для молодых ученых.

Если проблема (вопрос, на который можно ответить «да» или «нет») в основе своей представляет собой догадку об истинности некоторого утверждения (как проблема Гольдбаха: всякое четное число $\geqslant 4$ является суммой двух простых), то исследовательская программа предполагает широкий взгляд на большую область, какие-то части которой вовсе неисследованы, а про какие-то другие имеются догадки, основанные на аналогиях, разборе простых частных случаев и т. п.

Различие между проблемой и исследовательской программой не является абсолютным. Например, первая проблема Гильберта — гипотеза континуума, — которая в эпоху Гильберта и Кантора выглядела как конкретная задача, положила начало большой исследовательской программе, в результате работы которой было, помимо прочего, установлено, что ни один из двух ответов не выводим в рамках общепринятой аксиоматической теории множеств.

С другой стороны, явная формулировка исследовательской программы может оказаться делом рискованным. В проблеме номер 6 предлагалось аксиоматизировать физику, но в течение последующих трех десятилетий лицо физики полностью изменилось.

Некоторые из наиболее влиятельных исследовательских программ последних десятилетий представляли собой прозрения относительно структуры платоновской реальности. Андре Вейль предсказал существование теорий когомологий для алгебраических многообразий в конечной характеристике. Гротендик их построил, навсегда изменив наше понимание взаимосвязей между непрерывным и дискретным.

Когда Пуанкаре говорил, что решенных проблем нет, есть только проблемы, решенные в большей или меньшей степени, он подразумевал, что всякий вопрос, поставленный так, что на него можно ответить «да» или «нет», свидетельствует об узости мышления.

Начало XXI века было ознаменовано тем, что институт Клея опубликовал список проблем тысячелетия. Их ровно семь, и каждая из них — это вопрос с ответом «да» или «нет». Впервые в таком списке фигурирует и задача, пришедшая из информатики: знаменитая P-NP гипотеза. Кроме того, на клеевских проблемах висят ярлыки с ценами: по $\$10^6$ за каждую. Ясно, что силы свободного рынка в установлении этих цен роли не играли.

2. Математика как инструмент познания

2.1. Немного истории. Древние источники по истории математики свидетельствуют, что математика как отдельный род деятельности возникла как ответ на нужды торговли и государственного управления (для обслуживания войны и крупных общественных работ): см. приведенную выше цитату о шумерской административной реформе.

В качестве другого примера обратимся к китайской книге «Девять глав о математических операциях», составленной при династии Хань в начале нашей эры (далее мы следуем докладу К. Шемлы на Берлинском международном математическом конгрессе 1998 года [7]). Книга по большей части состоит из задач с решениями, выглядящими как частные случаи общих алгоритмов, что позволяет решать аналогичные задачи с другими числовыми значениями. Согласно докладчику,

> В задачах все время встречаются конкретные вопросы, с которыми сталкивались ханьская бюрократия, а более конкретно — вопросы, за которые отвечал «Великий Министр Сельского Хозяйства» (дасынун): оплата труда чиновников, управление зернохранилищами или установление стандартных мер для зерна. Более того, шестая из глав названа по имени экономического мероприятия, предлагавшегося Великим Министром Сельского Хозяйства Сан Хуняном (152—82 до н. э.) с целью более справедливого налогообложения. В книге приводятся математические процедуры для вычисления налогов.

Еще одно описание того, чем занимались китайские математики, приведено в [30].

> В течение всей долгой истории китайской империи математическая астрономия была единственным разделом естественных наук, пользовавшимся серьезным вниманием правителей. При каждой династии неотъемлемой частью государства была императорская обсерватория. На императора работали ученые трех специальностей: математики, астрономы и астрологи. При этом обязанностью математиков было разрабатывать алгоритмы для

> составления календаря, и большинство математиков получали образование именно в качестве составителей календарей. ⟨...⟩
>
> Составителям календарей требовалось соблюдать очень высокую точность в своих предсказаниях. Предпринимались непрекращающиеся усилия по совершенствованию методов вычислений, чтобы гарантировать точность, необходимую для астрономических наблюдений. Не было никакой нужды в том, чтобы заменять вычисления, игравшие основную роль в китайских календарных расчетах, на геометрическую модель; более того, это было и невозможно. ⟨...⟩ Не геометрия, а тесно связанная с вычислениями алгебра стала наиболее развитым разделом математики в старом Китае.

Западная традиция восходит к Греции. Согласно Тернбулу [36], термином «математика» и подразделением математики на арифметику и геометрию мы обязаны Пифагору (569—500 до н. э.). Точнее говоря, согласно Пифагору арифметика (и музыка) изучает дискретное, а геометрия и астрономия изучает непрерывное. Дальнейшее противопоставление «геометрия—астрономия» отражает противопоставление «неподвижное—движущееся».

Эта классификация с небольшими изменениями послужила основой средневекового квадривиума; ее следы ощущаются и в общей картине математики, как она видится Майклу Атье.

Платон (429—348 до н. э.) в «Государстве» (книга VII, 525 с.) объясняет, почему изучение арифметики необходимо просвещенному государственному деятелю:

> Эта наука, Главкон, подходит для того, чтобы установить закон и убедить всех, кто собирается занять высшие должности в государстве, обратиться к искусству счета, причем заниматься им они должны будут не как попало, а до тех пор, пока не придут с помощью самого мышления к созерцанию природы чисел — не ради купли-продажи, о чем заботятся купцы и торговцы, но для военных целей и чтобы облегчить самой душе ее обращение от становления к истинному бытию[2].

С постепенным выделением «чистой математики» возвращение к практическим нуждам стало рассматриваться как приложения. Противопоставление чистой и прикладной математики в его нынешнем понимании, бесспорно, сформировалось уже к началу XIX века. Во

[2] Перевод А. Н. Егунова.

Франции Жергон издавал журнал «Annales de mathématiques pures et appliquées»[3], выходивший с 1810 по 1833 год; в Германии Крелль в 1826 году основал журнал под названием «Journal für die reine und angewandte Mathematik»[4].

2.2. Средства познания в математике. Чтобы понять, как именно математика применяется к пониманию реального мира, удобно рассмотреть ее в трех модальностях: как *модель*, *теорию* и *метафору*.

Математическая модель описывает (количественно или качественно) определенный класс явлений, но ни на что большее предпочитает не претендовать.

От птолемеевских эпициклов (описывающих движение планет; около 150 года н. э.) и до «стандартной модели» (описывающей взаимодействие элементарных частиц; около 1960 года) количественные модели подстраиваются под наблюдаемую реальность с помощью уточнения численных значений параметров, которых иногда насчитываются десятки (на менее двадцати в стандартной модели). Такие модели могут быть удивительно точными.

Качественные модели помогают понимать такие явления, как *устойчивость* и *неустойчивость*, *аттракторы* (предельные состояния, не зависящие, как правило, от начальных условий), *фазовые переходы*, происходящие, когда сложная система переходит границу между двумя фазами или между двумя бассейнами с разными аттракторами. Недавний доклад [13], посвященный предсказанию волны убийств в Лос-Анджелесе, в качестве метода использует распознавание образов для случая редких событий. Вот его вывод: «Мы обнаружили, что повышению количества убийств предшествует 11 месяцев, в течение которых статистика преступлений имеет специфический вид: *число краж со взломом и хулиганских нападений растет, число ограблений и убийств падает*. При этом и растут, и падают эти показатели не монотонно: это спорадические процессы, продолжающиеся от 2 до 6 месяцев».

В компьютерную эпоху модели чрезвычайно распространились; теперь их производят в промышленных масштабах, а решают численными методами. Р. Солоу в своем проницательном эссе [33] (написано в 1997 году) выдвигает тезис, что основная часть современной экономической науки занимается именно построением моделей.

Модель часто используются как черный ящик со скрытыми процедурами компьютерного ввода, на выходе которого получаются пред-

---

[3] Анналы чистой и прикладной математики.

[4] Журнал чистой и прикладной математики.

писания, относящиеся к поведению людей (так бывает в приложениях компьютеров в финансовой сфере).

Теорию (имеется в виду математически сформулированная физическая теория) от модели отличают в первую очередь бóльшие притязания. Современная физическая теория обычно утверждает, что она описывала бы мир с абсолютной точностью, если бы он состоял из объектов какого-то одного вида: материальных точек, подчиняющихся исключительно закону всемирного тяготения, электромагнитного поля в вакууме и т. п. В ньютоновской формуле Gm/r^2, описывающей силу, действующую на точку в центральном поле тяготения, Gm и r могут меняться в угоду измеримой реальности, но показатель 2 в r^2 — это твердая, как скала, теоретическая двойка, а не какое-нибудь 2,000000003…, что бы ни показывали результаты экспериментов. Хорошая количественная теория может быть очень полезна в инженерии: машина — это искусственный фрагмент вселенной, в котором основную роль играет лишь небольшое число физических законов, причем действуют они в весьма изолированной системе. В этой ситуации теория доставляет модель.

Та сила, что побуждает все время создавать теории — это концепция реальности, существующей независимо от материального мира и возвышающейся над ним, реальности, которую можно познать только с помощью математических инструментов. Эту психологическую установку можно проследить от платоновых многогранников, через галилеевский «язык природы» и до квантовых суперструн — даже если она не согласуется с явно выраженными философскими взглядами того или иного ученого.

Математическая *метафора*, в тех случаях, когда она претендует на статус инструмента познания, постулирует, что некоторый сложный набор явлений можно сравнить с какой-то математической конструкцией. Наиболее недавняя из тех математических метафор, что я имею в виду — это искусственный интеллект (ИИ). С одной стороны, ИИ — это корпус знаний, относящихся к компьютерам и к новой искусственной реальности, состоящей из аппаратного и программного обеспечения, Интернета и пр. С другой стороны, в потенции это модель функционирования мозга и сознания в биологии. В своем полном объеме ИИ пока что не достиг стадии модели: мы не располагаем систематизированным, непротиворечивым и широким списком соответствий между процессорами и нейронами, между компьютерными алгоритмами и алгоритмами, выполняющимися в мозгу. Однако же мы можем использовать (и используем) наши обширные знания об алгоритмах и компьютерах (благо и те, и другие нами и созданы) для порождения осмысленных догадок о структуре и механизмах деятельности центральной нервной системы (см. [22] и [23]).

Математическая теория — это приглашение к построению работающих моделей. Математическая метафора — это приглашение к размышлению о том, что мы знаем. Полезным предостережением может здесь послужить эссе Сьюзен Сонтаг [34] об использовании (разумном и неразумном) метафоры болезни.

Разумеется, подразделение, которое я набросал выше, не является ни жестким, ни абсолютным. У статистических исследований в общественных науках статус зачастую колеблется между моделью и метафорой. При смене парадигмы научные теории переходят в разряд устаревших моделей. Тем не менее в нашем изложении это удобный способ организации исторических данных, как в синхронии, так и в диахронии.

Теперь я остановлюсь более подробно на этих инструментах познания, сделав основной упор на модели и связанные с ними структуры.

2.3. Модели. Возникновение и функционирование математической модели можно проанализировать, рассмотрев следующие этапы, внутренне присущие всякому систематическому исследованию наблюдений, результаты которых можно выразить числами.

1) Выбор списка наблюдаемых величин.

2) Разработка метода измерения (сопоставления наблюдаемым числовых значений). Часто этому этапу предшествует более или менее явное упорядочение таких значений на некоторой оси (отношение «больше—меньше»); ожидается, что последующее измерение согласуется с этим упорядочением.

3) Угадывание закона или законов, которым подчиняется распределение наблюдаемых в получающемся (обычно многомерном) конфигурационном пространстве. Эти законы могут быть точными или вероятностными. Состояния равновесия могут представлять особый интерес: часто они характеризуются как стационарные точки подходящего функционала, определенного на полном конфигурационном пространстве. Если в число измеряемых величин входит время, то в игру вступают дифференциальные уравнения, описывающие эволюцию.

Говоря о концепте *оси*, стоит отметить его широкие и общие культурные коннотации, раскрытые Карлом Ясперсом. Ясперс постулировал, что переходный период к современности имел место около V века до н. э., в период «осевого времени», когда возникал новый тип человеческого мышления, основанный на противопоставлении имманентного и трансцендентного. Для нас здесь существен образ оппозиции в виде противоположных ориентаций одной и той же оси и идея свободы как выбора между двумя несовместимыми альтернативами. Те же образы стояли за стандартным физическим выражением «степени свободы»; сейчас это почти не ощущается, как оно обычно и бывает, когда образы становятся терминами.

Идея измерения, являющаяся основой современной науки, настолько жизненно важна, что порой она некритически воспринимается при построении моделей; важно не забывать об ее ограниченности.

При квантовом описании микромира «измерение» — это весьма специального вида взаимодействие, результатом которого является случайное изменение состояния системы, а не получение информации об этой системе.

В экономике деньги играют роль универсальной оси, на которой откладываются «цены» и все прочее. Считается, что «измерение» производят силы рынка.

Глубинное внутренне противоречие рыночной метафоры состоит в том, что мы проецируем многомерный мир несравнимых и несовместимых степеней свободы на одномерный мир цен в денежном выражении. Этот одномерный мир в принципе нельзя сделать совместимым даже с основными отношениями порядка на различных осях; тем более нельзя его сделать совместимым с несуществующими или несравнимыми ценностями различных видов.

В этом смысле пример наиболее внутренне противоречивого использования рыночной метафоры дает выражение «свободный рынок идей». На этом рынке продается одна-единственная идея: идея «свободного рынка».

2.3.1. Краткая опись измеряемого. Начнем с замечания, относящегося ко всем измерениям: для каждой из «осей», которые мы будем рассматривать, измерения начинаются с измерений «в человеческом масштабе», подразумевающих непосредственные манипуляции с материальными объектами. По ходу развития оно распространяется на более крупные и более мелкие масштабы, и для разрешения проблем, связанных с этим развитием, создается и используется все больше и больше математических знаний.

Счет. Предлагаем читателю перечитать раздел, посвященный натуральным числам, как очерк истории счета (и учета). На примере счета ясно виден переход от подсчетов малых количеств предметов («человеческий масштаб») к масштабам экономики целого государства — переход, стимулировавший создание и кодификацию позиционной системы.

Пропуская другие интересные этапы, мы должны вкратце упомянуть то, что Георг Кантор справедливо считал своим главным достижением: подсчет «бесконечностей» и открытие бесконечной шкалы бесконечностей, растущих по величине.

Основное рассуждение Кантора по своей структуре очень похоже на евклидовское доказательство бесконечности простых чисел: для данного конечного или бесконечного множества X множество $P(X)$, состоящее из всех его подмножеств, имеет строго большую мощность. Это доказывается с помощью знаменитого канторовского «диагонального процесса».

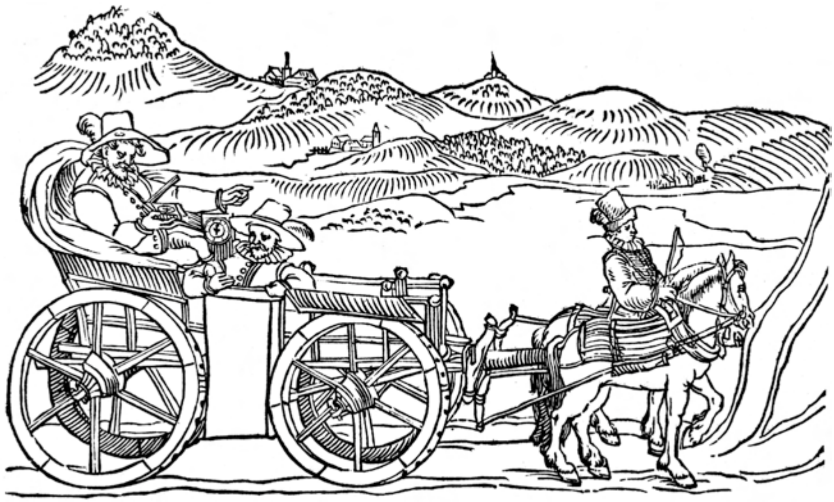
Канторовская теория бесконечных множеств представляет собой невероятное обобщение обоих аспектов натурального числа. Всякое число измеряет «количество», и числа упорядочены отношением «x меньше y». Соответственно, бесконечности бывают «кардиналами» (мерами бесконечности) и «ординалами» (точками на упорядоченной оси растущих бесконечностей).

Загадки канторовской шкалы породили целый ряд нерешенных (и в значительной степени неразрешимых) проблем и стали в XX веке основой для множества дискуссий, посвященных и основаниям математики, и эпистемологии. Споры и перебранки о законности канторовских умственных построений привели к тому, что главное достижение его жизни стало и причиной нескольких нервных срывов и депрессий, которые в конце концов свели его в могилу в то самое время, когда Первая мировая война перемалывала последние остатки просвещенческой веры в разум.

Пространство и время. Измерения длины в человеческих масштабах с неизбежностью должны были быть связаны с земельными участками и мотивированы нуждами сельского хозяйства и строительства. С помощью палки с двумя зарубками или веревочки меру длины можно было переносить с одного места на другое.

Основная евклидовская абстракция — бесконечно жесткая и бесконечно делимая плоскость, с ее скрытой группой симметрий из поворотов и переносов, с ее точками, не имеющими размера, прямыми, беспрепятственно продолжающимися в обе стороны, и идеальными треугольниками и окружностями — была, видимо, рафинированным абстрактным образом древней геодезии. Возможно, евклидовская трехмерная геометрия была ближе к наблюдаемому миру; замечательно, что Евклид систематически создавал и изучал также двух-, одно- и нульмерные абстрактные объекты.

Теорема Пифагора была красиво связана с арифметикой в практике египетских строителей: формулу $3^2 + 4^2 = 5^2$ можно перевести



Измерение расстояний с помощью Wagen-Wegmesser (прототип современного таксометра) из книги: Pfinzig «Methodus geometrica», Nürnberg, 1595

в рецепт построения прямого угла с помощью веревки с расположенными на равных расстояниях узлами.

Когда Эратосфен Александрийский (ок. 200 до н. э.) разработал свой метод для первого научного измерения длины в действительно больших масштабах (а именно, размеров Земли), он с большим искусством воспользовался всеми возможностями евклидовой геометрии. Эратосфен заметил, что в полдень в Сиене в день летнего солнцестояния Солнце находилось точно в зените, поскольку его свет достигал дна глубокого колодца. В то же самое время в Александрии расстояние от Солнца до зенита составляло одну пятидесятую часть полной окружности. Кроме этого, использовались еще два результата наблюдений: во-первых, расстояние от Сиены до Александрии, которое было принято равным 5000 греческих стадий (это тоже измерение в большом масштабе; возможно, оно основывалось на времени, необходимом, чтобы преодолеть это расстояние), и во-вторых, утверждение, что Сиена и Александрия лежат на одном меридиане.

Оставшаяся часть эратосфеновского измерения основана на теоретической модели. Земля предполагается круглой, а расстояние от Солнца до ее центра предполагается настолько большим, что солнечные лучи, падающие на Сиену и Александрию, можно считать параллельными.

Теперь простое рассуждение из евклидовской планиметрии, примененное к сечению Земли, проходящему через Сиену, Александрию и Солнце, показывает, что расстояние между Сиеной и Александрией составляет одну пятидесятую от окружности Земли; тем самым эта окружность составляет 250 000 стадий (современные оценки величины греческой стадии показывают, что это довольно хорошее приближение).

В этом рассуждении неявно подразумевается существование расширенной группы симметрий евклидовой плоскости, включающей, наряду с переносами и поворотами, еще и изменения масштаба, при которых все расстояния одновременно изменяются в одной пропорции. Практическое воплощение этой идеи — *карта* — было критически важно для огромного количества видов человеческой деятельности, включая географические открытия по всему земному шару.

Внимательный читатель, видимо, уже заметил, что в этом описании (основанном на книге Клеомеда «De motu circulari corporum caelestium», датируемой серединой I века до н. э.) неявно участвует и измерение времени. В самом деле, откуда мы знаем, что мы смотрим на Солнце *в одно и то же время* в Александрии и в Сиене, отстоящей от Александрии на 5000 стадий?

Самые ранние измерения времени в человеческом масштабе связаны с циклической сменой дня и ночи и нахождением приблизительного положения Солнца в небе. Солнечные часы, о которых упоминают Клеомед и Эратосфен, преобразуют измерение времени в измерение расстояний.

Следующее по масштабу измерение времени связано со сменой времен года и периодичностью религиозных праздников. Чтобы при этом достичь необходимой точности, нужна математическая наблюдательная астрономия. Первоначально она используется для регистрации нерегулярностей годового цикла, то есть, в основном, движения Земли в Солнечной системе. Используемая при этом математика включает вычисления, основанные на интерполяционных методах.

Следующее увеличение масштаба — это хронология «исторического времени». Математика сыграла фундаментальную роль при оформлении *физической шкалы* исторического времени, размеченной приближенной периодичностью вращения Земли вокруг Солнца и другими астрономическими событиями. Однако, в размещении исторических событий на этой шкале математические методы оказались весьма ограниченно применимыми.

Геологическое и эволюционное время возвращают нас к науке: эволюция геологических структур и жизни прослеживается на основе развитого понимания физического времени, и это понимание существенно опирается на математику; с другой стороны, изменения, о которых идет речь, происходят настолько постепенно, а свидетельства настолько редки, что точность измерений становится и несущественной, и недостижимой. Кроме массы данных наблюдений, блестящих догадок и сопровождающих все это очень элементарных рассуждений, для датировки требуется еще совсем чуть-чуть математики, а именно, идея, что при радиоактивном распаде остаток распадающегося вещества экспоненциально убывает со временем. Весьма оригинальная версия этой идеи была использована в глоттохронологии — процедуре, позволяющей датировать древние состояния языков (праязыки), реконструированные методами сравнительной лингвистики.

Уже сам по себе размер шкалы геологического и эволюционного времени оказался, когда она была установлена и научно разработана, вызовом догматам (христианской) веры: несоответствие с предполагаемым временем, прошедшим от сотворения мира, было чудовищным.

Измерения времени *в малых масштабах* стали возможны с изобретением часов. Солнечные часы, использующие относительную регулярность видимого движения Солнца, позволяют подразделить сутки на более мелкие части. Водяные и песочные часы отмеряют фиксированные отрезки времени; при этом используется идея о воспроизводимости некоторых физических процессах в специально созданных условиях. Механические часы добавляют к этому искусственное создание периодических процессов. Современные атомные часы основаны на тонком использовании периодических процессов на микроуровне.

И все же время остается загадкой: мы не можем в нем свободно перемещаться, как в пространстве, и оно тянет нас неизвестно куда. Вот как бл. Августин напоминает нам об этой вечной ненаучной му́ке: «Что я измеряю время, это я знаю, но я не могу измерить будущего, ибо его еще нет; не могу измерить настоящего, потому что в нем нет длительности, не могу измерить прошлого, потому что его уже нет. Что же я измеряю?» («Исповедь», книга XI, XXVI.33; перевод М. Е. Сергеенко).

Случай, вероятность, финансы. Коннотации слов «случайность» и «вероятность» в обыденном языке имеют мало общего с вероятностью в математическом смысле. В [6] приведен интересный анализ семантики соответствующих слов в нескольких древних и современных европейских языках: в основном эти слова связаны с идеей человеческого доверия (или недоверия) в неясных ситуациях. Измерения вероятности и математическая обработка результатов этих измерений относятся не к доверию как таковому, являющемуся психологическим феноменом, но к объективным численным характеристикам реальности, первоначально тесно связанным с подсчетом.

Если колода из 52 карт хорошо перетасована, то вероятность вытянуть пиковую даму равна 1/52. Элементарная, но интересная математика возникает при расчетах вероятностей различных комбинаций («хороших раскладов»). В этих расчетах неявно присутствует идея группы симметрий: мы не просто считаем количество карт в колоде или количество хороших раскладов по сравнению со всеми возможными — мы предполагаем, что при честной игре все эти карты и все эти расклады равновероятны.

Одним из источников теории вероятностей был математический анализ азартных игр, а другим — статистика банковской деятельности, торговли, налогообложения и пр. Наблюдения над частотами различных событий и их повторяемостью привели к понятию эмпирической вероятности и к более или менее явно формулируемой идее о «скрытой игре в кости» — ненаблюдаемом царстве причин, производящих наблюдаемые частоты с регулярностью, достаточной для того, чтобы они вписывались в математическую теорию. Современное определение вероятностного пространства — аксиоматизация этого представления.

Деньги начинались как мера стоимости; их критически важный переход в вероятностный мир произошел вместе с выделением кредита как основной функции банков.

Этимология слова «кредит» также связана с идеей человеческого доверия. Мэри Пуви в своем тонком анализе зарождающейся «культуры финансов» (см. [29]) отмечает, что эта культура резко отличается от экономики материального производства, которая «создает прибыль, превращая рабочую силу в продукты, которым присваиваются цены и которые после этого обмениваются на рынке». Финансы же создают прибыль, в частности, «с помощью заключения сложных пари на рост или падение цен в будущем» [29, с. 27], то есть и с помощью азартной игры. Масштабы этой игры поражают воображение, а невероятная смесь реального и виртуального миров, возникающая в культуре финансов, является взрывоопасной и периодически приводит к финансовым кризисам.

Информация и сложность. Это пример недавней и весьма сложной парадигмы измерения.

Подобно «случайности» и «вероятности», термин «количество информации», ставший одним из важных математических понятий во второй половине XX века после работ Клода Шеннона и А. Н. Колмогорова, вызывает не совсем верные ассоциации: грубо говоря, количество информации измеряется всего лишь длиной текста, необходимого для того, чтобы эту информацию записать.

На первый взгляд кажется, что эта мера, во-первых, измеряет не то, что нужно, а во-вторых, дезориентирует. Нам нужно знать, является ли информация важной и надежной, и это — качественные, а не количественные характеристики. Более того, важность информации зависит от культурного, научного и политического контекста. И уж в любом случае кажется неестественным измерять объем информации, содержащейся в «Войне и мире», просто толщиной книги.

Тем не менее, «количество информации» становится центральным понятием в ситуациях, когда мы оперируем с информацией, не интересуясь ее содержанием или надежностью (но обращая внимание на информационную безопасность), что является основным делом средств массовой информации и телекоммуникационной индустрии. Общий объем текстов, передаваемых ежедневно по Интернету, в СМИ и по телефону, поражает воображение и далеко превосходит пределы того, что мы назвали «человеческим масштабом».

Основные идеи Шеннона, относящиеся к измерению количества информации, можно кратко изложить следующим образом. Пусть для начала информация, которую вы хотите передать, — это всего лишь ответ «да» или «нет» на вопрос вашего собеседника. Чтобы передать эту информацию, не нужно даже пользоваться словами естественных языков: достаточно передать 1 вместо «да» или 0 в значении «нет». Это — один бит информации. Пусть теперь вы хотите передать что-то более сложное, для чего вам нужен текст, состоящий из N битов. Тогда количество передаваемой вами информации ограничено сверху N битами, но уверены ли вы, что для тех же целей нельзя обойтись более коротким текстом? На самом деле существуют систематические способы сжатия данных; Шеннон описал их в явном виде. Наиболее универсальный из этих методов основывается на предположении, что не все тексты из тех, что вы в принципе могли бы передавать, встречаются с одинаковой вероятностью. В этом случае надо сменить кодировку таким образом, чтобы коды более вероятных текстов стали короче, а менее вероятных — длиннее, и за счет этого сэкономить на объеме передаваемых данных, по крайней мере в среднем. Вот как можно сделать это при кодировании текстов на естественном языке. Поскольку в алфавите около 30 букв, а $2^5 = 32$, для кодирования каждой из буквы нужно 5 битов, так что получается текст, у которого длина в битах в 5 раз больше, чем длина в буквах. Однако же некоторые буквы встречаются гораздо чаще других, так что можно попробовать закодировать часто встречающиеся буквы более короткими последовательностями битов. Это — оптимизационная задача, которую можно решить в явном виде, а длину получающегося сжатого текста можно подсчитать. По существу это *энтропия* в смысле определений Шеннона и Колмогорова.

Пользуясь статистической парадигмой измерения, создатели Google нашли впечатляющее решение задачи измерения *важности* информации. Грубо говоря, поисковая система по запросу выдает список страниц, содержащих данное слово или выражение. В типичном случае количество таких страниц очень велико, так что необходимо выдавать их в порядке убывания важности. Как же Google находит этот порядок?

На каждой странице имеются гипертекстовые ссылки на другие страницы. Можно рассматривать множество всех web-страниц как ориентированный граф, ребра которого — гиперссылки. В первом приближении можно считать, что важность страницы измеряется количеством указывающих на нее ссылок. Однако же эту меру можно уточнить, если заметить, что не все ссылки равноправны: ссылка с важной страницы имеет пропорционально больший вес, а ссылка на страницу, указывающую на много других страниц, имеет пропорционально меньший вес. Это приводит к следующему определению, содержащему, на первый взгляд, порочный круг: каждая страница передает свою важность тем страницам, на которые с нее идут ссылки, деля ее между этими страницами поровну; важность каждой страницы — это то, что она получает от всех страниц, у которых на нее есть ссылки. Тем не менее классическая теорема, принадлежащая А. А. Маркову, показывает, что это определение корректно. Остается найти численные значения важности и перечислить страницы в порядке убывания этих значений.

Вернемся теперь к шенноновским процедурам оптимального кодирования и декодирования. Как мог заметить читатель, за экономию на передаче надо платить кодированием на передающем конце и декодированием на конце приемном. Что произойдет, если мы будем допускать более сложные процедуры кодирования и декодирования в надежде получить лучшее сжатие?

Тут может оказаться полезной следующая метафора. Закодированный текст на передающем конце — это *программа P*, порождающая декодированный текст Q на приемном конце. Давайте разрешим передавать *произвольные* программы, порождающие Q; может быть, удастся выбрать из них самую короткую и тем самым сэкономить ресурсы.

Замечательный результат, принадлежащий Колмогорову, гласит, что так оно и есть: кратчайшая программа P действительно существует, и ее длина (*колмогоровская сложность* текста Q) по существу не зависит от метода программирования. Иными словами, *существует совершенно объективная мера количества информации, содержащейся в данном тексте* Q.

Однако же в этом месте начинаются неприятности. Во-первых, нет систематического способа строить P по данному Q (в отличие от ситуации с шенноновской энтропией), и во-вторых, получение декодированного текста Q при данном P может требовать очень больших временны́х затрат, даже если программа P известна и коротка. Вот очень простой пример: если Q — это последовательность из $10^{10^{10}}$ единиц, то можно передать именно эту фразу, оставив адресату утомительную задачу распечатки $10^{10^{10}}$ символов «1».

Это означает, что колмогоровская сложность, будучи красивым и продвинутым (хотя и «элементарным») математическим понятием, не может дать нам практической меры количества информации. Тем не менее ее можно использовать как мощную метафору, высвечивающую силы и слабости современного информационного общества.

Понятие колмогоровской сложности позволяет нам выявить один из существенных способов кодирования научной (да и не только научной) информации. Основные физические «законы природы» (ньютоновское $F = ma$, эйнштейновское $E = mc^2$, уравнение Шрёдингера и т. п.) представляют собой очень сжатые программы для получения информации в различных конкретных ситуациях. Величина их колмогоровской сложности явным образом имеет человеческие масштабы, эти законы названы в честь людей, имена которых связаны с их открытием, и их содержание целиком укладывается в сознание одного человека (ученого или студента).

В наши дни такие проекты, как «геном человека», порождают гигантские объемы информации, не вмещающиеся (в сколь угодно сжатом виде) в сознание одного человека. Возможно, этим же свойством будут обладать и аналогичные базы данных, которые будут созданы при исследовании центральной нервной системы (мозга): величина их колмогоровской сложности будет сравнима с их объемом.

Тем самым мы уже изучаем области материального мира, описания которых содержат больше информации (имеют бо́льшую колмогоровскую сложность), чем то, что составляло предмет классической науки. Без компьютеров было бы невозможно ни хранить в коллективной памяти данные наблюдений, ни обрабатывать их.

Что же будет, когда не только хранение нового научного «знания», но и его *обработка* будет переложена на плечи больших компьютерных баз данных и сетей?

3. Математические науки и человеческие ценности

3.1. Введение. Вот что пишет редактор антологии [37] Дж. Р. Ньюман по поводу папируса Ринда — древнеегипетского руководства по математике, написанного около 1700 года до н. э.:

> Похоже, что должным образом оценить египетскую математику можно только при условии гораздо более широкого и глубокого понимания человеческой культуры, чем то, на которое претендуют и египтологи, и историки математики. На вопрос, как египетская математика соотносится с вавилонской, месопотамской или греческой, ответить относительно легко, но этот вопрос не слишком важен. Интереснее было бы понять, почему у египтян получилась математика именно такого вида, до какой степени она помогает понять их культуру, как ее можно связать с их социально-политическими институтами, с их религиозными верованиями, экономической практикой, повседневными привычками. Только при этом условии египетскую математику можно оценить по справедливости. (Т. I, с. 178).

Эти слова были опубликованы в 1956 году; к 1990 году сформулированный в этой цитате подход стал широко распространенной парадигмой; Д'Амброзио назвал его «этноматематикой» (см. [20]). Сборник, для которого была написана эта статья[5], и весь проект, в рамках которого сборник опубликован, представляет собой краткий автопортрет западной этноматематики как она видится из второй половины XX века.

Возможно, наиболее интересные внутрикультурные взаимодействия, связанные с математикой — не прямые, но опосредованные системой ценностей. Система ценностей влияет на деятельность в любой области и при этом практически предопределяет культурную интерпретацию этой деятельности. И обратно, система ценностей, зарождающаяся в рамках одного из видов культурной деятельности (например, в науке), порождает процесс пересмотра других ценностей, их преобразования, а иногда — их уничтожения или коренной перестройки. В свете этого в заключительном разделе статьи я вкрат-

[5] Matematica e Cultura (в печати).

це коснусь человеческих ценностей в контексте математического творчества.

3.2. Рациональность. Послушаем еще раз Дж. Р. Ньюмана (см. [37, предисловие к тому I]).

> …Я начал собирать материалы для антологии, которая, как я надеюсь, сказала бы что-то про разнообразие, пользу и красоту математики.
>
> Книга ([37]. — *Ю. М.*) представляет математику как инструмент, как язык и как карту; как произведение искусства и как самодостаточную ценность; как плод стремления к совершенству. Мы видим математику как объект сатиры, как предмет юмора и как источник споров; как гимнастику ума и как затравку для воображения рассказчика; как занятие, приводящее людей в исступление и приносящее им наслаждение. Математика как целое представляется как корпус знаний, созданных человеком, но при этом от человека не зависящий и отдельный.

В этом очень личном и эмоциональном списке ценностей, связанных с математикой, удивительным образом отсутствует *рациональность*. Одно из возможных объяснений состоит в том, что в англосаксонской традиции основные ценности Просвещения стали ассоциироваться с экономическим поведением и зачастую интерпретируются в следующем узком смысле: рационально действует тот, кто последовательно блюдет свой интерес.

Другой причиной может быть то, что рациональность не приносит особой радости: «Cogito ergo sum» — это доказательство существования, ничего не говорящее о той абсолютной потребности в мышлении, что присуща всякой живой душе.

И тем не менее рациональность в ренессансном смысле, «il natural desiderio di sapere» (см. [5]), и стремление быть последовательно рациональным — это та движущая сила, без которой невозможно было бы ни существование математики в течение многих веков, ни ее успешный вклад в технический прогресс общества.

3.3. Истина. О проблеме истины в математики существует множество подробных, сложных, тонких и противоречащих друг другу высказываний (см. относительно недавний обзор [35]). Здесь я просто отмечу, что с аксиологической точки зрения истина, независимо от ее исторических и философских коррелятов, является одной из основных ценностей, связанных с математикой.

Авторитет, полезность для практики, успех в состязании, вера — все эти не всегда совместимые друг с другом ценности математик, приступающий к работе, должен отодвинуть на задний план.

3.4. Действие и созерцание. По самой сути своего ремесла математики склонны к созерцанию более, чем к действию.

Римляне, которые были деятелями par excellence, глубоко уважали греческую культуру, но не восприняли греческую математику. В имперском списке ценностей — доблесть, честь, слава, служба — для геометрии места не было.

Представление о математиках-созерцателях входит в традицию, длящуюся веками, но во всякой традиции имеются поразительные исключения. Я завершу это эссе кратким рассказом об одном из великих математиков прошедшего века — Джоне фон Неймане.

Янош Нейман родился 28 декабря 1903 года в Будапеште и умер 8 февраля 1957 года в Вашингтоне. За свою не очень долгую жизнь он успел внести критически важный вклад в следующие области знания: основания теории множеств, квантовая статистика и эргодическая теория, теория игр как модель экономического поведения, теория операторных алгебр, архитектура современных компьютеров, принцип имплозии в конструкции атомной бомбы и многое другое.

Вот два примера его мышления и его способа выражать свои идеи — из начала и конца его карьеры.

Созерцание: универсум фон Неймана. Канторовскому определению множества как произвольного набора различных предметов, существующих в нашей мысли, во многих случаях удовлетворяет больше объектов, чем хотелось бы. Поэтому универсум фон Неймана состоит только из множеств, элементами которых являются также множества. Потенциально опасной автореферентности удается избежать, постулировав, что в любом семействе множеств X_i, для которого X_i есть элемент в X_{i+1}, имеется наименьший элемент; самым маленьким множеством, из которого все и строится, является пустое множество. Тем самым универсум фон Неймана строится из «философского вакуума»; его первые элементы суть $\varnothing$ (пустое множество), $\{\varnothing\}$ (одноэлементное множество, единственным элементом которого является пустое множество), $\{\{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, и т. д. Скупые фигурные скобки заменяют канторовскую рамку «Zusammenfassung… zu einem Ganzen», и эта операция, которую можно итерировать — единственный способ строить новые множества из уже существующих. Итерация, конечно, может быть и трансфинитной (другое великое прозрение Кантора).

Наведение на цель пушки с применением квадранта из книги «Erste deutsche Vitruvausgabe»

Трудно представить себе более чистый объект созерцания, чем эта тихая и одновременно мощная иерархия.

Действие: Хиросима. Вот отрывок из датированного 18 декабря 1947 года письма фон Неймана к Р. Дункану из отдела военной истории фирмы IBM.

Уважаемый г-н Дункан!

В ответ на Ваше письмо от 16 декабря ⟨...⟩ сообщаю следующее. Действительно, во время войны я был инициатором исследования отражения косых ударных волн и сам этим исследованием занимался. Исследования привели к выводу, что большие бомбы эффективнее взрывать не на поверхности земли, а на значительной высоте, поскольку при этом повышается давление при наклонном падении ударной волны ⟨...⟩

Я действительно получил медаль «За заслуги» (октябрь 1946) и награду «За безупречную службу» (июль 1946), со следующей формулировкой:

Медалью «За заслуги» награждается д-р Джон фон Нейман за образцовое исполнение особо важных работ для США в период с 9 июля 1942 года по 31 августа 1945 года. Д-р фон Нейман, проявляя исключительную преданность делу, лидерские качества в технической области, неизменный энтузиазм и постоянную готовность к коллективной работе, был основным ответственным за проведенное Военно-морскими силами США исследование эффективности взрывов на больших высотах, в результате которого был найден новый метод ведения наступательных операций, который уже доказал свою эффективность при использовании атомных бомб против Японии. Д-р фон Нейман внес неоценимый вклад в победу Соединенных Штатов Америки в войне.

Гарри Трумэн

Литература

1. *Atiyah M.* Geometry and Physics of the 20th Century. In: [12, p. 4—9].
2. *Booß-Bavbneck B., Høyrup J.* Introduction. In: [24, p. 1—9].
3. *Bourbaki N.* Elements of the History of Mathematics. Springer-Verlag, 1994. [Русский перевод более раннего издания: *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики. М.: Наука, 1963.]
4. *Li Calzi M., Basile A.* Economists and Mathematics from 1494 to 1969. Beyond the Art of Accounting. In: [21, p. 95—107].
5. *Cesi F.* Il natural desiderio di sapere. The Pontifical Academy of Sciences. Vatican, 2003.
6. *Чайковский Ю. В.* Что такое вероятность? (Эволюция понятия от античности до Пуассона) // Историко-математические исследования. Сер. 2. 6(41). М., 2001. С. 34—56.
7. *Chemla K.* History of Mathematics in China: A Factor in World History and a Source for new Questions // Proceedings of the Int. Congr. of Mathematicians. Berlin, 1998. Bielefeld: Documenta Mathematica, 1998. Vol. III. P. 789—798.
8. The Cultural Value of Science. Proceedings of the plenary session of the Pontifical Academy of Sciences. Nov. 8—11. 2002. Vatican, 2003.
9. *Dales H. G., Oliveri G.* Truth and the foundations of mathematics. An introduction. In: [35, p. 1—37].
10. *Davis P., Hersch R.* The mathematical Experience. Boston: Birkhäuser, 1980.
11. *Enzensberger H. M.* Drawbridge Up. Mathematics — a Cultural Anathema. Natick, Mass.: A. K. Peters, 1999.

12. Géométrie au XXe siècle. Histoire et horizons / Ed. by J. Kouneiher, D. Flament, Ph. Nabonnand, J.-J. Szczeniarz. Paris: Hermann, 2005.
13. *Keilis-Borok V., Gascon D., Soloviev A., Intriligator M., Pichardo R., Winberg F.* On the predictability of crime waves in megacities — extended summary. In: [8, p. 221—229].
14. *Kobzarev I. Yu., Manin Yu. I.* Elementary Particles. Mathematics, Physics and Philosophy. Kluwer Academic Publishers, 1989.
15. *Macrae N.* John von Neumann. AMS, 1990.
16. *Манин Ю. И.* Истина, строгость и здравый смысл (см. наст. изд.).
17. *Манин Ю. И.* Математика как метафора (см. наст. изд.).
18. *Манин Ю. И.* Георг Кантор и его наследие (см. наст. изд.).
19. *Mandelbrot B., Hudson M.* The (Mis)behaviour of Markets. Profile, 2005.
20. Mathematics across cultures. The history of Non-Western Mathematics / Ed. by H. Selin. Kluwer Academic Publishers, 2000.
21. Mathematics and Culture I / Ed. by M. Emmer. Springer, 2004.
22. *Mumford D.* The dawning of the age of stochasticity // Mathematics: Frontiers and Perspectives / Ed. by V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax and B. Mazur. AMS, 2000. P. 197—218.
23. *Mumford D.* Pattern Theory: the Mathematics of Perception // Proceedings of the Int. Congr. of Mathematicians. Beijing 2002. Vol. I. Beijing: Higher Education Press, 2002. P. 401—422.
24. Mathematics and War / Ed. by B. Booß-Bavbnek, J. Høyrup. Basel: Birkhäuser Verlag, 2003.
25. *von Neumann J.* Selected Letters / Ed. by M. Rédei. History of Math. AMS and London MS, 2005. Vol. 27.
26. *Nørretranders T.* The User Illusion: Cutting Consciousness Down to Size. Penguin, 1998.
27. *Платон*. Государство. Книга VII, 522d, 525c, 526b–d.
28. *Poovey M.* A History of the Modern Fact. Problem of Knowledge in the Sciences of Wealth and Society. The University of Chicago Press, 1998.
29. *Poovey M.* Can numbers ensure honesty? Unrealistic expectations and the US accounting scandal // Notices of the AMS. 2003. Vol. 50, № 1. P. 27—35.
30. *Anjing Qu*. The third approach to the history of mathematics in China // Proceedings of the Int. Congr. of Mathematicians. Beijing 2002. Vol. III. Beijing: Higher Education Press, 2002. P. 947—958.
31. Bourbaki: Une société secrète de mathématiciens // Pour la science. 2000. № 2.
32. *Siegmund-Schultze R.* Military Work in Mathematics 1914—1945: an Attempt at an International Perspective. In: [24, p. 23—82].

33. *Solow R.* How did economics get that way and what way did it get? // Daedalus. Fall 2005. P. 87—100.
34. *Sontag S.* Illness as Metaphor, and AIDS and its Metaphors. NY: Picador; Farrar, Strauss and Giroux, 1990.
35. Truth in Mathematics / Ed. by H. G. Dales and G. Olivieri. Oxford: Clarendon Press, 1998.
36. *Turnbull H. W.* The great mathematicians. In: [37, vol. 1, p. 75—168].
37. The World of Mathematics. A small library of the literature of mathematics from A'h-mosé the Scribe to Albert Einstein, presented with commentaries and notes by James R. Newman. Vols. 1—3. New York: Simon and Schuster, 1956.

Математика как метафора

> Порядок. ⟨…⟩ Я отчасти знаю, что это такое и как мало людей это понимают. Ни одна наука, созданная людьми, не может его соблюсти. Св. Фома не смог его соблюсти. Математика его соблюдает, но она бесполезна при всей своей глубине.
>
> *Б. Паскаль. Мысли*

Введение

Когда в 1902 году вышла в свет книга Анри Пуанкаре «Наука и гипотеза», она стала бестселлером. Первая глава этой книги была посвящена природе математического рассуждения. Пуанкаре обсуждал старую философскую проблему: можно ли свести математическое знание к длинным цепочкам тавтологических преобразований некоторых основных («синтетических») истин или оно содержит в себе что-то сверх этого? Пуанкаре отстаивал точку зрения, согласно которой математики обязана своей творческой силой произвольности выбора первоначальных предположений и определений, которые затем корректируются с помощью сравнения выводов из них со строением наблюдаемого мира.

Похоже, что нам гораздо меньше, чем современникам Пуанкаре, интересны философские тонкости. И дело тут не в том, что наука как таковая стала менее популярна: такие книги, как «Первые три минуты» С. Вайнберга или «Краткая история времени» Стивена Хокинга выпускаются большими тиражами, а доброжелательные рецензии на них печатаются в массовых газетах. Изменилось общее настроение. Парадоксальность новых физических теорий воспринимается менее драматически и более прагматично. (Восприятие изобразительного искусства претерпело ту же эволюцию: первые выставки импрессионистов были подобны духовной революции, а вот каждая очередная волна послевоенного авангарда немедленно приобретала характерные черты академизма.)

Впервые опубликовано: Mathematics as metaphor // Proc. of ICM. Kyoto, 1990. Vol. II. P. 1665—1671. The AMS and Springer Verlag. *Перевод с английского С. М. Львовского.*

В такой атмосфере жаркие дискуссии прошлых дней о кризисе оснований математики и природе бесконечности кажутся почти бессмысленными, и уж заведомо — ненужными. Гораздо живее публика реагирует на высказывания по поводу среднего образования или нового поколения компьютеров.

Именно поэтому я решил представить вниманию читателя непритязательное эссе, в котором наша наука рассматривается как специализированный диалект естественного языка, а ее функционирование — как частный случай феномена речи. Из этого подхода вытекают и некоторые предложения, касающиеся школьного и университетского образования.

Метафоричность

Слово «метафора» будет использоваться нами в нетехническом смысле, который лучше всего поясняется следующими цитатами из книги Дж. П. Карса «Конечные и бесконечные игры»:

> *Метафора есть соединение похожего с непохожим, при котором одно не может превратиться в другое.*
>
> *В своей основе всякий язык имеет характер метафоры, поскольку независимо от своих намерений он всегда остается языком и тем самым совершенно непохожим на то, что он описывает.*
>
> *На невозможности высказать природу основана сама возможность существования языка.*

Рассматривая математику как метафору, я хочу подчеркнуть, что интерпретация математического знания является актом в высшей степени творческим. В некотором смысле математика — это роман о природе и человечестве. Точно сказать, чему именно нас учит математика, невозможно так же, как невозможно сказать, чему нас учит «Война и мир». Само это обучение погружено в процесс рефлексии по его поводу.

Может показаться, что это мнение идет вразрез с освященной временем традицией применения математики к научным и техническим вычислениям; на самом деле я всего лишь хочу восстановить некоторый баланс между технологической и человеческой сторонами математики.

Два примера. Позвольте мне проиллюстрировать метафорический потенциал математики на двух разнородных примерах: колмогоровской сложности и «теоремы о диктаторе» К. Эрроу.

I. Колмогоровская сложность натурального числа N — это длина кратчайшей программы P, порождающей N, или длина кратчайшего кодового представления для N. Читателю предлагается представить себе способ кодирования с помощью частично рекурсивной функции $f(P)$, аргументы и значения которой — целые числа. Теорема Колмогорова гласит, что среди таких функций существуют максимально экономичные в следующем смысле: если $C_f(N)$ — наименьшее значение P, для которого $f(P)=N$, то $C_f(N) \leqslant \mathrm{const} \cdot C_g(N)$, где константа зависит от f и g, но не от N.

Поскольку P можно восстановить по его двоичной записи, длина $K_f(N)$ кратчайшей программы, порождающей N, ограничена числом $\log_2 C_f(N)$. Эта функция (точнее говоря, класс функций с точностью до прибавления ограниченного слагаемого) и называется колмогоровской сложностью.

Во-первых, $K(N) \leqslant \log N + \mathrm{const}$, что хорошо согласуется с историческим успехом позиционных систем счисления, снабдивших нас программами порождения чисел, имеющими логарифмическую длину. Тем не менее, существуют сколь угодно большие числа, колмогоровская сложность которых гораздо меньше, чем длина их записи: например, $K(10^N) \leqslant K(N) + \mathrm{const}$. Очевидно, что даже когда мы пользуемся большими числами, мы ограничиваемся числами относительно небольшой колмогоровской сложности. Даже десятичные приближения к числу π, которые, возможно, являются длиннейшими однозначно определенными числами из всех, что когда-либо выписывали математики, не являются сложными по Колмогорову, поскольку $K([10^N \pi]) \leqslant \log N + \mathrm{const}$. Вообще говоря, низкая колмогоровская сложность равносильна высокой степени организованности.

С другой стороны, почти всякое число N имеет сложность, близкую к $\log N$. Например, если $f(P)=N$ для оптимальной f, то $K(P)$ эквивалентно $\log P$. Такие целые числа обладают многими замечательными свойствами, обычно связываемыми с понятием случайности.

Во-вторых, колмогоровскую сложность легко определить для дискретных объектов, не являющихся числами, например, для русских или английских текстов. Следовательно, можно более или менее однозначно измерить сложность «Войны и мира»: неопределенность связана только с выбором оптимального метода кодирования, и представляется, что при выборе среди небольшого числа разумных способов неопределенность будет мала.

Вопрос: является ли «Война и мир» высокоорганизованным или почти случайным комбинаторным объектом?

В-третьих, колмогоровская сложность является невычислимой функцией. Точнее говоря, если f оптимальна, то не существует рекурсивной функции $G(N)$, отличающейся от $C(N)$ на $\exp(O(1))$. Можно только оценить сложность сверху сложность вычислимыми функциями.

Я чувствую, что понятие колмогоровской сложности следует иметь в виду при любом обсуждении проблемы человеческого знания.

Коль скоро наши знания имеют символическое выражение (словесное, цифровое и т. п.), существуют физические ограничения на объем информации, которую можно хранить и которой можно пользоваться. Мы всегда полагаемся на способы сжатия информации; колмогоровская сложность ставит абсолютную границу эффективности этих методов. Когда, например, мы говорим о законах физики, выраженных уравнениями движения, мы имеем в виду, что точное описание поведения системы можно получить, переведя эти законы в компьютерную программу. Однако сложность тех законов, которые мы можем открыть и которыми мы можем пользоваться, заведомо ограничена. Можем ли мы быть уверены, что не существует законов произвольно высокой сложности, управляющих даже «элементарными» системами?

Здесь наше обсуждение полностью теряет математический характер, и поскольку аудитория ориентирована на математику, в этом месте я вынужден остановиться. Впрочем, такова судьба любой метафоры.

II. Теорема Эрроу о диктаторе была открыта около 1950 года. С математической точки зрения это комбинаторное утверждение, описывающее некоторые функции со значениями в бинарных отношениях. С интуитивной точки зрения это формализация следующей социальной проблемы. Предположим, что законодатель хочет установить правила выработки коллективного решения, основывающиеся на предпочтениях отдельных субъектов. Если речь идет о выборе из двух альтернатив, то стандартный способ — принимать решения большинством голосов. Обычно, однако, альтернатив больше двух (вспомним о задаче распределения средств), так что голосующих можно просить упорядочить эти альтернативы в порядке предпочтения. Каков должен быть алгоритм, получающий коллективное предпочтение из множества индивидуальных? Эрроу рассматривал алгоритмы, удовлетворяющие некоторым естественным и демократическим условиям (например, если каждый ставит A выше B, то и общество ставит A выше B). Тем не менее, Эрроу обнаружил, что если альтернатив больше двух, то единственный способ найти решение — выбрать одного из голосующих («диктатора») и постановить, что его предпочтения совпадают с общественными. (На самом деле это только одна из версий теоремы Эрроу, полученная позднее. Кроме того, эта теорема относится к случаю конечного общества; в бесконечном случае решения можно принимать с помощью ультрафильтров, которые получили подобающий титул «правящих иерархий».)

В некотором смысле эта теорема объясняет точное содержание идеи общественного договора по Ж.-Ж. Руссо.

Фундаментальная внутренняя противоречивость представления об идеальном демократическом выборе может быть проиллюстрирована следующим рассказом о трех избирателях, имеющих три альтернативы. В рассказе речь идет о трех богатырях (в России так называли странствующих рыцарей) на перепутье, читающих надпись на камне. Ничего хорошего эта надпись не обещает: там сказано, что кто пойдет налево, потеряет меч, кто пойдет направо, потеряет коня, а кто пойдет прямо, тот сам погибнет. Богатыри спешиваются и собираются на совет. Самого молодого и горячего зовут Алеша Попович, самый старший и мудрый — Добрыня Никитич, а средний брат — простой крестьянин Илья Муромец. Алеша ценит свой меч выше, чем своего коня, а своего коня — выше, чем свою жизнь; Добрыня больше всего дорожит своей жизнью, затем мечом, и только затем — конем; Илья предпочитает своего коня своей жизни, а свою жизнь — своему мечу.

Как может заметить читатель, все три порядка индивидуальных предпочтений получаются один из другого циклическими перестановками. В результате этого можно большинством голосов выбрать между любыми двумя альтернативами из трех, но эти три выбора в совокупности несовместны: получить вполне упорядоченный список с помощью демократической процедуры не удается. Тяжело вздохнув, богатыри возлагают бремя выбора на Добрыню Никитича.

Сообщает ли нам теорема Эрроу что-то, чего мы не знали ранее? Я полагаю, что да, при условии, что мы готовы к ее серьезному обсуждению: если мы готовы аккуратно рассматривать ее комбинаторное доказательство, представлять себе, чему в жизни соответствуют различные предположения и элементарные логические шаги в доказательстве — короче говоря, если мы готовы уточнить наше неточное воображение с помощью жесткой логики математического рассуждения. Например, мы сможем лучше понимать некоторые трюки политиков и некоторые ловушки, в которые может легко (и даже с воодушевлением) попасть общество (одна из таких ловушек — принимать без возражений список альтернатив, выдвигаемый правящими кругами, тогда как основной частью процесса принятия решения было именно составление этого списка).

На этом этапе мы переходим к основной теме нашего обсуждения: что отличает математическую речь от обыденной, почему оказалось, что паскалевский «порядок» управляет нашей символической деятельностью, и действительно ли она «бесполезна при всей своей глубине».

1. Язык и математика

Очень интересный этап в истории взаимодействия математики с гуманитарными науками начался около тридцати лет тому назад вместе с первыми серьезными попытками автоматического перевода. Эти попытки окончились тяжелой неудачей — тяжелой, по крайней мере, для тех, кто считал, что никаких принципиальных трудностей в этом деле нет и остается только преодолеть технические проблемы, связанные исключительно с объемом обрабатываемой информации. Иными словами, энтузиасты автоматического перевода были убеждены, что перевод основан на не слишком сложном алгоритме, который остается только выписать в явном виде и перевести в компьютерную программу.

Это убеждение — хороший пример математической метафоры (а на самом деле — частный случай «компьютерной метафоры», используемой в науках о человеческом мышлении).

Эта метафора оказалась чрезвычайно полезной для теоретической лингвистики: она заставила лингвистов описывать словарь, семантику, морфологию и синтаксис естественных языков с невиданной ранее эксплицитностью и полнотой; в рамках этой программы был развит целый ряд совершенно новых понятий и инструментов.

И тем не менее успехи автоматического перевода были (и остаются) скромными. Оказалось, что естественная письменная речь — крайне неудобные исходные данные для любого алгоритма, предназначенного для перевода или даже логического вывода. (Я добавляю это уточнение, поскольку в качестве материала для, например, статистических исследований человеческая речь ничего необычного из себя не представляет).

Описанное обстоятельство можно рассматривать как универсальное свойство естественных языков, заслуживающее более внимательного рассмотрения. Прежде всего, следует отвергнуть как слишком наивное традиционное объяснение, гласящее, что универсум смыслов естественного языка слишком велик и слишком плохо структурирован и потому не может быть описан с помощью хорошо организованного метаязыка. Проблема в том, что с той же трудностью мы столкнемся, даже если резко ограничим этот универсум — до подмножества арифметики, имеющего дело с маленькими целыми числами. Собственно говоря, именно из-за этой трудности в первую очередь и развилась вся система арифметических обозначений вместе с основными алгоритмами вычислений. Даже словарь элементарной арифметики в естественных языках в основе своей архаичен: конечный натуральный ряд примитивных обществ «один, два, три, много» воспроизводится на экспоненциальной шкале: «тысяча, миллион, миллиард, зиллион[1]». Названия даже небольших чисел, например, «1989», являются на самом деле названиями не числа, а его десятичной записи.

Алгебра Виета превосходила полусловесную алгебру Диофанта не потому, что с ее помощью можно было выразить новые значения, но потому, что она была несравненно лучше приспособлена к алгоритмической обработке («тождественным преобразованиям» из нашей школьной алгебры).

Столь характерный для языка науки разрыв интуитивных и эмоциональных связей между текстом и его создателем/пользователем компенсируется приобретаемыми вычислительными автоматизмами. В своей (пусть и ограниченной) области этот автоматизм оказался бесконечно эффективнее, чем традиционная платоновско-аристотелевская культура рассуждений в рамках обыденного языка. Но почему же тогда наши научные статьи по-прежнему выглядят как неорганизованная смесь слов и формул? Отчасти потому, что мы по-прежнему нуждаемся в этих эмоциональных связях; отчасти же потому, что некоторые значения (например, содержание ценностных суждений) лучше всего выражаются на естественном языке. Однако естественный язык имеет некоторые внутренние преимущества даже и как средство выражения научной речи: апеллируя к пространственному и качественному воображению, он помогает понимать такие «структурно устойчивые» свойства, как число свободных параметров (размерность), существование экстремумов, симметрии. Грубо говоря, он позволяет использовать науку как метафору.

2. Метафора и доказательство

Излагаемые здесь взгляды можно рассматривать в связи с обсуждениями школьных и вузовских программ.

В первой половине XX века общее математическое образование было ориентировано на приложения. Оно снабжало учащегося минимумом умений, необходимых для решения повседневных задач и для безболезненного перехода к изучению научных и инженерных

[1] Английское слово, означающее примерно «очень-очень много». — *Ю. М.*

вычислений в высшей школе. Разрыв между учебными программами и предметом деятельности профессиональных математиков становился все более и более явным. Хорошо известно, что реакцией на этот разрыв была «новая математика» в США и аналогичные программы в других странах. Эти программы вводили в школьную математику идеи и принципы, позаимствованные у профессионалов: теорию множеств, доказательства, основанные на аксиомах, культуру строгих определений.

«Новая математика» широко внедрялась, но при этом ее распространение сопровождалось голосами протеста, слившимися в 70-х и 80-х годах в мощный хор. Критики оспаривали основные доводы адептов «новой математики». Оставляя в стороне возражения, основанные на данных психологии и когнитивных наук, я остановлюсь только на доводах, связанных с общей оценкой роли доказательства в математике.

На одном полюсе тут стоит хорошо известное высказывание Никола Бурбаки: «Со времен греков говорить „математика“ значит говорить „доказательство“». В соответствии с этой идеей, строгость доказательств стала в «новой математике» делом принципа. В поддержку этого приводились следующие доводы: (а) доказательство помогает понять математический факт; (б) строгие доказательства — наиболее существенная часть современной профессиональной математики; (в) в математике имеются общепризнанные критерии строгости.

Эти взгляды подвергались широкой критике, например, в книге Джилы Ханны «Rigorous Proofs in Mathematics Education» (автор: Gila Hanna. Ontario: OISE Press, 1983). В частности, автор указывал, что математики далеко не единодушны в том, каковы должны быть критерии строгости (при этом поминалась жаркая полемика между логицистами, формалистами и интуиционистами) и что работающие математики постоянно нарушают все правила.

На мой взгляд, эти возражения — не по существу.

Существенным возражением является то, что упор на доказательства нарушает баланс между базисными ценностями. Доказательство как таковое является производным от идеи истинности. Но существуют ценности и помимо истины: деятельность, красота, понимание; все они не менее важны при обучении в школе. Учитель (или университетский профессор), этими идеями пренебрегающий, обречен на тяжелую неудачу. К сожалению, эта идея также принимается не всеми. Социологический анализ споров вокруг теории катастроф Рене Тома показывает, что волна критики этой теории была вызвана переносом акцента с формальной истины на понимание. Разумеется, теория катастроф является одной из хорошо развитых математических метафор, и только как таковую ее и следует судить.

С педагогической точки зрения доказательство — всего лишь один из жанров математического текста. Имеется и множество других жанров: вычисление, набросок доказательства с пояснениями, компьютерная программа, описание алгоритмического языка или такой пренебрегаемый сейчас жанр, как обсуждение связей между формальным определением и интуитивным понятием. У каждого из жанров есть свои законы, и в частности — свои законы строгости; единственная причина, по которой они не кодифицированы, — это то, что им не уделялось специального внимания.

Основная задача преподавателя — продемонстрировать на ограниченном пространстве своего курса многообразие видов математической деятельности и соответствующих им ценностных ориентаций. Разумеется, это многообразие организовано иерархически. Цели обучения могут варьироваться от приобретения элементарной арифметической и логической грамотности до приобретения программистских навыков и от решения простейших задач из повседневной жизни до овладения принципами современного научного мышления. В спектре этих целей ориентация на «строгое доказательство» вполне может занимать место на периферии.

После всего сказанного я должен подчеркнуть, что мои доводы никоим образом не подрывают идеал строгого математического рассуждения. Этот идеал является одним из основных принципов математики, и в этом смысле Бурбаки, бесспорно, прав. С тех пор, как математика не имеет внешнего предмета изучения и основывается на согласии ограниченного круга посвященных, она не может развиваться вне рамок, доставляемых жесткими правилами. Возможностью своих приложений в строгом смысле этого слова (например, необходимых для проекта «Аполлон») математика обязана нашей способности жестко контролировать фантастической длины последовательности манипуляций с символами.

Существование этого идеала гораздо важнее, чем его недостижимость. Свобода математики (Г. Кантор) может развиться только внутри рамок железной необходимости. Комплектующие современных компьютеров являются воплощением этой необходимости.

Метафора помогает человеку дышать в этой разреженной атмосфере богов.

Вычислимость и язык

1. Предисловие

Использование электронно-вычислительной техники связано с возможностью алгоритмического решения задач и эффективного вычисления функций. Между тем в математике широко используются функции, заданные неэффективными определениями. Столь же часты доказательства разрешимости задач, например оптимизации, не сопровождаемые алгоритмами их решения.

В действительности класс задач, доступных классическим средствам, в некотором трудно уточняемом смысле строго шире класса задач, решаемых алгоритмически. Книга посвящена прояснению смысла этого утверждения, изложению математических моделей вычислимости, а также некоторых недавних результатов, которые используют понятия теории вычислимости, но выходят за ее пределы. Сюда относятся прежде всего идеи А. Н. Колмогорова о связях понятий вычислимости и случайности, а также результаты о теоретико-числовых аспектах теории вычислений. Более подробно математическая проблематика книги обсуждена во введении. ⟨…⟩

2. Введение

1. Алгоритм — это текст, который в определенных обстоятельствах может привести к однозначному развитию событий — процессу выполнения алгоритма. Фермент, катализирующий специфическую реакцию, устав караульной службы или программа ЭВМ — примеры алгоритмов в этом широком смысле слова.

Математика поставляет алгоритмы вычислений и обработки символьной информации, которые являются существенными компонентами научной деятельности; языки для записи алгоритмов, их работы и результатов; проекты физических устройств, выполняющих алгоритмы. Наконец, математика строит теоретические модели всех этих понятий.

Предисловие и введение к книге: Вычислимое и невычислимое. М.: Советское радио, 1980. С. 5—15. (Сер. Кибернетика).

Таким теоретическим моделям — математической теории алгоритмической вычислимости — посвящена эта книга. Она является естественным продолжением книги «Доказуемое и недоказуемое» (М.: Сов. радио, 1979), но по большей части может быть прочитана независимо от нее.

2. Простейшая, но очень универсальная модель алгоритма постулирует, что алгоритм предписывает способ вычисления функции, заданной на подмножестве целых положительных чисел Z^+ и принимающей целые положительные значения. Для одной и той же функции таких способов может быть много. Оказывается, что среди них есть следующий типовой способ; по любому описанию алгоритма вычисления функции $y = f(x)$ можно построить многочлен

$$P_f(x, y;\ t_1, \ldots, t_n)$$

с целыми коэффициентами такой, что $b = f(a)$, если и только если существуют целые числа $t_1^0, \ldots, t_n^0, \in Z^+$ с условием

$$P_f(a, b;\ t_1^0, \ldots, t_n^0) = 0.$$

Зная P_1 и a, мы можем найти $b = f(a)$ перебором векторов $(b, t_1, \ldots$ $\ldots, t_n)$ по очереди. Это — основной результат первых двух глав книги. Путь к нему долог. Первая половина пути состоит в анализе самой идеи детерминированного процесса вычислений; этот анализ приводит к представлению о том, что такой процесс может быть разложен па элементарные шаги из конечного и фиксированного раз и навсегда списка и что функции, вычислимые с помощью итерации этих шагов, исчерпывают функции, вычислимые любым другим алгоритмическим способом. Последнее утверждение является естественнонаучным постулатом, который не доказывается математически, но подтверждается экспериментально. Такой анализ связан с именами Тьюринга, Чёрча, Поста, Маркова, Клини, Колмогорова. Он приводит к математическому определению рекурсивной функции, которое вводится и изучается в первой главе.

Вторая половина пути состоит в математической обработке понятия рекурсивной функции средствами элементарной, но очень нетривиальной теории чисел. Первые идеи здесь были заложены в работах Гёделя, Дэйвиса, Патнэма, Дж. Робинсон, а завершающий результат получен Ю. В. Матиясевичем.

3. Реальный процесс вычислений производится над *записями* чисел, скажем, в двоичной системе. Первый этап работы любой большой ЭВМ состоит в алгоритмической переработке программы, написанной на языке программирования, в программу на языке машинных

команд. Осуществляющий такую переработку транслятор есть алгоритм, переводящий символьную информацию в символьную. Поэтому в математической теории вычислимости, опирающейся на понятие рекурсивной функции, должна найти свое место модель связи между числами и текстами. Такой модели — нумерации Гёделя — посвящена гл. IV. Ее основной результат состоит в том, что все элементарные операции над текстом, которые могут лечь в основу процессов алгоритмической переработки текстов, превращаются в рекурсивные функции при любой естественной нумерации текстов. Поэтому нумерация позволяет перевести такую теорию на язык рекурсивных функций.

Принципиальное значение этого результата состоит в том, что он открывает возможности вводить разного рода «замыкания вычислительного универсума». Если аргументы и значения вычислимых функций могут быть текстами, то текст, описывающий алгоритм, сам может быть предметом обработки алгоритмом. Далее можно вообразить себе алгоритм, порождающий все тексты, которые являются описаниями алгоритмов.

Исследование свойств таких универсальных конструкций, в частности эффектов самоприменимости, приводит к обнаружению алгоритмически неразрешимых математических задач и недоказуемых теорем в формальных языках. Очень общему результату Гёделя о неполноте формальной математики посвящена пятая глава, а одной тонкой неразрешимой задаче из теории групп — шестая глава.

Теорема Матиясевича из гл. II также немедленно приводит к утверждению о неразрешимости одной из знаменитых проблем Гильберта.

4. Существование алгоритмически неразрешимых задач и формально недоказуемых истин было первым фундаментальным открытием теории вычислимости, если не считать самой системы основных понятий этой теории. Сейчас такого рода результаты продолжают появляться и вызывать интерес: см., например, §6 гл. V, где сформулирована усиленная теорема Рамсея — несложное комбинаторное утверждение, невыводимость которого из аксиом арифметики была обнаружена лишь в 1977 году. Но основные тенденции теории вычислимости определяются работами, которые мотивированы ее прикладными, общематематическими и даже общенаучными аспектами.

К первому направлению относятся многочисленные работы по созданию эффективных, т. е. укладывающихся в реальные ограничения на время работы и объем памяти, алгоритмов решения конкретных вычислительных задач и теории алгоритмов. Сюда же относятся разработки языков программирования и трансляторов, а также принципов их создания. Возникающая новая дисциплина — теоретическое программирование — вынуждена при этом работать иногда на самом краю «пропасти неразрешимости», но все же ее главная забота состоит в том, как сделать хорошо то, что в принципе сделать можно. Цели и объем этой книги не позволили нам коснуться этой огромной и важной области. Теория рекурсивных функций лишь очерчивает ее самые отдаленные границы.

Ко второму направлению можно отнести исследования, связывающие теорию вычислимости с более классическими математическими структурами. Так же, как соединение структур группы и дифференцируемого многообразия приводит к понятию группы Ли, ко многим математическим определениям можно добавить условие вычислимости входящих в это определение операций или, более общо, конструктивности объектов и получить новую версию традиционной теории. Уже построены конструктивные варианты анализа и фрагментов других теорий. Можно надеяться, что предрассудки философского порядка, связывающие эти идеи с устаревшими концепциями «обоснования математики», будут постепенно отходить в тень и общематематическая роль полученных результатов будет осознаваться яснее. Конструктивная математика призвана не заменить классическую, а стать ее полноправной частью. В частности, задача характеризации рекурсивных структур в более обычных терминах, образцами которой служат теоремы Матиясевича (гл. II) и Хигмэна (гл. VI), вероятно, даст еще много замечательных результатов. Пример гораздо менее прямолинейной связи рекурсивности с классической математикой представляют глубокие идеи А. Н. Колмогорова в теории сложности и теории вероятностей, введению в которые посвящена гл. III. Формально говоря, одна из задач, решенных Колмогоровым и его учениками, состоит в точной математической характеризации случайных последовательностей. Но по существу Колмогоров сделал предметом глубокой теории интуитивное ощущение того, что степень организованности больших структур (в противовес их случайности и хаотичности) проявляется в ходе алгоритмического взаимодействия с ними, далеко не сводящегося к простым процедурам подсчета частот (см. § 3, гл. III).

Поэтому теорию Колмогорова [4], [5], [6] можно с равным правом отнести к третьему направлению развития идей вычислимости, направлению, где теория алгоритмов рассматривается как формализованная модель алгоритмической деятельности и алгоритмических процессов в широком понимании. К таким процессам относится, скажем, перевод текстов на естественных языках или разворачивание генотипа в фенотип, происходящее в процессе развития живого организма.

Такая точка зрения на алгоритмы позволяет увидеть неожиданные аналогии и постановки задач, заслуживающие обдумывания. Опишем вкратце два круга идей, относящихся к лингвистике и физике соответственно.

5. Язык в широком плане есть структура управляющих воздействий в сложной системе; речь — конкретный фрагмент таких воздействий. Соотношение *текст / значение текста* подобно не соотношению *фотография / реальность*, а соотношению *программа / выдачи* или *программа / вычислительный процесс*.

В результате многолетней работы над проблемой автоматического перевода выкристаллизовалась одна из значительных общих концепций современной лингвистики: известная модель «смысл ⟷ текст» (см. [1], [2]). В этой модели язык представляется как соответствие между двумя бесконечными множествами: «*текстов*» и «*смыслов*». Элементами первого множества являются тексты на том или ином естественном языке; элементами второго — также тексты, но на искусственном семантическом языке, подлежащем конструированию. Соответствие сопоставляет каждый естественный текст с набором его возможных смыслов, а каждый смысл — с набором его возможных выражений на естественном языке. Семантический язык в принципе должен быть универсальным по разным параметрам, в частности, не зависящим от исходного естественного языка. Лингвистика есть теория перевода «смысл ⟷ текст». Перевод должен осуществляться через ряд промежуточных этапов, называемых уровнями представления предложений естественного языка. К этим уровням относятся: фонетический (или орфографический), фонологический, поверхностно-морфологический, глубинно-морфологический, поверхностно-синтаксический, глубинно-синтаксический и семантический. «Каждый из уровней, за исключением, может быть, орфографического, задается своим формальным языком; на каждом из уровней исходное предложение имеет формальный образ, называемый представлением предложения — фонологическим, поверхностно-морфологическим, глубинно-морфологическим и т. д.» [2, с. 4].

«Модель „смысл ⟷ текст“, таким образом, является инструментом, который делает возможным овладение смыслом большого круга текстов на естественном языке. Поэтому представляется заманчивой реализация этой модели на ЭВМ и ее использование для решения задач, возникающих в различных автоматических и автоматизированных системах обработки текстовой информации» [2, с. 5].

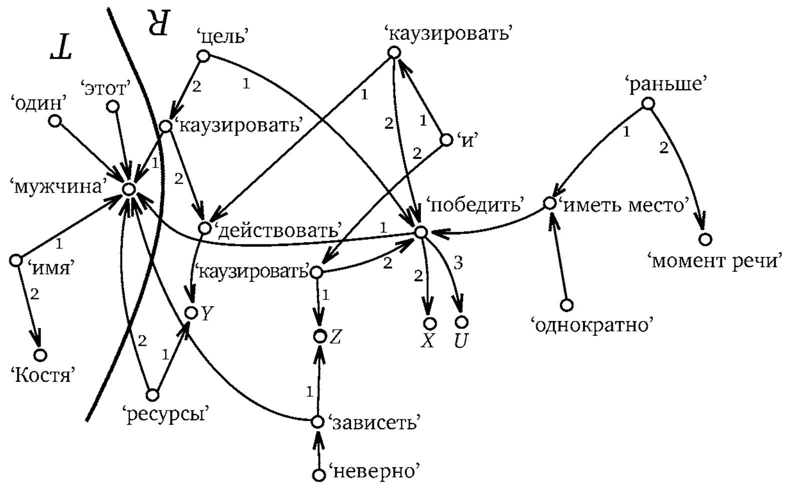


Рис. 1

Разработка детализированной модели — долгое и кропотливое дело. Анализ даже простых образцов бытовой речи приводит к довольно сложным комбинаторным структурам на уровне семантического представления (см. рис. 1, где приведено семантическое представление фразы «Косте удалось победить», взятое из [1, с. 671]). В исследовании оказываются запутанными проблемы анализа семантики и создания языка смыслов и собственно перевода в обе стороны. Неясно, какой максимальный уровень структурированности может быть достигнут и каково происхождение «неалгоритмизуемого остатка»: является ли он следствием исторических случайностей и прихотливости естественного языка или есть более глубокие причины его существования.

Некоторый свет на этот вопрос проливает попытка рассмотреть упрощенные варианты модели «смысл ⟷ текст». В частности, удобно выбрать такую ограниченную область смыслов, чтобы ее семантическое представление имело возможно более простую и фиксированную структуру. Выберем в качестве этой области «натуральные числа», семантически представляя их последовательностями палочек: I, II, III, IIII, … История ее представления средствами естественных языков относится к описательной лингвистике; одновременно она доставляет ценные свидетельства о ранних стадиях математического мышления.

В частности, «предматематический» период отражен в следующих чертах системы названий чисел в различные естественных языках.

В некоторых примитивных языках имеются названия лишь для малых натуральных чисел, остальные обозначаются единым словом «много». Так, в папуасских языках генде, кати, каморо имеется два собственно числительных 1 и 2, далее до 20 счет идет по пальцам рук и ног, на 20 натуральный ряд «кончается». Разумеется, система {1, …, 20, много} может быть без труда оформлена как непротиворечивый «малый универсум» математики. Более того, такой и аналогичные натуральные ряды заново рассматриваются в одной из школ оснований математики («ультраинтуиционизм») на равных или даже преимущественных правах со стандартным натуральным рядом классической математики. Однако нельзя переоценивать значения этого рафинированного возвращения сознания к архаичным стадиям и отказываться от могущественной идеи потенциально или даже актуально бесконечной продолжимости ряда целых чисел.

В некоторых языках сохранились разные серии названий числительных для счета предметов разной природы (длинных, круглых, одушевленных, неодушевленных и т. п.). Это свидетельствует о долгом периоде формирования идеи о числе как об инструменте, пригодном для счета «чего угодно». Сознание человека довольно долго не было готово к объединению в один «класс эквивалентности» произвольных (хотя бы и малых конечных) равномощных множеств; эта же идея в применении к бесконечным множествам стала достоянием математики лишь после работ Г. Кантора. Следы таких разных типов счета сохранились в современном китайском языке, где хотя и имеется единая система числительных, но она дополняется развитой системой счетных частиц, употребляемых с существительными разных классов типа kuài («кусок»), gè («штука»), běn («корешок») и т. д.

В ряде языков отмечается различие корней, от которых образуются соответствующие порядковые и количественные числительные (ср. uno/primo, duo/secundo в латыни). В этих свидетельствах можно усмотреть весьма раннее зарождение идеи порядка (в отличие от идеи количества), оформившейся в качестве самостоятельного математического понятия удивительно поздно («кардиналы» и «ординалы» Кантора и структуры порядка Н. Бурбаки).

Первые дошедшие до нас тексты (Вавилон, Египет) отражают уже картину развитых математических знаний, в частности, зарождение языка математических обозначений, достаточно четко отдаленного от естественного языка. Основное место в нем занимает система обозначений чисел и операций над ними. Предыстория позиционной системы обозначений современного типа основана на идее счета все более крупными единицами. Эти единицы могут быть степенями одного и того же числа (основание позиционной системы), но это не обязательно. Так, в хронологической системе майя единицы счета суть 1, 18, 360 и далее 18, 20 (ср. следы архаического счета двадцатками во французских числительных типа quatre-vingt-six). Число единиц очередного разряда обозначается специальным символом, который поначалу может зависеть и от номера разряда (у египтян, греков, римлян). Когда этот символ перестает зависеть от номера разряда и последний определяется лишь положением символа в цепочке, для недвусмысленного прочтения записи становится необходимым символ нуля. Его появление задерживается довольно надолго; к концу вавилонской традиции отсутствие единиц данного разряда отмечается нулем лишь в середине записи. Идея о том, что символ нуля является не просто значком, но обозначением самостоятельного числа, имеет еще более позднее происхождение и приписывается индусам, у которых она была заимствована европейской математикой под арабским влиянием. Сама позиционная запись содержит уже зачатки теории алгебраических операций над числами: прочтение записи требует умножения единицы очередного разряда на число этих единиц и сложения результатов. Правила выполнения действий над целыми числами в позиционной записи были даны аль-Хорезми, имя которого фонетически трансформировалось в современное слово алгоритм.

На этом уровне система названий чисел в естественном языке перестает быть лингвистическим материалом: «тысяча девятьсот восемьдесят четыре» есть собственно название десятичной записи 1984, а не числа, изображаемого этой записью, т. е. некоторое вторичное явление. (Число 1000 в двоичной записи психологически трудно прочесть, «восемь» воспринимается сейчас скорее как имя *цифры*, чем имя *числа*.) Поэтому откажемся от рассмотрения наименований чисел в естественном языке и попытаемся представить себе характерные черты любой мыслимой системы наименований: десятичной, двоичной или даже не обязательно позиционной. Очевидно, минимальные требования должны быть такими: наименования должны быть конечными текстами; способ восстановления числа по наименованию должен быть вычислимой функцией, т. е. задаваться алгоритмом. Если бы дело этим ограничивалось, нечего было бы заменять наименования I, II, III, ... другими. Позиционная система реализует фундаментальное открытие: число N можно записать $\log N$ знаками вместо палочек; даже очень большие числа имеют короткие записи. Смысл записи воплощен в алгоритме ее переработки в последовательность палочек. Правила аль-Хорезми суть алгоритмы переработки записи двух чисел в записи их суммы и произведения.

Но тогда в качестве модели системы наименований чисел мы можем взять любую вычислимую функцию f от натуральных чисел (вспомним, что тексты можно заменять их номерами Гёделя), принимающую все натуральные значения. Оставив в стороне вычислимость операций, сосредоточимся на идее экономии: нас интересует функция f, такая, чтобы имя n каждого числа N, т. е. значение аргумента f, для которого $f(n)=N$ было настолько малым, насколько это вообще возможно (в двоичной записи числа «$10^{10^{\cdots^{10}}}$ (1000 раз)» очень много бит, но мы сумели записать его совсем коротко. См. также сведения о функции Рамсея в § 6 гл. V). Как доказал А. Н. Колмогоров, такие функции f существуют и могут быть построены явно: каждая из них позволяет назвать число N настолько коротким именем, насколько позволяет любая другая система наименований g, возможно, с потерей некоторого числа бит, зависящего от f и g, но не от N.

Однако это условие оптимальности неизбежно влечет за собой следующие свойства функции f. В любой оптимальной системе наименований:

а) каждое число имеет бесконечно много наименований;

б) не все целые числа n являются наименованиями: функция f лишь частично рекурсивна, но не общерекурсивна, и не может быть продолжена до общерекурсивной;

в) восстановление числа по его наименованию в оптимальной системе требует работы сложного алгоритма: оптимальные функции строятся с помощью универсальных вычислимых функций, которые в некотором смысле настолько сложны, насколько это вообще возможно;

г) проблема отыскания по числу его наиболее короткого наименования алгоритмически неразрешима, анализ большого числа на предмет обнаружения структурированности, позволяющей назвать его коротко, есть творческая задача.

Сопоставим этот список свойств оптимальной системы наименований чисел со следующими свойствами естественного языка:

А. *Обилие синонимии: каждый смысл может быть выражен огромным количеством текстов на естественном языке.* (Для фразы «Смит не сумел перевести этот текст только из-за того, что в нем оказалось много специальных терминов» по оценке [1] имеется более миллиона перефразировок);

Б. *Открытость языка: на каждый момент времени не все грамматически правильные тексты осмыслены*. (Эта краткая констатация нуждается в тщательном обсуждении. В модели «Смысл ⟷ Текст» полагается, что любой правильный текст может быть переведен в правильный текст на языке смыслов, но среди последних есть «бессмысленные» в неформальном понимании этого слова: интересующая нас категория, стало быть, переводится на другой уровень.) Эта открытость естественного языка является исключительно важным резервом его творческого использования не только в поэзии и философии, но и в науке. Для выражения вновь возникающего смысла может быть использован ранее неосмысленный текст («волна вероятности» в квантовой механике или более прозаический «пакет молока»). Еще интереснее факты рождения нового смысла из ранее неосмысляемых, хотя и грамматически допустимых языковых выражений (поэтические метафоры; континуальные интегралы Фейнмана);

В. *Перевод «Текст → Смысл» требует многоступенчатой работы системы сложных алгоритмов, выявляющих огромную структурированность языковых конструкций*;

Г. *Во всех разработках перевод «Смысл ← Текст» оказывается еще гораздо более трудным, чем обратный*.

Сопоставление свойств а)—г) и А—Г показывает их удивительный параллелизм. Это побуждает высказать гипотезу о том, что многие черты естественных языков, обычно относимые за счет исторических случайностей, хотя бы частично отражают свойства экономичности языка: его возможности кратко выразить сложный смысл, который такое выражение вообще допускает. Обилие синонимических способов выражения и бессмысленных текстов кажется противоречащим этой гипотезе, но если считать нашу модель адекватной, то это обилие парадоксальным образом оказывается неизбежным следствием экономичности.

6. В посленьютоновской физике основным выражением идеи детерминированности служит принцип, согласно которому развитие изолированной физической системы в пространстве — времени определяется дифференциальными уравнениями («законы природы») и граничными (начальными) условиями. Этот принцип принимается и в квантовой идеологии: вероятностный аспект квантовой теории существен для описания взаимодействий, в частности, с измерительным устройством, но не для теории изолированной системы.

Вычислительный процесс можно рассматривать как другую модель идеи детерминированности. Она во многом параллельна первой: «закон» отвечает структуре вычислительного устройства, начальные условия — программам. Разбиение вычислительного процесса на элементарные шаги, включающие, в частности, простейшие малые изменения содержимого памяти (как стирание или вписывание символа на ленте машины Тьюринга), можно сопоставить с идеей дифференцирования. В таких процедурах, как решение уравнения теплопроводности методом сеток, мы совершаем довольно прямолинейную имитацию непрерывной детерминированности с помощью дискретной, но, вообще говоря, сопоставление этих двух моделей далеко не тривиально.

Молекулярная биология доставляет образцы поведения естественных (не сконструированных человеком) систем, которое мы вынуждены описывать в терминах, близких к принятым в теории дискретных автоматов. На рис. 2 изображена схема синтеза белка на информационной РНК: она очень похожа на изображение машины Тьюринга, копирующей информацию с одной ленты на другую.

Классические непрерывные системы, управляемые дифференциальными уравнениями, могут имитировать дискретные автоматы лишь при исключительно сложной структуре своего фазового пространства: обилии областей устойчивости, разделенных невысокими энергетическими барьерами. Ввод программы проделывает изощренную систему проходов в этих барьерах, предопределяя движение фазовой траектории по этому лабиринту. Как физическая система вычислитель должен быть очень неустойчив, ибо ошибка в один знак в программе, вообще говоря, приводит к совершенно другой траектории. Но сам процесс вычисления должен быть беспримерно стабильным, т. е. самопроизвольные ошибки (переход траектории через барьер, который должен быть закрыт, в результате флуктуации) должны иметь весьма малую вероятность. Хорошо известно, что эти требования (в сочетании с медленностью работы и экспоненциальным ростом диссипируемой энергии при увеличении сложности) поставили барьер перед развитием механических компьютеров. Между тем действие «генетических автоматов» мы пытаемся часто описывать именно такими механическими терминами. К самым известным парадоксам, к которым приводит такое описание, относится гипотетическая картина разворачивания двойной спирали в процессе репликации. В этой картине двойная спираль бактериальной хромосомы закручена примерно на 300 000 оборотов. Так как ее удвоение в благоприятных обстоятельствах занимает 20 мин, согласно механической модели репликации, при разворачивании спирали часть хромосомы должна вращаться со скоростью, не меньшей 125 оборотов

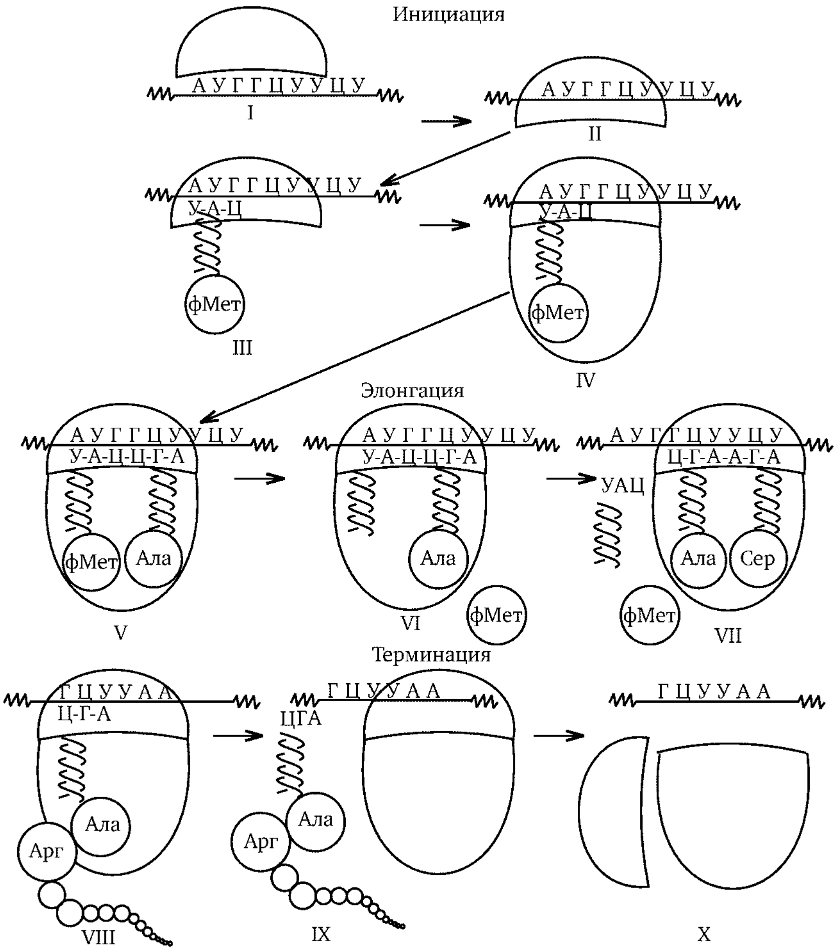


Рис. 2

в секунду. Параллельно должна происходить сложная сеть безошибочных биохимических превращений.

Возможно, для прогресса в понимании таких явлений нам недостает математической теории квантовых автоматов. Такие объекты могли бы показать нам математические модели детерминированных процессов с совершенно непривычными свойствами. Одна из причин этого в том, что квантовое пространство состояний обладает гораздо большей емкостью, чем классическое: там, где в классике имеется *N* дискретных состояний, в квантовой теории, допускающей их суперпозицию, имеется c^N планковских ячеек. При объединении классических систем их числа состояний N_1 и N_2 перемножаются, а в квантовом варианте получается $c^{N_1 N_2}$.

Эти грубые подсчеты показывают гораздо большую потенциальную сложность квантового поведения системы по сравнению с его классической имитацией. В частности, из-за отсутствия однозначного разделения системы на элементы состояние квантового автомата может рассматриваться многими способами, как состояние совершенно разных виртуальных классических автоматов. (Ср. со следующим поучительным подсчетом в конце работы [3]. «Для квантовомеханического расчета молекулы метана требуется провести вычисления по методу сеток в 10^{42} точках. Если считать, что в каждой точке следует выполнить всего 10 элементарных операций, и предположить, что все вычисления производятся при сверхнизкой температуре ($T = 3 \cdot 10^{-3}$ К), то и при этом расчет молекулы метана потребует израсходовать энергию, производимую на Земле примерно за столетие».)

Первая трудность при проведении этой программы состоит в выборе правильного баланса между математическими и физическими принципами. Квантовый автомат должен быть абстрактным: его математическая модель должна использовать лишь самые общие квантовые принципы, не предрешая физических реализаций. Тогда модель эволюции есть унитарное вращение в конечномерном гильбертовом пространстве, а модель виртуального разделения на подсистемы отвечает разложению пространства в тензорное произведение. Где-то в этой картине должно найти место взаимодействие, описываемое по традиции эрмитовыми операторами и вероятностями.

Литература

1. *Мельчук И. А.* Опыт лингвистических моделей «Смысл ⟷ Текст». М.: Наука, 1974.
2. *Апресян Ю. Д., Богуславский И. М., Иомдин Л. Л., Крысин Л. П., Лазурский А. В., Перцов Н. В., Санников В. З.* Лингвистическое обеспечение в системе автоматического перевода третьего поколения. М.: Научный Совет по комплексной проблеме «Кибернетика» при Президиуме АН СССР, 1978.
3. *Поплавский Р. П.* Термодинамические модели информационных процессов // УФН. 1975. Т. 115. Вып. 3. С. 465—501.
4. *Колмогоров А. Н.* Три подхода к определению понятия «количество информации» // Проблемы передачи информации. 1965. Т. 1. Вып. 1. С. 3—7.

5. *Колмогоров А. Н.* К логическим основам теории информации и теории вероятностей // Проблемы передачи информации. 1969. Т. 5. Вып. 3. С. 3—7.
6. *Звонкин А. К., Левин Л. А.* Сложность конечных объектов и обоснование понятий информации и случайности с помощью теории алгоритмов // УМН. 1970. Т. 25. Вып. 6. С. 85—127.

Истина, строгость и здравый смысл

Мише Савельеву к пятидесятилетию

На мой взгляд, в 1995 году главная трудность с обсуждением природы математической истины состоит в том, что после эпохи глубоких открытий в конце тридцатых годов, увенчавшейся результатами Гёделя и Тарского, никаких новых идей не возникло.

Чтобы не повторяться и оживить обсуждение, можно попробовать рассмотреть вопрос в более широком контексте или добавить к обсуждению немного личного. В обоих случаях возникает опасность, что внимание читателя переключится на темы, лишь отчасти связанные с исходной; приношу извинения за то, что я выбрал столь сомнительную тактику.

Этот доклад делится на три части.

(а) Размышления об истории математики как одного из жанров символических (или семиотических) игр.

(б) Обсуждение проблем доказательства и математической истины в контексте современных исследований (в связи с недавними спорами вокруг письма А. Джаффе и Ф. Квинна [4]).

(в) Три примера (анализ которых предоставлен читателю).

Мы будем базироваться на весьма наивной философской основе.

С наивной точки зрения истинное утверждение — это утверждение, которое можно подвергнуть верификации с тем, что оно эту верификацию пройдет. Верификация — это процедура, включающая какое-то сравнение утверждения с реальностью; тем самым подразумевается, что верифицируемым утверждениям приписывается какой-то смысл (это в равной мере относится и к «очевидным» утверждениям, проверка которых опускается). Реальность, о которой идет здесь речь, может быть произвольным мыслительным конструктом, от «свободно падающего тела» до «трансфинитных кардиналов». Мы обойдем молчанием вопрос о том, как верифицировать утверждения о трансфинитных кардиналах, который, несомненно, будет рассмотрен другими докладчиками.

Впервые опубликовано: Truth, rigor and common sense // Truth in Mathematics / Ed. by H. G. Dales and G. Olivieri. Oxford: Clarendon Press, 1998. P. 147—159. *Перевод с английского С. М. Львовского.*

Утверждение как таковое является лингвистическим конструктом. Перед тем как подвергнуть его процедуре верификации, необходимо удостовериться, что оно является грамматически правильным во-первых и осмысленным во-вторых.

Логика учит нас, что некоторые формальные конструкции переводят истинные утверждения в истинные же (первым примером такого рода были силлогизмы). В математике такого рода конструкции используются рекурсивно. Непосредственное сопоставление с реальностью сводится к сравнительно редким приложениям математики и, возможно, к исследованию оснований. Основная часть математического знания выглядит как обширная игра ума, подчиненная строгим правилам.

Можно также попробовать применить понятие истинности не к отдельным утверждениям, но к таким объектам, как роман, научная теория или теологическая доктрина. Понятия «грамматическая правильность», «смысл», «реальность» и «верификация» при этом приобретут новые измерения, но, похоже, не потеряют своего эвристического значения. Новое явление, которое можно назвать нелокальностью, состоит в том, что осмысленность или истинность теории при этом будут основываться не только на составляющих ее утверждениях, но и на доктрине в целом.

Все упомянутые выше общежитейские понятия подвергались тонкому теоретическому анализу во множестве философских трудов. Все эти понятия, включая «реальность», подвергались и разносторонней критике вплоть до полного разрушения. Например, стоит вспомнить, какая судьба постигла идею верификации теорий: приводились доводы в пользу того, что ни одну теорию верифицировать нельзя и что возможна только фальсификация.

В дальнейшем я постараюсь держаться здравого смысла и избегать крайних взглядов. Какие-то крупицы истины могут проникнуть даже в самую дикую деконструкцию этого понятия, но слабость такого рода подходов обычно проявляется, стоит только начать судить этот подход по его собственным стандартам.

1. Математическая истина в истории

Современное понятие математической истины восходит к древней Греции. Бурбаки кратко выражает эту мысль так: «Depuis les Grecs, qui dit Mathématiques, dit démonstration»[1]. При этом для математики нужны именно доказательства, понимаемые как цепочки хорошо органи-

[1] Со времен древних греков «математика» значит «доказательство» (*фр.*).

зованных стандартных шагов, а не как акты демонстрации (вопреки этимологии слова «доказательство»).

Помимо всего прочего, это означает, что современная математика представляет собой по существу лингвистическую деятельность, опирающуюся на язык, обозначения и манипуляции с символами как на средство убеждения собеседника даже в тех случаях, когда речь идет о реальности (геометрической, физической или еще какой-либо). Связность рассуждения, не содержащего противоречий и избегающего пробелов, играет важную роль в установлении того обстоятельства, что то или иное высказывание действительно доказывает то, на доказательство чего оно претендует. Строго говоря, статус постулатов P, на которых основывается доказательство утверждения S, не обязан быть предметом обсуждения в математике: она отвечает главным образом за структуру вывода.

У этой идеализированной картины имеется длинная предыстория; опишем вкратце некоторые архаические типы протоматематического поведения.

Экономическая и военная жизнь ранних человеческих коллективов была сопряжена с учетом продовольствия, размера племени, времен года и т. п. Элементарная арифметика, которую мы знаем, возникла только постепенно как диалект языка, обслуживающий нужды такого учета.

В то время как основной (а на протяжении тысячелетий — и единственной) формой существования естественных языков была устная речь, устный, а затем и письменный язык элементарной арифметики лишь постепенно выделялся из многочисленных архаических форм, включающих в себя счет на пальцах и других частях тела, собирание камешков и палочек, завязывание узелков (в наши дни, когда электронная арифметика теснит письменную, можно наблюдать, как этот процесс идет в противоположном направлении).

Математик, склонный подчеркивать «изоморфизм» всевозможных упомянутых реализаций универсума натуральных чисел и операций над ними, должен сознавать, что такой подход является очень существенной модернизацией.

В терминах классической соссюровской дихотомии *языка* как системы и *речи* как деятельности можно сказать, что мы наблюдаем медленное и трудное вычленение «языка» из «речи», включающей в себя непосредственные манипуляции с предметами и частями тела как символами. Какое бы понятие истины ни использовалось при интерпретации такой деятельности, в конечном счете оно должно апеллировать к эффективности социального поведения, на этой деятельности основывающегося. Классическими примерами могут служить обмен и торговля. Попросту говоря, если считать правильно, то обмен будет справедливым, а торговля прибыльной.

Этим, однако, дело не ограничивается. Важно сознавать, что не только материальная выгода сама по себе, но практически любая форма организованного поведения может иметь особый смысл для индивида или коллектива. В свете этого соображения архаическая арифметика получает тот же статус, что ритуалы, музыка, танцы и все формы магии. Свидетельства о таком восприятии математики как одной из форм магии можно проследить и в сравнительно недавней истории. Тот, кто способен предсказать затмение или еще какое-нибудь неочевидное явление, может оказаться не мудрецом, а чародеем, а «предсказанное» им событие, возможно, произошло из-за его манипуляций с символами, это событие представляющими.

Многие философы пытались демифологизировать образ математики как интеллектуальной в первую очередь деятельности. Например, уже в то время, когда существовала современная институциализированная математика, Шопенгауэр писал: «Вычисления определяют *количество* и *величину* и потому необходимы на практике. Можно даже сказать: *где начинается вычисление, там кончается понимание*»[2].

С. Хильдебрандт [3, с. 13], приводя эту цитату, отмечает: «Задетый читатель может лишь изумиться этому суждению и умозаключить, что Шопенгауэр даже не заглядывал в работы Эйлера, Лагранжа и Гаусса».

Тем не менее, Шопенгауэр прав, если понимать его буквально. И дело тут не только в том, что вычисление на время прерывает процесс размышлений: в конечном счете, всякое вычисление оправдано тем, что оно заменяет мыслительный акт (или какой-то из его этапов) на по существу механический процесс — с тем, чтобы обрести опору для следующего мыслительного акта, на гораздо более высоком уровне. Если мысль — это интериоризованное и ищущее действие, то вычисление — это экстериоризованная мысль, причем степень экстериоризации, достигнутая с помощью современных компьютеров, поражает воображение.

Это похоже на то, как в предыдущую эру биологической эволюции зарождающееся сознательное мышление служило тормозом инстинктивных действий и замещало их планируемым поведением. Мозг жи-

[2] *Шопенгауэр А.* Собрание сочинений: В 6 т. Т.3: Малые философские сочинения / Пер. с нем.; Общ. ред. и сост. А. Чанышева. М., 2001. С. 60.

вотного производит вычисления, чтобы тело животного оставалось живым и могло бегать, прыгать, летать, видеть и слышать. Мозг человека занят тем же самым, и эта деятельность составляет основное содержание (не-фрейдистского) подсознания индивида; любое вмешательство сознания в этот процесс разрушило бы сложную архитектуру этих вычислений; в противном случае нельзя было бы гарантировать правильные (биологически оптимальные) результаты.

В каком-то смысле возникновение языка и сознательных рассуждений позволило человеку повысить уровень бессознательных вычислений до уровня здравого смысла, а в дальнейшем — до уровня теоретического мышления. Цена, которую пришлось за это заплатить, состояла в потере спонтанности действий и в появлении все менее и менее биологических моделей индивидуального и коллективного поведения — короче говоря, смогла появиться цивилизация.

Дополнительность между действием, мыслью и вычислением имеет тенденцию воспроизводиться на различных уровнях.

Новое отчуждение мышления в компьютерных системах обработки информации — это гротескная материализация коллективного бессознательного (не-юнговского). Выход таких систем из-под контроля, наряду с проблемами обеспечения их эффективного функционирования — постоянный кошмар современного общества.

Абстрактный характер современной математики, понимаемый не как ее эпистемологическая черта, а как психологический факт, поддерживает нашу метафору. Пропасть, зияющая между нашим повседневным мышлением и нормами математического рассуждения, должна оставаться неприкосновенной, если мы хотим, чтобы математика выполняла свои функции.

Продолжавшиеся в течение нескольких десятилетий XX века жаркие схватки по поводу оснований математики не привели к решению ни одной из обсуждавшихся эпистемологических проблем. Позвольте мне напомнить, что основным объектом обсуждения и критики в этих дискуссиях была канторовская теория бесконечного.

Замечательный вклад Кантора в математику XX века имел два аспекта. Первый и главный состоит в том, что Кантор создал чрезвычайно экономичный и универсальный язык множеств, который, как выяснилось впоследствии, оказался способен выразить семантику всех существующих и потенциально возможных математических конструкций. Понимание этого обстоятельства пришло постепенно (окончательно — в середине прошедшего века). Я имею в виду картину бурбакистского типа: всякое отдельное понятие математики, или даже метаматематики, будь то вероятность, морфизм Фробениуса или правило вывода, представляет собой пример «структуры», представляющей собой конструкцию, рекурсивно строящуюся из множеств с помощью небольшого количества элементарных операций. Сам по себе формальный язык математики также является структурой в этом смысле (иногда — например, в категорных конструкциях, — наряду с множествами используются и классы; для наших нынешних целей это уточнение несущественно).

Думаю, что Гильберт, предсказывавший «канторовский рай», имел перед своим мысленным взором именно эту грандиозную картину.

Во-вторых, однако, Кантор получил глубокие и необычные математические результаты о порядках бесконечности, положившие начало длительным и жарким дебатам. Сегодня мы понимаем, что он открыл, вероятно, наиболее простую и естественную неразрешимую проблему из всех, что можно себе представить — гипотезу континуума. (Глубокое обсуждение того, что в данном контексте означает неразрешимость, см. у Гёделя [2, с. 162].)

Суровый пустынный мир бесструктурных бесконечных множеств различных порядков бесконечности обладает, несомненно, своеобразным магическим очарованием; размышления об этом мире по очереди то отталкивали, то привлекали философски настроенных математиков и математически настроенных философов на протяжении нескольких десятилетий. Знаменитое коэновское доказательство непротиворечивости отрицания гипотезы континуума, дополняющее более раннее гёделевское доказательство непротиворечивости самой гипотезы континуума, появилось в тот момент, когда увлеченность тайнами бесконечности уже начала спадать — несомненно, по той причине, что к тому времени язык множеств был принят практически всеми математиками.

Когда я заново продумываю эти старые рассуждения, когда я вспоминаю, как возникли интуиционизм и конструктивизм, меня поражает абсолютно классический строй мышления у некоторых из критиков Кантора. Значительная часть дискуссии была посвящена тому, как следует думать о бесконечных множествах. Аксиома выбора рассматривалась в основном как широкое до нелепости обобщение бытового опыта случайного выбора предмета из кучи ему подобных. Как конструктивистский, так и интуиционистский подход к этой проблематике демонстрирует глубокое эмоциональное неприятие такой процедуры применительно к бесконечным множествам (в возникшем позднее декадентском ультраинтуиционистском мире Есенина-Вольпина невыносимым стало и представление даже о конечных и относительно небольших наборах предметов).

Разумеется, представление о наборе различимых и неизменных объектов принадлежит к «наивной физике». Кажется, многие действующие лица великой драмы оснований математики были убеждены, что аксиоматику теории множеств следует понимать как прямое обобщение этой наивной физики.

То обстоятельство, что даже маленькие совокупности квантовых объектов ведут себя совсем не так, принято во внимание не было (возможно, его и не следует принимать во внимание). Тот факт, что работающие бесконечности работающих математиков (действительные числа, комплексные числа, спектры операторов и т. п.) были эффективно использованы для описания реального мира, был признан несущественным для оснований (возможно, так оно и есть).

Как бы то ни было, споры по поводу рассуждений Кантора вдохновили Гильберта на то, что он предпринял глубокое формальное исследование синтаксиса (но не семантики) языка математики, что подготовило почву для работ Тарского, Чёрча и Гёделя (а также породило философские пошлости наподобие карнаповского взгляда на математику как на «системы вспомогательных утверждений без предмета и без содержания» — [2, с. 335]).

То, что мы получили в результате этих исследований, представляет собой высокотехническую картину взаимосвязей между структурой формальных выводов, их наивными (или формальными) теоретико-множественными моделями и степенями (не)разрешимости и (не)выразимости соответствующих точно определенных формальных версий математической истины. В популярных (и огрубленных) изложениях работ Гёделя редко удается передать всю сложность этой картины, поскольку в таких изложения невозможно передать богатство ее математического (в отличие от эпистемологического) контекста.

Именно это богатство восхищает нас больше всего.

2. Истина для работающего математика

Афоризм Бурбаки из начала предыдущего раздела не означает, что на протяжении двух тысячелетий все одинаково понимали, что такое доказательство. Более того, приводимая ниже цитата из доклада А. Вейля на Амстердамском международном математическом конгрессе 1954 года оставляет впечатление, что само понятие «строгого» доказательства появилось совсем незадолго, может быть даже как раз в результате деятельности Бурбаки.

> Строгость перестала рассматриваться как неудобное формальное платье, которое надевают для официальных приемов и со

> вздохом облегчения сбрасывают, придя домой. Теперь мы уже не спрашиваем, строго ли доказана теорема: мы спрашиваем, доказана она или нет [8, с. 180].

Увы, похоже, что желаемое здесь принималось за действительное. Понимание того, что такое доказательство и какова его роль в математике, значительно разнится и в разные моменты индивидуального развития математика, и в разные периоды социальной истории математики.

Ниже я привожу подборку высказанных совсем недавно мнений (взятых из [4] и [7]) шести активно работающих математиков. Призываю читателя ознакомиться и со всей дискуссией: это весьма поучительно. Сама дискуссия началась с появившегося в 1993 году письма А. Джаффе и Ф. Квинна, озаглавленного «Теоретическая математика: к культурному синтезу математики и теоретической физики». Авторы были обеспокоены ситуацией, сложившейся в очень активном разделе математики, пограничном с математической физикой. Им представлялось, что распространение требований к строгости, принятых в физических рассуждениях (существенно более низких, чем в математике) отрицательно влияют на состояние современных математических исследований. При этом они полностью признавали плодотворность взаимодействия математиков с физиками и предлагали принять правила поведения, обязательные для всех игроков, в частности, правила признания академических заслуг. Слово «теоретический» в заголовке письма было употреблено в нетрадиционном смысле, что не слишком удачно; авторы имели в виду смесь из спекулятивных рассуждений, примеров и результатов компьютерных вычислений, в противоположность теоремам со сверкающими в формулировках кванторами.

> А. Когда я начинал учиться в аспирантуре в Беркли, мне было трудно представить, как это я смогу «доказать» новую и интересную теорему математики: я тогда и не понимал, что такое доказательство.
>
> Посещая семинары, читая статьи и беседуя с другими аспирантами, я постепенно начал понимать, в чем дело. В рамках каждого раздела математики есть некоторые теоремы и технические приемы, которые всем известны и всеми признаются. Когда ты пишешь статью, ты ссылаешься на них без доказательства. Глядя на другие статьи, ты видишь, на какие факты их авторы ссылаются без доказательства и что за работы присутствуют в списках литературы.

От других людей ты получаешь какое-то представление о доказательствах этих фактов. После этого ты можешь пользоваться теми же теоремами и ссылаться на те же работы. Совершенно не обязательно полностью прочитать книги и статьи, входящие в твой список литературы. Для многого из того, что всем известно, может не существовать вообще никакого письменного источника. Пока математики из данной области верят в то, что некая идея работоспособна, формальные письменные источники для нее не нужны. (У. Тэрстон, филдсовский медалист 1982 года — [7, с. 168].)

Тэрстон красноречиво защищает ту точку зрения, что основная цель доказательства — понимание и коммуникация, и что эффективнее всего она достигается в личных контактах. Его оппоненты отмечают, в частности, что межпоколенческие контакты возможны только через достаточно аккуратно написанные тексты и напоминают о судьбе итальянской алгебраической геометрии.

Б. Необходимо делать различие между современными спекулятивными текстами и теми статьями, написанными сто лет назад, которые сейчас мы рассматриваем как недостаточно строгие, но которые были абсолютно строгими по меркам своего времени. Пуанкаре в своих работах по «analysis situs» был строг настолько, насколько в то время это было возможно, и он заведомо не занимался сознательными бездоказательными рассуждениями. При этом я ни разу не замечал, чтобы современные математики называли эти работы «небрежными» или «излишне теоретическими» (в смысле Джаффе и Квинна. — *Ю. М.*). Когда в 1898 году молодой Хегор в своей диссертации дерзко указал мэтру на его заблуждения, Пуанкаре, назвавший работу Хегора «très remarquable»[3], признал свои ошибки и исправил их. Напротив, в своей работе 1912 года об отображениях кольца (доказательство основного результата было позднее получено Биркгофом) Пуанкаре, ссылаясь на возраст, извинялся за то, что публикует гипотезу. (М. Хирш — [7, с. 187].)

В. Интуиция — это прекрасно, но чтобы попасть в математический рай, требуется много больше. ⟨…⟩ В теологических терминах можно сказать, что мы спасаемся не одной только верой, но верой и делами. Благодаря физике в математике появилось множество изящных идей и новых проектов, но математикам незачем копи-

[3] Весьма замечательной (*фр.*).

> ровать стиль работы физиков-экспериментаторов. Математика основывается на доказательстве, и доказательство пребудет вовеки. (С. Маклейн — [7, с. 190—193].)

> Г. Филипп Андерсон отзывается о математической строгости как о «неуместной и невозможной». Я бы смягчил удар, сказав, что она не по делу и что от сути дела она, как правило, отвлекает, — даже в тех случаях, когда она возможна. (Б. Мандельброт — [7, с. 194].)

Ответ Мандельброта полон яростной критики не только абстрактного понятия «строгое доказательство», но и значительной части американского математического сообщества («математиков с Чарльз-стрит[4]», как он их называет), которое, по мнению автора, тоталитарно, сосредоточено на должностях и званиях и стремится изолировать свободомыслящих исследователей.

> Д. До 1958 года я жил в математической среде, состоящей в основном из бурбакистов; даже тогда, когда я бывал нестрог, эти люди — А. Картан, Ж.-П. Серр и потенциальный бурбакист Х. Уитни — помогали мне поддерживать вполне приемлемый уровень строгости. Только после того, как в 1958 году я получил филдсовскую медаль, я дал волю своим вкусам, с известными результатами — в конечном счете катастрофическими. Более того, через несколько лет после медали я стал коллегой Александра Гротендика по IHES, благодаря чему я стал рассматривать строгость как в высшей степени маловажную часть математического мышления (Рене Том — [7, с. 153].)

Ироничные слова Тома требуют внимательного прочтения. Как надо понимать утверждение, что следование его вкусам привело в конечном счете к катастрофе? Как именно работа в одном институте с Гротендиком повлияла на томовское мышление? Посторонний читатель, возможно, так и не сможет понять, разделял Гротендик томовские взгляды или все было как раз наоборот. Далее в том же тексте Том пишет, что математическая строгость (rigor) напоминает ему rigor mortis (трупное окоченение).

> Е. Мне бывает трудно убедить студентов, которых зачастую в математику привело то же, что и меня — абстрактная красота

[4] На этой улице расположен офис Американского математического общества.

и определенность, — насколько важна кропотливая конкретная работа с примерами. По-моему, количество математиков, задохнувшихся от недостатка широты, превышает число тех, кого, напротив, сразил меч строгости. (К. Уленбек — [7, с. 153].)

Я бы хотел подвести некоторые итоги, внеся при этом и свой вклад в общую сумятицу.

Во-первых, с индивидуальной точки зрения построение приемлемых доказательств — это умение, которым непросто овладеть. Человек, вынужденный делать что-то противоречащее его натуре, делает это с отвращением. Врожденное или благоприобретенное предпочтение, которое мы отдаем геометрическим рассуждениям или алгебраическим вычислениям, может предопределить нашу математическую карьеру. Когда мы философствуем, мы с неизбежностью рационализируем и обобщаем эти свои инстинктивные предпочтения; наше отношение к проблеме строгости можно вывести из тех чувств радости или неудовлетворенности, которые мы испытывали, сталкиваясь с теми интеллектуальными вызовами, которые ставит перед нами наша профессия.

Во-вторых, в социальном аспекте надо отметить, что нам приходится полагаться на своих современников и предшественников даже при написании совершенно строгого доказательства. Авторитет в математике играет двоякую роль: мы получаем от своих отцов и современников некоторую систему ценностей (какие вопросы стоит задавать, в каких областях стоит работать, какие задачи стоит решать), и кроме того, мы полагаемся на надежность опубликованных и принятых математическим сообществом доказательств и рассуждений. Здесь нет ничего абсолютного, но неабсолютность никоим образом не отменяет важности.

В-третьих, с эпистемологической точки зрения следует отметить, что все те из нас, кто когда-либо об этом задумывался, хорошо знают, что такое строгое доказательство. У строгого доказательства имеется идеальное представление, структура которого была разработана специалистами по математической логике в XX веке, но само по себе строгое доказательство разве что большей подробностью отличается от доказательств в понимании Евклида (и в этом отношении Бурбаки совершенно прав). Идеальное представление доказательства — это воображаемый текст, в котором наша теорема шаг за шагом выводится из аксиом, причем список аксиом и правил вывода фиксирован заранее — скажем, в какой-нибудь из версий аксиоматической теории множеств.

Если этот идеальный образ доказательства вызывает у вас решительный протест, или если, по крайней мере, вы хотите быть реалистом, то вы можете сказать (и скажете), что идеал совершенно недостижим из-за фантастической длины даже простейших формальных выводов, а также из-за того, что чем ближе изложение к формальному доказательству, тем труднее его проверять. Более того, коль скоро формальные выводы стремятся к тому, чтобы освободиться от любых остатков смысла (в противном случае они недостаточно формальны), мы приходим к тому, что в итоге пропадает и сам смысл.

С другой стороны, если идеальный образ доказательства вас вдохновляет, или если вы, опять-таки, хотите быть реалистом, то вы согласитесь с тем, что математика по самой своей сути требует постоянного поддержания существующих стандартов строгости. Занимаемся ли мы математической поддержкой крупного технического проекта наподобие высадки на Луне, или же мы просто удовлетворяем естественное желание знать, какие утверждения верны, а какие нет, — так или иначе, в конечном счете нам приходиться обращаться как к критерию к идеалу математического доказательства.

Даже использование математики «в нарративной моде», как изящно выразился Хирш, не является исключением, поскольку такое изложение все равно состоит из фрагментов «настоящей» математики, смонтированных по нормам нарратива.

> Предположим, автор почувствовал, что история, которую он хочет рассказать, лучше всего выражается на языке математики. Чтобы построить связное изложение, не затягивая дела надолго или до бесконечности, что может статься, если начать следить за строгостью, он прибегает к каким-то недоказанным предположениям, бездоказательным рассуждениям или утверждениям, принимаемым на веру: «Чтобы двигаться дальше, предположим, что этот ряд сходится (случайные величины независимы, равновесие устойчиво, определитель отличен от нуля...)». В таких случаях зачастую неважно, можно ли сделать математические утверждения строгими, поскольку цель автора состоит лишь в том, чтобы убедить читателя в приемлемости или пригодности приводимого им описания поведения какой-то системы, относящейся к реальному миру. Математика — это язык, полный тонких и полезных метафор. Проверка утверждений осуществляется экспериментально (вполне возможно, что эксперимент будет компьютерным); цель изложения может состоять в предложении поставить какой-то конкретный эксперимент. Результаты такого нарратива будут

> не математическими, но это будет новое описание реальности (*реальной* реальности). (М. Хирш — [7, с. 186—187].)

Прекрасный недавний пример такого математического нарратива — доклад Д. Мамфорда на первом Европейском математическом конгрессе [6]. По поводу математики как метафоры см. [5].

3. Материалы к обсуждению: три примера

В этом параграфе я приведу три примера, связанных с нашей темой: гёделевское доказательство существования Бога (1970), история о процессоре «Пентиум» с ошибкой (1994) и результат Чайтина (1992 и ранее), согласно которому у совершенно строго и единообразно построенной последовательности математических вопросов может получиться «совершенно случайная» последовательность ответов. При всех своих различиях, эти примеры все представляют собой человеческие попытки заглянуть в бесконечность с помощью конечных лингвистических средств — будь то бесконечность Бога, действительных чисел или самой математики.

Предоставляем читателю решить самостоятельно, какие моральные уроки можно (если можно) извлечь из этих примеров.

Гёделевское онтологическое доказательство. В третьем томе собрания сочинений Гёделя, недавно выпущенном издательством Oxford University Press, содержится заметка, датированная 1970 годом. Она представляет собой формальное рассуждение, призванное доказать существование Бога как воплощения всех положительных свойств. В предисловии, написанном Р. М. Адамсом ([2, с. 388—402]), это доказательство рассматривается в исторической перспективе и сравнивается, в частности, с доказательством Лейбница; автор предисловия обсуждает возможное место этого доказательства в богословии.

Само по себе доказательство представляет собой страницу формул на языке модальной логики (с использованием, наряду с привычной символикой, квантов необходимости и возможности). Оно подразделяется на пять аксиом и две теоремы. Для удобства читателей доказательство представлено на отдельной странице.

Чтó вычисляет компьютер, или истина в рекламе. Январский выпуск журнала «SIAM news» за 1995 год открывался статьей под названием «Повесть о двух числах». Вот как она начинается.

> Это повесть о двух числах и о том, как они через Интернет попали в праздничный день на первые страницы главных газет, к стыду главного производителя процессоров.

Ontological proof
(*1970)

Feb. 10, 1970

$P(\varphi)$ φ is positive (or $\varphi \in P$).
Axiom 1. $P(\varphi).P(\psi) \supset P(\varphi.\psi)$[a].
Axiom 2. $P(\varphi) \vee P(\sim\varphi)$[b].
Definition 1. $G(x) \equiv (\varphi)[P(\varphi) \supset \varphi(x)]$ (God)
Definition 2. $\varphi \operatorname{Ess}. x \equiv (\psi)[\psi(x) \supset N(y)[\varphi(y) \supset \psi(y)]]$. (Essence of x)[c]

$$P \supset_N q = N(p \supset q) \qquad \text{Necessity}$$

Axiom 3. $\begin{array}{l} P(\varphi) \supset NP(\varphi), \\ \sim P(\varphi) \supset N{\sim}P(\varphi) \end{array}$
because it follows from the nature of the property. *
Theorem. $G(x) \supset G \operatorname{Ess}. x$.
Definition. $E(x) \equiv (\varphi)[\varphi \operatorname{Ess} x \supset N(\exists x)\varphi(x)]$. (necessary Existence)
Axiom 4. $P(E)$
Theorem. $G(x) \supset N(\exists y)G(y)$;
hence $(\exists x)(G(x)) \supset N(\exists y)G(y)$
hence $M(\exists x)G(x) \supset MN(\exists y)G(y)$. ($M =$ possibility)
$M(\exists x)G(x) \supset N(\exists y)G(y)$.
$M(\exists x)G(x)$ means the system of all positive properties is compatible. This is true because of:
Axiom 5. $P(\varphi).\varphi \supset_N \psi :\supset P(\psi)$, which implies

$$\begin{cases} x = x & \text{is positive} \\ x \neq x & \text{is negative.} \end{cases}$$

[a] And for any number of summands.
[b] Exclusive or.
[c] Any two essences of x are *necessarily equivalent*.

* Гёдель дал номер «2» двум разным аксиомам; в собрании сочинений нумерация аксиом изменена.

Гёделевское онтологическое доказательство. В кн.: *Kurt Gödel.* Collected Works. Vol. III: Unpublished Essyas and Lectures. Oxford University Press, 1995

Суть дела была в следующем. Выяснилось, что только что появившийся на рынке новый процессор корпорации Intel содержит ошибку в команде деления с плавающей точкой, в результате которой, например, при вычислении числа

$$r = 4\,195\,835 - \frac{4\,195\,835}{3\,145\,727} \cdot 3\,145\,727$$

получается ответ $r = 256$ вместо правильного $r = 0$.

Заметим, что ничего полностью неожиданного в этом не было. В любом компьютере так называемая арифметика с плавающей точкой запрограммирована таким образом, что она *систематически дает неверные ответы* (за счет так называемых ошибок округления). В описываемом случае всеобщее возмущение (отчасти искусственно подогретое) было вызвано тем, что в некоторых случаях ошибка оказывалась больше, чем обещал производитель (достигалась «одинарная точность» вместо разрекламированной двойной).

Можно в принципе запрограммировать абсолютно точные вычисления с рациональными числами произвольной величины (и для некоторых специальных целей так действительно делают), но это требует большого объема ресурсов компьютера, а в некоторых случаях — и специальных устройств ввода-вывода. Реализация идеальной машины Тьюринга на практике очень неудобна, и при проектировании реальных компьютеров никто не ставит себе задачу эту реализацию облегчить.

Нетрудно представить себе компьютеризированную систему принятия решений, являющуюся неустойчивой к маленьким ошибкам вычислений. Например, таковы приложения компьютеров к военным задачам или к анализу ситуации на бирже. Вот еще один пример.

Проведенное недавно в США исследование сексуального поведения, целью которого была подготовка эпидемиологических моделей распространения СПИДа, обошло вниманием 3 % американцев, не живущих в домах или квартирах (т. е. находящихся в тюрьмах, в приютах для бездомных или живущих на улице). Один из критиков этого исследования (Lewontin R. C. New York Review of Books. 20 April 1995) резонно замечает следующее.

> Хотя авторы не обсуждают (а может быть, и не сознают) эту проблему, надо заметить, что предсказания математических и компьютерных моделей распространения эпидемий, учитывающих реальную сложность проблемы, часто оказываются очень чувствительными к значениям переменных. Очень малые изменения

> начальных данных могут повлечь коренное изменение вывода о том, остановится эпидемия или же начнет катастрофически разрастаться. Поэтому планирование противоэпидемических мероприятий, основанное на неточных данных, может принести больше вреда, чем полное незнание.

Проблема понимания того, что, собственно говоря, вычисляет компьютер, становится все более важной и в связи с распространением математических доказательств, полученных с помощью компьютера. Процитируем еще раз Хирша [7, с. 188].

> Оскар Ланфорд отмечает, что для того, чтобы обосновать применение компьютерного вычисления как составной части доказательства (как у него в первом доказательстве гипотезы Фейгенбаума о каскаде), необходимо не только доказывать, что программа правильна (часто ли это делается?), но и понимать, как в компьютере происходит округление и как работает операционная система, в том числе система разделения времени.

Случайность математической истины. После открытия А. Н. Колмогоровым, Р. Соломоновым и Г. Чайтином понятия сложности и основанного на нем нового определения случайности Чайтин [1] построил пример экспоненциального диофантова уравнения

$$F(t; x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

обладающего следующим свойством. Положим $\varepsilon(t_0) = 0$ (соответственно, 1), если при $t = t_0$ это уравнение имеет конечное (соответственно, бесконечное) количество решений в целых положительных числах x_i. Так вот, *последовательность* $\varepsilon(1), \varepsilon(2), \varepsilon(3), \ldots$ *является случайной*. (Чайтин написал также программу, генерирующую выражение F. Уравнение занимает 200 страниц и содержит около 17 000 неизвестных.)

Это воистину тонкая математическая конструкция, использующая, помимо прочего, представление рекурсивно перечислимых множеств по Дэвису—Патнэму—Робинсон—Матиясевичу. С точки зрения эпистемологии тут важно то, что случайность можно определить безо всяких отсылок к физической реальности (осмысленность этого определения оправдывается тем, что у «математической» случайности имеются все свойства случайности «физической») таким образом, что необходимость провести бесконечный поиск для решения последовательности задач приводит к ответам, случайным в техническом смысле.

Некоторым трудно себе представить, что в столь жестко определенной науке, как элементарная арифметика, могут возникать такие явления. Заметим, что «хаос» в духе Мандельброта представляет собой значительно менее изощренную модель случайного поведения.

Литература

1. *Chaitin G.* Information, randomness and incompleteness. Papers on algorithmic information theory. Singapore: World scientific, 1992.
2. *Gödel K.* Ontological proof // Kurt Gödel: collected works / Ed. S. Feferman, J. W. Dawson, Jr., S. C. Kleene, G. H. Moore, R. M. Soloway, and J. van Heijenoort. Vol. 3. New York: Oxford University Press, 1995. P. 403.
3. *Hildebrandt S.* Wahrheit und Wert mathematischer Erkenntnis. Carl Friedrich von Siemens Stiftung. München, 1995.
4. *Jaffe A., Quinn F.* Theoretical mathematics: toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics // Bull. Amer. Math. Soc. 1993. Vol. 29. P. 1—13.
5. *Manin Yu.* Mathematics as metaphor // Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Vol. 2. Tokio: Mathematical Society of Japan and Springer-Verlag, 1991. P. 1665—1671. (См. перевод в наст. изд.)
6. *Mumford D.* Pattern theory: a unifying perspective // First European Congress of Mathematics (Paris 1992). Vol. 1. Basel: Birkhäuser, 1994. P. 187—224.
7. Responses to ‘Theoretical mathematics etc.’ by A. Jaffe and F. Quinn // Bull. Amer. Math. Soc. 1994. Vol. 30. P. 161—177.
8. *Weil A.* Collected papers. Berlin: Springer-Verlag, 1980. Vol. 2.

Теорема Гёделя

1. Введение

Математика XX века не пользуется популярностью: школьное и техническое образование просто не успевает до нее добраться. Среди немногих ее достижений, известных более широко хотя бы понаслышке, первенство принадлежит, вероятно, теореме Гёделя. Автору как-то попалось упоминание о ней в современном американском романе.

Речь идет о так называемой теореме о неполноте арифметики, опубликованной 25-летним австрийцем Куртом Гёделем в 1931 году.

Строго говоря, эта теорема является «высоко техническим» утверждением о специальном и весьма сложном комбинаторном объекте — формальном языке арифметики первого порядка. Однако и формулировка, и доказательство Гёделя допускают целый спектр расширительных толкований, которым и определяется общефилософское значение результата.

В любой творческой деятельности человека просматриваются два компонента — систематический и интуитивный, «кухня» и «озарение». Математика доставляет непревзойденные образцы систематической работы ума, поразительные по сложности архитектуры дедуктивные построения, исходящие из минимума посылок и, после длинной вязи умозаключений, венчающиеся важными выводами. Успехи математики и математизированных областей знания приводили многих глубоких мыслителей к надежде на существование нескольких универсальных законов, из которых все остальные истины могут быть выведены чисто теоретически. В европейской традиции эти надежды связаны с именами Лейбница и Декарта. До сих пор их продолжают высказывать некоторые физики, задумывающиеся над структурой наших знаний о природе. После работы Гёделя, однако, мы можем быть уверенными в беспочвенности этих надежд. Если даже оставить в стороне вопрос, насколько сложен мир, мы знаем, что метод дедуктивных выводов недостаточно мощен. Его не хватает даже на то, чтобы вывести из конечного числа принципов все истин-

Впервые опубликовано: Природа. 1975. № 12.

ные утверждения о целых числах, формулируемые на языке школьной алгебры: таков смысл теоремы Гёделя.

Это осознание глубокой ограниченности дедуктивных рассуждений и вообще «механических» методов поиска истины стало особенно актуальным в эпоху экспансии ЭВМ.

Изложенная точка зрения на теорему Гёделя дает основание считать ее существенным вкладом естественных наук в фонд гуманитарных. По значению и глубине с ним можно сравнивать, пожалуй, только анализ квантовомеханических представлений о «дополнительности» и «неопределенности», распространенный Нильсом Бором далеко за пределы физики микромира. Не исключено, что оба этих круга идей — логики и квантовой механики — в применении к теории познания имеют глубинную связь. Дело в том, что «принципы запрета» Гёделя относятся к строго детерминированным процессам рассуждения, тогда как квантовая механика как раз очерчивает границы наивного детерминизма. Вероятно, работа мозга проходит вне этих границ.

В этой статье предпринята попытка доступно изложить главные идеи и конструкции, связанные с теоремой Гёделя. Мы начинаем по возможности с неформального описания всего круга основных понятий. Фрагменты более технического характера при желании могут быть опущены.

2. Основные понятия I: Язык

В этом и следующем разделах описаны основные определения, необходимые для формулировки и понимания теоремы Гёделя. Слова, которыми мы оперируем здесь, допускают разные уровни терминологической определенности. Лишь начиная с некоторой степени уточнения они могут войти в настоящий математический текст. Кое-где мы эту степень будем указывать.

Язык. Мы будем понимать под (формальным) языком L задание некоторого конечного алфавита и правил образования текстов — последовательностей букв этого алфавита, которые обладают в системе языка L синтаксической правильностью и осмысленностью. (Различие между последними двумя понятиями, важное для лингвистики естественных языков, в наших моделях отсутствует.)

Основной пример, который должен представлять себе читатель, — язык элементарной арифметики LAr. Опишем его на двух уровнях.

Первый уровень. Алфавит LAr включает: буквы русского и латинского шрифтов с индексами, цифры, скобки, знаки арифметических операций: $+$ (сложение); $\cdot$, или $\times$ (умножение); $\uparrow$ (возвышение в степень: в «линейном» тексте лучше писать $a \uparrow b$, чем a^b); $=$ (знак равенства). Типичный текст на *LAr* состоит из смеси обычных формул школьной арифметики и алгебры и минимума русской лексики, необходимого для выражения логических понятий (слов-связок «если..., то», «и», «или», «не»; слов-кванторов «для всех» и «существует» и их синонимов). Текст должен быть организован по правилам, принятым в стандартном математическом жаргоне. Примеры текстов на языке *LAr*:

таблица умножения;
формула $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ (точнее, $(x+y)\cdot(x+y) = x\cdot x + {} + 2\cdot x\cdot y + y\cdot y$);
формулы $0 = 1$ или $2\times 2 = 5$ — они хотя и не истинны, но осмысленны (см. ниже).

Латинские буквы означают неизвестные или переменные, которые могут принимать значения во множестве неотрицательных целых чисел 0, 1, 2, ...

Продемонстрируем некоторые особенности языка *LAr* на примере следующего более сложного текста:

для всех x *существует* y *и существует* z
$(y = x + z$ *и если* $y = u\cdot v$*, то* $u = 1$ *или* $u = y)$.

Это — теорема Евклида о бесконечности множества простых чисел. Действительно, утверждение «если $y = u\cdot v$, то $u = 1$ или $u = y$» означает в области целых чисел, что $y = 1$ или y — простое число. Утверждение «существует z $(y = x + z)$» означает, что $y \geqslant x$. Все вместе: «есть простые числа (y), большие любого наперед заданного числа (x)». Скобки стоят вместо слов «такие, что» или чего-нибудь и этом роде.

Околичности выражения связаны с желанием экономить на списке элементарной лексики: нет смысла включать в него термин «простое число», если его можно заменить выражением, синтезированным из более элементарных.

Этот уровень описания языка арифметики достаточен для понимания последующих качественных объяснений теоремы Гёделя. Читатель с большей математической подготовкой сможет пользоваться вторым уровнем, который пригоден уже для точных формулировок и доказательств. Мы отмечаем звездочками в начале и конце фрагменты статьи, которые можно опустить без ущерба для понимания дальнейшего.

*__Второй уровень.__ Опишем так называемый формальный язык арифметики по Шмульяну *SAr*.

Алфавит *SAr* состоит из девяти знаков: x (переменная); $'$ (штрих для формирования любого числа разных переменных $x, x', x'', x''', \ldots$); $\cdot$ (умножение); $\uparrow$ (возведение в степень); $=$ (равенство); $\downarrow$ (логическая связка «конъюнкция отрицаний»); (,) (открывающая и закрывающая скобки); 1 (единица).

Тексты на *SAr* являются последовательностями *выражений*; выражения — это некоторые последовательности знаков алфавита. Выражения бывают трех типов: *числовые термы, классовые термы и формулы*.

Числовые термы — это выражения $x, x', x'', \ldots; \bar{1}, \bar{1}\bar{1}, \bar{1}\bar{1}\bar{1}, \ldots$ Кроме того, если t_1, t_2 — числовые термы, то $(t_1)\cdot(t_2)$ и $(t_1)\uparrow(t_2)$ — тоже числовые термы. Интуитивно, числовые термы — это всевозможные выражения, которые можно получить из целых чисел ($\bar{1}\bar{1}$ — это 2, $\bar{1}\bar{1}\bar{1}$ — это 3...) и переменных с помощью операций умножения и возвышения в степень.

Формулы первого ранга. Это выражения вида $t_1 = t_2$; кроме того, если P_1 и P_2 — две формулы, то $(P_1)\downarrow(P_2)$ — «не P_1 и не P_2» — тоже формула. Интуитивно, $t_1 = t_2$ — это мультипликативно-экспоненциальные уравнения. Соединяя их связкой $\downarrow$ в разных сочетаниях, мы можем, например, записать утверждение большой теоремы Ферма. Вот указания читателю, который пожелает это сделать. Удобно исходить из следующей полусловесной формулировки: если $x \geqslant 3$, то неверно, что $x'^x + x''^x = x'''^x$. Посылку $x \geqslant 3$ можно написать в *SAr*, например, так: $(\bar{1}\bar{1})\uparrow(x) = ((\bar{1}\bar{1})\uparrow(\bar{1}\bar{1}\bar{1}))\cdot(x'''')$ (т. е. 2^x делится на $2^3 = 8$). Само уравнение Ферма можно записать так: $((\bar{1}\bar{1})\uparrow((x')\uparrow(x)))\cdot((\bar{1}\bar{1})\uparrow((x'')\uparrow(x))) = (\bar{1}\bar{1})\uparrow((x''')\uparrow(x))$, т. е. $2^{x'^x}\cdot 2^{x''^x} = 2^{x'''^x}$ (это трюк, чтобы обойтись без знака $+$, которого нет в алфавите *SAr*).

Выражение «неверно, что P» передается в *SAr* как $(P)\downarrow(P)$, а выражение «если P, то Q» как $(((P)\downarrow(Q))\downarrow(Q))\downarrow(((P)\downarrow(Q))\downarrow(Q))$ (снова околичности, связанные с экономией на основной лексике).

Классовые термы и формулы старших рангов. Если P — какая-то формула, т. е., интуитивно, высказывание, включающее переменные и действия над ними, то выражение $x'^{\cdots\prime}(P)$ называется классовым термом. Его смысл: множество тех натуральных чисел, которые после подстановки в P вместо $x'^{\cdots\prime}$ делают P истинной. Выражение $x'^{\cdots\prime}(P)\bar{1}\ldots\bar{1}$ есть формула с интуитивным смыслом: число $\bar{1}\ldots\bar{1}$ удовлетворяет высказыванию P, будучи подставлено в P вместо $x'^{\cdots\prime}$ (читателю, добравшемуся до этого места, следует его отметить, мы воспользуемся им еще в одном фрагменте со звездочками).

Если T_1, T_2 — два классовых терма, выражение $T_1 = T_2$ есть формула. Этот прием заменяет квантор общности, которого нет в алфавите:

$x(P_1) = x(P_2)$ означает «для всех x» (x удовлетворяет P_1, если и только если x удовлетворяет P_2).

Если P_1, P_2 — формулы, то $(P_1) \downarrow (P_2)$ — формула.

Опытный читатель без труда превратит это описание в точное рекурсивное определение классовых термов и формул.*

В наших объяснениях по поводу *LAr* и *SAr* полезно выявить еще несколько понятий. Перечислим их.

Синтаксис языка. Это — правила образования текстов на языке. Мы учимся родному языку, пользуясь им; изучаемые позже правила школьной грамматики не полны, недостаточно явны и лишь несколько нормализуют языковую практику. Полностью формализованный язык, такой как *SAr*, наоборот, описывается полной и явной системой правил. Исследовать язык математически можно, разумеется, лишь после его достаточной формализации.

Семантика языка. Это — правила выявления смысла текстов, т. е. правила их сопоставления с внеязыковой действительностью. Особенность всех языков математики состоит в том, что действительностью для них являются только человеческие идеи (о целых числах, множествах, интегралах... в крайних обстоятельствах даже о королях и капусте). Эти идеи первоначально могут быть выражены на различных естественных языках, их фрагментах и жаргонах. Затем они могут модифицироваться и разнообразно переформулироваться. В какой-то степени верно поэтому, что смысл математического текста есть другой текст. Более адекватная точка зрения состоит в том, что смысл математического текста есть какая-то глубинная структура, стоящая за ее поверхностными выражениями в разнообразных текстах. Эта глубинная структура, возможно, реализуется как некоторое взаимодействие центральной нервной системы человека с Миром[1].

Метаязык. Это язык, на котором мы описываем язык-объект (как *LAr*, *SAr*), его синтаксис и семантику. В нашем случае метаязык — фрагмент русского языка (диалект научно-популярной литературы с философскими претензиями). В рамках наших задач ни его синтаксис, ни семантика не подлежат какому бы то ни было описанию.

Основные понятия II: Истинность, выразимость и полнота

Высказывания на языке *LAr* (и формулы языка *SAr*) могут быть истинными, ложными или неопределенными (в отношении истинности).

[1] *Фон Нейман Дж.* Вычислительная машина и мозг. Кибернетический сборник. М.: ИЛ, 1960. № 1.

Неопределенными могут быть только те высказывания, в которых участвуют свободные символы переменных (x, y, z, …), т. е. не связанные словами «для всех…» или «существует». Высказывание «для всех x ($x=2$)» ложно, ибо есть натуральные числа, отличные от 2; высказывание «существует x ($x+1000=2000$)» истинно; высказывание «$x=3$» не определенно: оно станет определенным — истинным или ложным, — если вместо «свободной» переменной x мы подставим в него то или иное (целое неотрицательное) число; высказывание «$x=x$» истинно, хотя переменная x в нем свободна.

Очень существенно, что все высказывания, не содержащие свободных переменных, мы считаем заведомо определенными в отношении истинности или ложности, даже если мы не в состоянии действительно решить, истинны они или ложны. Типичный пример — гипотеза Ферма; для всех x, y, z, n неверно, что $(x+1)^{n+3}+(y+1)^{n+3}=$ $=(z+1)^{n+3}$. Согласно нашим представлениям, она либо истинна, либо ложна. Вера в это основана на абстракции возможности произвести бесконечно много проверок числовых тождеств, которые получатся, если в уравнение Ферма подставлять всевозможные целые неотрицательные числа вместо x, y, z, n.

Среди специалистов по основаниям математики существуют школы, считающие такого рода абстракции неправомерными. Здесь мы не можем входить в этот вопрос.

Выразимость. Высказывания, не определенные в отношении истинности, играют очень важную роль: они являются формулировками свойств целых чисел (а также пар, троек, … целых чисел).

Например, высказывание «существует x ($y=x+2$) и для всех u, v (если $y=uv$, то $u=1$ или $u=y$)» содержит одну свободную переменную y и означает: y — простое число.

Таким образом, оно является записью свойства быть простым числом на нашем языке.

Более общо: рассмотрим некоторое высказывание $P(x, y, z)$, в которое входят, скажем, ровно три свободных переменных x, y, z (и, возможно, какие-то связанные). Будем говорить, что тройка чисел обладает свойством, выраженным высказыванием P, если после подстановки членов этой тройки вместо x, y, z соответственно мы получим истинное высказывание. (Заметим, что после подстановки оно станет определенным.) Результат подстановки в P чисел 1, 3, 7, вместо x, y, z удобно обозначить $P(1, 3, 7)$.

Таким образом, каждое высказывание, содержащее ровно n свободных переменных, выражает некоторое свойство наборов из n чисел.

Существует другая, дополнительная, точка зрения на свойства. Любое свойство, скажем, целого числа однозначно определяется множеством всех тех целых чисел, которые этим свойством обладают. Аналогично, любое свойство набора из n целых чисел есть множество всех таких наборов, которые этим свойством обладают.

Мы часто будем отождествлять таким способом множества и свойства.

Разные высказывания языка могут выражать одно и то же свойство. Таковы пары «$x=1$» и «$(x-1)^2=0$»; «$x=1$ или $x=2$» и «не $x=0$ и не существует $y(x=y+2)$».

Свойство целых чисел, или их наборов, для которого существует высказывание в языке LAr, выражающее это свойство, называется выразимым в языке. Аналогично, выразимым называется соответствующее множество. Можно показать, что в языках LAr и SAr выразимы одни и те же свойства.

Фундаментальным для всего дальнейшего является следующее обстоятельство: *для каждого мыслимого языка арифметики существуют свойства целых чисел, в нем не выразимые.* Простейшее доказательство этого основано на концепции мощности бесконечных совокупностей, принадлежащей Георгу Кантору. Он установил, что множество всех подмножеств целых чисел несчетно: его нельзя занумеровать целыми числами, оно гораздо больше. С другой стороны, все свойства, выразимые в любом языке с конечным алфавитом, занумеровать можно, например, расположив в словарном порядке все тексты языка, отвечающие неопределенным высказываниям.

Мы не будем уточнять эти соображения, ибо дальше будут приведены конкретные примеры невыразимых свойств.

Совокупность свойств, которые можно выразить средствами данного языка, — его важнейшая характеристика. Она измеряет богатство, или выразительность, языка.

Вопрос — является ли данное свойство целых чисел (выраженное, скажем, в метаязыке) выразимым в данном конкретном языке арифметики — может оказаться высоконетривиальной математической задачей.

Дедуктивные средства языка. Любая задача элементарной теории чисел может быть сформулирована как вопрос: является ли данное высказывание P без свободных переменных на языке LAr (или формула языка SAr) истинным?

Проанализируем, как такие задачи решаются.

Если P вообще не содержит переменных, то вопрос сводится к проверке какого-то соотношения между конкретными целыми числами.

Мы можем считать, что они записаны в десятичной системе; школьные правила обращений с десятичными запятыми позволяют решить, выполняется это соотношение или нет.

Предположим теперь, что P имеет вид «для всех x (Q)», где в скобках стоит высказывание Q с одной свободной переменной x. Например, «для всех x $(0+1+2+\ldots+x=x(x+1)/2)$». Как мы уже говорили, абстрактный рецепт проверки истинности P состоит в подстановке вместо x всевозможных целых чисел и проверке получившихся в бесконечном количестве числовых соотношений. Разумеется, практически так поступить нельзя.

Читатель, вероятно, знает, что истинность нашего конкретного высказывания проверяется с помощью правила математической индукции. На нашем языке LAr оно представляет собой бесконечное множество высказываний, каждое из которых имеет следующий вид:

«если $P(0)$ и если для всех x (если $P(x)$, то $P(x+1)$), то для всех x $(P(x))$». $(*)$

Здесь P должно пробегать всевозможные высказывания языка с одной свободной переменной x.

Все высказывания $(*)$ мы считаем истинными, обосновывая их с помощью обычного рассуждения в метаязыке.

Анализируя доказательство нашей формулы $1+\ldots+x=x(x+1)/2$ или теоремы Евклида о бесконечности простых чисел, мы обнаруживаем, что его можно записать в виде текста в языке LAr. Этот текст представляет собой последовательность высказываний, каждое из которых либо принадлежит к числу некоторого выбранного заранее набора аксиом, либо получается из этих аксиом и установленных ранее истинных высказываний применением одного из выбранного набора правил вывода.

Любое высказывание $(*)$ доставляет пример аксиомы — в данном случае аксиомы индукции применительно к утверждению P.

Примеры правил вывода, сформулированные в метаязыке:

а) если выведены высказывания «если P, то Q» и «P», то можно вывести высказывание «Q»;
б) если выведено высказывание «для всех x $(P(x))$», то можно вывести высказывание «$P(n)$», где n — любое целое неотрицательное число.

Аксиомы и правила вывода составляют дедуктивные средства языка.

Любое высказывание, которое можно вывести из аксиом, применяя правила вывода, называется выводимым (с помощью данных дедуктивных средств).

Важнейшее требование, предъявляемое к аксиомам, состоит в том, чтобы они были истинными высказываниями. Проверку этой истинности мы вообще не проводим внутри языка. Истинность аксиом может аргументироваться в метаязыке апелляцией к наглядной очевидности или другими рассуждениями.

Важнейшее требование, предъявляемое к правилам вывода, состоит в том, чтобы в результате их применения к истинным высказываниям получались только истинные высказывания.

Полнота. Анализируя математические тексты, можно выделить из них набор реально используемых аксиом и правил вывода. Это — нетривиальная задача; четкое описание результатов такого анализа было одним из высших достижений математической логики первой трети XX века.

Оказалось, что существует конечно описываемый набор правил вывода (и родственных им так называемых логических аксиом), который исчерпывает логические средства, применяемые в любой области математики.

Есть все основания верить, что этот набор не может быть расширен: все типы рассуждений, которые люди готовы считать «логичными» безотносительно к их содержанию, синтезируются по конечному набору правил, которые все нам уже известны. Напротив, предпринимались многочисленные попытки сузить набор правил, например, запретить использование правила исключенного третьего к бесконечным совокупностям, в частности в арифметике. Здесь не место обсуждать эти попытки.

Кроме логических аксиом и правил вывода, в набор дедуктивных средств всякого языка, ориентированного на ту или иную область математики, входят «специальные» аксиомы. Они выражают те сведения об объектах теории, истинность которых мы постулируем, подкрепляя ее неформальными соображениями. В *LAr* к ним могут относиться обычные правила действия с целыми числами, коммутативность и ассоциативность умножения и сложения, дистрибутивность сложения относительно умножения, аксиомы индукции.

Дедуктивные средства языка могут быть определены также в некотором другом языке, скажем, в расширении данного языка. Например, факты арифметики могут доказываться, исходя из аксиом теории множеств.

Дедуктивные средства не заданы однозначно: мы можем заранее ограничить себя, разрешив использовать только аксиомы определенного типа. Развитие математики может привести также к общественному признанию совершенно новой аксиомы: так случилось с «трансфинитной индукцией» Кантора.

Важнейшее требование к дедуктивным средствам состоит в том, чтобы они были финитно описываемы. Равносильное условие: должен существовать механический способ, позволяющий установить за конечное число шагов для каждого текста, является ли он дедуктивным выводом (в частности, аксиомой) и если да, то какого именно высказывания. С изменением набора дедуктивных средств этот механический способ может меняться, но для каждого набора он должен существовать.

Казалось естественным ожидать, что для любой математической дисциплины, скажем арифметики, удастся также найти полный набор специальных аксиом, или, более общо, дедуктивных средств, с помощью которых все истинные утверждения могли бы быть выведены логически. Повторим, что он должен быть финитно описываем, или порождаем конечным числом явных предписаний. Иначе мы могли бы просто сказать: назовем аксиомами все истинные высказывания арифметики. Но этот рецепт не является финитным описанием: чтобы проверить истинность одного высказывании, мы должны, вообще говоря, проделать бесконечно много действий.

По-видимому, такого рода надежды, более или менее явно сформулированные, питали такие умы, как Декарт, Лейбниц и в нашем веке Гильберт.

Мы уже говорили во введении, что эти надежды рухнули.

Принципы неполноты

Теорема Гёделя. *Полного финитно описываемого набора аксиом арифметики не существует.*

Этот результат может быть строго доказан для *SAr* и проиллюстрирован для *LAr*. Принципы его доказательства применимы вообще к любому достаточно выразительному языку математики, на какой бы круг идей он ни был ориентирован. Требование достаточной выразительности здесь означает просто чтобы на языке можно было говорить также о целых числах и чтобы всякое их свойство, выразимое в *LAr* (или *SAr*), было выразимо и в этом языке. В остальном язык может быть любым.

Смысл теоремы Гёделя можно выразить иначе: для порождения всех истинных высказываний о целых числах нужно бесконечно много новых идей. Творческий характер математики выявляется при таком понимании с особой силой. Ограниченность возможностей чисто дедуктивных средств составляет другую сторону медали.

Принципы доказательства. Чтобы доказать теорему Гёделя, нужно на время отказаться от рассмотрения отдельных высказываний, и обратиться к исследованию свойств истинности и выводимости в целом.

С этой целью очень удобно перенумеровать все высказывания языка L целыми числами от 0 до ∞ и говорить затем просто об их номерах. На нашем неформальном уровне представим себе, что все высказывания расположены в словарном порядке и перенумерованы подряд всеми (или некоторыми) целыми числами. Единственное существенное свойство нумерации, которым мы будем пользоваться, состоит в том, чтобы по каждому целому числу можно было чисто механически установить, является ли оно номером высказывания и если да, то какого; а по каждому высказыванию чисто механически установить его номер. Словарный порядок этому условию, очевидно, удовлетворяет, если правила образования высказываний сформулированы настолько точно, чтобы задачу их порождения и синтаксического анализа можно было поручить компьютеру. (Для LAr это не вполне так, что и будет главной причиной нестрогости последующих рассуждений.)

* Вот нумерация выражений в SAr, которой удобно пользоваться для доказательства теоремы Гёделя. Перенумеруем как-нибудь все символы алфавита SAr цифрами от 1 до 9, так, чтобы $\bar{1}$ получил номер 9. Чтобы получить номер конечной последовательности символов в SAr, заменим все эти символы соответствующими цифрами, прочтем результат как десятичную запись и увеличим его на единицу. *

Фиксируем такую нумерацию высказываний языка; ее принято называть нумерацией Гёделя.

Обозначим теперь буквой T множество номеров истинных высказываний, а D — множество номеров высказываний, выводимых из какой-нибудь финитно описываемой системы аксиом арифметики, или, более общо, выводимых с помощью данных дедуктивных средств. Предполагается, что D содержится в T; мы хотим доказать, что D строго меньше, чем T. Это следует из двух фундаментальных принципов:

а) множество T невыразимо в языке LAr, если язык L достаточно богат;
б) множество D всегда выразимо в языке LAr.

Поясним способы их доказательства.

Невыразимость истинности. Это — теорема Тарского (1936), являющаяся вариантом одного промежуточного результата в первоначальном рассуждении Гёделя.

Ее доказательство основано на крайне остроумной модификации парадокса лжеца. Гёдель и Тарский показывают, что если в языке арифметики фиксировано некоторое высказывание $P(x)$ с одной свободной переменной x, по нему можно построить высказывание Q_P без свободных переменных, смысл которого в метаязыке можно выразить следующей фразой: Q_P утверждает, что номер Q_P не обладает свойством, выраженным P.

Теперь предположим, что P выражает множество T номеров истинных высказываний, и придем к противоречию.

Действительно, высказывание Q_P определено и потому должно быть либо истинным, либо ложным.

Если оно истинно, то истинно утверждение «номер Q_P не обладает свойством, выраженным P», т. е. «номер Q_P не принадлежит T», т. е. Q_P не истинно — противоречие.

Если же Q_P ложно, то ложно утверждение «номер Q_P не обладают свойством, выраженным P», т. е. номер Q_P этим свойством обладает, тогда он лежит в T, и значит Q_P истинно — снова противоречие!

Значит, T не выразимо никакой из формул P и невыразимо вообще. Итак, вот содержательное разрешение старинного «парадокса лжеца»: истинность высказываний в языке средствами этого языка невыразима. (Поэты подозревали это давно.)

Читатель может заметить, что мы ведь как-то описали множество T. Верно, но мы сделали это в метаязыке, а не в языке-объекте L. Если мы включим в язык-объект формализованный фрагмент метаязыка, необходимый для выражения T, множество высказываний в новом языке L' увеличится, увеличится и множество истинных высказываний T', и хотя часть его T окажется выразимой, все T' опять ускользнут от выражения.

* Опишем, как строится по P высказывание Q_P в языке Шмульяна SAr. Математик, знакомый с первоначальной трудной конструкцией Гёделя (или другого языка), оценит изящество и простоту идеи Шмульяна.

Пусть $P(x)$ — формула в языке SAr с одной свободной переменной x. Рассмотрим сначала формулу $P_E(x) : P((x) \cdot ((\overline{10}) \uparrow (x)))$, где $\overline{10} = \bar{1} \ldots \bar{1}$ (10 раз). Иными словами, $P_E(x)$ получается подстановкой в $P(x)$ терма $x10^x$ вместо всех свободных вхождений x в P.

Пусть теперь Q — любая конечная последовательность символов языка SAr, $n(Q)$ — ее номер, по Шмульяну (см. выше). Будем говорить, что номер Q удовлетворяет $P(x)$, если после подстановки его вместо всех свободных вхождений x в P получится истинная формула. Нетрудно проверить следующий факт:

Лемма. *Номер Q удовлетворяет $P_E(x)$, если и только если номер $Q\bar{1}\ldots\bar{1}$ ($\bar{1}$ повторена $n(Q)$ раз) удовлетворяет $P(x)$.*

Действительно, из определения $n(Q)$ легко следует, что $n(Q\bar{1}\ldots\bar{1}) = n(Q)\cdot 10^{n(Q)}$ (здесь используется то обстоятельство, что $n(\bar{1})=9$).

Рассмотрим теперь формулу S в SAr: $x(P_E)\bar{1}\ldots\bar{1}$ ($\bar{1}$ повторена $n(x(P_E))$ раз). Выразим ее смысл в метаязыке, учтя, что $x(P_E)$ — классовый терм, а $\bar{1}\cdot\bar{1}$ — имя числа $n(x(P_E))$. Поэтому имеем:

S истинна $\Leftrightarrow$ номер $x(P_E)$ удовлетворяет $P_E \Leftrightarrow$ номер $x(P_E)\bar{1}\ldots\bar{1}$ ($n(x(P_E))$ раз), т. е. S, удовлетворяет P.

Первая эквивалентность здесь следует из описания семантики SAr (см. пункт о классовых термах и формулах старших рангов), а вторая — из доказанной выше леммы.

Неформально это означает, что формула S говорит: «мой номер удовлетворяет P». Чтобы построить Q_P, остается применить аналогичную конструкцию к «не P», т. е. к $(P)\downarrow(P)$ вместо P. *

Выразимость выводимости. Обсудим теперь вопрос, почему множество номеров выводимых формул D выразимо в языке LAr или SAr.

Здесь есть два уровня трудности, зависящие от того, хотим ли мы ограничиться фиксированным набором дедуктивных средств, который явно описан, или обосновать наше утверждение для всевозможных «естественных» наборов.

Рассмотрим сначала некоторый фиксированный набор дедуктивных средств. В типичном случае он задается конечным числом правил порождения всех аксиом и всех правил вывода. Основываясь на них, можно написать программу для компьютера, которая будет последовательно в подходящем порядке строить всевозможные выводимые высказывания, вовлекая по очереди все новые и новые аксиомы, новые и новые правила вывода и увеличивая длины выводов. (Мы отвлекаемся от ограниченности памяти и времени действия реальных компьютеров.)

Другой вариант такой программы может просто порождать подряд все конечные последовательности высказываний языка в словарном порядке, затем синтаксически анализировать их, проверяя, являются ли они выводами и какого именно высказывания, после чего вычислять номер этого высказывания.

Предположение о возможности написать такую программу по отношению к данному конкретному выбору дедуктивных средств может быть оправдано непосредственно. (Такие программы или их фрагменты реально были составлены для некоторых простых языков геометрии и логики.)

Рассмотрим теперь множество пар целых чисел E: по определению (n, m) входит в это множество, если m есть номер высказывания, истинность которого устанавливается n-м по порядку выводом, порожденным нашей программой.

Множество пар целых чисел E выразимо в языках LAr, SAr просто потому, что машинная логика и арифметика целиком включены в дедуктивные средства этих языков. Пусть высказывание $\varepsilon(x, y)$ выражает E. Тогда высказывание в LAr «существует x $(\varepsilon(x, y))$» (с одной свободной переменной y) или эквивалентная ему формула SAr, выражает D. Действительно, оно истинно в точности для тех значений n переменной y, для которых можно найти значение m переменной x со свойством: n есть номер высказывания, истинность которого установлена m-м выводом. Так как программа порождает все выводы, наше утверждение оправдано.

Остается разобрать последний вопрос: в какой мере эта аргументация проходит для любых наборов дедуктивных средств, которые могут строить все большие и большие множества D?

Наше рассуждение показывает, что единственно существенное свойство каждого из этих наборов — возможность «механического» порождения всех выводов. Но здесь, разумеется, снова встает вопрос о полноте: знаем ли мы уже все принципы механического порождения или они могут пополняться? Можно было бы вообразить себе существование таких процедур порождения выводов, что соответствующее им множество E уже не могло бы быть выраженным в LAr.

Общепринятая точка зрения состоит в том, что нам уже известен полный набор элементарных средств последовательного порождения выводов (или просто целых чисел), который не может быть расширен. Их комбинации дают все возможные полувычислимые функции (частично рекурсивные). Арифметика и логика, заложенные в большие цифровые ЭВМ, достаточны для порождения всех выводов из любого финитного набора посылок. Любое мыслимое предписание о чисто механическом порождении выводов может быть превращено в программу для такой машины. Если принять эту точку зрения, то придется признать, что выразимость выводимости установлена в самых общих предположениях о дедуктивных средствах.

Как далеко от выводимости до истинности?

Уточнить этот вопрос и в какой-то степени ответить на него помогли исследования последних лет. Вот ответ в двух словах: очень далеко.

Точнее говоря, рассмотрим класс выразимых в *LAr* подмножеств множества целых чисел. Можно показать, что все они выражаются формулами типа:

Существуют такие $x_1, \dots, x_m$, что для всех $y_1, \dots, y_n$
существуют такие $z_1, \dots, z_p$, что для всех $u_1, \dots, u_q$
существуют... со свойством

$$P(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, u_q, \dots; x) = 0$$

и их отрицаниями.

Здесь P — многочлен с целыми коэффициентами от любого числа переменных. Переменная x свободна, все остальные переменные, связанные кванторами $\exists$ («существует») и $\forall$ («для всех»); первый и последний квантор может быть либо $\exists$ (как у нас), либо $\forall$, в крайнем случае, кванторов может не быть вовсе (и связанных переменных тоже).

Естественно пытаться классифицировать выразимые множества по сложности формул, которые их выражают. Оказывается, что важной мерой сложности служит число перемен кванторов перед символом многочлена P. (Например, в последовательности $\exists x_1 x_2 \forall y_1\, \exists z_1 z_2 z_3$ две перемены кванторов.) Обозначим через Ω_n класс всех множеств, выразимых формулами с не более чем n переменами кванторов. Очевидно, $\Omega_0 \leqslant \Omega_1 \leqslant \Omega_2 \leqslant \dots$ — эти классы не убывают.

Около тридцати лет назад было доказано, что эти классы строго возрастают: в Ω_{n+1} всегда есть множества, не лежащие в Ω_n. Их объединение $\Omega_\infty = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \Omega_n$ есть класс всех арифметически выразимых множеств. «Лестница, ведущая вверх» $\Omega_0 < \Omega_1 < \Omega_2 < \dots$ называется арифметической иерархией.

Пусть теперь D — множество номеров выводимых формул в некотором языке математики. Из предыдущего обсуждения мы знаем, что $D \in \Omega_\infty$. На какой ступени лестницы может находиться D?

Совсем недавно на этот вопрос был получен поразительный ответ: серия исследований, завершенная работами молодых советских математиков Ю. В. Матиясевича и Г. В. Чудновского, показала, что обязательно $D \in \Omega_0$. Точнее говоря, любое множество D выразимо формулой вида

$$\exists x_1 \dots \exists x_n \ (P(x_1, \dots, x_n; x) = 0).$$

Таким образом, выводимость D находится на самой низкой ступеньке арифметической иерархии, тогда как истина T находится выше всей лестницы Ω_∞.

В следующем, последнем, разделе статьи мы укажем некоторые верстовые столбы на бесконечно долгом пути от D до T.

Математическое творчество и «творческие множества»

В предыдущем изложении мы несколько модернизировали доказательство Гёделя, чтобы более выпукло показать его основные пружины. Однако первоначальный вариант содержит еще одну замечательную идею, которую мы сейчас вкратце объясним.

Фиксируем некоторый формальный язык математики L, семантику и средства дедукции в нем. Обозначим снова D множество номеров выводимых формул в некоторой фиксированной нумерации Гёделя. Построим явно формулу P, выражающую D. Для доказательства теоремы, что истинность T не выражается формулой P, мы пользовались следующей схемой рассуждений:

а) предположим, что истинность T выразима формулой P;
б) тогда есть формула Q_P, говорящая «я не истинна». Не имея свободных переменных, она должна быть истинной или ложной;
в) она не может быть ложной (по своей семантике);
г) она не может быть истинной (по своей семантике);
д) следовательно, истинность не выразима формулой P.

Это рассуждение Тарского: пункты в) и г) в нем эксплуатируют в математическом контексте «парадокс лжеца», а пункт д) его объясняет.

Но здесь никак не использовалось специфическое свойство P выражать D; теорема Тарского применима ко всем P.

Гёдель рассуждал чуть-чуть иначе, и это маленькое отличие доставляет результат, замечательный для теории познания.

Доказательство Гёделя в параллельном изложении выглядит так:

а) выводимость D выразима формулой P;
б) есть формула Q_P, говорящая «я не выводима». Не имея свободных переменных, она должна быть либо истинной, либо ложной;
в) она не может быть ложной (по своей семантике: иначе она должна была быть выводимой и, следовательно, истинной);
г) значит, она истинна;
д) следовательно, она не выводима (по своей семантике).

Таким образом, Гёдель явно указывает формулу Q_P, которая истинна, но не выводима с помощью данных дедуктивных средств! Иными словами, его рассуждение не только демонстрирует неполноту этого набора дедуктивных средств, но также дает эффективный способ пополнить этот набор новой аксиомой, истинность которой мы установили метаязыковыми разговорами.

Расширив так множество D, мы получим большее множество D', все еще не совпадающие с T; к нему можно снова применить конструкцию Гёделя и т. д. Таким образом, мы получаем рецепт для проведения целой серии творческих актов — пополнения арифметики новыми аксиомами, истинность которых мы не доказываем, но угадываем. (Формализация этого свойства T привела к математическому понятию «творческого множества», которое автор не намерен обсуждать подробнее, но вынес в заголовок раздела — для рекламы.) На самом доле, разумеется, творческий акт здесь был совершен однократно — самим Гёделем; и его содержание уникально.

Ясно, что как бы мы ни постарались финитно описать рецепт для бесконечного увеличения D таким способом, все T все равно окажется неисчерпанным — в силу той же теоремы о неполноте.

Однако можно постараться исчерпать T формулами гёделевского типа, отказавшись от надежды описать этот набор формул финитно. Очень красивый результат в этом направлении доказал около десяти лет назад американский математик С. Феферман. Его изложением мы и закончим статью.

С. Феферман заметил, что есть много других способов добавлять к уже имеющимся аксиомам невыводимые, но истинные формулы. Истинность их устанавливается в метаязыке, как следствие нашей веры в истинность предыдущих аксиом (принятие которых, в свою очередь, было актом веры: вспомните аксиомы индукции). Точнее, пусть $P(x)$ — любая формула с одной свободной переменной. С. Феферман показывает, как написать формулу A_P без свободных переменных, смысл которой в метаязыке может быть выражен так:

> если для всех чисел n формулы $P(n)$ выводимы из предыдущей системы аксиом, то $\forall x\, P(x)$.

После этого оказывается, что добавление формул A_P в бесконечном количестве и всех выводов из них исчерпывает T.

Иными словами, начнем с принятия элементарных арифметических тождеств и аксиом индукции.

Тогда для постижения полной истины в арифметике нам остается еще совершить трансфинитную последовательность актов веры в то, что предшествующие акты веры не были заблуждением.

Два эпилога

Старательно мы наблюдаем свет,
Старательно людей мы наблюдаем
И чудеса постигнуть уповаем:
Какой же плод науки долгих лет?
Что, наконец, подсмотрят очи зорки?
Что, наконец, поймет надменный ум
На высоте всех опытов и дум,
Что? точный смысл народной поговорки.

Е. Боратынский

Мысль изреченная есть ложь.

Ф. Тютчев

Литература

1. *Клини С. К.* Введение в метаматематику. М.: ИЛ, 1957.
2. *Мальцев А. И.* Алгоритмы и рекурсивные функции. М.: Наука, 1965.
3. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. М.: Наука, 1971.
4. *Нагель Э., Хьюмен Дж. Р.* Теорема Гёделя. М.: Знание, 1970.
5. *Успенский В. А.* Теорема Гёделя о неполноте в элементарном изложении // Успехи математических наук. 1974. Т. 29. Вып. 1. С. 3—47.

Георг Кантор и его наследие

Бог — не геометр; скорее он непредсказуемый поэт. (Геометры могут быть непредсказуемыми поэтами, так что здесь есть место для компромисса.)

В. Тасич [12] *о романтизме XIX века*

Введение

Великий метанарратив Георга Кантора — теория множеств, — созданный им практически в одиночку примерно за пятнадцать лет, больше напоминает произведение искусства, чем научную теорию.

Пользуясь слегка модернизированным языком, основные результаты теории множеств можно резюмировать в нескольких строках.

Рассмотрим категорию множеств с произвольными отображениями в качестве морфизмов. Классы изоморфизма множеств называются *кардиналами*. Кардиналы вполне упорядочены отношением «быть подобъектом», и кардинал множества всех подмножеств множества U строго больше, чем кардинал самого U (что, разумеется, доказывается с помощью знаменитого диагонального процесса).

Это мотивирует введение другой категории — категории вполне упорядоченных множеств с монотонными отображениями в качестве морфизмов. Классы изоморфизма объектов этой категории называются *ординалами*; они также вполне упорядочены. Гипотеза континуума представляет собой догадку относительно порядковой структуры начального сегмента ординалов.

Тем самым изысканный минимализм средств выражения используется Кантором для достижения возвышенной цели: понимания бесконечности, или даже скорей бесконечности бесконечностей. Встроенная в теорию ауторефенентность и мощное расширение области, доступной математической интуиции (принципы построения новых множеств), вносят дополнительные штрихи в эту картину художественной смелости, соединенной с самоограничением.

Выступление на заседании Немецкого математического общества при награждении Канторовской медалью. Впервые опубликовано в сборнике статей, посвященном памяти А. Н. Тюрина: Algebraic Geometry: Methods, Relations, and Applications. Труды МИАН им. В. А. Стеклова. 2004. Т. 246. С. 195—203. *Перевод с английского С. М. Львовского.*

Сам Кантор был бы категорически не согласен с этой точкой зрения: для него открытие иерархии бесконечностей было открытием боговдохновенной Истины.

Математики XX века реагировали на создание Кантора очень по-разному, и удобнее всего разбираться в этой реакции, имея в виду различные течения современной науки, философии и искусства[1].

Одно из главных открытий Кантора можно, несколько провокационным образом, представить в следующем виде:

2^x *значительно больше, чем* x.

Здесь под x можно понимать целое число, произвольный ординал или же произвольное множество (в последнем случае 2^x обозначает множество всех подмножеств в x). Глубокая математика начинается в тот момент, когда мы пытаемся уточнить это утверждение и выяснить, *насколько* 2^x больше, чем x.

Если x — первый бесконечный ординал, то это гипотеза континуума.

Я выскажу соображения в пользу того тезиса, что для конечных x этот вопрос при правильной постановке оказывается тесно связанным с универсальной NP-проблемой.

Затем я остановлюсь на различных вопросах, связанных с ролью теории множеств в современной математике и с рецепцией канторовских идей.

Аксиома выбора и P-NP проблема, или конечное как бесконечность для бедных[2]

В 1900 году, в своем выступлении на Втором международном математическом конгрессе в Париже, Гильберт поставил гипотезу континуума первой в своем списке 23 основных проблем математики. Это было одно из ярких событий в научной биографии Кантора, потратившего множество усилий на консолидацию немецкого и международного математического сообществ в единый организм, способный противостоять группе влиятельных профессоров, настроенных против теории множеств.

Тем не менее противостояние его теории бесконечного продолжалось, и это Кантора сильно задевало: под вопрос ставилась ценность созданной им новой математики.

---

[1] В Оперном театре Галле 11 ноября 2006 года состоялась премьера оперы Ингомара Грюнауэра «Кантор, или измерение бесконечности».

[2] На клеевскую премию в $\$10^6$ за решение P-NP проблемы я не намекаю.

В 1904 году, на следующем международном конгрессе, Кёниг выступил с докладом, в котором доказывалось, что континуум нельзя вполне упорядочить; это делало гипотезу континуума бессмысленной.

Вот что по этому поводу пишет Даубен [3, с. 283]: «Кантор тяжело переживал драматическую ситуацию со статьей Кёнига, доложенной на Третьем международном математическом конгрессе в Гейдельберге. Он был на конгрессе с двумя дочерьми, Эльзой и Анной-Марией, и доклад Кёнига был воспринят им как личное унижение».

Оказалось, однако, что в статье Кёнига содержится ошибка, а вскоре Цермело обнародовал доказательство того, что всякое множество можно вполне упорядочить — доказательство, опирающееся на введенную им совсем новую аксиому выбора. По существу эта аксиома утверждает, что исходя из всякого множества U можно построить новое множество, состоящее из пар (V, v), где V пробегает все непустые подмножества в U, а v — элемент множества V.

Век спустя математическое сообщество не представило списка проблем на новое столетие, аналогичного списку проблем Гильберта. Возможно, изменился общий взгляд на математику: уже в гильбертовском списке многие из проблем больше походили на исследовательские программы, чем на конкретные задачи, и похоже, что такой способ восприятия работы математиков более реалистичен.

Тем не менее, по-прежнему остаются нерешенными несколько важных конкретных задач; недавно семь из них были выделены и снабжены ценниками. Я сейчас остановлюсь на одной из этих задач, а именно, на P-NP проблеме; я буду ее рассматривать как финитарную травестию цермеловской аксиомы выбора.

Пусть через $U_m = \mathbb{Z}_2^m$ обозначено множество m-битовых последовательностей. Его подмножества удобно кодировать булевыми многочленами. Пользуясь стандартным (и более общим) языком коммутативной алгебры, можно отождествить всякое подмножество в U_m с множеством нулей единственной функции $f \in B_m$, где B_m — алгебра булевых многочленов — определяется так:

$$B_m := \mathbb{Z}_2[x_1, \ldots, x_m]/(x_1^2 + x_1, \ldots, x_m^2 + x_m).$$

Стало быть, задача Цермело — *выбрать по элементу в каждом непустом подмножестве в* U — принимает следующий вид: *для всякого булева многочлена найти точку, в которой он обращается в нуль, или доказать, что он тождественно равен единице*. Более того, мы хотим решить эту задачу за время, полиномиальное относительно числа битов в коде для f.

Это приводит к NP-полной («максимально трудной») задаче, если записывать булевы многочлены, пользуясь следующей версией дизъюнктивной нормальной формы. Закодируем такую форму с помощью семейства

$$u = \{m; (S_1, T_1), \ldots, (S_N, T_N)\}, \quad m \in \mathbb{N}; \quad S_i, T_i \subset \{1, \ldots, m\}.$$

Битовый размер семейства u равен mN, а соответствующий булевский многочлен есть

$$f_u := 1 + \prod_{i=1}^{N} \left(1 + \prod_{k \in S_i} (1 + x_k) \prod_{j \in T_i} x_j\right).$$

Такая запись позволяет быстро проверить, входит ли данный элемент в соответствующее множество нулей. За это приходится платить: единственность представления данного многочлена f места не имеет, и более того, проверка равенства $f_u = f_v$ становится вычислительно сложной задачей.

В частности, даже следующее ослабление проблемы Цермело оказывается NP-полным и тем самым, на сегодняшний день, неприемлемо сложным: *проверить, отличен ли от константы данный булевский многочлен, заданный в дизъюнктивной нормальной форме*.

Цермеловская аксиома выбора вызвала в свое время бурную дискуссию математиков из разных стран, опубликованную в первом номере журнала «Mathematische Annalen» за 1905 год. Значительная часть дискуссии была сосредоточена на психологии математического воображения и на проблеме надежности его плодов. Все время возникали каверзные вопросы наподобие такого: «Откуда мы знаем, что в процессе рассуждения мы все время думаем об одном и том же множестве?». Если считать, что по крайней мере часть процессов, происходящих в нашем мозгу, можно адекватно промоделировать конечными автоматами, то количественные оценки требуемых ресурсов, которые дает нам теория вычислимости за полиномиальное время, могут в какой-то момент оказаться полезными для нейрофизиологии, а следовательно, и для психологии.

Вот как в недавней статье в журнале «Science» рассказывается об экспериментах, проливающих свет на природу представления математических объектов в человеческом сознании и на психологические корни расхождений между, например, интуиционистами и формалистами.

> $\langle\ldots\rangle$ наши результаты дают основания надеяться, что можно будет согласовать результаты самонаблюдений различных мате-

> матиков, показав, что даже в такой ограниченной области, как элементарная арифметика, разные задачи представляются в мозгу разными способами. Точная арифметика делает упор на лингвистическом представлении данных; она использует левые нижние лобные доли, отвечающие также за построение ассоциаций между словами. Символическая арифметика является культурным феноменом, специфическим для человека; ее развитие зависело от постепенного совершенствования систем счисления. ⟨…⟩
>
> Приближенная арифметика, напротив, не проявляет никакой зависимости от языка; она основывается в первую очередь на количественном представлении, реализованном в визуально-пространственных нейронных сетях левой и правой теменных долей ([4, с. 973]).

В следующем разделе мы обсудим подход к гипотезе континуума, который явным образом вдохновлен доминирующими визуально-пространственными нейронными сетями; предположительно, этот подход разумнее развивать в терминах вероятностных моделей, а не логики или булевых автоматов.

Приложение: некоторые определения. Для полноты напомним читателю основные определения, связанные с P-NP проблемой. Начнем с бесконечного конструктивного мира U в смысле [8]; например, это могут быть натуральные числа $\mathbb{N}$. Говорят, что подмножество $E \subset U$ *принадлежит классу* P, если оно разрешимо, а его характеристическая функция χ_E вычислима за полиномиальное время для всякого $x \in E$.

Далее, подмножество $E \subset U$ *принадлежит к классу* NP, если оно является полиномиально ограниченной проекцией некоторого множества $E' \subset U \times U$, принадлежащего к классу P, т. е. если для некоторого многочлена G имеем

$$u \in E \iff \big(\text{существует } (u, v) \in E', \text{ где } |v| \leqslant G(|u|)\big)$$

(через $|v|$ обозначен размер элемента v). В частности, $P \subset NP$.

Неформально включение $E \in NP$ означает, что для всякого $u \in E$ *существует полиномиально ограниченное доказательство этого включения* (а именно, вычисление значения $\chi_{E'}(u, v)$ для подходящего v); при этом нахождение такого доказательства (т. е. элемента v) наивным перебором всех v, удовлетворяющих условию $|v| \leqslant G(|u|)$, может потребовать экспоненциального времени.

Подмножество $E \subset U$ называется *NP-полным*, если для любого другого множества $D \subset V$, принадлежащего классу P, существует вычислимая за полиномиальное время функция $f: V \to U$, для которой $D = f^{-1}(E)$, т. е. $\chi_D(v) = \chi_E(f(v))$.

Использованная здесь запись булевых многочленов объясняется и мотивируется доказательством NP-полноты; см., например, [6, § 2.6].

Гипотеза континуума и случайные переменные

Мамфорд [10, с. 208] обсуждает следующее рассуждение Криса Фрейлинга [5], призванное убедить в том, что гипотеза континуума является «очевидно» ложной.

> Два игрока независимо друг от друга бросают стрелы в мишень. Если гипотеза континуума верна, то точки P на поверхности мишени можно вполне упорядочить таким образом, что для всякой P множество точек Q, удовлетворяющих условию $Q < P$ (обозначим его S_P), является счетным. Предположим, что первый и второй игроки попали в мишень в точках P_1 и P_2 соответственно. Либо $P_1 < P_2$, либо $P_2 < P_1$. Предположим, что выполнено первое соотношение; тогда P_1 лежит в счетном множестве S_{P_2}. Поскольку два броска независимы, мы можем считать, что сначала бросал второй игрок, а затем первый. После броска второго игрока счетное множество S_{P_2} зафиксировано. Однако всякое счетное множество измеримо и имеет меру нуль. То же рассуждение показывает, что вероятность того, что точка P_2 попала в S_{P_1}, также равна нулю. Стало быть, с вероятностью единица ни одно из этих двух событий не произошло, и это противоречит утверждению, что мишень представляет собой первый несчетный кардинал! $\langle\ldots\rangle$
>
> Я полагаю, что это «доказательство» свидетельствует о том, что если построить математику на основе, включающей в себя случайные переменные, то гипотеза континуума окажется ложной и мы избавимся от одной из бессмысленных головоломок теории множеств[3].

На самом деле работе Фрейлинга предшествовали работы Скотта и Соловея, в которых был переведен на язык «логически случайных множеств» коэновский метод форсинга, использованный для доказательства совместимости отрицания гипотезы континуума с акси-

[3] Статья Мамфорда носит выразительное название «Заря эры стохастичности». Дэвид заверил меня, что это заглавие не имеет отношения к принадлежащей Джамбаттиста Вико теории исторических циклов, которая в пересказе Гарольда Блума [1] выглядит так. Джамбаттиста Вико в своей книге «Новая наука» описал исторический цикл, состоящий из трех фаз: теократической, аристократической и демократической. Затем следует хаос, а за ним — новый теократический век.

омами Цермело—Френкеля. Эти работы показали, что случайные переменные действительно можно внести в список основных понятий и что случайные переменные можно осмысленно использовать.

Сам Поль Коэн в конце своей книги высказал предположение, что точка зрения, согласно которой гипотеза континуума «очевидно ложна», может стать общепринятой.

Однако же, если рассуждения Скотта и Соловея доказывают точную теорему про формальный язык теории множеств, то рассуждение Фрейлинга апеллирует непосредственно к нашей физической интуиции; точнее всего его было бы назвать мысленным экспериментом. Этот эксперимент аналогичен по своей природе некоторым классическим мысленным экспериментам в физике, в которых, например, выводятся различные утверждения про динамику из невозможности создания вечного двигателя.

Сама идея использования мысленного эксперимента взамен логического вывода может рассматриваться как правополушарное соответствие левополушарным элементарным логическим операциям. Аналогичную роль играют хорошие метафоры. Когда мы сравниваем возможности двух полушарий мозга, нас поражает то, что я в другом месте назвал врожденной слабостью метафор: метафоры противостоят попыткам построить систему на их основе. Можно только более или менее искусно сочетать разные метафоры, но полученное в итоге здание останется стоять или обрушится вне зависимости от того, истинно ли наше построение.

Физика дисциплинирует мысленные эксперименты, как поэзия дисциплинирует метафоры, но внутренняя дисциплина есть только у логики.

Из успешных мысленных экспериментов получаются математические истины, которые, будучи принятыми, окаменевают в аксиомы, а аксиомы запрягаются в ярмо логических выводов.

Основания и физика

Я начну этот раздел с краткого обсуждения того влияния, которое теория множеств оказала на основания математики. Я не буду понимать слово «основания» ни как парафилософское увлечение вопросами, относящимися к природе, доступности и надежности математической истины, ни как набор нормативных предписаний наподобие тех, что предлагают финитисты или формалисты.

Я буду понимать «основания математики» несколько размыто: как общий термин для меняющегося со временем конгломерата правил и принципов, используемых при организации уже существующего или заново создающегося корпуса математических знаний соответствующей эпохи. Иногда основания кодифицируются в авторитетном математическом тексте (пример: «Начала» Евклида); в другие эпохи интерес к основаниям проявляется в нервных вопросах к самому себе о смысле бесконечно малых, или о точном соотношении между числами и точками на действительной прямой, или, наконец, о природе алгоритмов. Как бы то ни было, основания математики в этом широком смысле — это нечто, имеющее значение для работающего математика, связанное с некоторыми основными принципами его ремесла, но при этом не составляющее сути его работы.

В XX веке все основные тенденции в основаниях математики связаны с канторовскими языком и интуицией множеств.

Хорошо разработанный проект Бурбаки отшлифовал идею, согласно которой всякий математический объект $\mathscr{X}$ (будь то группа, топологическое пространство, интеграл, формальный язык...) можно рассматривать как множество X с дополнительной структурой x. Эта идея появлялась во многих специализированных исследовательских проектах, от гильбертовских «Оснований геометрии» до колмогоровского отождествления теории вероятности с теорией меры.

Дополнительная структура x в паре $\mathscr{X}=(X, x)$ — это элемент другого множества Y, принадлежащего шкале, построенной из X с помощью стандартных операций и удовлетворяющей условиям (аксиомам), также формулируемым исключительно на языке теории множеств. Более того, природа элементов множества X несущественна: биекция $X \to X'$, отображающая x в x', порождает изоморфный объект $\mathscr{X}'=(X', x')$. Эта идея сыграла важнейшую роль в консолидации и прояснении математики; она привела к замечательным достижениям далеко за пределами группы «Бурбаки». Поскольку она принята в тысячах математических статей, постольку можно попросту сказать, что язык математики — это язык теории множеств.

Поскольку теория множеств очень легко формализуется, это позволило логикам выдвинуть и отстаивать тот тезис, что их нормативные принципы надлежит применять ко всей математике, а также переоценивать роль «парадоксов бесконечного» и теорем Гёделя о неполноте.

Тем не менее, этот факт сделал также возможным такие аутореферентные акты, как включение метаматематики в математику, в форме теории моделей. Теория моделей изучает специальные математические структуры — формальные языки, — рассматриваемые как математические объекты (множества со структурой: с законами композиции, выделенными элементами и т. п.), а также их интерпретации в множествах. Такие поразительные открытия, как гёделевская теорема о неполноте арифметики, немного теряют в таинственности, как только приходит понимание, что это просто утверждения о том, что некоторая алгебраическая структура не является конечно порожденной относительно данных законов композиции.

Когда на следующем этапе исторического развития множества уступили место категориям, то сначала это выразилось лишь в том, что бо́льшее внимание стало уделяться морфизмам структур (в частности, изоморфизмам), нежели структурам как таковым. Да и категорию (малую) тоже, в конце концов, можно рассматривать как множество со структурой. Тем не менее, благодаря в первую очередь работам Гротендика и его школы по основаниям алгебраической геометрии, категории выдвинулись на передний план. Вот неполный список изменений в нашем понимании математических объектов, вызванных к жизни языком категорий. Напомним, что обычно объекты категории C множествами не являются, и их природа никак не уточняется: множество образуют только морфизмы $Hom_C(X, Y)$.

А. Объект X категории C можно отождествить с представляемым им функтором $Y \mapsto Hom_C(Y, X)$. Тем самым, если C — малая категория, то первоначально бесструктурное X становится множеством со структурой. Эта внешняя, «социологическая», характеризация математического объекта через взаимодействие с другими объектами той же категории, а не через его внутреннюю структуру, оказалась чрезвычайно полезной, например, во всех задачах, связанных с пространствами модулей в алгебраической геометрии.

Б. Коль скоро два изоморфных математических объекта обладают совершенно одинаковыми свойствами, не имеет значения, сколько именно попарно изоморфных объектов содержится в данной категории C. Неформально говоря, если у категорий C и D «те же самые» классы изоморфных объектов и морфизмы между их представителями, то эти категории следует рассматривать как эквивалентные. Например, категория «всех» конечных множеств эквивалентна всякой категории конечных множеств, содержащей в точности по одному множеству каждой мощности 0, 1, 2, 3, …

Такая «открытость» категории, рассматриваемой с точностью до эквивалентности, является существенной, например, для абстрактной теории вычислимости. Тезис Чёрча лучше всего понимать как постулат, согласно которому существует открытая категория «конструктивных миров» — конечных или счетных множеств со структурой и вычислимых морфизмов между ними, — в которой всякий бесконечный объект изоморфен миру натуральных чисел, а морфизмы соответствуют рекурсивным функциям (см. подробности в [8]). Существует очень много других интересных бесконечных конструктивных миров, задаваемых с помощью самых разнообразных внутренних структур: слова над данным алфавитом, конечные графы, машины Тьюринга и т. д. Все они, однако, изоморфны $\mathbb{N}$ ввиду существования вычислимых нумераций.

B. Предыдущее замечание кладет также предел наивному взгляду, согласно которому категории «являются» специфическими множествами со структурой. Поскольку естественно отождествлять категории, связанные эквивалентностью (не обязательно биективной на объектах), такой подход оказывается совершенно дезориентирующим.

Точнее говоря, постепенно вырисовывается следующая иерархическая картина. Сами категории являются объектами большей категории *Cat*, морфизмы в которой являются функторами, или «естественными конструкциями» (наподобие теории (ко)гомологий топологических пространств). Однако функторы образуют не просто множество или класс: они сами являются объектами некоторой категории. Аксиоматизируя эту ситуацию, мы приходим к понятию *2-категории*, прототипом которой является *Cat*. Рассматривая точно так же 2-категории, получаем 3-категории, и т. д.

В этой иерархии закодирован следующий взгляд на математические объекты. Между математическими объектами не бывает равенств — только эквивалентности; а поскольку эквивалентности — тоже математические объекты, между ними тоже не бывает равенств — только эквивалентности следующего порядка, и т. д. ad infinitum.

Это ви́дение, идущее от Гротендика, расширяет границы классической математики, в особенности алгебраической геометрии, причем в точности в том направлении, где она взаимодействует с современной теоретической физикой.

С приходом категорий математическое сообщество излечилось от страха перед классами (в смысле противопоставления «класс — множество»), и вообще перед «очень большими» совокупностями объектов.

Кроме того, при этом оказалось, что имеются осмысленные способы думать о «всех» объектах данного типа и творчески пользоваться ауторефферентностью вместо того, чтобы ее полностью запрещать. Это — развитие старого противопоставления классов множествам, причем теперь мы считаем, что на каждом шаге получается структура, аналогичная, но не идентичная тем, что мы изучали на предыдущих шагах.

На мой взгляд, эти новые тенденции не поколебали здания, построенного Кантором, но лишь укрепили его.

Если канторовские идеи все-таки ушли на второй план, вместе с увлеченностью парадоксами бесконечного и интуиционистскими неврозами, то причиной этому было возобновление взаимодействия с физикой и превращение формальной логики в теоретическую информатику.

Рождение квантовой механики радикально изменило наши представления о взаимосвязях между реальностью, ее теоретическими описаниями и нашим восприятием. Стало ясно, что знаменитое канторовское определение множества ([2]) представляло собой всего лишь рафинированный классический взгляд на материальный мир как на нечто, состоящее из попарно различных предметов, расположенных в пространстве:

> Unter einer 'Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die 'Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen.
>
> Под «множеством» мы понимаем всякое соединение M определенных и различных объектов m (называемых «элементами» множества M), существующих в нашем восприятии или в нашей мысли.

Как только выяснилось, что такой взгляд — всего лишь приближение к несравненно более сложному квантовому описанию, множества перестали быть непосредственно укорененными в реальности. На самом деле множества со структурой из современной математики, наиболее эффективно используемые в современной физике, — это множества не предметов, а *возможностей*. Например, фазовое пространство классической механической системы состоит из пар (*координата, импульс*), описывающих все возможные состояния системы; после квантования оно заменяется на пространство комплексных амплитуд вероятности: гильбертово пространство L_2-функций от координат или что-нибудь еще в этом роде. Амплитуды — это всевозможные квантовые суперпозиции всевозможных классических состояний. Все это бесконечно далеко от множества предметов.

Более того, запросы квантовой механики сильно подняли у математиков планку терпимости к неточной, но в высшей степени стимулирующей манере выражаться, принятой у физиков. Это привело, в частности, к тому, что фейнмановские интегралы по траекториям стали одной из наиболее активных областей исследования в топологии и алгебраической геометрии, при том что математический статус фейнмановского интеграла не лучше, чем статус интеграла Римана до выхода кеплеровской «Стереометрии винных бочек».

Теоретическая информатика придала очень нужную практическую важность предписаниям формальной логики, бывшим по существу исключительно гигиеническими. Внедрение понятия «успех с высокой вероятностью» в исследование алгоритмической разрешимости способствовало дальнейшему разрушению перегородок в сознании, отделявших основания математики от собственно математики.

Приложение: Кантор и физика. Было бы интересно изучить натурфилософию Кантора более подробно. Согласно [3], он несколько раз напрямую высказывался о возможных физических приложениях своей теории.

Например, он доказал, что если из области в $\mathbb{R}^n$ удалить произвольное счетное плотное подмножество (например, все алгебраические точки), то любые две точки дополнения можно соединить непрерывной кривой. Его интерпретация: непрерывное движение возможно даже в несплошных пространствах, так что «наше» пространство также может быть несплошным, поскольку идея непрерывности основана на наблюдении непрерывного движения. Тем самым, надо пересмотреть механику.

Выступая на заседании Общества германских естествоиспытателей и медиков в 1883 году во Фрейбурге, Кантор сказал: «Одна из важнейших проблем теории множеств ⟨…⟩ состоит в том, чтобы выяснить мощности всех множеств, существующих в природе, насколько это возможно» ([3, с. 291]).

Похоже, Кантор хотел, чтобы атомы (монады) были настоящими точками, лишенными размера и существующими в природе в бесконечном количестве. «Телесные монады» (массивные частицы? — *Ю. М.*) должны существовать в счетном количестве. «Эфирные монады» (безмассовые частицы? — *Ю. М.*) должны иметь кардинал алефодин.

Кода: математика и общество постмодерна

Уже при жизни Кантора рецепция его идей проходила так, словно это было новое течение в искусстве, вроде импрессионизма или атональности, а не новая научная теория. Отношение к ним было очень сильно эмоционально окрашено; оно варьировалось от полного отрицания («растлитель юношества» у Кронекера) до самых высоких похвал (выступление Гильберта в защиту «канторовского рая»). Впрочем, в обоих этих высказываниях присутствуют несколько снижающие их градус нюансы, на которые обычно не обращают внимания:

Кронекер неявно уподобляет Кантора Сократу, а Гильберт с легкой иронией намекает на канторовскую убежденность в том, что теория множеств вдохновлена Богом.

Если принять тезис, что созданная Бурбаки обширная конструкция является прямым потомком работ Кантора, то не удивляет, что ее ждала так же судьба (см. [9]). Особенно яростным нападкам подверглась «новая математика» — попытка реформировать математическое образование, усилив акцент на точных определениях, логике и теоретико-множественном языке, а не на математических фактах, рисунках, примерах и неожиданностях.

Хочется рассмотреть эту реакцию в свете принадлежащего Лиотару [7] знаменитого определения общества постмодерна как «недоверчивого к метанарративам» и замечания Тасича, что математика принадлежит к «наиболее упорным метанарративам в западной культуре» [12, с. 176].

На это упорство и будем уповать.

Приложение: хроника жизни и математических достижений Кантора (по [11] и [3])

3 марта 1845. В Санкт-Петербурге родился Георг Кантор.

1856. Семья переезжает в Германию (Висбаден).

1862—1867. Кантор учится в Цюрихе, Берлине, Геттингене и снова в Берлине.

1867—1869. Первые публикации по теории чисел (квадратичные формы).

1869. Зашита диссертации в университете г. Галле.

1870—1872. Работы о сходимости тригонометрических рядов.

1872—1879. Существование различных бесконечностей, биекции $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, исследование взаимосвязей между непрерывностью и размерностью.

29 ноября 1879. В письме к Дедекинду Кантор спрашивает, возможна ли биекция между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ [3, с. 49]. Вскоре после Рождества — открытие диагонального процесса [3, с. 51 и далее].

1874. Первая публикация по теории множеств.

1879—1884. Публикация серии статей «Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten».

1883. *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen*.

1884. Первый нервный срыв, после успешной и счастливой поездки в Париж; депрессия длилась до осени [3, с. 282].

1884—85. Контакты с католическими теологами; поддержка от них и одиночество в Галле. «В начале 1885 года Миттаг-Леффлер, кажется, лишил Кантора последней надежды на понимание и поддержку в математическом сообществе» [3, с. 146].

18 сентября 1890. Основание Немецкого математического общества; Кантор становится его первым председателем.

1891. Смерть Кронекера.

1895—1896. *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* — последняя крупная математическая публикация Кантора.

1897. Первый Международный математический конгресс. Теория множеств становится очень заметной.

1897. «Бурали-Форти был первым математиком, предавшим гласности парадоксы трансфинитной теории множеств» [3]. Он провел рассуждение, согласно которому *все* ординалы, если любые два из них сравнимы, также образуют Ординал, который оказывается больше самого себя, и заключил, что не всякие два ординала сравнимы. Кантор, напротив, считал, что все ординалы не образуют ординала, подобно тому как все множества не образуют множества.

1899. Госпитализация в нервной клинике г. Галле перед и после смерти сына Рудольфа.

1902—1903, зимний семестр. Госпитализация.

Октябрь 1907 — июнь 1908. Госпитализация.

Сентябрь 1911 — июнь 1912. Госпитализация.

1915. Празднование семидесятилетия Кантора (из-за войны — общегерманское, но не международное).

Май 1917 — 6 января 1918. Госпитализация; смерть Кантора в больнице в Галле.

Литература

1. *Bloom H.* The western Canon. New York: Riverhead Books, 1994.
2. *Cantor G.* Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre // Math. Ann. 1895. Bd. 46. S. 481—512; 1897. Bd. 49. S. 207—246.
3. *Dauben J. W.* Georg Cantor: his mathematics and philosophy of the infinite. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1990.
4. *Dehaene S., Spelke E., Pinet P., Stanescu R., Tsivkin S.* Sources of mathematical thinking: behavioral and brain-imaging evidence // Science. 7 May 1999. Vol. 284. P. 970—974.

5. *Freiling C.* Axioms of symmetry: throwing darts at the real line // J. Symb. Logic. 1986. Vol. 51. P. 190—200.
6. *Garey M., Johnson D.* Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness. San-Francisco: W. H. Freeman and Co., 1979.
7. *Lyotard J.-F.* The postmodern condition: a report on knowledge. Minneapolis: University of Minneapolis Press, 1984.
8. *Manin Yu. I.* Classical computing, quantum computing, and Shor's factoring algorithm. Séminaire Bourbaki. № 862 (June 1999) // Astérisque. 2000. Vol. 266. P. 375—404.
9. *Mashaal M.* Bourbaki // Pour la Science. 2000. № 2.
10. *Mumford D.* The dawning of the age of stochasticity // Mathematics: Frontiers and Perspectives 2000. AMS, 1999. P. 197—218.
11. *Purkert W., Ilgauds H. J.* Georg Cantor, 1845—1918. Basel—Boston—Stuttgart: Birkhäuser Verlag, 1987.
12. *Tasić V.* Mathematics and the roots of postmodern thought. Oxford Univ. Press, 2001.

Математика как профессия и призвание

1

Математику, как и любую другую профессию, можно рассматривать с разных точек зрения; я начну с самой личной.

Когда мне было лет 12—13, я обнаружил, что азарт, взлеты радости и горькие разочарования вызывает у меня такое неожиданное занятие, как чтение гранвилевского курса анализа в русском переводе Лузина, вышедшем в свет в 1935 году. Я нашел эту книжку на чердаке у моего приятеля. Помимо прочего стандартного материала, в ней содержалось и небезызвестное эпсилон-дельта определение непрерывной функции. Поборовшись с этим определением какое-то время (было жаркое крымское лето; я сидел под запыленной яблоней), я так разозлился, что выкопал неглубокую ямку, закопал книгу под деревом и с отвращением ушел. Через час начался дождь. Я ринулся назад к яблоне и откопал бедную книгу. Так я понял, что я ее все-таки люблю.

Вскоре я узнал, что математике учат в Московском университете; что у выдающихся математиков выходят собрания сочинений (мама подарила мне «Избранные труды» И. М. Виноградова на день рождения); что можно взять в библиотеке журнал «Известия АН СССР. Серия математическая» и попробовать прочитать то, что там написано (я на многих страницах конспектировал статью Ю. В. Линника о простых числах в арифметических прогрессиях). Чего я так и не понимал — это почему, собственно, меня все это привлекало, но постепенно я научился принимать это как должное и жить с этим.

Я полагаю, что это чувство глубокой личной вовлеченности, впервые пережитое в раннем возрасте, знакомо многим, и что оно является психологической основой, благодаря которой возникло и существует сообщество математиков (музыкантов, философов, поэтов, священников...) — поверх всех границ между племенами, государствами и эпохами. Однако же это чувство могло бы быть канализовано и в другом направлении, если бы общество и история не обеспечили выбор возможных карьер, ожидающих того, кто это чувство испытывает. (Что бы делали полвека назад все те, кто сейчас с таким азартом

Впервые опубликовано в сб.: Mathematics: Frontiers and Perspectives / Ed. by V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax, B. Mazur. AMS, 2000. P. 153—159. *Перевод с английского С. М. Львовского.*

пишут большие компьютерные программы? Дональд Кнут задал этот риторический вопрос в 1979 году на конференции памяти Мухаммеда аль-Хорезми, от имени которого происходит слово «алгоритм».)

Похоже, что человечество как таковое, или его коллективное бессознательное, испытывает периодические приливы и отливы энтузиазма по поводу различных видов деятельности. Мы, математики, являемся всего лишь частью еще большего сообщества ученых, занимающихся исследованиями, обучающих следующее поколение, сотрудничающих с промышленностью, медициной и бизнесом в деле создания и сохранения инфраструктуры нашей цивилизации. Эта цивилизация создавалась в климате, сформированном Просвещением, а затем промышленной революцией; теперь ее система ценностей размывается под влиянием «ньюэйджевских» разочарований (вероятно, эта тенденция восходит еще к Шпенглеру). Науку сурово осуждают за работу на войну, за разрушение окружающей среды, и вообще за то, что она вносит вклад в нелепые восторги — в то время как надвигается катастрофа.

Найти интеллектуальные аргументы против всего этого несложно, но слишком часто их никто не слышит. Не помогли же эти аргументы Александру Гротендику — одному из наиболее творческих математиков XX века, который острее, чем большинство из нас, чувствовал опасности неконтролируемого развития.

Так что же нам делать? Закопать книгу под деревом и с отвращением уйти?

Конечно же, я так не считаю. Я убежден, что наука, и в частности математика, не является движущей силой нашей цивилизации. Карты и машины у нас есть действительно благодаря науке, но наука не решает за нас, куда нам идти надо, а куда не следует. Думать иначе значило бы вернуться в эпоху архаического восприятия знания как одного из видов магии, когда человек, предсказавший затмение или то, как разрешится некоторая ситуация с неясным исходом, рассматривался как колдун, вызывающий события с помощью манипуляций с их символическими представлениями.

На самом деле биологической функцией мысли является не вызывать, а предотвращать спонтанные реакции, а основной социальной функцией науки в наши дни, возможно, является приостановка лихорадочной активности постиндустриального общества.

Но даже если это и так, вовсе не эти соображения движут теми, кого привлекают занятия математикой или физикой; на нескольких следующих страницах я расскажу о том, что, на мой взгляд, является основным в наших занятиях.

2

Основой всей человеческой культуры является язык, и математика — это специальный вид языковой деятельности.

Естественный язык — чрезвычайно гибкий инструмент для передачи информации, необходимой для выживания, для выражения эмоций, для утверждения своей воли, для соблазнения и убеждения. В своих высших проявлениях естественный язык создает богатые виртуальные миры поэзии и религии.

Тем не менее естественный язык не очень хорошо приспособлен для пополнения, организации и хранения все время растущего запаса наших знаний о природе, при том что эта деятельность является наиболее характерной чертой современной цивилизации. Вероятно, Аристотель был последним великим мыслителем из тех, кто использовал возможности языка до предела. С приходом Галилея, Кеплера и Ньютона естественный язык в науках был низведен до роли посредника высокого уровня между реальным научным знанием, содержащимся в астрономических таблицах, химических формулах, уравнениях квантовой теории поля, базах данных по геному человека, с одной стороны, и нашим мозгом — с другой. Пользуясь естественным языком при изучении и преподавании наук, мы привносим с ним наши ценности и предрассудки, поэтические образы, стремление к власти и навыки манипулятора — но ничего из того, что существенно для научного содержания. Все существенное содержится либо в длинных списках структурированных данных, либо в математике. Математика же, которая изначально используется, чтобы получше описать структуру данных, постепенно сжимает их до такой степени, что мы начинаем говорить о «законах природы», порождающих и объясняющих бесконечно много различных явлений. Кроме того, по ходу своего внутреннего развития математика, руководствуясь своей собственной логикой, создает еще и виртуальные миры, поражающие внутренней красотой и чрезвычайной сложностью — миры, которые противятся любым попыткам описать их на естественном языке, но поражают воображение горстки профессионалов на протяжении поколений.

Из свойств математики как языка самым странным является то, что, применяя формальные правила к данному математическому тексту, можно на выходе получить текст, который, кажется, несет новое знание. Основные примеры этого дают научные или технические расчеты: из общих законов вкупе с начальными условиями получаются предсказания — часто после долгой работы, иногда с участием компьютера. Можно сказать, что исходные данные содержат скрытое знание, которое описанный процесс делает явным. Можно попробовать найти параллель в гуманитарных науках, сравнив эту деятельность с герменевтикой — искусством нахождения скрытых смыслов в священных текстах. Юридический дискурс также имеет некоторые общие черты с научным. По ходу истории современный язык науки постепенно формировался из этих двух древних видов языковой деятельности, и он по-прежнему сохраняет с ними много общего, особенно в более описательных и менее математизированных науках.

У математики нет фиксированного набора привил интерпретации в физическом мире: одно и то же уравнение может описывать и океанические волны, и звук, и свет, и «волны вероятности» в квантовой механике. Акт интерпретации математической конструкции (например, в математической физике) следует отделять от самой этой конструкции.

Многие математики по-прежнему считают, что математика имеет дело непосредственно с платоновским миром смыслов, в котором действительные числа существуют независимо от своих моделей, а гипотеза континуума либо истинна, либо ложна. Недавно я участвовал в споре по поводу компьютерного моделирования: теория это или эксперимент? Мой ответ был таков: это теория «реальной реальности» и эксперимент в платоновской реальности.

Каков бы ни был философский статус этих споров, некоторые из наиболее красивых и высокоразвитых разделов математики, без сомнения, являются платоновскими. Я имею в виду такие объекты, как поле всех алгебраических чисел и его группа Галуа. Это — центральный объект теории чисел, наряду с соответствующей аналитической машинерией: дзета-функциями, L-функциями и автоморфными формами. Вся история теории чисел выглядит как история исследования уже существующего мира, а не как история его изобретения. Если история геометрии почти неотделима от истории теоретической физики, то теория чисел почти ничего не взяла из нашего опыта жизни в реальном мире.

3

Традиционное сотрудничество между математикой и физикой — физики открывают уравнения, математики их исследуют — будет, конечно, продолжаться, и при этом будет постоянно расти роль компьютерного моделирования.

Менее традиционный способ взаимодействия между математикой и физикой выкристаллизовался начиная с 70-х годов. Одновременно с успехом «стандартной модели», удовлетворительно описывающей наблюдаемый спектр элементарных частиц и взаимодействий, физики принялись за разработку довольно романтических моделей, применимым при очень высоким энергиям эпохи большого взрыва. Для исследования этих моделей пришлось использовать и развивать весьма изысканные, а иногда и совершенно новые разделы математики, в основном связанные с теорией квантовых полей и струн. Этот процесс сейчас в самом разгаре: физики говорят о «второй струнной революции», состоящей, видимо, в том поразительном открытии, что все существовавшие до сих пор основные модели квантовых струн, задаваемые своими рядами теории возмущений, должны быть асимптотическими приближениями к одной и той же теории, но в разных областях пространства модулей.

Математическое сообщество относится к этим идеям с живым интересом и все более активно участвует в их разработке. Мне представляется, что это самая важная тенденция математики последнего десятилетия, которая продолжится и в XXI веке.

Математику можно грубо описать как деятельность, состоящую в решении задач, или иначе: как деятельность, состоящую в развитии исследовательских программ (в широком смысле). Эти два описания находятся в отношении дополнительности. Математика XX века началась со списка из 23 проблем Гильберта, решения которых являются историческими вехами, но основными ее достижениями, вероятно, были создание топологии, математической логики и компьютеров.

Иногда, если мы узнаем о зарождающейся исследовательской программе на достаточно ранней стадии, ее можно сформулировать как гипотезу (см. гипотезы Вейля) или как предвидение (гротендиковские мотивы, программа Ленглендса на ранних этапах).

По моему мнению, сейчас можно говорить о зарождении программы «квантования классической математики»; эта программа шире, чем совместные с физиками попытки разобраться в теории квантовых струн. Я вкратце опишу несколько разделов математики, в которых эта программа уже принесла свои плоды и которые, вероятно, будут активно развиваться в предсказуемом будущем.

1. *Топология*. Принадлежащий физикам эвристический формализм интегралов по траекториям привел к открытию, объяснению и/или лучшему пониманию новых инвариантов узлов, а также трех- и четырехмерных многообразий. В симплектической топологии он привел к доказательству гипотезы Арнольда.

2. *Алгебраическая геометрия*. Тот же формализм, примененный в другом контексте, доставил замечательные дифференциальные урав-

нения для производящих функций, коэффициенты которых — численные инварианты пространств модулей стабильных кривых и стабильных отображений кривых в алгебраические многообразия. Примеры тому — теория квантовых когомологий и зеркальной симметрии, а также связи с теорией особенностей.

3. *Дифференциальная геометрия*. Твисторная программа привела к созданию новой главы геометрии, к открытию нестандартных гладких структур на $\mathbb{R}^4$ и к окончательной классификации групп голономий. Благодаря двумерной конформной теории поля (КТП) было сформулировано определение новой геометрической структуры — фробениусовых многообразий, обладающих богатой теорией и дающих математическую основу для квантовых когомологий.

4. *Алгебра*. Стимулированное КТП возрождение теории операд было крупным событием в той тихой заводи, которой казалась общая алгебра. Из более конкретных объектов особенно интересны вертексные операторные алгебры, относящиеся к более понятым разделам КТП. Теория представлений этих алгебр, доказательство moonshine-гипотезы, связи с (обобщенными) алгебрами Каца—Муди — все это принадлежит к наиболее интересным достижениям алгебры за последние несколько десятилетий.

5. *Некоммутативная геометрия и супергеометрия.* Супергеометрия, в которой участвуют коммутирующие и антикоммутирующие координаты, открытая физиками в качестве классического приближения к квантовой теории бозонов и фермионов, стала в настоящее время стандартным, хотя и не очень популярным, обобщением всех основных геометрических теорий из классической математики (гладкой геометрии, аналитической, алгебраической). Особенно важна теория суперсимметрии и соответствующее обобщение классификации Картана—Киллинга. У развитой Аленом Конном некоммутативной геометрии были разные источники, и одним из них была квантовая механика. У некоммутативной геометрии обнаружились применения к стандартной модели, а совсем недавно — и к проблеме спектральной интерпретации дзета-функции.

6. *Квантовые вычисления*. Это — довольно новая и захватывающая идея, которая заслуживает упоминания здесь по той причине, что на сегодня она является чисто теоретической: ее аппаратное воплощение, если оно вообще возможно, потребует создания новых технологий[1]. Предполагается использовать «квантовые n-битовые ре-

[1] 13 февраля 2007 года компания D-Wave провела демонстрацию первого квантового компьютера Orion. Его квантовый регистр состоит из 16 кубит.

гистры» вместо классических. Такой регистр — это устройство, чье пространство квантовых состояний является гильбертовым пространством размерности 2^n. Кроме того, в квантовом законе эволюции перемножение $(2^n \times 2^n)$-матриц содержится в качестве элементарной операции. Недавно было показано, что с помощью квантовых регистров можно решить задачу быстрого разложения на множители. Это решение позволило бы взломать криптосистемы с публичным ключом, наиболее широко используемые в наши дни. Основная идея состоит в том, чтобы заменить параллельные вычисления (основное средство ускорения классических вычислений в ситуации, когда неизвестны эффективные алгоритмы) на «массированный квантовый параллелизм», возможность которого основывается на принципе суперпозиции. В течение некоторого времени это направление исследований, несомненно, будет очень популярно.

4

До сих пор речь шла исключительно об умственных упражнениях. Что же можно сказать о практической жизни?

Я веду занятия по вторникам и четвергам (у меня есть выбор, но я не из тех, кто преподает по понедельникам, средам и пятницам), желательно во второй половине дня, и уж по крайней мере — не рано утром. Раннее утро — это адское время для многих математиков, так что за приемлемое расписание приходится бороться.

Аудитория пахнет мелом. Доска выглядит совсем старенькой: на ней писали, а затем стирали написанное, миллионы раз.

Мел одинаково пахнет в Москве, Бостоне, Токио, Бонне, Париже VI и Париже VII. Эти два Парижа — не города, а университеты, но, конечно, Москва, Токио и Бостон — тоже немногим больше, чем университеты. Занимаясь математикой, приходится ездить по всему миру, но как-то получается, что все места, куда ты попадаешь, похожи друг на друга.

Студенты могут и утомлять, и мешать, но после сорока лет преподавания почему-то оказывается, что ученики — это самая важная часть твоей жизни. Они становятся мудрее тебя (а ты, кажется, только стареешь), они женятся, разводятся и женятся снова, они присылают фотографии своих детей и домов, они просят о рекомендательных письмах, которые вскоре образуют обширную директорию на твоем компьютере; а время от времени они поражают тебя и наполняют твое сердце гордостью за фантастические новые теоремы и открытия, о которых ты и не мечтал.

Это карьера? В некотором смысле. Можно расти вплоть до должности постоянного профессора. Зарплата позволяет содержать себя и семью. Но, может быть, нужны более убедительные доводы в пользу того, чтобы посвятить такому занятию всю жизнь. Поэтому, перед тем как распрощаться, давайте еще раз вернемся от практических дел к умственным упражнениям.

5

Дарвинистская эволюция чрезвычайно неэкономна. Генофонд каждой популяции подвержен случайным мутациям, никак не связанным с переменами в окружающей среде. Естественный отбор выделяет те из этих мутаций, что будут наиболее эффективно переданы следующим поколениям. У более приспособленных организмов будет больше потомков, которые передадут свои гены далее; все остальные — неприспособленные — вымрут.

Ламаркистское наследование приобретенных признаков было бы гораздо более эффективно. Вы пользуетесь каким-то органом (или навыком), совершенствуете его, и ваши дети рождаются уже приспособленными к преодолению тех трудностей, с которыми вы боролись.

Теперь нам более понятно, почему природа предпочла Дарвина Ламарку. Информация, закодированная в генах, очень сильно изолирована (и это правильно) от окружающей среды. Это — текст чрезвычайно сложной программы развития, который должен быть защищен от попыток улучшить его извне. В противном случае нам бы потребовался механизм, при котором, например, такая резкая перемена в окружающей среде, как глобальное потепление, должна была бы быть осмысленно закодирована в тонких химических процессах, необходимых, чтобы получить новое поколение безволосых мышей. Неизвестно ничего похожего на такие детерминистические механизмы. Вместо этого природа доставляет случайные вариации генетических инструкций, в результате чего безволосые мыши, которые ранее вымерзли бы, не успев произвести потомства, теперь вытесняют своих волосатых собратьев.

Это рассуждение приводит к забавному вопросу. В конце концов, способность передавать потомству приобретенные признаки можно рассматривать как одну из черт данного биологического вида. Нам такой вид неизвестен, но если эта способность эффективно помогает адаптации, почему она не могла развиться в ходе эволюции в результате последовательности случайных мутаций, подобно умению летать или зрению? Иными словами, почему ламаркистская эволюция не может возникнуть на одном из этапов дарвинистской эволюции?

Можно ответить, что именно это и произошло с человечеством, только на другом уровне организации. Какое-то время назад наша биологическая эволюция остановилась, а культурная эволюция пошла по пути, описанному Ламарком.

С помощью языка формируется генофонд культуры. Он развивается и передается сначала в устной традиции, затем через письменные тексты. Опыт поколений напрямую кодируется в эпических поэмах и компьютерных программах, чтобы сообщить следующим поколениям о меняющихся условиях жизни.

Часть II

Математика и физика

Математика и физика

Предисловие

Есть предание о том, как один известный математик начинал читать логику второкурсникам. «Логика — это наука о законах мышления, — сообщал он. — Теперь я должен объяснить вам, что такое наука, что такое закон и что такое мышление. Что такое ‘о’, я объяснять не буду».

Взявшись писать книжку «Математика и физика», автор понимал, что ее объема едва хватит на попытку объяснить, что такое «и» в ее названии. Две науки, бывшие единой ветвью на дереве познания, к нашему времени далеко разошлись. Одна из причин этого в том, что обе они в этом столетии активно занимались самоосознанием, т. е. своими средствами строили свои собственные модели. Физика волновало взаимоотношение мышления и действительности, а математика — мышления и формул. Оба эти отношения оказались много сложнее, чем казалось раньше, и модели, автопортреты, маски-для-себя двух дисциплин вышли очень несхожими. В результате уже со студенческой скамьи физиков и математиков учат думать по-разному. Было бы замечательно владеть обоими типами профессионального мышления, хотя бы так, как мы владеем правой и левой рукой.

Но эта книжка — партия одной руки. Автор, по образованию математик, как-то прочел студентам четыре лекции под названием «Как математик должен учить физику». В лекциях говорилось, что современная теоретическая физика — это роскошный, совершенно раблезианский полнокровный мир идей, и математик может найти в нем все, что душе угодно, кроме порядка, к которому он привык. Поэтому хороший способ настроить себя на активное изучение физики — сделать вид, что ты пытаешься, наконец, навести в ней этот самый порядок.

В книжке, выросшей из этих лекций и дальнейших размышлений, я попробовал выделить несколько крупных абстракций двух наук и сопоставить их. На самом высоком уровне такие абстракции теряют терминологичность и способны стать культурными символами време-

Впервые опубликовано: Новое в жизни, науке и технике. М.: Знание, 1979. 64 с. (Сер. Математика, кибернетика; № 12).

ни: вспомним судьбу слов «*эволюция*», «*относительность*» или «*подсознательное*». Здесь мы спускаемся ступенькой ниже и обсуждаем слова, еще не символы, но уже почти не термины: «множество», «симметрия», «пространство-время». (Ср. попытку М. М. Бахтина терминологически ввести последнее понятие в литературоведение в нарочито остраненной форме «хронотоп».) Часть этих слов стоит в названиях главок. У каждого читателя в сознании должны быть первоначальные образы этих понятий, образы, имеющие физическое происхождение в широком смысле слова.

Автор хотел показать, как математика сопоставляет с такими физическими абстракциями новые образы, для тренированного рассудка почти осязаемые, но далеко ушедшие от тех, которые дает прямой жизненный и физический опыт. Скажем, движение планет Солнечной системы математик представит в виде линии тока несжимаемой жидкости в 54-мерном фазовом пространстве, объем которого задается мерой Лиувилля.

Читателю может потребоваться усилие воли, чтобы увидеть в математике воспитателя образного мышления. Чаще с ней связывается представление о жесткой логике и вычислительном формализме. Но это — лишь дисциплина, линейка, которой нас учат не умирать.

Вычислительный формализм математики — мысль, экстериоризованная до такой степени, что она на время отчуждается и превращается в технологический процесс. Математический образ формируется в затяжном приживлении к человеку этой временно отторгнутой мысли. Думать — значит вычислять, волнуясь.

Безумная идея, которая ляжет в основу будущей фундаментальной физической теории, будет осознанием того, что физический смысл имеет некоторый математический образ, ранее не связывавшийся с реальностью. С этой точки зрения проблема безумной идеи — это проблема выбора, а не порождения. Не нужно понимать это слишком буквально. В шестидесятых годах (по частному поводу) было сказано, что крупнейшее открытие последних лет в физике — комплексные числа. Нечто подобное автор имеет в виду.

Я не хочу извиняться за субъективность суждений и выбора материала. О физике и математике писали Галилей, Максвелл, Эйнштейн, Пуанкаре, Фейнман, Вигнер; только надежда сказать что-то свое может оправдать новую попытку.

1. Математика с птичьего полета

Математическая истинность. Вероятно, самые простые математические действия — это арифметические вычисления вроде такого:

$$\frac{0{,}25}{20}\cdot\frac{\sqrt{13}}{1{,}1}\cdot\frac{7{,}8\cdot 10^4}{2{,}04\cdot 10^5}\cdot\frac{2\cdot 0{,}048}{0{,}021+0{,}019}=0{,}038.$$

Для реалистичности этот пример списан не из школьного задачника, а из статьи Энрико Ферми «О поглощении и диффузии медленных нейтронов». Подумаем немного о смысле такого вычисления.

а) Для проверки этого равенства можно условиться, что оно относится к целым числам (возведем в квадрат, освободимся от знаменателей и будем считать все в тысячных долях единицы). Тогда наше равенство можно рассматривать как предсказание о результате некоторого «физического эксперимента», состоящего в следующем: нужно взять две группы по 48 предметов ($2\cdot 0{,}048$), повторить это действие 78 000 раз ($\times 7{,}8\cdot 10^4$) и т. п. Так в первом классе раскладывают по кучкам палочки, чтобы уяснить смысл счета, целого числа, сложения и умножения, а также смысл арифметических тождеств. Поэтому разумно представлять себе, что арифметика целых чисел есть «физика собирания предметов в кучки».

б) Все же практическое вычисление, конечно, производится иначе: оно состоит из серии некоторых стандартных преобразований левой части тождества. Мы выбираем группу символов слева, скажем $\frac{0{,}25}{20}$, и заменяем ее по школьным рецептам на 0,0125 и т. п. Все правила, включая правила о порядке действий, можно сформулировать заранее. Безошибочность вычисления — это его грамматическая (рецептурная) правильность; она же гарантирует «физическую истинность» результата. (Разумеется, Ферми округляет левую часть; и без вычислений ясно, что его равенство не может быть верным буквально, потому что число $\sqrt{13}$ — иррационально.)

в) Для Ферми смысл этого вычисления резюмируется следующей фразой: «Группа A… является столь узкой энергетической полосой, что в процессе замедления через нее проходит только 4 % нейтронов». (4 % — это 0,038 справа.) Ясно, что к такому выводу мы не можем непосредственно прийти, как бы ни представляли себе смысл арифметического вычисления. Ни раскладывание 78 000 кучек по 96 предметов, ни деление 0,096 уголком на 0,04 сами по себе не имеют никакого отношения к нейтронам. Математическое рассуждение входит в физический текст вместе с актом его физического истолкования; именно этот акт и есть самое поразительное в современной физике.

Как бы то ни было, уже на нашем простом примере видны три аспекта математической истинности. Условно их можно обозначить как *содержательную истинность*, *формальную правильность*, или *доказуемость*, и *адекватность физической модели*.

Для математики, замкнутой в себе, существенны лишь первые два аспекта, и только двадцатый век принес понимание различия между ними. Рассмотрим такое просто формулируемое утверждение, как гипотезу Ферма. Хотя мы не знаем ни ее доказательства, ни опровержения, мы уверены, что она либо истинна, — либо ложна. Эта уверенность основана на абстракции возможности произвести бесконечно много арифметических действий (или «раскладываний на кучки»), перебрав все суммы степеней пар целых чисел. Вообще, понятие об истинности (большинства) математических утверждений включает в себя представление о таких бесконечных сериях проверок. Между тем всякое математическое доказательство, т. е. рассуждение, состоящее из последовательного применения аксиом или логических правил вывода, есть существенно конечная процедура. К. Гёдель доказал в тридцатых годах, что по этой причине доказуемость значительно уже содержательной истинности, даже когда речь идет лишь о целых числах. При этом совершенно безразлично, из каких аксиом мы исходим, лишь бы они были содержательно истинны и задавались конечным списком (или конечным числом правил их порождения). Это различие между содержательной истинностью и доказуемостью широко известно, но, кажется, его следствия поняты плохо. В литературе часто обсуждаются проблемы редукционизма: сводится ли биология или химия к физике? Ясно, что речь может идти лишь о некоторой теоретической модели явлений физики, биологии и химии, притом достаточно математизированной. Но тогда следует объяснить, что подразумевается под сводимостью — абстракция типа содержательной истинности или типа выводимости из аксиом. Продумывание обеих возможностей создает впечатление, что, говоря о сводимости законов, мы просто не понимаем, о чем говорим.

Множества. Современные представления о математической истинности связаны с развитием двух крупных концепций: теоретико-множественной математики и математики формальных языков. Математические формализмы знакомы всем. Типичный математический багаж студента может состоять из умения выполнять арифметические действия с числами в десятичной записи, преобразовывать алгебраические тождества, дифференцировать и брать некоторые интегралы. Этот язык математического анализа, практически сложившийся во времена Эйлера и Лагранжа, оказался очень удобным, эффективным в решении задач и доступным для массового изучения. Параллельно происходило развитие представлений того, о чем говорит этот язык, т. е. выяснение смысла таких понятий, как $\sqrt{-1}$, функция, дифференциал и т. п. Огромную роль при этом играли геометрические представления: комплексные числа потеряли свою таинственность лишь после того, как Арган и Гаусс предложили их последовательную интерпретацию точками евклидовой плоскости; дифференциал интерпретируется через представление о касательной и т. п. Теоретико-множественные понятия заложили универсальную базу для определения всех математических конструкций в таких «обобщенно геометрических» образах. Эти образы одновременно представляют собой вместилище смысла математических формализмов и средство отбора содержательных языковых утверждений из всего необозримого моря выводимых математических формул.

В этой книжке мне хотелось бы продемонстрировать пользу таких образов в роли посредника между математикой и физикой. Конечно, возможности их популярного изложения ограничены. На шестидесяти страницах мы не сможем объяснить их точный смысл и научить пользоваться ими для решения задач. Но, может быть, читателю станут яснее некоторые идеи математики и теоретической физики. Трудность понимания концепций квантовой теории или общей теории относительности отчасти связана с тем, что при попытках их объяснения опускается такой акт промежуточной теоретико-множественной интерпретации математических моделей. Даже в университетском образовании ему уделяется недостаточно внимания; общение физика и математика часто затруднено тем, что физик склонен переходить от формул прямо к их физическому смыслу, минуя «математический смысл». Впрочем, в последние годы положение заметно улучшается.

Хороший физик пользуется формализмом, как поэт — естественным языком. Пренебрежение ригористическими запретами оправдывается конечной апелляцией к физической истине, чего не может позволить себе математик. Выбор лагранжиана в единой теории слабых и электромагнитных взаимодействий Салама—Вейнберга, введение в него полей Хиггса, вычитание вакуумных средних и прочее колдовство, приводящее, скажем, к предсказанию нейтральных токов, оставляет математика в состоянии немого изумления.

Но вернемся к множествам.

Важнейшие множества физики — это множества *не предметов, а возможностей*: конфигурационное пространство системы есть множество ее возможных мгновенных состояний, пространство-время есть множество возможных событий типа «вспышки», отмечающих точки. Физик обычно спешит ввести на этом пространстве координаты, т. е. функции с числовыми значениями. Если набор n таких функций позволяет однозначно координатизировать точки множества, то допустимо считать, что оно лежит в n-мерном вещественном числовом пространстве $\mathbb{R}^n$, состоящем из векторов вида $(a_1, \ldots, a_n)$. «Фигуры», т. е. подмножества такого пространства, измерения в нем расстояний, углов, объемов и т. п., наконец, его движения или отображения в себя, — все это составляет главный арсенал геометрических образов физики. При этом важно, что размерность n может быть как угодно велика и даже бесконечна — в строгом математическом тексте определение бесконечномерности нужно вводить отдельно, но мы будем представлять себе здесь бесконечномерность как «неопределенно большую конечномерность». Если координаты принимают комплексные значения, то наши множества погружаются в $\mathbb{C}^n$. Вообще же часто о координатах можно и не упоминать. Физически они иногда являются пережитком слишком упрощенных представлений о наблюдении; математически — напоминанием о времени, когда не существовало языка, на котором можно было бы содержательно обсуждать множества, не являющиеся множествами чисел или векторов.

Теоретико-множественный язык хорош тем, что он не вынуждает говорить ничего лишнего. Г. Кантор определил множество как «соединение в одно целое различимых объектов нашей интуиции или нашей мысли». Это наилучшее объяснение множества как понятия, помогающего познавать мир.

Многомерное пространство и идея линейности. Если автомобиль прошел за секунду двадцать метров, то за две секунды он, скорее всего, пройдет сорок метров. Если слабый ветер отклонил летящую пулю на три сантиметра, то вдвое более сильный отклонит ее на шесть сантиметров. Отклик на малые воздействия линейно зависит от этих малых воздействий — таков естественнонаучный принцип, лежащий в основе огромного количества математических моделей. Математик превращает этот принцип в определение дифференцируемой функции и в постулат о том, что большая часть процессов большую часть времени описывается такими функциями. Говорит ли закон упругости Гука или закон Ома что-нибудь большее, чем этот принцип линейного отклика на малые воздействия? Да, если оказывается, что законы остаются верны и для довольно больших воздействий.

Линейное пространство — это идеализация «сколь угодно больших малых воздействий». Не обязательно вводить координаты, нужно лишь помнить, что элементы линейного пространства можно складывать и умножать на числа (вещественные или комплексные — этот эпитет прибавляется к названию пространства). Исходный геометрический образ — это наше «физическое пространство» размерности три; пространства $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ с координатным сложением и умножением исчерпывают все конечномерные линейные пространства.

Размерность линейного пространства — это количество независимых линейных координатных функций на нем. Теорема о том, что от выбора самих координатных функций она не зависит, при всей ее простоте, является глубоким результатом. Она устанавливает связь между непрерывным и дискретным: целое число — размерность впервые появляется не как количество предметов или дискретных образов, но как мера величины непрерывного объекта.

Линейное отображение, или оператор, — это идеализация линейного отклика на произвольные воздействия. Отклик может измеряться элементами того же пространства, что и воздействие, или другого; в любом случае это отображение линейного пространства в линейное пространство, переводящее сумму векторов в сумму их образов и произведение вектора на число в произведение образа на то же число.

В одномерном пространстве всякое линейное отображение в себя есть умножение на число — «коэффициент усиления». В комплексном случае геометрический образ немного сложнее: поскольку одномерное комплексное пространство устроено как вещественная плоскость, умножение на комплексное число есть комбинация вещественного растяжения и поворота. Чистые повороты, т. е. умножения на числа, по модулю равные единице, играют большую роль в квантовой механике: в их терминах формулируется закон эволюции замкнутой квантовой системы.

Важный класс линейных отображений n-мерного пространства в себя образуют растяжения вдоль n независимых направлений со своим коэффициентом вдоль каждого из них. Множество «коэффициентов растяжения» линейного оператора называется его спектром: омонимия с физическим термином отражает их глубокие связи.

В квантовой физике идея линейности приобретает фундаментальный физический смысл благодаря основному постулату о суперпозиции квантовых состояний. В классической физике и математике, кроме исходной мысли о линеаризации «чего угодно» в малом, большую роль играет замечание о том, что функции (все или непрерывные, или дифференцируемые, или интегрируемые по Риману и т. п.) на любом пространстве сами образуют линейное пространство, потому что их можно складывать друг с другом и умножать на числа. Пространства функций в большинстве случаев бесконечномерны, но возможность направленно воспитать и затем применить к ним первоначально развитую конечномерную (даже трехмерную) интуицию оказалась исключительно плодотворным открытием. В двадцатом веке этому учили нас Давид Гильберт и Стефан Банах.

Измерения в линейном пространстве. В трехмерном физическом пространстве существуют твердые тела, сохраняющие некоторую «тождественность самим себе» в больших пространственно-временных областях. Это — основа всех физических измерений. Совсем не очевидно заранее, какие из идеализированных свойств физических измерений наиболее полезны в математической теории и в приложениях. Действительно, математические понятия, связанные с идеей классического измерения, образуют сложный идейный узор. Сразу назовем несколько образов: длина, углы, площади и скалярные произведения, движения.

Чтобы у читателя не возникло неверного впечатления, заметим, что само понятие линейного пространства не содержит ничего, позволяющего однозначно измерять что бы то ни было. У векторов нет никакой длины (правда, у пропорциональных векторов имеется естественное отношение длин), угол между векторами не имеет никакой естественной меры и т. д. Поэтому для математического оформления идеи измерения мы должны дополнительно ввести новый геометрический образ или даже несколько образов; на математическом жаргоне — снабдить пространство дополнительной структурой.

Первый из таких образов — единичная сфера пространства: множество векторов единичной длины. Если любой ненулевой вектор после умножения на подходящее число a попадает на единичную сферу, мы получаем возможность приписать ему длину — это будет $|a|^{-1}$, значит, a должно быть определено с точностью до умножения на число, по модулю равное единице. Расстояние между векторами x и y можно определить как длину их разности $|x-y|$. Если ненулевые векторы имеют ненулевую длину, выполняется неравенство треугольника $|x+y| \leqslant |x|+|y|$ и еще условие о существовании пределов последовательностей Коши, мы приходим к понятию банахова пространства. Таковы многие полезные пространства функций. Произвольная банахова сфера, однако, недостаточно симметрична, чтобы быть правильным обобщением единичной сферы в трехмерном евклидовом пространстве. Есть два разных способа добиться нужной симметрии, наложив на банахову сферу дополнительные условия: а) потребовать, чтобы некоторая $\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)$-мерная непрерывная группа линейных отображений переводила ее в себя (n — размерность пространства); б) потребовать, чтобы в пространстве существовало скалярное произведение векторов (x, y) (линейная функция по обоим аргументам в вещественном случае и несколько более сложная в комплексном) такое, чтобы $|x|^2 = (x, x)$ для всех x. Первый способ — обобщение идеи о том, что твердые тела можно вращать, второй — что между векторами можно измерять углы, также не меняющиеся при вращениях пары. Обе идеи тесно связаны и приводят к понятию многомерного евклидова пространства (в комплексном случае его называют гильбертовым). В подходящих координатах единичная сфера в таком пространстве задается привычным уравнением $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2 = 1$. Вращения — это линейные отображения, переводящие эту сферу в себя, они образуют группу, которая обозначается $O(n)$ в вещественном случае и $U(n)$ — в комплексном. В евклидовом вещественном пространстве скалярное произведение принимает вещественные значения и является симметричным: $(x, y) = (y, x)$. В евклидовом комплексном пространстве оно принимает комплексные значения и при перемене мест векторов становится комплексно-сопряженным: $(x, y) = \overline{(y, x)}$. В обоих случаях выполняется замечательное неравенство $|(x, y)|^2 \leqslant |x||y|$, так что число $\frac{(x, y)}{|x||y|}$ по модулю не больше единицы. Оно вещественно для вещественных пространств, и существует угол φ, для которого $\cos\varphi = \frac{(x, y)}{|x||y|}$, — он называется углом между векторами x и y. В комплексном случае можно определить этот угол формулой $\cos\varphi = \frac{|(x, y)|}{|x||y|}$. Правая часть здесь принимает только значения, лежащие между нулем и единицей, и существует еще одна замечательная физическая величина с таким свойством — это вероятность. В квантовой механике числа $\cos^2\varphi$ интерпретируются как вероятности, о чем мы подробнее расскажем ниже. В школьной геометрии векторы x, y называются ортогональными, если косинус угла между ними равен нулю, т. е. если $(x, y) = 0$; эта же терминология применяется и в общем случае.

Если отказаться от тех или иных свойств евклидовости, то понятие скалярного произведения приводит к нескольким важным классам линейных геометрий. Например, в $\mathbb{R}^4$ можно задать «длину» вектора $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ формулой $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2$. Один минус приводит к большому количеству отличий: например, имеются целые прямые, состоящие из векторов нулевой длины. Они изображают лучи света в основной модели пространства-времени специальной теории относительности — в знаменитом пространстве Минковского.

Можно отказаться от условия $(x, y) = (y, x)$ и заменить его условием $(x, y) = -(y, x)$. Всякий вектор в таком пространстве «ортогонален самому себе»! Эту геометрию, называемую симплектической, нужно долго изучать, чтобы привыкнуть к ней. Гироскоп, ориентирующий ракету, — это посланец шестимерного симплектического мира в нашем трехмерном; там его поведение выглядит просто и естественно. Хотя симплектическая геометрия была открыта в прошлом столетии, ее роль в физике долго недооценивалась и в учебниках все еще затемняется старинным формализмом.

Но вернемся в евклидов, хотя и многомерный, мир. Последнее, что мы хотели бы обсудить, — измерение объемов. Если $e_1, \ldots, e_n$ — попарно ортогональные векторы единичной длины, то натянутый на них n-мерный кубик с ребром тоже единичной длины — множество векторов вида $x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$, где $0 \leqslant x_i \leqslant 1$. Его объем естественно считать равным единице. Сдвиг этого кубика на любой вектор не меняет объема; кубик с ребром длины a имеет объем a^n. После этого объем любой n-мерной фигуры можно определить, замостив ее большим числом маленьких кубиков и сложив их объемы. Проблемы возникнут около границы — там останется свободное пространство, при попытке замощения которого кубики начнут вылезать наружу. Если граница не очень сильно изрезана, то, делая кубики все более мелкими, мы сможем как угодно уменьшить ошибку. Это — основная идея интегрирования. Она дополняется еще следующей конструкцией: предположим, что в нашей области пространства находится нечто, «субстанция», как сказали бы в прошлом веке, которая характеризуется своей плотностью $f(x)$ вблизи точки x. Общее количество этой субстанции будет примерно выражаться суммой ее количеств во всех кубиках замощения, а количество в одном кубике — произведением объема этого кубика на значение плотности в какой-нибудь его внутренней точке. Вся сумма есть «сумма Римана», а ее предел — интеграл от функции f по объему.

В математике трудно указать более классическое и в то же время более живое понятие, чем интеграл. Каждые несколько десятилетий приносят его новые математические варианты, а физика все время требует еще. Определение интеграла Римана, которое мы привели выше, математически разумно лишь для не слишком сильно меняющихся функций f, скажем непрерывных. Но почти каждая физическая модель, как только она сменяется более детальной, обнаруживает, что функция f, казавшаяся довольно гладкой, есть результат усреднения более сложной «мелкозернистой» картины. Заряд можно измерять интегралом от его плотности, пока мы не выходим на масштабы, где носителями заряда являются электроны и ионы. Плотность заряда на точечном носителе бесконечна, а вне его равна нулю, и мы вынуждены строить аппарат для интегрирования таких функций.

Вызовом математикам остаются замечательные континуальные интегралы Фейнмана, уже превратившиеся в основной инструмент квантовой теории поля, но все еще не определившиеся как математический объект. Два обстоятельства затрудняют их понимание: интегрировать приходится по бесконечномерному пространству и притом очень сильно колеблющиеся функции. Скажем здесь несколько слов об эффектах бесконечномерности, понимая ее наивно как очень большую конечную размерность.

Из отрезка длины 1 вырежем его среднюю часть длины 0,9. Длина остатка будет, конечно, составлять 10 % от длины всего отрезка. Из круга диаметром 1 вырежем концентрический круг диаметром 0,9. Площадь оставшегося кольца будет уже 19 % площади круга. Из шара диаметром 1 вырежем концентрический шарик диаметром 0,9. Объем оставшегося шарового слоя будет составлять уже 27,1 % объема шара: почти треть вместо одной десятой для отрезка. Объем n-мерного шара диаметром d, как нетрудно сообразить «физически», должен выражаться формулой $c(n)d^n$, где $c(n)$ — константа, от d не зависящая. Доля объема концентрического шара диаметром $0{,}9d$ поэтому будет $(0{,}9)^n$; она стремится к нулю вместе с ростом n. Двадцатимерный арбуз радиусом 20 см с толщиной корки 1 см чуть не на две трети состоит из корки:

$$1-\left(1-\frac{1}{20}\right)^{20}\approx 1-e^{-1},\quad e\approx 2{,}72.$$

Эти расчеты позволяют сформулировать геометрический образ: «объем многомерного тела почти целиком сосредоточен у его поверхности». (Интересно рассмотреть также вместо шара куб — тот же эффект проявляется в быстром росте числа его граней.)

Представим себе простейшую модель газа: N точечных атомов, движущихся в резервуаре со скоростями v_i, $i=1,\ldots,N$; каждый атом имеет массу m. Кинетическая энергия газа E равна $\sum\limits_{i=1}^{N}\frac{mv_i^2}{2}$; состояние газа, описываемое набором скоростей при фиксированной энергии E, определяет точку на $(N-1)$-мерной евклидовой сфере радиусом

$\sqrt{\frac{2E}{m}}$. Для макроскопического объема газа в нормальных условиях размерность этой сферы имеет порядок $10^{23} \div 10^{25}$ (определяемый числом Авогадро), т. е. очень велика. Если два таких резервуара соединены так, что они могут обмениваться энергией, но не атомами, и сумма их энергий $E = E_1 + E_2$ остается постоянной, то энергии E_1 и E_2 большую часть времени будут близки к таким, которые максимизируют объем пространства состояний, доступный объединенной системе. Он равен произведению объемов сфер радиусов $\sqrt{\frac{2E_1}{m}}$ и $\sqrt{\frac{2E_2}{m}}$ соответственно, первый из которых с ростом E_1 очень быстро растет, а второй очень быстро убывает. Их произведение имеет поэтому острый пик в точке, которую легко вычислить; точка отвечает условию равенства температур. «Сосредоточенность объема многомерного тела вблизи поверхности», в сущности, предопределяет существование температуры как макроскопической величины.

О каком пространстве идет речь в этом примере? О пространстве состояний физической системы, точнее, о некотором его фактор-пространстве: мы не принимаем во внимание ни положения атомов, ни направления скоростей. Одна его точка — это снова возможность. Типичное множество — это не стулья в комнате и не ученики в классе и даже не атомы в резервуаре, а возможные состояния атомов в резервуаре.

Асимптотические свойства многомерных объемов — это геометрический арсенал статистической физики. Все разнообразие мира природа конструирует из малого числа разных кирпичиков. Кирпичики одного сорта тождественны, и когда статистика описывает поведение их конгломератов, она пользуется образом точки, блуждающей в областях почти бесконечномерного фазового пространства. Макроскопические наблюдения позволяют лишь грубо указать расположение области, куда попала точка, и чем больше ее объем, тем вероятнее, что мы увидим точку именно там.

В бесконечномерии, где почти вся область — это ее граница, чтобы найти правильные способы думать и вычислять, нужны самые рафинированные орудия математического арсенала.

Нелинейность и кривизна. Так же как идея линейности экстраполирует малые приращения, идея кривизны использует такую экстраполяцию для изучения отклонения геометрического объекта (например, графика функции f) от линейного.

Малые размерности дают пищу интуиции, вырабатывающей геометрический образ кривизны. График кривой $y = ax^2$ в вещественной плоскости имеет три основные формы: «чаша» (выпуклость вниз) при $a > 0$, «купол» (выпуклость вверх) при $a < 0$ и горизонтальная прямая при $a = 0$. Число a определяет крутизну стенок чаши или купола, а также радиус кривизны в нижней (верхней) точке, который равен $\frac{1}{2|a|}$. В физических моделях малых колебаний тяжелый шарик, катающийся по дну чаши, совершает такие же колебания, как на пружине, и эквивалентная кривизна выражается через массу грузика и жесткость пружины. В многомерии график квадратичной функции при подходящем выборе системы координат приводится к виду $y = \sum_{i=1}^{N} a_i x_i^2$. Среди чисел могут быть положительные, отрицательные и нули, они определяют количество направлений, по которым график уходит вверх, вниз или остается горизонтальным. В современной квантовой теории поля удивительно велико количество ситуаций, где эта простая модель отвечает за вид спектра масс элементарных частиц и спектра сил (констант) взаимодействий, служа первой ступенькой на долгом пути к более изощренным схемам. При этом квадратичные функции возникают в бесконечномерном пространстве, горизонтальные направления в графиках появляются из-за действия группы симметрии; когда функция не меняется при некоторых движениях пространства по себе, ее график не может быть ямой, а в лучшем случае имеет вид оврага (овраг можно сдвигать по себе вдоль дна, а яму нельзя).

Итак, первый образ нелинейности, который мы вкратце описали, это образ того, как многомерная поверхность, график функции удаляется вблизи своей точки от линейной поверхности, касающейся ее в этой точке. Представив себе касательное пространство горизонтальным, мы можем отметить в нем набор попарно ортогональных направлений, вдоль каждого из которых поверхность уходит вверх, вниз или остается горизонтальной; скорость ухода вверх или вниз измеряется радиусом кривизны; этих радиусов столько, какова размерность поверхности.

Для описания искривления мы пользуемся, стало быть, «внешним лекалом». Этот круг представлений естествен и полезен, но эйнштейновская теория тяготения и, как было понято, максвелловская теория электромагнетизма, а также, как мы начинаем понимать сейчас, теория ядерных сил и, может быть, всех взаимодействий вообще требует более тонких представлений о кривизне. Первые математические теории «внутренней кривизны» в отличие от описанной «внешней» были развиты Гауссом и Риманом.

Понятие внутренней кривизны строится сначала для области в числовом пространстве, в которой для каждой пары близких точек задано расстояние между ними. Геометрия нашей области с новым, римановым понятием расстояния должна «в бесконечно малом» быть евклидовой. Разные аспекты понятия кривизны показывают, насколько эта геометрия все же не совпадает с плоской евклидовой.

Чтобы объяснить их, удобно начать с аналога прямых в этом многообразии — это геодезические — кривые наименьшей длины, соединяющие точки пространства (например, дуги больших кругов на сфере). Длина кривой, конечно, измеряется интегралом: кривую нужно разбить на много маленьких отрезков и заменить длину каждого отрезка расстоянием между его концами.

Теперь вообразим себе маленький вектор в многообразии, движущийся вдоль геодезической кривой так, что его угол с геодезической все время остается неизменным. (На двумерной поверхности этот рецепт определяет движение, а в многомерном случае его нужно еще уточнить.) Поскольку в малом пространство близко к евклидову, этим представлениям нетрудно придать точный смысл. Такое движение вектора называется его параллельным переносом. Можно определить и параллельный перенос вдоль любой кривой: как и для вычисления длины, ее следует заменить ломаной из коротких отрезков геодезических, и затем вектор переносить параллельно вдоль этих геодезических.

Рассмотрим маленькую замкнутую кривую в пространстве — почти плоскую петельку. Перенеся вектор вдоль нее параллельно и вернувшись в начальную точку, мы обнаружим, что вектор повернулся относительно своего начального положения на маленький угол, и этот угол пропорционален площади петельки. Сверх того, коэффициент пропорциональности зависит: а) от точки, вокруг которой расположена петелька; б) от направления двумерной площадки, которую можно натянуть на петельку. Этот коэффициент, как функция точки и двумерного направления в ней, называется римановым тензором кривизны. Для плоского евклидова пространства тензор кривизны тождественно равен нулю.

Понадобилось много времени, чтобы понять, какие образы в этой конструкции важнее всего, и прийти к выводу, что самой фундаментальной является идея параллельного переноса вдоль кривой. Геометрическая картина кривизны, которая наиболее актуальна для понимания, например, теории полей Янга—Миллса в современной физике, более обща, чем картина римановой кривизны. Для определения римановой кривизны мы переносили вектор вдоль кривой в пространстве. Представим себе этот вектор в виде маленького гироскопа, а кривую — в виде его мировой линии в четырехмерном пространстве-времени (подробнее об этом будет рассказано ниже, в главе о пространстве-времени). Тогда предсказание о том, как будут различаться направления осей двух гироскопов, разошедшихся в одинаковом начальном состоянии и затем соединенных для сравнения вновь в близких точках пространства-времени, есть прямое дело физики. В то же время воображаемый набор поведений всевозможных таких гироскопов есть математический образ пространства, дополненного правилами параллельного переноса касательных векторов вдоль кривых в нем.

Остается один шаг до введения общего математического понятия пространства со связностью и кривизны этой связности. Направление оси гироскопа является частным случаем представления о том, что точечная физическая система может обладать еще внутренними степенями свободы. В классической физике это идеализация, в соответствии с которой мы суммарно учитываем составные части системы, их вращения, колебания и т. п.; в квантовой физике появляются неклассические степени свободы, такие, как спин или магнитный момент электрона, не сводящиеся к воображаемому поведению «частей» электрона в пространстве-времени. Пусть вообще задана пара пространств M и E и отображение $f: E \to M$, скажем, модель пространства-времени M, в каждой точке m которого находится локализованная физическая система с пространством внутренних состояний $f^{-1}(m)$. Тогда связность на этом геометрическом объекте есть задание правила переноса системы вдоль кривых в M. Иными словами, если мы знаем отрезок мировой линии системы в M и ее начальное внутреннее состояние, то мы должны знать всю ее историю. Кривизна связности измеряет разницу конечных состояний системы, пришедших из близких начальных точек пространства-времени в близкие конечные разными путями, если сначала системы были в одинаковом состоянии.

Эти представления связывают геометрию с физикой напрямую, минуя сложные извивы гениальных догадок, ошибки, формализм и исторические случайности, сопровождавшие возникновение новых идей и постоянно переизлагаемые в учебниках.

Гравитационное поле — это связность в пространстве внутренних степеней свободы гироскопа, управляющая его эволюцией в пространстве-времени. Электромагнитное поле — связность в пространстве внутренних степеней свободы квантового электрона, управляющая его эволюцией в пространстве-времени. Поле Янга—Миллса —

связность в пространстве цветовых внутренних степеней свободы кварка.

Сейчас эта геометрическая картина представляется наиболее универсальной математической схемой для классического описания идеализированного мира, в котором по очереди рассматривается небольшое число основных взаимодействий. Материя в пространстве-времени описывается сечением соответствующего расслоения $E \to M$ — указанием того, в каком состоянии эта материя находится в каждой точке в каждый момент. Поле описывается связностью в этом расслоении. Материя влияет на связность, накладывая ограничения на ее кривизну, а связность влияет на материю, заставляя ее «переноситься параллельно» вдоль мировых линий. Великие Уравнения Эйнштейна, Максвелла—Дирака и Янга—Миллса являются точным выражением этих идей.

Но даже не записывая Уравнений, мы сказали очень многое. Открытие того, что основные физические поля суть связности, не было ни столь драматичным, ни столь точно датированным, как открытие этих Уравнений. В теории тяготения, например, основным понятием для Эйнштейна была не связность, а (псевдо)риманова метрика в пространстве-времени. Что электромагнитное поле является связностью, впервые предположил Герман Вейль, но в доквантовой физике он не смог указать, на каком расслоении эта связность определяет параллельные переносы, решив, что поле меняет длины отрезков, прошедших по разным путям в пространстве-времени. На неправдоподобность этого указал Эйнштейн, а правильное расслоение, на котором действует связность Максвелла, открыл Дирак. Но все равно осознание физических особенностей поля связности затянулось так надолго, что лишь в шестидесятых годах Ааронов и Бом предложили эксперимент, который показывает истинно «связностную» природу поля Максвелла. Для этого следует разделить на две части электронный пучок и пустить эти две части в обход цилиндрической области, внутри которой заключен магнитный поток, после чего наблюдать интерференционную картину на экране. По их предположению при включении и выключении магнитного поля картина должна меняться, хотя пучки, обходя область магнитного потока, проходят в области, где напряженности электромагнитного поля нулевые. Таким образом, разделенные и вновь соединенные на экране пучки будут «чувствовать» кривизну связности на расслоении Дирака, возникающую от включения поля в области, которую они обходят. Интерференционная картина на экране отражает именно разность углов поворота фаз в спиновом пространстве степеней свободы электрона, появляющуюся из-за того, что электрон может прийти в точку экрана разными путями в обход магнитного поля. (Эксперимент был реально проведен и подтвердил эти предсказания.)

Некоторые новинки. «Выставка» важнейших геометрических образов, по которой мы торопливо провели читателя, далеко не исчерпывается показанными экспонатами. Число таких образов пополняется. Из тех, которые начали привлекать внимание физиков и математиков в последнее время, можно, например, назвать «катастрофы», «суперсимметрии» и «солитоны».

Термин «катастрофы» ввел французский математик Рене Том для передачи интуитивных представлений, связанных с математическими схемами описания таких явлений, как разрывы, скачки, углы, поверхности раздела между однородными фазами, биологическая дифференциация тканей и т. п. Их польза в естественнонаучных моделях пока остается под вопросом и стала даже предметом горячих споров в газетах. Историку науки предоставляется счастливый случай наблюдать попытки установления новой парадигмы в смысле Томаса Куна и размышлять над социальными аспектами процесса установления научного общественного мнения.

«Суперсимметрии», изучаемые в супергеометрии, начинают входить в науку с меньшим шумом, хотя, возможно, окажут больше влияния на дальнейшее развитие физики и геометрии. Формально говоря, супергеометрия предлагает рассматривать на пространстве, скажем R^n, не только обычные функции, но также антикоммутирующие, т. е. удовлетворяющие условию $fg=-gf$, откуда, в частности, следует, что $f^2=0$. Так как ненулевых чисел с нулевым квадратом нет, такая функция не может принимать числовые значения; ее естественные области значений — так называемые грассмановы алгебры, введенные в прошлом веке замечательным математиком и санскритологом Грассманом. В физике грассмановы алгебры появились лишь после возникновения квантовой теории и понятия о спине; оказалось, что адекватное описание коллектива тождественных частиц с полуцелым спином, например электронов, требует введения антикоммутирующих переменных.

Образ солитона возник в результате открытия некоторых специальных решений уравнений, описывающих волны в разных средах, например на воде. Классические волновые уравнения линейны, т. е. сумма их решений и произведение решения на число также являются решениями. Иными словами, это уравнения описывают волны, не взаимодействующие между собой. Учет таких свойств реальных сред, как дисперсия (нелинейная связь между частотой и длиной элементарной волны) и нелинейная зависимость скорости волны от ее амплитуды приводит к гораздо более сложной картине взаимодействия волновых возмущений, чем простое их сложение. Поэтому крайнее удивление вызвало открытие в шестидесятых годах группой американских физиков и математиков эффекта нелинейного сложения некоторых уединенных возбуждений, описываемых уравнением Кортевега—де Фриза (эти уединенные возбуждения и были сначала названы солитонами). Высота солитонной волны пропорциональна ее скорости. Поэтому можно попытаться проследить судьбу суммы двух далеко разнесенных в начальный момент солитонов, из которых больший движется в сторону меньшего и потому обязательно догонит его. Общее ожидание состояло в том, что после «столкновения» волновая картина разрушится, но машинный эксперимент показал, что ничего подобного не происходит: после периода взаимодействия больший солитон «проходит сквозь меньший», и оба начинают расходиться, сохранив свою форму. Точная математическая теория явления была построена вскоре после этого — она подтвердила сохранение индивидуальности солитонов после взаимодействия, сколько бы их ни было вначале. После этого число нелинейных волновых уравнений, обнаруживающих аналогичные свойства, росло линейно со временем, а число публикаций, посвященных им, росло экспоненциально. Высказываются надежды, что солитоноподобные возбуждения полей являются адекватным классическим образом элементарных частиц: на новом идейном уровне возрождается столетней давности идея Ранкина и Томсона о том, что атомы суть «вихревые кольца основной жидкости». Дело в том, что уравнения для связностей Янга—Миллса в отличие от уравнений Максвелла нелинейны.

Небольшая историческая справка о первооткрывателях солитона, содержащая нравоучительные детали. Дидерик Иоханнес Кортевег родился в 1848 году и умер в 1941 году в Голландии. Он был известным ученым, и его памяти посвящено несколько некрологов. Ни один из некрологов даже не упоминает работы, в которой был открыт солитон. Сама эта работа представляет собой, в сущности, отрывок из диссертации Густава де Фриза, выполненной под руководством Кортевега и защищенной 1 декабря 1894 года. Де Фриз был гимназическим учителем, и о нем почти ничего не известно.

Множества, формулы и расщепленный мозг. Каково соотношение между математическим текстом и его содержанием в широком смысле слова (множественностью его потенциальных содержаний)?

Мы пытались показать, что между уравнениями, скажем, Максвелла и их прямым истолкованием в терминах физических понятий должен быть построен промежуточный теоретико-множественный образ, интерпретация — посредник, функционально подобный языку-посреднику в современных лингвистических моделях машинного перевода. На самом деле внимательный анализ научного мышления позволил бы обнаружить целую иерархию языков-посредников, участвующих в потенциальном объяснении таких понятий, как «число», «фотон» или «время». Однако большинство этих объяснений существует в непроявленном, незаконченном и зыбком облике, часто специфичном для индивидуального сознания, поддающемся коммуникации лишь в той мере, в какой удается использовать средства естественного языка. Естественный язык играет огромную роль в открытии, обсуждении и хранении научных знаний, но очень плохо приспособлен к точной передаче содержания этих знаний и той их обработке, которая составляет важную часть научного мышления. У него иные функции и иные достоинства.

Язык современной, теоретико-множественной математики может осуществлять роль такого языка-посредника благодаря его уникальной способности одновременно формировать геометрические, пространственные, кинематические образы и максимально точную запись их математического содержания в формализме. Канторовское определение множества, которое приведено выше, с долей иронии называли «наивным», сравнивая его с определением точки по Евклиду как «места без длины и ширины». Эта критика связана с непониманием того, что фундаментальные понятия математики, в данной системе не сводимые к более элементарным, обязательно должны вводиться двумя способами: содержательным («наивным») и формальным. Цель содержательного определения — создание первоначального, еще не вполне оформленного образа, настройка разных индивидуальных сознаний на один лад, как камертоном. Формальное же определение вводит, собственно говоря, не понятие, а термин, не образ «множества» в структуру сознания, а слово «множество» в структуру допустимых языковых текстов о множествах, которые описываются правилами их порождения примерно так же, как инструкции по АЛГОЛу описывают правила составления программы. В пределе идеализации вся математика может предстать как потенциальная совокупность грамматически правильных текстов на формальном языке.

В этом образе есть странная и для многих притягательная эстетика уродливости. Возник он в работах мыслителей, задумывавшихся над тем, как согласовать веру в абсолютную истинность математических принципов с абстракциями бесконечных множеств, бесконечных процессов проверок и т. п., через которые эта истинность вводится. Исходная гипотеза Давида Гильберта состояла в том, что эти абстракции, строго говоря, не нуждаются в такой «почти физической» и потому сомнительной интерпретации и что их можно считать чисто языковыми фактами. «Бесконечность» — это слово, а не явление, помогающее каким-то образом узнать истины о конечных вещах. Мы уже упоминали, что позже Гёдель показал, что такое языковое понятие «доказуемой истины» является несравненно более узким, чем абстракция истины, вводимой через идеи бесконечных проверок.

Внешние, естественнонаучные, прикладные, в широком смысле слова, аспекты математического знания при их гносеологическом анализе позволяют понять кое-что о математическом творчестве и диалектике его взаимоотношений с гёделевским запретом. Принятие интерпретации формализма, физической в том или ином смысле этого слова, вера в адекватность этой интерпретации и знание каких-то черт поведения физического явления позволяет указать или постулировать математические истины, не доступные «чистой интуиции». Это — источник расширения самой базы математического знания.

В более частном плане соотношение между математическим символизмом, неформальным мышлением и познанием природы в последние годы стало возможно рассматривать с точки зрения новых данных о структуре и функциях центральной нервной системы.

Мозг состоит из двух полушарий, левого и правого, которые перекрестно связаны с правой и левой половинами тела. Нейронные связи между полушариями проходят через мозолистое тело и комиссуры. В нейрохирургической практике известен метод лечения, в частности, тяжелых эпилептических припадков, состоящий в рассечении мозолистого тела и комиссур, что прерывает прямые связи между полушариями. После такой операции у больных наблюдается необычная картина «двух сознаний». По лаконичной формулировке американского нейропсихолога К. Прибрама, результаты исследования таких больных, а также больных с различными поражениями левого и правого полушарий, можно резюмировать следующим образом: «У правшей левое полушарие обрабатывает информацию во многом подобно цифровой вычислительной машине, тогда как правое полушарие функционирует скорее по принципам оптических и голографических систем обработки данных». В частности, левое полушарие содержит генетически заданные механизмы усвоения естественного языка и, более общо, символизма, логики, «рацио»; правое, молчаливое полушарие ведает образами, целостным восприятием, интуицией. Функционирование человеческого сознания в норме постоянно обнаруживает это сочетание двух компонент, одна из которых может проявляться заметнее другой, и открытие их физиологических носителей проливает свет на природу и типологию математических интеллектов и даже школ в проблеме оснований математики. Можно строить догадки о том, что два великих интеллекта, стоявших у колыбели современной математики, — Ньютон и Лейбниц — принадлежали соответственно к правополушарному и левополушарному типам. Ньютону мы обязаны созданием математического анализа и первыми фундаментальными результатами математической физики — закон всемирного тяготения, вывод из него законов Кеплера, теория приливов. Лейбниц же ввел обозначения, в частности $\int y\,dx$, которыми мы пользуемся и поныне. По словам историка математики Д. Стройка, он был «одним из самых плодовитых изобретателей математических символов» и даже свою версию математического анализа изобрел в результате поисков универсального языка. (Интересно, что Ньютон, также не избежавший этого поветрия времени, не создал формализма анализа и доказательства излагал геометрически.)

Принимая современное представление о функциональной асимметрии мозга, можно высказать предположение о том, что язык теории множеств позволяет кратчайшим путем достичь сбалансированной активности правого и левого полушарий работающего математика, чем и объясняется его замечательная эффективность.

Я хотел бы в заключение привести слова И. А. Соколянского, посвятившего жизнь воспитанию слепоглухонемых детей. Они содержатся в письме к Вяч. Вс. Иванову, из книги которого «Чет и нечет. Асимметрия мозга и знаковых систем» (М.: Советское радио, 1978) почерпнута и следующая информация.

Если у слепоглухонемого ребенка не поражены отделы центральной нервной системы, ведающие наглядным восприятием внешнего мира, то его можно научить языку, даже звуковому, и обеспечить полное развитие его личности. Этот процесс происходит в несколько этапов. Сначала ребенок поддерживает постоянный контакт с матерью или воспитательницей, держится за руку или юбку, ходит по дому, ощупывает предметы ее действий, и на этой основе вырабатывает язык жестов, в той или иной мере имитирующий действия и свойства предметов. В норме это функция правого полушария. Открытие Соколянского состояло в том, что на следующем этапе можно научить ребенка перекодировать язык жестов в пальцевую азбуку, так что жест-иероглиф замещается жестом-словом. Символ перевода — специальный жест, подобный математическому знаку равенства, —

две вытянутые параллельно ладони. Смысл этого перекодирования состоит в том, что информация передается в левое полушарие, которое, будучи предрасположено к научению дискретному и символическому языку (не обязательно звуковому!), начинает развивать эту функцию практически с той же скоростью, что и у здорового ребенка, — овладение языком происходит за два-три года. Синтаксис такого левополушарного языка отличен от «синтаксиса мира», запечатлеваемого в правом полушарии, и тождествен синтаксису словесного естественного языка. Семантика же его, видимо, более ограничена или, во всяком случае, неадекватна семантике зрячего и слышащего. Как объяснить, что значит «звезда», тому, кто никогда не увидит звезд? Соколянский дает замечательный ответ: «Словесная речь, как бы ею ни овладели безъязычные, сама по себе не может обеспечить слепоглухонемому полноценное умственное развитие в такой степени, чтобы он мог отразить внешний физический мир так, как это доступно нормальному человеку. Истинная картина этого мира может быть раскрыта только математически развитым мышлением...»

Что такое звезда, спрашивают и те, кто видит звезды, потому что видеть глазами — это еще очень мало.

2. Физические величины, размерности и константы: откуда в физике берутся числа

> Главная цель физических теорий — найти число, и притом с достаточной точностью!
>
> *Р. Фейнман*

Это преувеличение. Главная цель физических теорий — понимание. Способность теории найти число — полезный критерий правильности понимания.

Числа в физике — чаще всего значения физических величин, описывающие состояния физических систем. Величины — это родовое имя для таких абстракций, как расстояние, время, энергия, действие, вероятность, заряд и т. п. В свою очередь, состояние системы характеризуется значениями на нем достаточно полного набора физических величин, а систему естественнее всего описывать заданием множества возможных ее состояний. Выйти из этого логического круга, ограничиваясь чисто словесными описаниями, нельзя. Он может быть разорван в двух местах — операционально, когда мы объясняем, как измерить массу Земли или электрона, и математически, когда мы предлагаем теоретическую модель системы или класса систем и объявляем, что масса m — это, скажем, коэффициент в формуле Ньютона $F = ma$.

Содержательная, хотя и простая математика, связанная с физическими величинами, начинается с напоминания о том, что значения физической величины (точнее, скалярной вещественной величины) можно отождествлять с числами, вообще говоря, *только после выбора единицы измерения и начала отсчета* (*нуля*). Разумно не вносить этого произвола как можно дольше — некоторые из самых фундаментальных физических законов гласят, что у определенных физических величин имеются естественные единицы. Разберемся в этом подробнее.

Спектр скалярной величины. Назовем спектром величины множество всех значений, которые она может принимать (на состояниях данной системы, определенного класса систем, «всех» систем — это следует уточнять по мере необходимости). Основной математический постулат, который можно считать определением скалярной величины в теоретических моделях, состоит в том, что спектр всегда является подмножеством одномерного аффинного пространства над вещественными числами. Иными словами, он лежит на прямой, где не отмечены нуль и единица; если две такие точки отметить, спектр превратится в множество вещественных чисел. Вся соль в том, что иногда эти точки можно отметить не как попало, а пользуясь самим спектром. Вот основные примеры.

а) *Скорость*. Наименьшую (относительную) скорость естественно назвать нулем. Вторая отмеченная точка на спектре скоростей — это c, скорость света. Общепринятый (после создания специальной теории относительности) постулат о спектре скоростей состоит в том, что он заполняет отрезок от нуля до c. Тогда естественно объявить c единицей скорости и считать, что все скорости заполняют отрезок $[0, 1]$: в более обычных обозначениях так ведут себя отношения v/c. В обыденной жизни мы редко встречаемся со скоростями, большими 10^{-6} по этой шкале (скорость звука).

б) *Действие*. Это, может быть, самая важная величина во всей теоретической физике, и мы посвятим ей отдельную главку. Она принимает значения не на мгновенных состояниях, а на отрезках истории физической системы. В классической физике она определяет физически возможные отрезки истории — на них действие принимает наименьшие допустимые значения. Естественный нуль на спектре действия — это действие «бесконечно короткой» истории системы. Верхней границы спектра действия мы не знаем. Можно представить себе космологическую модель, где этой границей будет действие Вселенной на всем отрезке ее истории от Большого Взрыва до Большого Коллапса, если последний предсказывается моделью.

Тем не менее вторая отмеченная точка на спектре действия известна: это знаменитая постоянная Планка h. В человеческих масштабах она крайне мелка — действие ручки, написавшей слово «действие», имеет порядок $10^{29} \div 10^{30}\ h$. Прагматически говоря, h указывает, когда следует пользоваться квантовомеханическими, а не классическими моделями: в тех случаях, когда нас интересуют такие подробности истории системы, на которых действие меняется всего на несколько h. (Впрочем, это условие не необходимо и не достаточно.) Выбирая h в качестве единицы действия, мы можем считать, что спектр действия есть полупрямая $[0, \infty)$, а спектр приращений действия — вся вещественная прямая.

Таким образом, точка h на спектре действия «не видна» в отличие, скажем, от c, которая является правым концом своего спектра. Это очень странно. Впрочем, есть два контекста, в которых h проявляется.

Один из них связан со спектром спина — внутреннего момента количества движения элементарных частиц. Спин имеет ту же размерность, что и действие, и состоит из целых кратных $\hbar/2 = h/4\pi$. Не означает ли это, что спин есть истинно фундаментальная величина, а действие — лишь пережиток классической физики?

Второй контекст — это знаменитое соотношение неопределенностей Гейзенберга. Квантовые модели определяют разбиение системы классических величин на пары сопряженных: координата — проекция импульса, энергия — время. Размерность произведения сопряженных величин есть размерность действия. Принцип неопределенности в словесной формулировке утверждает, что оба члена пары сопряженных величин не могут одновременно принимать точного значения ни на каком состоянии систем. Произведение неточностей ограничено снизу величиной $\hbar/2$. Применяя этот принцип к энергии и времени, мы получаем формально соотношение $\Delta E\,\Delta t \geqslant \hbar/2$, содержательный смысл которого многократно обсуждался в физической литературе. С нашей точки зрения, оно означает, что представление о классическом отрезке истории системы, на котором действие меняется меньше чем на $\hbar/2$, лишено смысла. Позже мы подробнее обсудим трудный вопрос о сравнительном смысле одноименных классических и квантовых величин.

в) *Масса*. По Ньютону, значения инертной массы можно приписать стабильным материальным телам. Наименьшие объекты, к которым ньютоновское понятие массы еще применимо без принципиальных оговорок, — электрон и протон. Они приводят к двум точкам на спектре масс (кроме нуля): m_e и m_p. Характерная масса человеческих масштабов определяется с помощью числа Авогадро — $6{,}02 \cdot 10^{23}\ m_p$. Отношение $m_p/m_e \approx 1840$ является первым истинно фундаментальным числом, которое мы до сих пор встретили, в отличие от точек спектра, которые числами, строго говоря, не являются.

Теория, которая его объяснит, наверное, будет важной теорией. Другие элементарные частицы определяют другие точки на спектре масс; измеряя их в единицах m_e или m_p, мы получаем кучу чисел, нуждающихся в теоретическом объяснении.

г) *Гравитационная постоянная*. Если две точечные массы m_1 и m_2 находятся на расстоянии r друг от друга и притягиваются с силой F, обусловленной только ньютоновским гравитационным взаимодействием, то величина $\dfrac{Fr^2}{m_1 m_2}$ не зависит от m_1 и m_2. Она была открыта Ньютоном и обозначается G.

Последний пример идейно сложнее предыдущих: для введения G мы должны явно апеллировать к «физическому закону». Кроме того, мы получили точку нового спектра — спектра констант связи фундаментальных взаимодействий, к которым относятся еще электромагнитное, сильное и слабое взаимодействия.

В этом месте пора ввести следующую крупную группу физических абстракций.

Физический закон, размерность и подобие. Для нужд этого пункта под «физическим законом» будем понимать содержание таких формул, как $F = ma$, $F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$ (Ньютон), $E = h\nu$ (Планк), $E = mc^2$ (Эйнштейн) и т. п. Физическая теория, скажем, механика Ньютона или электромагнитная теория Максвелла, с математической стороны включает в себя указание следующих данных: а) основные величины теории; б) основные связывающие их законы. Кроме того, с операциональной стороны, должны быть описаны: в) физические ситуации, в которых можно применять теорию; г) принципы сопоставления теоретических высказываний с измерениями и наблюдениями.

Мы занимаемся лишь первой частью. Зная величины и связывающие их законы, мы можем построить фундаментальную математическую характеристику теории — ее группу размерностей D. На математическом языке это абелева группа, которую можно задать образующими и соотношениями: образующие — это физические величины теории, а соотношения определяются условием, чтобы все законы теории были однородными. Класс величины в группе D называется размерностью этой величины. Можно выбрать основные величины, которые в группе D составят независимую систему образующих; размерности остальных величин теории будут выражаться через них в виде формальных одночленов. Единицы основных величин определят единицы остальных. (Все это — сжатое изложение принципов, лежащих за такими школьными обозначениями, как, например, см/с^2.) Мы отметим несколько обстоятельств, в которых явное введение группы помогает разобраться в существе дела.

Группа размерностей ньютоновской механики. Она порождена размерностями длины L, времени T и массы M. Закон $F = ma$ показывает, что сила имеет в этой группе размерность MLT^{-2}, энергия (сила × длина) — ML^2T^{-2}, а действие (энергия × время) — ML^2T^{-1}.

Прогресс физики постоянно сопровождается двумя противоположными процессами: *увеличением* группы размерностей D в силу открытия величин новой природы (электромагнетизм после Ньютона; новые квантовые величины, такие, как «странность», «очарование», в наши времена) и *уменьшением* этой группы в силу открытия новых законов, которые дают соотношения между прежде независимыми размерностями.

Чтобы понять этот второй процесс, вернемся к ньютоновской гравитационной постоянной G. Размерность ее есть по предыдущим правилам сила × (длина)^2 × (масса)$^{-2} = M^{-1}L^3T^{-2}$. Ее числовое значение, таким образом, зависит от выбора единиц массы, длины и времени. Постоянна же она в том смысле, что после выбора таких единиц ее числовое значение, полученное по формуле $Fr^2(m_1m_2)^{-1}$, где F, r, m_1, m_2 измеряются в разных экспериментах типа эксперимента Этвеша или вычисляются по данным астрономических наблюдений, не зависит от переменных величин этих экспериментов: r, m_1, m_2.

После установления этого физического факта мы можем использовать его для построения уменьшенной группы размерностей D' теории «механика Ньютона» + «гравитация Ньютона». Эта уменьшенная группа математически является фактор-группой D по подгруппе, порожденной всеми степенями $M^{-1}L^3T^2$. В качестве основных размерностей в D' можно выбрать любую пару (ML), (MT) или (LT), а оставшуюся размерность выразить через эту пару и размерность G. Соответственно число основных единиц, отвечающих D', уменьшается до двух, если выбрать G в качестве единицы измерения размерности $M^{-1}L^3T^2$. На этом примере также виден физический смысл отмеченных точек спектров: это точки, воспроизводимые в серии экспериментов некоторого типа, изолирующих определенные взаимодействия, системы определенного сорта и т. д.

Масштабная инвариантность. Группу подобия, или масштабной инвариантности, D^* данной теории с математической точки зрения можно определить как состоящую из *характеров* группы размерностей D, т. е. из отображений χ группы D в положительные вещественные числа со свойством мультипликативности: $\chi(d_1 d_2) = \chi(d_1)\chi(d_2)$ для всех d_l, $d_2 \in D$. Эта группа имеет прямой физический смысл: она показывает, в какой пропорции можно увеличивать (или уменьшать) разные характеристики явления, не выводя его за пределы применимости теории. Если все законы теории известны, D^* вычисляется тривиально. Польза D^* состоит в том, что иногда ее можно угадать из физических соображений до того, как становится известным точный вид этих законов. Тогда оказывается, что D^* несет о них важную информацию. Известный пример классического открытия, сделанного таким способом, — закон Вина $\varepsilon(\nu, T) = \nu^3 F(\nu/T)$ для испускательной способности абсолютно черного тела как функции частоты и температуры. Он отвечает характеру $\chi_\alpha([\nu]) = a$, $\chi_\alpha([\varepsilon]) = a^3$, $\chi_\alpha([T]) = a$ в группе D^*, где $[\varepsilon]$, $[\nu]$, $[T]$ — соответствующие размерности; a — любое вещественное число. Можно упомянуть еще соображения Галилея о размерах животных и многочисленные приложения теории подобия в гидро- и аэродинамических расчетах. На уровне фундаментальных теорий группа D^* является простейшим примером групп симметрии, которые в физике элементарных частиц и в квантовой теории поля все чаще выступают в роли самостоятельных физических законов высшего уровня, накладывающих жесткие ограничения на вид законов следующего уровня, например лагранжианов. Важнейшие из этих групп — некоммутативные и комплексные, как группы унитарных вращений $U(n)$, потому что в квантовой механике основные величины лежат в многомерных комплексных пространствах, а не одномерных вещественных. На это уже другая история.

Планковские единицы и проблема единой физической теории. В ньютоновской физике нет других естественных единиц, кроме G. Скорость света c может быть объявлена естественной единицей лишь внутри новой теории, постулирующей ее особую роль как верхнего предела скоростей распространения материальных тел (недостижимого) или сигналов (достижимого), как инварианта относительно смены инерциальной системы координат, и т. п. Подобным же образом планковская единица действия $\hbar$ стала гербом новой физической теории — квантовой механики.

Однако c и $\hbar$, так же как G, имеют вполне определенные размерности в ньютоновской группе D: LT^{-1} для c и ML^2T^{-1} для $\hbar$. Выбрав G, c

и $\hbar$ в качестве основных единиц соответствующих размерностей, мы обнаруживаем, что имеется естественный масштаб, делающий значения всех вообще физических величин, выразимых в D, вещественными числами, т. е. имеются естественные единицы всего на свете! В самом деле, размерности $M^{-1}L^3T^{-2}(G)$, $LT^{-1}(c)$ и $ML^2T^{-1}(\hbar)$ порождают всю группу D (если уж быть совсем точным, то они порождают подгруппу индекса два). В частности, естественные единицы длины, времени и массы — знаменитые единицы Планка — суть:

$$L^* = (\hbar G/c^3)^{1/2} = 1{,}616\cdot 10^{-33}\ \text{см};$$
$$T^* = (\hbar G/c^5)^{1/2} = 5{,}391\cdot 10^{-44}\ \text{с};$$
$$M^* = (\hbar c/G)^{1/2} = 2{,}177\cdot 10^{-5}\ \text{г}.$$

У читателя должен возникнуть вопрос — почему же мы ничего не измеряем в планковских единицах? Прагматический ответ: потому что они определяют совершенно несуразные масштабы. Боровский радиус равен $3{,}9\cdot 10^{-11}$ см: L^* меньше него на 22 порядка! Во столько же раз T^* меньше времени, за которое свет проходит боровский радиус. С другой стороны, M^* — это масса вполне макроскопической пылинки, содержащей примерно 10^{19} протонов. Планковская единица плотности M^*/L^{*3} равна $5\cdot 10^{93}$ г/см, ничего отдаленно подобного этому ни в каких условиях мы не можем даже вообразить.

Более содержательное замечание состоит в том, что у нас на самом деле нет единой физической теории, в которой бы фигурировали одновременно G, c и $\hbar$. Уже теории, соединяющие эти константы попарно, являются крупнейшими достижениями двадцатого века: (G, c) — это общая теория относительности; $(c, \hbar)$ — это релятивистская квантовая теория поля, сравнительно завершенная лишь для электромагнитных взаимодействий. К фрагментам будущей $(G, c, \hbar)$-теории относятся расчеты квантового рождения частиц в сильных классических гравитационных полях, в частности, вблизи черных дыр малой массы (С. Хокинг). Пока полностью квантовой $(G, c, \hbar)$-теории не существует, планковские единицы остаются отдаленными пограничными столбами обширной неисследованной территории.

Можно посмотреть на это странное несоответствие порядков величин естественных единиц друг с другом и с привычными единицами с другой точки зрения. В гипотетических фундаментальных уравнениях единой теории — «всеобщей теории всего» (Станислав Лем) — разные члены (теперь безразмерные числа!) будут принимать (благодаря этому несоответствию) очень резко отличающиеся по величине значения в зависимости от масштабов области пространства (времени, импульсов, энергий), в которой помещаются изучаемые нами явления. Самые маленькие члены можно будет отбросить с ничтожной ошибкой, придя к одной из приближенных теорий. Так и происходит на границах применимости известных ныне моделей, когда мы описываем мир классически, в человеческих масштабах (считая $v/c=0$ и $\hbar/S=0$, где v — типичные скорости; S — типичные действия) или не учитываем гравитацию в микромасштабах, полагая $G=0$.

На самом деле это содержащее долю истины рассуждение крайне наивно. Настоящая смена теории не есть смена уравнений — это смена математических структур, и лишь фрагменты конкурирующих теорий, часто не самые важные идейно, допускают сравнение друг с другом на ограниченном круге явлений реальности. «Гравитационный потенциал» Ньютона и «кривизна метрики Эйнштейна» описывают разные миры на разных языках.

Кроме того, жизнь — может быть, самое интересное физическое явление — вышита на ажурной канве игры неустойчивостей, когда несколько квантов энергии могут иметь огромную информационную ценность, а отбрасывание малых членов в уравнениях означает смерть.

Классификация физических констант. Подведем некоторые итоги. Справочник «Таблицы физических величин» (М.: Атомиздат, 1976) содержит 1005 страниц текста и многие миллионы чисел; как в них разобраться? Эти величины делятся по крайней мере на четыре типа.

а) *Естественные единицы измерения, или физически отмеченные точки спектров*. Это — не числа, а такие величины, как G, c, h, m_e, e (заряд электрона). Это — размерные характеристики некоторых явлений, поддающихся воспроизведению многократно, с высокой степенью точности. Это — отображение того, что природа тиражирует элементарные ситуации огромными сериями. Размышления над тождественностью подобных кирпичиков мироздания приводили иногда к таким глубоким физическим идеям, как статистики Бозе—Эйнштейна и Ферми—Дирака. Фантастическая мысль Уилера, что все электроны тождественны потому, что представляют собой мгновенные сечения запутанной в клубок мировой линии одного электрона, привела Фейнмана к изящному упрощению диаграммной техники вычислений в квантовой теории поля.

б) *Истинные, или безразмерные, константы*. Это — отношения нескольких отмеченных точек на спектре величины одной размерности, например, отношения масс электрических частиц: мы уже упоминали m_p/m_e. Отождествление разных размерностей при учете нового закона, т. е. редукция группы размерностей, приводит к объединению прежде разных спектров и к необходимости объяснять новые числа.

Например, размерности m_e, c и $\hbar$ порождают группу Ньютона и потому приводят к столь же естественным атомным единицам размерностей M, L, T, как и единицы Планка. Поэтому их отношения к планковским единицам нуждаются в теоретическом объяснении. Но, как мы говорили, это невозможно, пока отсутствует (G, c, h)-теория. Однако и в (m_e, c, h)-теории — квантовой электродинамике — имеется безразмерная величина, значению которой современная квантовая электродинамика в некотором смысле слова обязана своим существованием. Поместим два электрона на расстоянии $\hbar/m_e c$ (так называемая комптоновская длина волны электрона) и измерим отношение энергии их электростатического отталкивания к энергии $m_e c^2$, эквивалентной массе покоя электрона. Получится число $\alpha = 7{,}2972 \cdot 10^{-3} \approx 1/137$. Это — знаменитая постоянная тонкой структуры.

Квантовая электродинамика описывает, в частности, процессы, в которых не сохраняется число частиц: вакуум рождает электрон-позитронные пары, они аннигилируют. Из-за того, что энергия рождения (не меньшая, чем $2m_e c^2$) в сотни раз больше энергии характерного кулоновского взаимодействия (благодаря значению α), удается провести эффективную схему вычислений, в которой эти радиационные поправки не отбрасываются начисто, но и не «портят жизнь» теоретика безнадежно.

Теоретического объяснения величины α не существует.

У математиков есть свои замечательные спектры: спектры выделенных линейных операторов — генераторов простых групп Ли в неприводимых представлениях, объемы фундаментальных областей, размерности пространств гомологии и когомологий и т. п. Простор для фантазии, отождествляющей спектры математиков и спектры физиков, открыт — нужны скорее принципы, ограничивающие выбор. Но вернемся к константам.

Следующий их тип, занимающий много места в таблицах, это:

в) *Коэффициенты пересчета из одних масштабов в другие*, например, из атомных в «человеческие». К ним относятся: уже упомянутое число Авогадро $N_0 = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ — по существу, один грамм, выраженный в единицах «масса протона», хотя традиционное определение немного другое, а также такие вещи, как световой год в километрах. Наиболее отвратительны для математика здесь, конечно, коэффициенты перехода от одних физически бессмысленных единиц к другим, столь же бессмысленным: от локтей к футам или от Реомюра к Фаренгейту. По-человечески это иногда самые главные числа; как мудро заметил Винни-Пух: «Не знаю, сколько в нем литров, и метров, и килограмм, но тигры, когда они прыгают, огромными кажутся нам».

г) «*Диффузные спектры*». Это — характеристика материалов (не элементов или чистых соединений, а обыкновенных технологических марок стали, алюминия, меди), астрономические данные (масса Солнца, диаметр Галактики...) и многие в том же роде. Природа производит камни, планеты, звезды и Галактики, не заботясь об их одинаковости, в отличие от электронов, но все же их характеристики меняются лишь в достаточно определенных пределах. Теоретические объяснения этих «разрешенных зон», когда они известны, бывают замечательно интересными и поучительными.

Серию таких объяснений собрал В. Вайскопф в прекрасной статье «Современная физика в элементарном изложении» (Успехи физических наук. 1971. Т. 103. Вып. 1. С. 155—179).

Вот пример физического рассуждения из этой статьи, в котором свои роли играют все наши главные герои: «Высота гор определяется фундаментальными физическими постоянными». Имеется в виду вот что: самая высокая вершина Земли Джомолунгма (Эверест) имеет высоту около 10 км; почему нет более высоких гор? Оказывается, даже без учета геологических механизмов выветривания и разрушения высота горы ограничена несколькими десятками километров из-за конкретных размеров Земли и значений фундаментальных констант. Аргументы Вайскопфа таковы: гора слишком большой высоты не сможет существовать из-за ожижения своей нижней части под давлением верхней. Подсчет высоты, при которой давление еще не достаточно для ожижения, дает оценку

$$\gamma \frac{\alpha a_0}{\alpha_G} \cdot \frac{1}{N^{1/3}} \cdot \frac{1}{A^{5/3}} \approx 40 \text{ км},$$

где $\gamma = 0{,}02$ — характеристика теплоты плавления (вполне оцениваемая через фундаментальные константы); α — постоянная тонкой структуры, $\alpha_G = Gm_p^2/\hbar c$; $N \approx 3 \cdot 10^{51}$ — число протонов и нейтронов в составе Земли; $A \approx 60$ — средний атомный вес вещества горы. Только число N здесь не фундаментально. Но и его место на диффузном спектре масс планет ограничено фундаментальными постоянными. Вайскопф с помощью совсем грубых оценок показывает, что N не может превосходить примерно 10^{53}, иначе вещество планеты не сможет существовать в виде неионизированных атомов. Наконец, оценка N снизу получается, если потребовать чтобы высота гор на планете была не больше ее радиуса, т. е. чтобы планета была в основном круглая, иначе и о горах нельзя говорить! Эта оценка приводит к величине больших астероидов.

3. Капля молока, или Наблюдатель, наблюдение, наблюдаемое и ненаблюдаемое

…Что наблюдалось бы, если не глазами во лбу, то очами умственными, когда орел, несомый силой ветра, выпустит из своих когтей камень?

Г. Галилей

Глазами во лбу мои сверстники наблюдали, как летит бомба, когда открывается замок бомбодержателя, на фоне дымного неба, на экранах кинохроник и на тысячах детских рисунков; я сам их рисовал. Попробуем забыть об этом и посмотрим на мир очами умственными, как учил простодушного Симпличио наш вечный современник Галилео Галилей.

Изолированная система. Среди всех абстракций классической физики одной из главных является идея изолированной, или замкнутой, системы. Эта часть Вселенной, эволюция которой в течение некоторого периода существования определяется лишь внутренними законами. Внешний мир или не взаимодействует с системой вовсе, или в некоторых моделях это взаимодействие учитывается суммарно как эффект связей, внешнего поля, термостата (таким образом, мы пользуемся словами «изолированная», «замкнутая» шире, чем общепринято; изолированность относится, скорее, к математической модели). Петли обратной связи нет или она искусственно перерезана. Мир разбирается на детали, узлы и сборки, как в заводских спецификациях. И в самом деле, это идеология не только Человека Размышляющего, но Человека Делающего. Винтики и шестеренки большой машины мира, когда их поведение понято, могут быть собраны и соединены в новом порядке. Так появляется лук, ткацкий станок или большая интегральная схема.

Для математика изолированная система — это: а) ее фазовое пространство, т. е. множество мгновенных состояний движения системы; б) множество кривых в фазовом пространстве, изображающих возможные истории системы, проходимые ею с течением времени последовательности состояний. Первое — кинематика, второе — динамика. Важно отличать состояние системы от состояния движения:

первое традиционно задается координатами, второе — координатами и скоростями; зная лишь координаты, мы не можем предсказать дальнейшее движение системы, но зная координаты и скорости — можем. Предположение о том, что замкнутую систему можно описать хоть каким-то фазовым пространством и системой кривых в нем (иногда все вместе называют фазовым портретом), — это математическое содержание классического принципа детерминизма.

Один из знаменитых парадоксов Зенона Элейского можно истолковать как первую догадку о роли фазового пространства: стрела летящая и стрела неподвижная в каждый момент времени находятся там, где они находятся; чем же отличается полет от неподвижности? Ответ: видимое место стрелы есть лишь проекция на пространство положений ее «истинного места» в пространстве пар (положение, вектор скорости).

Классическая замкнутая система изолирована от всего внешнего мира, значит, и от внешнего наблюдателя. Она изолирована от воздействий, которые на нее может оказать наблюдатель. Наблюдение — не воздействие. Наблюдение — это важнейший мысленный эксперимент, который можно произвести над системой и цель которого состоит в первую очередь в локализации системы в ее фазовом пространстве. Можно сказать и наоборот: фазовое пространство есть множество возможных результатов мгновенных полных наблюдений. Полное наблюдение позволяет вычислить полную эволюцию классической системы; существование полных наблюдений — это другая форма постулата детерминизма. Эволюция — это набор результатов наблюдений во все моменты времени. Идея мысленного наблюдения без воздействия подкрепляется рассмотрением разных способов наблюдения, более приближенных к реальности, где воздействие входит в схему, но может быть сделано сколь угодно малым или полностью учтено в расчетах, т. е. контролируемо. Эти рассмотрения, по существу, состоят в том, что изолированная система S включается как часть в большую изолированную систему (S, T). Наблюдению отвечает акт слабого взаимодействия между S и T, почти не нарушающий эволюции S (может быть, включенный ненадолго и тут же выключенный). Принципиально важно здесь вот что: к объединению (S, T) все равно применяется абстракция мысленного наблюдения, уже не влияющего на эволюцию объединенной системы. Кроме того, предполагается, что S может стать частью (S, T), не потеряв своей индивидуальности, ненадолго, обратимо.

Это очень естественный постулат для человека, главное средство наблюдения которого — видение. Электромагнитные взаимодействия столь слабы, что в масштабах от космических до человеческих взгляд на систему ничуть не действует на нее.

Умственные очи должны видеть в фазовом пространстве механики, в пространстве элементарных событий теории вероятностей, в кривом четырехмерном пространстве — времени общей теории относительности, в комплексном бесконечномерном проективном пространстве квантовой теории. Чтобы понимать видимое глазами во лбу, мы должны знать, что оно есть лишь проекция на сетчатку бесконечномерного мира. Образ платоновской пещеры кажется мне лучшей метафорой структуры современного научного знания: мы в самом деле видим лишь тени, ибо тень — лучшая метафора проекции.

Человеку психологически очень трудно выйти за пределы привычных пространственных трех измерений. Но мы вредим себе, пытаясь описать квантовые внутренние степени свободы неловкими словами вроде «значение проекции спина на ось z» — вектор спина находится в совсем другом пространстве, чем ось z. Стоит вспомнить, что и трехмерность мира вошла в сознание после огромных усилий — ее научили нас видеть художники Возрождения. Уччелло на десять лет удалился от дел, чтобы посвятить себя изучению перспективы. Современная математика среди прочего — это суровый тренаж многомерной перспективы по унифицированной программе. Если верить нейропсихологам, левая и правая части мозга при этом ведут себя, как слепой и его безногий поводырь, которого первый несет на своих плечах.

В классике наблюдатель, в общем, представлен системой координат в основных пространствах теории. Единица измерения определяет координату в спектре измеряемой величины. Когда эти единицы выбраны, координатные функции, т. е. наблюдаемые величины, отождествляют пространство положений, фазовое пространство или их части с подмножествами R^n и C^n математиков. Теория с наблюдаемыми величинами хороша, поскольку она одновременно описывает и идеи, и их наблюдаемые «тени». Теория с наблюдаемыми величинами плоха, поскольку может оказаться проще, поучительнее, вернее как можно раньше явно отделить наблюдаемое от наблюдателя и изучать их соотношение как отдельный объект исследования. Цвет по Ньютону и Эйлеру — это спектральный состав светового излучения в диапазоне длин волн около полумикрона; цвет по Гёте — это то, что мы видим. Поразительно, насколько эти два представления не поддаются прямому сравнению — их связывает лишь сложная и нетривиальная физиологическая теория цветового зрения. Гуманитарий Гёте не мог допустить отречения от наблюдателя, ибо вся его система ценностей не способна существовать без идеи человеческого участия как мерила вещей. Многое можно сказать в пользу этой точки зрения. Многое можно и возразить; часто лучший способ узнать себя — отвернуться от себя. Ньютоновская теория цвета — и все последующие физические теории — призваны объяснить, что такое свет безотносительно к тому, что его можно видеть. Для Гёте свет — это главным образом то, что можно видеть. И опять, как всегда, оказывается, что видимое нужно объяснять через невидимое.

«Все движения, замечающиеся у небесной тверди, принадлежат не ей самой, а Земле» (Коперник, 1515). После этой фразы, сдвинувшей Землю, все теории, основанные лишь на «замечающемся», стали архаизмом еще до своего рождения.

Классический наблюдатель живет в мире человеческих масштабов, и концепция классического наблюдения претерпевает естественные изменения при переходе к масштабам космологии или микромира. Расстояния, времена, энергии и действия астрономических явлений столь велики, что гипотезу о невлиянии наблюдателя хочется принять без дальнейших обсуждений. Другие проблемы наблюдения выступают на передний план; две из них можно кратко суммировать в виде вопросов. Можно ли рассматривать Вселенную как замкнутую систему? Как относиться к теории, описывающей явления, которые не могут наблюдаться из-за их разрушительного влияния на наблюдателя или из-за того, что какие-то области пространства-времени от него принципиально изолированы? (Звездные температуры, массы, давления, гравитационные поля черных дыр, условия Большого Взрыва.)

Самые принципы описания замкнутых систем основаны на гипотезе их воспроизводимости — фазовое пространство системы реализует идею осуществимости разных состояний и разных путей эволюции. Как совместить эту идею с единственностью эволюции, данной нам в наблюдениях системы? Ответ, конечно, связан с представлением о локальном взаимодействии «частей мира» между собой и о существенной одинаковости законов физики, действующих в разных частях. В самые простые и самые фундаментальные модели Вселенной (модель Фридмана, модель Эйнштейна—де Ситтера) заложена идея однородности, проявляющейся в существовании большой группы симметрии математической модели. Во всех моделях космологии на первый план выступает аспект представления о замкнутой системе, который затемнен в описании более привычных примеров — степень огрубления деталей. В космологической модели мира не остается и следов обыденности. Но вопреки этому или благодаря этому статья в «Успехах физических наук» может начинаться фразой: «Мы были бы счастливы, если бы Лебедь X-1 оказался черной дырой» (Успехи физических наук. 1978. Т. 126. Вып. 3. С. 515). Мы знаем кое-что о мире потому, что мы счастливы познавать его.

Принципы квантового описания. Итак, идеальный наблюдатель макромира не может его изменить, но даже идеальный наблюдатель микромира не может его не изменить. Это объясняется в бесчисленных изложениях квантовой механики, но, кажется, мы понимаем это очень плохо. Квантовая механика не просто научила нас новым математическим моделям явлений, она явила образец нового соотношения между описанием и явлением. В частности, целый ряд характеристик этих моделей на естественном языке приходится объяснять, привлекая идею «ненаблюдаемости». Смысл этого слова меняет оттенки, как Протей: ненаблюдаемы фаза пси-функции, виртуальный фотон, цвет кварка, разница между тождественными частицами и многое другое.

Попробуем взглянуть на геометрию квантовой механики умственными очами.

Фазовое пространство. Фазовое пространство замкнутой квантовой системы есть множество лучей (одномерных подпространств) в комплексном линейном пространстве $\mathscr{H}$, в котором задано также скалярное произведение. В этом постулате выражены: а) принцип линейной суперпозиции; б) принцип «ненаблюдаемости фазы». Вместо целой прямой в $\mathscr{H}$, описывающей состояние системы, обычно рассматривают один вектор, лежащий в этой прямой. Он определен только с точностью до умножения на комплексное число. Если даже нормировать его условием, чтобы его длина была равна единице, все еще останется произвол в выборе множителя $e^{i\theta}$. Это θ и есть «ненаблюдаемая фаза».

Фазовые кривые. Чтобы описать их, мы должны объяснить, как каждый луч в $\mathscr{H}$ меняется со временем t, изображая эволюцию замкнутой системы. Стандартное описание таково: а) в $\mathscr{H}$ имеется N попарно ортогональных лучей, которые вообще не меняются: они соответствуют стационарным состояниям системы (здесь N — размерность $\mathscr{H}$; как и в главе 1, мы для простоты рассматриваем лишь конечномерный случай); б) каждому из стационарных состояний ψ_j отвечает величина E_j, имеющая размерность энергии, энергетический уровень соответствующего стационарного состояния. Если в нулевой момент времени система находилась в состоянии $\sum a_j\psi_j$, то через время t она будет находиться в состоянии $\psi(t) = \sum a_j\psi_j e^{E_j t/i\hbar}$.

Заметим, что $E_j t$ имеет размерность действия и, естественно, измеряется единицей Планка $\hbar$. Поскольку $e^{Et/i\hbar} = \cos\frac{Et}{\hbar} - i\sin\frac{Et}{\hbar}$, каждое слагаемое здесь периодично по времени, в сущности, описывает движение по окружности со своей угловой скоростью. Их сумма, таким образом, изображает вращение вокруг N осей с разными скоростями. Траектории таких двумерных движений — это известные фигуры Лиссажу. Другой образ из давней истории науки — эпициклы Птолемея, также приводившие к сумме круговых движений. Любая координата вектора $\psi(t)$ испытывает со временем частые и исключительно нерегулярные колебания; график уже такой простой функции, как $\sum_{n=1}^{10}\cos(n^2 t)$ выглядит как сейсмограмма. Удобно записывать $\psi(t)$ в виде $e^{-iS(t)}\psi(0)$, где $S(t)$ — линейный оператор «действие за время t».

Наблюдение: печки, фильтры и квантовые скачки. Классическая идеализация наблюдателя, способного фиксировать мгновенное положение системы на ее фазовой кривой, заменяется радикально новой системой понятий. Назовем их сначала не общеупотребительными словами, чтобы не создавать иллюзий. Сильно идеализированные предположения о связи описанной схемы с реальностью состоят в том, что для каждого состояния $\psi \in \mathscr{H}$ можно сделать физический прибор («печку») A_ψ, производящий систему в состоянии ψ. Сверх того, для каждого состояния $\chi \in \mathscr{H}$ можно сделать прибор («фильтр») B_χ, на вход которого подаются системы в состоянии ψ, а на выходе обнаруживаются они же в состоянии χ или не обнаруживается ничего («система через фильтр не проходит»). Третий основной (после принципа суперпозиции и закона эволюции) постулат квантовой механики состоит в следующем: *система, приготовленная в состоянии ψ и сразу же после этого пропущенная через фильтр B_χ, пройдет через него и окажется в состоянии χ с вероятностью, равной квадрату косинуса угла между лучами ψ и χ в $\mathscr{H}$.*

Если между приготовлением системы в состоянии ψ и ее пропусканием через фильтр B_χ прошло время t, то вероятность будет равна квадрату косинуса угла между $e^{iS(t)}\psi$ и χ. Пока с системой ничего не делают, она движется по своей фазовой кривой. Но как только ее подают на фильтр, пропускающий лишь системы в состоянии χ, вектор ее состояния скачком меняется — он либо доворачивается на угол между ψ и χ и система проходит через фильтр, либо фильтр ее задерживает. Система, прошедшая через фильтр B_χ, не несет никаких следов памяти о состоянии, с которым она вошла в фильтр, — χ может получиться из чего угодно.

Если ψ, χ имеют единичную длину, то «вероятность перехода» от ψ к χ обозначается $|\langle\chi|\psi\rangle|^2$, а само скалярное произведение $\langle\chi|\psi\rangle$ называется амплитудой перехода. Поскольку фазы χ и ψ не определены, не определен и аргумент комплексного числа $\langle\chi|\psi\rangle$ — однозначный смысл имеют лишь разности аргументов, скажем, $\langle\chi_1|\psi\rangle$ и $\langle\chi_2|\psi\rangle$. Квадрат модуля суммы двух комплексных чисел зависит не только от самих чисел, но и от угла между ними, т. е. разности их аргументов. Это — «интерференция амплитуд».

Взаимодействие системы ψ с фильтром B_χ — частный случай того, что в квантовой механике называют наблюдением, или измерением. Более общая схема получается, если представить себе, что систему ψ подают на набор фильтров $B_{\chi_1}, \ldots, B_{\chi_n}$, где $\chi_1, \ldots, \chi_n$ — некоторая полная совокупность ортогональных базисных векторов; эти фильтры следует представлять себе расположенными «параллельно», так что через какой-нибудь из них система пройдет и окажется в состоянии χ_j. С таким набором фильтров связывают представление о некоторой физической величине B, которая в состояниях $\chi_1, \ldots, \chi_n$ принимает значения $b_1, \ldots, b_n$ соответственно, и говорят, что акт измерения, или наблюдения, приводит к значению b_j величины B на состоянии ψ, если ψ прошла через фильтр B_{χ_j}. Математическим представителем системы фильтров B_{χ_j} или величины B принято считать линейный оператор $\mathscr{H} \to \mathscr{H}$, который переводит вектор x_j в вектор $b_j x_j$ для всех j. Все такие линейные операторы, осуществляющие растяжение $\mathscr{H}$ по N взаимно ортогональным направлением с вещественными коэффициентами, называют наблюдаемыми.

Приведем в качестве иллюстрации идеализированное описание эксперимента Штерна—Герлаха по квантовому измерению момента количества движения (спина) ионов серебра. Гильбертово пространство $\mathscr{H}$, соответствующее спиновым степеням свободы этой системы, двумерно. Серебро испаряется в электрической печке; ионы коллимируются небольшим отверстием в экране, и получившийся пучок пропускается между полюсами магнита, создающего неоднородное магнитное поле. В пучке ионы находятся во всевозможных спиновых состояниях, но, проходя через магнитное поле имеют тенденцию «сваливаться» в одно из двух стационарных состояний χ_+, χ_- в этом поле, которые по традиции называются состояниями со спином «вверх» и «вниз», если магнитное поле вертикально. На выходе из области поля эти состояния из-за неоднородности поля оказываются пространственно разделенными — пучок делится пополам. Таким образом, магнитное поле действует как совокупность фильтров.

Итак, квантовое «наблюдение», по сути дела, не имеет ничего общего с классическим наблюдением: а) акт «наблюдения» почти неизбежно выбивает систему с ее фазовой траектории; б) акт «наблюдения» позволяет зарегистрировать в лучшем случае новое положение системы на фазовой кривой, но не то, на котором она находилась к моменту наблюдения, память о чем теряется; в) новое положение системы лишь статистически определяется старым; наконец, г) среди квантовых «наблюдаемых» имеются (и в действительности играют основную роль) физические величины, которым не отвечают никакие классические наблюдаемые.

Сопоставление между значениями квантовых и классических наблюдаемых может быть лишь очень непрямым. Например, квантовой наблюдаемой B можно поставить в соответствие ее среднее значение $\hat{B}_\psi$ на состоянии ψ (в смысле статистического усреднения). Оно оказывается равным $\langle\psi|B|\psi\rangle$ (если $|\psi|=1$). (Читатель может принять эту запись просто за новое обозначение.) Среднее значение $\Delta\hat{B}_\psi=\sqrt{(B-B_\psi)^2|_\psi}$ тогда измеряет разброс значений B относительно среднего значения $\hat{B}_\psi$ на состоянии ψ. Пусть B, C — две наблюдаемые величины, $[B, C]=\frac{1}{i}(BC-CB)$. Можно показать, что «теорема Пифагора» в $\mathscr{H}$ приводит к неравенству

$$\Delta\hat{B}_\psi\cdot\Delta\hat{C}_\psi\geqslant\frac{1}{2}|[B, C]_{\hat{\psi}}|,$$

которое является математическим выражением соотношения неопределенностей Гейзенберга. Оно чаще всего применяется к парам наблюдаемых B, C, для которых $[B, C]$ сводится к умножению на $\hbar$. Тогда неравенство принимает более привычный вид: $\Delta\hat{B}\cdot\Delta\hat{C}\geqslant\hbar/2$ все равно на каком ψ. Заметим, что если $\mathscr{H}$ конечномерно, таких пар наблюдаемых нет; соотношение неопределенности обычно применяется к квантовым аналогам пар классических наблюдаемых (координата и проекция импульса на соответствующую ось, энергия и время).

Объединение квантовых систем. Уже говоря о классическом наблюдении, мы отметили, что попытка детального описания подразумевает включение наблюдаемой системы S в большую систему (S, T). Поэтому следует подозревать, что необычные свойства квантовых наблюдений удается лучше понять, разобравшись в принципах квантового описания объединенной системы.

Относящийся к этому постулат квантовой механики состоит в том, что пространство состояния $\mathscr{H}_{S,T}$ объединенной системы есть некоторое подпространство тензорного произведения $\mathscr{H}_S \otimes \mathscr{H}_T$ (если S и T бесконечномерны, то это произведение нужно пополнить; эти тонкости мы опускаем). Какое именно подпространство $\mathscr{H}_S \otimes \mathscr{H}_T$ нужно взять, решается на основе дальнейших постулатов. Пока рассмотрим случай $\mathscr{H}_{(S,T)}\mathscr{H}_S \otimes \mathscr{H}_T$. Уже сама формулировка математической модели показывает возможность совершенно неклассических связей между «частями» S и T объединенной системы. В самом деле, оказывается, что для подавляющего большинства состояний (S, T) нельзя сказать, в каком состоянии находятся S и T «по отдельности», так что представление о частях оказывается имеющим очень ограниченный смысл. Действительно, в $\mathscr{H}_S \otimes \mathscr{H}_T$ имеются разложимые состояния $\psi_S \otimes \psi_T$ где $\psi_S \in \mathscr{H}_S$, $\psi_T \in \mathscr{H}_T$. Когда система (S, T) находится в одном из таких разложимых состояний, мы имеем основания говорить что она состоит из S в состоянии ψ_S и T в состоянии ψ_T. Но уже для состояния $\psi_S \otimes \psi_T + \psi_S \otimes \psi'_T$ такое утверждение несостоятельно. Между тем принцип суперпозиции позволяет строить такие состояния $\sum\limits_i \psi_S^{(i)} \otimes \psi_T^{(i)}$ в большом количестве. Множество разложимых состояний имеет размерность $m+n$, а всех — размерность mn, где mn — размерности $\mathscr{H}_S$ и $\mathscr{H}_T$ соответственно, т. е. почти все состояния (S, T) неразложимы. В подавляющем большинстве состояний (S, T) подсистемы S и T существуют лишь «виртуально».

Эта неклассическая связь между частями объединенной системы часто не может объясняться на основе классических представлений о том, что связь частей системы осуществляется через обмен энергией между ними. Действительно, имеется фундаментальный случай объединения двух тождественных систем S и T, когда в фазовом пространстве объединенной системы вообще нет ни одного разложимого состояния. Пусть S — фермионная элементарная частица, скажем, электрон, T — другая такая же частица. Тогда $\mathscr{H}_{S,T}$ есть собственное подпространство $\mathscr{H}_S \otimes \mathscr{H}_T = \mathscr{H}_S \otimes \mathscr{H}_S$, состоящее из векторов, меняющих знак при перестановке S и T, — это линейные комбинации векторов $\psi_1 \otimes \psi_2 - \psi_2 \otimes \psi_1$. Легко убедиться, что каждое состояние системы двух электронов неразложимо. Векторов $\psi \otimes \psi$, в частности, в фазовом пространстве нет; в популярном изложении говорят, что два электрона не могут находиться в одинаковом состоянии; это основа существования стабильных атомов и, в конечном счете, материального мира, окружающего человека. Однако почти невозможно объяснить словами «квазиразложимые» состояния $\psi_1 \otimes \psi_2 - \psi_2 \otimes \psi_1$. Говорят, что один из электронов находится в состоянии ψ_1, а другой — в состоянии ψ_2, но нельзя сказать, «который» из них в каком состоянии. Наконец, естественный язык оказывается уже в безвыходном положении, когда нужно объяснить разницу между объединением двух тождественных фермионов и двух тождественных бозонов, где фазовое пространство $\mathscr{H}_{(S,S)}$ состоит из симметричных относительно перестановок векторов в $\mathscr{H}_S \otimes \mathscr{H}_S$, т. е. объяснить, что «различными, но неразличимыми» две системы могут быть двумя разными способами (уже и один способ причинял массу хлопот натурфилософии).

Здесь уместно сделать отступление о «естественном языке». В действительности наши представления о «классической» и «неклассической» физике очень тесно связаны с представлением о том, что можно и что нельзя адекватно выразить простыми словами. Положение дел здесь очень нетривиально. Не только популяризатор, но и работающий физик часто стремится объяснить новое явление, закон или принцип «на пальцах». Нужно лишь отдавать себе отчет в том, каково место такого объяснения. Оно призвано: а) назвать и быть способным вызвать из памяти соответствующий фрагмент точной теории с математическими формулами, структурами и т. п., подобно тому, как действует код команды в алгольной программе, включая процесс выполнения этой команды, который и составляет ее смысл; б) включить процесс порождения ассоциаций, т. е. помочь обнаружить, что нечто похоже на нечто другое; в) создать в мозгу структуру интуитивных представлений о предмете, значение которой состоит не в замене точного знания о нем, а в формировании ценностных принципов и возможности быстрых оценок — что искать дальше, в каком направлении думать, что правдоподобно и что неправдоподобно. (В частности, в этом польза популяризации для ученых другой специальности.) Мы должны подчеркнуть еще раз следующую точку зрения: семантикой словесного описания какого-то фрагмента физики является, в общем, не соответствующий комплекс явлений природы, а соответствующий фрагмент теории, семантика которой, в свою очередь, эксплицируется через другие фрагменты теории, операциональные предписания и т. п. Тем не менее, побуждение интерпретировать непосредственно языковые выражения может оказаться исключительно плодотворным. Так были открыты кварки: когда выяснилось, что пространство некоторых внутренних степеней свободы нуклона разлагается в тензорное произведение трех подпространств, возник соблазн рассматривать эти три подпространства как внутренние степени свободы трех новых частиц, из которых состоит нуклон. Эти частицы и суть кварки u, d, s (они «открыты, но не обнаружены в свободном состоянии»).

Возвращаясь к проблеме квантовых наблюдений, мы приходим к выводу, что неклассичность их математической модели связана в первую очередь с тем, что она является огрублением гораздо более сложной модели, призванной описывать взаимодействие системы с другой системой — «прибором». Во время первых дискуссий о смысле математического аппарата квантовой механики особенно подчеркивалось то обстоятельство, что прибор макроскопичен и нет никакой надежды на полную квантовую теорию процесса его взаимодействия с системой. Это и вынуждает заменять его линейным оператором наблюдаемой. Итак, логика математического описания приводит к следующим выводам, которые в совокупности почти противоречивы. В той мере, в какой абстракция замкнутой квантовой системы правомерна, для ее описания мы нуждаемся лишь в одной «наблюдаемой» — операторе энергии. Однако с ней не следует связывать представлений об измерении энергии, ибо акт «измерения» требует расширения системы. Локализация системы в ее фазовом пространстве может быть произведена и с помощью «измерения» других наблюдаемых, но они суть огрубленные модели недоступного для полного описания объединения (система + + прибор + оператор энергии системы/прибора). После взаимодействия с прибором система может потерять свою индивидуальность, и представление о том, что она начинает новую жизнь в точке новой фазовой кривой в своем пространстве, может потерять всякий смысл. Наконец, поскольку и до взаимодействия с прибором система была частью чего-то, скорее всего она ни в какой момент не имеет индивидуальности, нужной для адекватности модели. Кажется, нет меньшей замкнутой системы, чем весь Мир.

После всего этого следует считать чудом, что наши модели успешно описывают хоть что-нибудь. На самом деле они успешно описывают очень многое: мы наблюдаем то, что предсказали, и понимаем то, что наблюдаем. Однако этот последний акт наблюдения и понимания всегда ускользает от физического описания.

В конце шестидесятых годов были сконструированы оптические затворы для фотокамер, позволяющие получить выдержку в десять пикосекунд. За это фантастически короткое время световой луч в воде проходит расстояние всего 2,2 мм, и можно получить фотографию короткого лазерного импульса во флаконе, пока он движется внутри него. В лаборатории «Белл телефон», где были сделаны такие фотографии, в воду добавляли каплю молока, чтобы усилить рассеяние света и сделать след импульса ярче. Эта капля молока — символ человеческого участия в мире, где нельзя быть только наблюдателем.

4. Пространство-время как физическая система

Что такое время, пространство, место и движение, я не объясняю, ибо это известно всем.

И. Ньютон

Время и пространство — это категории нашего мышления, а не условия нашего существования.

А. Эйнштейн

Мы ощущаем себя локализованными в пространстве и длящимися во времени, и почти все схемы современной физики в конечном счете описывают события, происходящие на арене пространства-времени. Однако со времени создания общей теории относительности и квантовой механики все усиливается тенденция рассматривать пространство-время как особую физическую систему. Принципы ее описания все еще остаются классическими. Трудности квантовой теории поля, видимо, указывают на то, что эти принципы вступают в противоречие с универсальными квантовыми законами.

Главный математический образ пространства-времени — дифференцируемое четырехмерное пространственно-временное многообразие, для краткости Мир. Одна точка Мира — идеализация очень краткого и «маленького» события, вроде вспышки, излучения или поглощения фотона атомом. Сверх того, точка Мира — это событие потенциальное; точка Мира «готова принять» событие, но «существует» и помимо него. Образ сосредоточенного в малой области пространства, но длящегося события, такого, как жизнь наблюдателя, звезды, галактики, — это линия в пространстве — времени, мировая линия события или его история. Исключительно важно научиться представлять себе Мир Становящийся как Мир Ставший, т. е. всю историю Вселенной или ее большой части как завершенный четырехмерный образ, нечто вроде «дао» древнекитайской философии. Введение временной динамики — это следующий шаг, который осуществляется так. В Мире между двумя близкими точками $x^\alpha = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ и $x^\alpha + dx^\alpha = (x^0 + dx^0, \ldots, x^3 + dx^3)$ определено пространственно-временное расстояние. Его квадрат $ds^2 = \sum g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ — квадратичная форма от разностей координат близких точек. Здесь x^α — произвольная локальная система координат. Классический наблюдатель со своей малой лабораторией, состоящей из линеек с делениями и часов, может установить локальную систему координат, в которой $x_0 = ct$; x_1, x_2, x_3 — прямоугольные координаты в физическом пространстве наблюдателя, t — показания часов. Метрика вблизи него будет близка к метрике Минковского $dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$. Если представить себе, что Мир заселен такими наблюдателями, области действия координат которых его покрывают, то координаты событий должны пересчитываться от одного наблюдателя к другому. Но пространственно-временной интервал между двумя близкими точками, вычисленный разными наблюдателями, будет одним и тем же. Скорость света употребляется для пересчета временных единиц в пространственные, в них время и измеряется. Мировая линия наблюдателя есть его собственная река времени: атомные часы наблюдателя отсчитывают значения интеграла $\int \sqrt{ds^2}$ вдоль этой мировой линии, т. е. ее длину. Никакого физически осмысленного «общего времени» Вселенной нет; правда, его иногда можно ввести в специальных моделях Мира. Нет ничего удивительного в том, что две кривые в Мире с общим началом и концом могут иметь разную длину — это так уже на евклидовой плоскости. Поэтому не удивительно, что два наблюдателя, сверившие свои часы и расставшиеся, при новой встрече обнаружат, что их часы разошлись. Менее привычно, что если две точки пространства-времени вообще можно соединить мировой линией наблюдателя, то среди таких линий есть самая длинная, но нет самой короткой (на евклидовой плоскости верно как раз обратное). Это специальное свойство метрики Минковского, связанное с тем, что она не является положительно определенной: квадрат интервала между разными точками может быть положительным, отрицательным и нулем.

Наблюдатели с самыми длинными мировыми линиями, т. е. самым быстрым течением собственного времени, называются инерциальными. С точки зрения общей теории относительности, они свободно падают в поле тяготения. Их мировые линии называются времениподобными геодезическими.

Второй важный класс линий в Мире — траектории частиц, летящих со скоростью света, вроде нейтрино. Вдоль них пространственно-временной интервал тождественно обращается в нуль — «время останавливается», что и составляет их геометрическое определение. Геометрия таких светоподобных геодезических определяет, что может наблюдать наблюдатель и, более общо, какие события в Мире могут влиять на другие события. Именно в ее терминах точно формулируется, в частности, постулат о том, что никакие сигналы не могут распространяться быстрее света.

Мир Минковского. Простейшим и важнейшим конкретным примером Мира является плоский Мир Минковского. Он хорошо имитирует любой другой Мир локально. В этом Мире имеется инерциальный наблюдатель с системой координат (x^α), покрывающей весь Мир, в которой метрика тождественно равна $(dx^0)^2 - ((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2)$. Фиксируем начало отсчета — точку на мировой линии этого наблюдателя. Мир Минковского $\mathscr{M}$ превратится в линейное пространство в выбранной системе координат, и эта структура линейного пространства от инерциального наблюдателя на самом деле не зависит, если не обращать внимания на сдвиг начала отсчета. Поэтому понятия прямой, плоскости, трехмерного подпространства в $\mathscr{M}$ имеют абсолютный смысл. Преобразования $\mathscr{M}$ (линейные), сохраняющие метрику Минковского, образуют группу Пуанкаре, а часть из них, оставляющая на месте некоторое начало координат, образуют группу Лоренца. Это — основные группы симметрии всей физики, точнее, физических законов: ни точки Мира Минковского, ни система координат инерциальных наблюдателей ничем не предпочтительны одни перед другими, и все координатные формулировки одного закона должны быть эквивалентными.

Множество точек, отстоящих на нулевое расстояние от начала отсчета P, образует световой конус C_P с уравнением $(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$. Проходящие через P времениподобные геодезические — это прямые, лежащие внутри C_P, а светоподобные геодезические — прямые, лежащие на самом C_P, — образующие этого конуса. Конус состоит из двух пол — приходящей и уходящей. Время по времениподобной геодезической течет по направлению из приходящей полы в уходящую. Это различие между полами C_P непрерывно зависит от P, в чем и выражается *существование единого направления времени* во всем Мире Минковского *при отсутствии единого времени*.

Точка P и времениподобный касательный единичный вектор в ней — это модель «мгновенного наблюдателя» в Мире Минковского. Вектор указывает направление его личного времени. Ортогональное к этому вектору подпространство в $\mathscr{M}$ — это модель трехмерного физического пространства мгновенного наблюдателя. Его метрика (с обратным знаком) получается ограничением метрики Минковского. У двух разных мгновенных наблюдений, даже находящихся в одной точке Мира $\mathscr{M}$, разные и физические пространства. Они пересекают мировую полосу, скажем линейки, под разными углами. Такое пересечение есть в некотором приближении мгновенный наблюдаемый образ линейки. Он может иметь поэтому для разных наблюдателей разную длину — пространственные и временные координаты могут перетекать друг в друга.

Как следует представлять себе наблюдение удаленного объекта, скажем звезды, в Мире Минковского? Пусть наблюдатель движется по мировой линии P, а звезда — по своей мировой линии S. Вообразим себе приходящую полу светового конуса $C^+_{P_0}$ точки P_0, движущегося вместе с $P_0 \in P$. Она «заметает» за собой некоторую часть $\mathscr{M}$ — область Мира, которую наблюдатель мог наблюдать. В конкретной точке P_0 наблюдатель видит звезду в точке пересечения S и $C^+_{P_0}$ посредством светового луча, соединяющего $S \cap C^+_{P_0}$ и P_0. Но мы должны еще понять, как узнать видимое положение звезды на небосводе наблюдателя. Дело в том, что его небосвод «лежит в его физическом пространстве E_{P_0}», а не в пространстве Минковского $\mathscr{M}$, и положение звезды моделируется лучом в E_{P_0}. Чтобы получить этот луч, мы должны спроецировать луч в $\mathscr{M}$ — полупрямую с концом P_0, проходящую через $S \cap C^+_{P_0}$ в физическое пространство E_{P_0}. Эта проекция — ортогональная, но, конечно, по отношению к метрике Минковского.

Таким образом, удобно различать «абсолютный небосвод» в точке P_0 — базу приходящей полы светового конуса, и небосвод мгновенного наблюдателя в этой точке — проекцию абсолютного небосвода в физическое пространство этого наблюдателя. В классической космографии небосвод вполне можно представлять себе как хрустальную сферу неопределенного радиуса; между точками небосвода определены угловые расстояния, и геометрия небосвода совпадает с геометрией твердой сферы. Но для другого наблюдателя угловые расстояния между звездами будут иными; летя с очень большой скоростью в направлении созвездия Ориона, мы увидим, что оно сожмется в овчинку, а противоположная небесная полусфера растянется (астрономы называют это аберрацией). Таким образом, математическая структура «абсолютного небосвода» не совпадает со структурой евклидовой сферы: угловые расстояния на ней не имеют смысла, не зависящего от наблюдателя. Подробное исследование показывает, что естественная структура абсолютного небосвода — это комплексная сфера Римана: плоскость комплексных чисел, дополненная бесконечно удаленной точкой, причем различие между конечными и бесконечной точками забыто. Более точно сфера Римана — это множество одномерных векторных подпространств в двумерном комплексном векторном пространстве, или комплексная проективная прямая CP^1. В частности, естественные координаты звезд на небе — это комплексные числа. Выберем три опорные звезды и припишем им координаты $0, 1, \infty$. Тогда имеется несложная процедура, позволяющая по результатам наблюдений поставить в соответствие любой четвертой звезде комплексное число z, и оно получится одним и тем же, какой бы наблюдатель в данной точке Мира ни измерил положение звезды.

Если координаты $0, 1, \infty$ приписываются не опорным звездам, а точкам неба, в которые направлены три ортогональные оси пространственной системы координат наблюдателя, тогда, конечно, комплексные координаты z и z' одной и той же звезды для разных наблюдателей в данной точке Мира могут быть разными. Но они обязательно связаны дробно-линейным соотношением вида $z' = \dfrac{az+b}{cz+d}$, где a, b, c, d — комплексные числа, не зависящие от звезды, связанные условием $ad - bc = 1$. Матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с определителем единица является необычным представителем преобразования Лоренца, связывающего две инерциальные системы координат в одной точке Мира. В современной физике это представление группы Лоренца, однако, гораздо более фундаментально, чем обычные матрицы пересчета систем координат.

Искривленный Мир. Более общие модели Мира отличаются от мира Минковского в нескольких отношениях. Во-первых, даже локально в системе координат инерциального наблюдателя метрика не может быть приведена к форме $(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$. Во-вторых, может вообще не существовать глобальной системы координат. В-третьих, метрика Мира и история материи и полей в Мире не являются независимыми — кривизна метрики определяется материей, и, в свою очередь, метрика накладывает сильные ограничения на возможные истории материи; эти связи — суть уравнения Эйнштейна. Геометрически типичные образы искривления создаются при исследовании возможного поведения близких времениподобных геодезических (локальный аспект) и световых конусов (глобальный аспект). Попытаемся дать словесное описание эффектов очень сильного искривления, приводящего к понятию черной дыры. Представим себе мировую линию S точечной массы m. С ней связана характерная длина пространственно-временного интервала $2Gm/c^2$ — так называемый радиус Шварцшильда. Точки Мира, лежащие на времениподобном расстоянии от S, не большем радиуса Шварцшильда, образуют трубу Шварцшильда $\bar{S}$ вокруг S. Далеко вне ее Мир почти плоский (если отвлечься от влияния остальной материи). Но внутри нее Мир настолько искривлен, что для любой точки $P_0 \in \bar{S}$ уходящая пола светового конуса C_{P_0} целиком лежит внутри трубы Шварцшильда: каждый световой луч на границе $\bar{S}$ выглядит как спираль на поверхности цилиндра. Поле тяготения массы m не выпускает фотоны, испущенные внутри $\bar{S}$. Приходящая пола $C^+_{P_0}$, однако, не обязана лежать в $\bar{S}$ — труба Шварцшильда может поглощать внешнее излучение.

Рассмотрим теперь более реалистическую модель, когда масса m сама сосредоточена в конечной области, радиус которой может быть больше радиуса Шварцшильда. Например, для Земли он имеет значение около 1 см, а для Солнца — около 3 км. В этом случае труба Шварцшильда не имеет особого физического смысла. Но в процессе эволюции звезда достаточно большой массы может под влиянием собственного тяготения сколлапсировать, так что в какой-то точке K_0 мировой линии ее центра радиус звезды сравняется с радиусом Шварцшильда и затем станет убывать. Отрезок трубы Шварцшильда после точки K_0 будет пространственно-временной областью, не доступной внешнему наблюдению. Четырехмерная картина того, что увидит внешний наблюдатель, будет примерно такой. Приходящая пола светового конуса наблюдателя в любой точке наблюдения пересекается с мировой трубой звезды, но это пересечение всегда происходит раньше точки K_0. Иначе говоря, локальное время вдоль того конца луча, который воспринимает наблюдатель, будет стремиться к бесконечности, тогда как локальное время вдоль звезды, испускающей луч, будет стремиться к конечной величине, отвечающей точке K_0 (напомним, что локальное время — это длина соответствующей мировой линии). «По часам наблюдателя коллапс длится бесконечно долго».

Еще раз повторим, как соотносится с четырехмерной картиной ее видимый образ на небосводе наблюдателя. В искривленном Мире к и без того сложному процессу перевода добавляется лишний шаг — построение плоского Мира, касательного к искривленному в точке, где находится мгновенный наблюдатель. Чтобы получить на своем небосводе точку видимого образа звезды S, наблюдатель должен: а) построить в кривом четырехмерии приходящую световую геодезическую, соединяющую его положение с мировой линией звезды; б) провести к этой геодезической касательную полупрямую в плоском Мире, касающемся кривого Мира в точке, где находится наблюдатель; в) в плоском же Мире провести касательную к мировой линии наблюдателя; г) построить в этом плоском Мире мгновенное физическое пространство наблюдателя; д) спроецировать на него касательную к лучу от звезды.

Так движутся «тени идей» на стене Пещеры.

Спиноры, твисторы и комплексный Мир. Если согласиться с идеей, что точка пространства-времени есть идеализация классического образа «мельчайшего события», то мы неизбежно придем к необходимости рассматривать и другие геометрические модели по мере возрастания знаний о том, какими характеристиками обладают такие события. Скажем, акт поглощения фотона далеко не полностью характеризуется указанием, в какой точке Мира он произошел, — нужно указать энергию и поляризацию фотона. Положение электрона на своей мировой линии также еще не определяет полностью его состояние — нужно указать направление его спина.

Хотя и поляризация, и спин являются квантовомеханическими внутренними степенями свободы, замечательно, что их геометрическое описание автоматически и очень естественно встроено в геометрию Мира. Именно, значение поляризации или спина в точке Мира — это луч в двумерном комплексном пространстве, или точка на сфере Римана CP^1. Оказывается, что эту сферу Римана можно совершенно однозначно отождествить с абсолютным небосводом этой точки, который, как мы объясняли выше, также является сферой Римана. Поэтому для каждого Мира $\mathscr{M}$ можно рассмотреть расширенный Мир $\overline{\mathscr{M}}$, одна точка которого является парой (точка $\mathscr{M}$, точка абсолютного небосвода над этой точкой $\mathscr{M}$). Имеется естественное отображение $\overline{\mathscr{M}} \to \mathscr{M}$, превращающее $\overline{\mathscr{M}}$ в расслоение над $\mathscr{M}$ со слоем CP^1. Если заменить здесь каждое CP^1 на двумерное комплексное пространство, из которого CP^1 получается как пространство лучей, мы придем к знаменитому спинорному пространству Дирака.

Мировую линию частицы со спином, скажем электрона, естественно представлять себе как линию именно в $\overline{\mathscr{M}}$, а не в $\mathscr{M}$. Лучи света тоже, естественно, поднимаются в $\overline{\mathscr{M}}$: в каждой своей точке такой луч определяет точку на соответствующем небосводе, куда он направлен; множество таких пар в $\overline{\mathscr{M}}$ и есть образ луча в $\overline{\mathscr{M}}$. Р. Пенроуз предложил рассмотреть замечательное пространство H, которое получается, если в $\overline{\mathscr{M}}$ каждый луч стянуть в одну точку. Математически H называется фактор-пространством $\overline{\mathscr{M}}$ по отношению эквивалентности, определенному лучами в $\overline{\mathscr{M}}$. Чтобы понять устройство H, разберем случай, когда $\mathscr{M}$ — плоский мир Минковского. Тогда в $\overline{\mathscr{M}}$ никакая точка не лежит на пересечении лучей (в отличие от $\mathscr{M}$) и каждый луч с каждым небосводом либо совсем не пересекается, либо пересекается в одной точке. Поэтому каждый небосвод CP^1 просто вкладывается в H без самопересечений, а некоторые небосводы попарно не пересекаются. Простейшее пространство, куда можно уложить много проективных комплексных прямых, — это проективная комплексная плоскость CP^2. Но она не может быть кандидатом на роль H, ибо любые две прямые в CP^2 пересекаются. На самом деле H лежит в CP^3 — проективном комплексном трехмерном пространстве, или пространстве проективных твисторов. Правда, небеса над точками мира Минковского — это не все прямые в CP^3, а лишь их часть, лежащая на пятимерной гиперповерхности (всё CP^3 шестимерно). Очень полезно ввести дополнительные «идеальные» точки плоского мира $\mathscr{M}$, небеса над которыми отвечают недостающим прямым в CP^3. Получится комплексное компактное пространство—время Пенроуза $C\mathscr{M}$ — в нем координаты точек могут быть любыми комплексными числами и, сверх того, имеется еще целый комплексный световой конус, «лежащий на бесконечности».

Может ли такая абстрактная конструкция иметь какое-либо отношение к физике? По-видимому, ответ должен быть утвердительным. Один из аргументов состоит в открытой сравнительно недавно аналогии между квантовой теорией поля и статистической физикой. Если в основных формулах квантовой теории поля чисто мнимую координату ict заменить вещественной, то, грубо говоря, они перейдут в основные формулы статистической физики (роль ict играет обратная температура). Такая замена геометрически означает переход от мира Минковского с неопределенной метрикой к трехмерному миру Евклида с метрикой «сумма квадратов». Этот мир благополучно помещается в $C\mathscr{M}$, нужно лишь развернуть временную ось в $\mathscr{M}$ на 90°. Все остальные точки $C\mathscr{M}$ получаются в результате интерполяции между мирами Евклида и Минковского, и, видимо, описания многих важных событий допускают аналитическое продолжение с $\mathscr{M}$ на $C\mathscr{M}$ или на часть $C\mathscr{M}$. Стандартный пример — сопоставление «туннельного перехода» квантовой механики с классической эволюцией системы в мнимом времени.

Сам «рай Пенроуза» $H = CP^3$ (пространство, где помещаются все небеса, но ничего не осталось от пространства-времени, естественно назвать раем), как оказалось совсем недавно, очень полезен для изучения уравнений Максвелла и их обобщений — уравнений Янга—Миллса, которые, как теперь предполагается, описывают глюонные поля, связывающие кварки в нуклоне. Имеются глубокие физические основания считать, что мир, заполненный лишь излучением (или частицами, летящими с околосветовыми скоростями, почти вдоль световых конусов), должен лучше описываться в терминах геометрии H, чем уже привычного нам вещественного четырехмерия. К пространству-времени нас привязывает масса, она мешает нам лететь со световой скоростью, когда время останавливается, а пространство теряет смысл. В мире света нет ни точек, ни мгновений; сотканные из света существа жили бы «нигде» и «никогда», лишь поэзия и математика способны говорить о таких вещах содержательно. Одна точка CP^3 есть вся история жизни свободного фотона — самое маленькое «событие», которое может произойти со светом.

Пространство-время, гравитация и квантовая механика. Самое важное, что следует усвоить при обдумывании взаимоотношений между нашими моделями классического Мира и квантовомеханическими принципами описания материи, состоит в том, что мы очень плохо понимаем эти взаимоотношения. Основные принципы описаний взаимно несогласованы.

Вот один из примеров расхождений. Пытаясь отметить точку Мира на мировой линии частицы массы m, мы не можем сделать это с меньшей ошибкой, чем радиус Шварцшильда $\frac{2Gm}{c^2}$ этой массы. Поэтому, пытаясь увеличить точность, мы должны пользоваться частицами как можно меньшей массы. С другой стороны, как заметили Ландау и Пайерлс, из соотношения неопределенности для пары (координата, импульс) и ограниченности всех скоростей скоростью света следует, что неопределенность положения не может быть меньше $\frac{\hbar}{mc}$, т. е. увеличение точности требует использования частиц как можно большей массы! Оба предела сравниваются при массе, которая находится из равенства $\frac{\hbar}{mc} = \frac{2Gm}{c^2}$, т. е. как раз массе Планка. Этот общий предел есть планковская длина. Значит, планковская единица длины (напомним, что ее порядок равен 10^{-33} см) указывает границы, за пределами которых заведомо неприменимо представление о пространственно-временной области, способной быть носителем элементарного события. События, изучаемые на современных ускорителях, происходят в гораздо больших областях, но все же предел локализации в рамках современных теорий указывается четко.

Квантовые принципы еще многими способами мешают представлять точку Мира как элементарное событие. Свободная квантовая частица с фиксированным четырехмерным импульсом k не локализована нигде — она «равномерно размазана по Миру», ее пси-функция есть плоская волна де Бройля e^{ikx}. Две тождественные квантовые частицы должны описываться пси-функцией, зависящей от двух точек Мира: симметричной для бозонов и антисимметричной для фермионов. Но это буквально означает, что в одной точке Мира вообще ничего не может «происходить», точнее говоря, через пси-функции материи и полей одна точка неразрывно связана со всеми остальными.

Образ вещественного четырехмерного Мира с метрикой Минковского в будущей теории может оказаться чем-то вроде квазиклассического приближения к бесконечномерному комплексному квантовому Миру. Например, в геометрической оптике, являющейся приближением к волновой, есть понятие каустики — множества точек, где интенсивность излучения в этом приближении бесконечна. Заманчиво представлять себе четырехмерный Мир как своего рода каустическое многообразие квантового волнового бесконечномерия. Наши затруднения с бесконечной плотностью энергии вакуума прекрасно разрешились бы в этой схеме.

Группа Лоренца является странной группой с вещественной точки зрения, но если заменить ее на $SL(2, C)$ — группу комплексных (2×2)-матриц, мы получаем очень естественный объект — группу симметрии простейшего мыслимого пространства состояний квантовой системы. Не значит ли это, что спиновые степени свободы являются более фундаментальными, чем пространственно-временные? В группе $SL(2, C)$ таинственное для нас разделение Мира на пространство и время содержится неявно, и потому его существование «объясняется» на основе принципов, не предполагающих такого разделения заранее. Более того, как мы видели, Мир без массы можно получить из $SL(2, C)$ (или ее обобщения $SL(4, C)$) и не вводя пространства-времени. Точки нашего четырехмерного Мира, или, лучше, его мелкие области, отмечены событиями, которые происходят с массивной материей. Возможно, и масса, и пространство-время есть результат спонтанного нарушения симметрии основных законов.

Такую теорию трудно придумать. Мы все еще пытаемся квантовать классическую Вселенную как атом водорода, вместо того чтобы пытаться получить ее образ как предел квантового описания. Может быть, первая квантовая модель Мира, скажем, вблизи Большого Взрыва, будет совсем простой математически, и лишь привычки инертного ума мешают нам угадать ее сейчас. Хотелось бы дожить до времени, когда такая модель будет предложена и принята.

5. Действие и симметрия

Физика там, где есть Действие.

Неизвестный автор

Шарик, катающийся в желобе под действием собственного веса, — простейшая физическая система. Состояние покоя — его простейшая история. Шарик может покоиться лишь в тех точках желоба, где касательная к желобу горизонтальна, иначе он скатится под уклон. Зададим положение шарика горизонтальной координатой x и обозначим через $V(x)$ его потенциальную энергию (пропорциональную высоте желоба) в точке x. Точки x, в которых шарик может покоиться, — это решения уравнения $\frac{dV}{dx} = 0$ или $dV = 0$; приращение функции при малом удалении от такой точки имеет высший порядок малости по сравнению с приращением координаты. В этих точках V стационарна.

Второй пример — мыльная пленка, натянутая, скажем, между двумя проволочными окружностями. Равновесная форма покоящейся пленки определяется тем, что при малых изгибах ее энергия поверхностного натяжения V меняется на величину высшего порядка малости по сравнению с некоторой естественной мерой величины изгиба. Энергия поверхностного натяжения V пропорциональна площади пленки, так что форма покоящейся пленки есть состояние, в котором площадь стационарна. Функция (или функционал) V в этом случае определена не на числах x, а на всевозможных поверхностях, натянутых на заданный контур. Вместо дифференциала dV принято писать «первую вариацию» δV.

Пусть, например, проволочные обручи радиусов r и R находятся в параллельных плоскостях на расстоянии l, и линия, соединяющая их центры, перпендикулярна этим плоскостям. Она является осью симметрии контура, и потому следует ожидать, что равновесная форма пленки будет поверхностью вращения кривой $q(x)$ с условиями $q(0) = r,\ q(l) = R$. Примем это; тогда энергия V пропорциональна площади $2\pi \int_0^l q(x)\left(1 + \left(\frac{dq}{dx}\right)^2\right)^{1/2} dx$ и уравнение $\delta V = 0$ можно переписать:

$$-q\frac{d^2q}{dx^2} + \left(\frac{dq}{dx}\right)^2 + 1 = 0$$

и затем решить его с поставленными граничными условиями.

Такой переход к формализму и полезен и опасен. Мы постулировали, что симметрия граничных условий ведет к симметрии равновесной формы. Вот совершенно аналогичный пример, когда это, очевидно, не так. Нагрузим упругий вертикальный стержень сжимающей силой; при некоторой критической величине нагрузки он изогнется. Направление изгиба в плоскости, перпендикулярной стержню, ничем не выделяется в первоначальной осесимметричной картине, но выделено, когда изгиб произошел. В таких ситуациях физики говорят о спонтанном нарушении симметрии: явление, подчиняющееся некоторым законам, менее симметрично, чем сами эти законы. Еще в нашей задаче мы забыли о решении, состоящем из двух плоских пленок, натянутых на каждый обруч в отдельности. Это напоминание о том, что, исследуя функционал V на таком бесконечномерном многообразии, как пространство поверхностей, нужно попробовать разобраться заранее в его геометрическом устройстве. Такими задачами занимается топология. Лишь в последние годы доставляемые ею геометрические образы стали применяться в физике, например, в квантовой теории поля появилось представление о «топологическом заряде». К сожалению, нам некогда этим заниматься. Математически обычно полезно считать основным уравнением $\delta V = 0$, пусть с не до конца определенной областью существования функции V, подлежащей уточнению в ходе решения задачи. График V — это бесконечномерный желоб, по которому движется, ища покоя, наша система.

Физически этот образ оправдан поразительно универсальным принципом, который можно сформулировать так: *развитие во времени фундаментальных классических систем есть их равновесие в пространстве-времени*. Более точно, кинематика системы определяется описанием множества ее виртуальных историй — «пленок» в доступных ей пространственно-временных областях. На этих виртуальных историях определен функционал S размерности действия. Динамика системы описывается условием $\delta S = 0$. Переход от размерности энергии (V) к размерности действия (S) связан, конечно, с добавлением временной координаты. Действие первично; энергия есть всего лишь его производная по времени. В следующей фундаментальной теории действие останется, тогда как энергия станет квазиклассической величиной.

Виртуальная история φ системы в пространственно-временной области U классически определяется сечением расслоения степеней свободы системы над этой областью. Если область представлена в виде объединения двух своих непересекающихся частей U_1, U_2, а история φ есть объединение историй φ_1 и φ_2, то действие φ равно сумме действий φ_1 и φ_2. Этому постулату удовлетворяют почти все используемые в классической физике функционалы действия. Стало быть, полное действие истории φ в области U можно записать в виде суммы действий φ по многим маленьким областям, покрывающим U в пределе в виде интеграла

$$S(\varphi) = \int_U L(\varphi(x, y, z, t))\, dx\, dy\, dz\, dt,$$

где (φ) — набор внутренних координат системы и их производных по пространству и времени. Функцию L (или ее интеграл по пространственным координатам) называют лагранжианом системы: это плотность действия. Если мы поместим в область пространства-времени две системы с лагранжианами L_1, L_2, то лагранжиан объединенной системы имеет вид $L_1 + L_2 + L_{12}$, где третий член есть «плотность взаимодействия». Две системы не взаимодействуют, если этот член равен нулю.

Само пространство-время («вакуум») вносит в лагранжиан член, пропорциональный его кривизне. Поэтому пространство-время можно рассматривать на тех же основаниях, что и системы, включающие массивную материю или электромагнитное поле.

Роль действия в квантовой физике чрезвычайно прояснил Ричард Фейнман, основываясь на более ранней работе Дирака. Его идеи за отсутствием фундаментальной квантовой теории мы вынуждены сейчас формулировать как рецепт «квантования», т. е. перехода от классического описания некоторой физической системы к ее квантовому описанию. Согласно этому рецепту следует представлять себе, что в квантовое описание истории системы вносит свой вклад каждая классическая история φ, но со своим комплексным весом (фазовым множителем) $e^{iS(\varphi)}$ (действие, конечно, измеряется в единицах $\hbar$). Поясним это подробнее. Фиксируем классическое поведение системы на границе области U, скажем, φ_1 и φ_2 в моменты времени t_1 и t_2. Квантовая теория ставит в соответствие этим условиям — «обручам для пленки» — не классическую историю развития от φ_1 до φ_2, а комплексное число $G(\varphi_1, t_1, \varphi_2, t_2)$ — амплитуду вероятности перехода из состояния (φ_1, t_1) в состояние (φ_2, t_2), квадрат модуля которой в принципе наблюдаем или входит в другие наблюдаемые величины. Предписание Фейнмана состоит в том, что эта амплитуда есть $\int e^{-iS(\varphi)} D\varphi$, где интеграл берется по бесконечномерному множеству классических историй, соединяющих (φ_1, t_1) и (φ_2, t_2); $D\varphi$ вместо $d\varphi$ служит напоминанием об этой бесконечномерности: это не дифференциал, а «элемент объема»!

В предыстории интегрального исчисления важное место занимает замечательный труд Кеплера «Стереометрия винных бочек». Интегралы, выражающие объемы тел вращения, полезных в народном хозяйстве, были вычислены в этой работе до появления общего определения интеграла. Математическая теория великолепных интегралов Фейнмана, которые физики пишут в огромных количествах, все еще недалеко ушла от стереометрии винных бочек. С точки зрения математика, каждое такое вычисление есть заодно определение того, что «вычисляется», либо построение текста в формальном языке, грамматика которого заранее не описана. В процессе таких вычислений физик спокойно делит и умножает на бесконечности (точнее, на нечто, что, если бы оно было определено, вероятно, оказалось бы бесконечным); суммирует бесконечные ряды бесконечностей, предполагая при этом, что два-три члена ряда дают хорошее приближение ко всему ряду, и вообще живет в царстве свободы, нарушая все «моральные нормы».

Едва ли можно будет построить последовательную математическую теорию интегралов Фейнмана без прогресса в понимании физики. Сама идея «квантования» принадлежит не физике, а истории и психологии науки — содержательный смысл может иметь лишь «деквантование», т. е. переход от квантового описания к классическому, когда он разумен, но никак не наоборот. Классические поля, входящие в лагранжианы слабых и сильных взаимодействий, являются физическими фантомами: мы не знаем их смысла, помимо вторичного квантования, и неправдоподобно, чтобы они описывали виртуальные классические истории чего бы то ни было. (Считается, что с квантованием электромагнетизма дело обстоит лучше.)

Конечномерные квантовые модели позволяют предположить, какие черты фейнмановской формулировки существенны, а какие являются атавизмом. Как было объяснено в третьей главе, оператор эволюции замкнутой локализованной квантовой системы за ее локальное время t имеет вид $e^{iS(t)}$, где $S(t)$ — на этот раз оператор размерности, действия. Представляя себе разные мировые линии системы с разными локальными временами, мы убеждаемся, что квантовое действие есть связность в пространстве внутренних степеней свободы системы, определяющая физически допустимые истории как параллельные переносы. Рецепты вторичного квантования — это примитивное оформление представления о том, что из-за виртуального рождения частиц уже у вакуума пространство внутренних степеней свободы «в одной точке» бесконечномерно. Дальнейшее понимание блокируется, пока мы не отказались от идеи пространства-времени как основы всей физики.

«Симметрия обозначает тот вид согласованности отдельных частей, который объединяет их в единое целое. Красота тесно связана с симметрией» (Г. Вейль).

Кроме этой цитаты, я не повторю ничего из написанного Германом Вейлем в его замечательной книге «Симметрия» (М.: Наука, 1968). Ее нужно прочесть каждому, кто хочет пройти хотя бы часть дороги от восприятия симметрии как чувственной данности (цветы, орнаменты, кристаллы) до ее понимания как глубочайшей физико-математической идеи.

Универсальный математический образ симметрии — это группа G и ее действие на множестве X, например, группа S_n всех перестановок чисел $(1, \dots, n)$. Действие есть отображение $G \times X \to X$, ставящее в соответствие паре (элемент группы g, точка множества x) элемент множества gx (образ x под действием g). Все элементы вида gx при переменном g составляют орбиту x под действием группы. Сама группа G никогда не задана как физический объект — мы можем вообразить твердое тело как чувственную данность, но множество всех его вращений есть идея, находящаяся на следующей ступени абстракции. Омонимичность слов «действие» в контекстах «действие группы» и «действие отрезка виртуальной истории» в основных европейских языках есть случайное следствие смутного исходного представления об «изменении как результате делания», но в выражении для квантового оператора эволюции $U(t)=e^{-iS(t)}$ эта омонимия неожиданно приобрела глубокий смысл.

Отделение понятия абстрактной группы от понятия ее действия на множестве было одним из великих достижений математической мысли и оказалось очень важным для физики. Вообразим себе атом водорода в виде электрона, движущегося в центральном кулоновском поле около неподвижного ядра. Евклидова группа вращений вокруг ядра $SO(3)$ действует на комплексном линейном пространстве квантовых состояний электрона. Оказывается, что все бесконечномерное пространство возможных связанных состояний разбивается на сумму конечномерных подпространств, на которых $SO(3)$ действует по отдельности. Эти действия — неприводимые линейные представления группы и суть возможные стационарные состояния атома водорода. Их точное математическое описание объясняет спектр, квантовые числа и т. п. Аналогично группа Пуанкаре — полная группа симметрии Мира Минковского — действует на пространстве квантовых состояний воображаемой одинокой элементарной частицы в Мире, где кроме нее ничего нет. Как показал Юджин Вигнер, экспериментальная классификация элементарных частиц по их массе и спину вкладывается в классификацию (бесконечномерных) неприводимых представлений группы Пуанкаре. Это дало повод к шутке, что мир двадцатого века состоит не из четырех стихий — огня, воздуха, земли и воды, а из неприводимых представлений некоторой группы. Теоретическая физика последних десятилетий усиленно занималась поисками группы симметрии фундаментальных взаимодействий: их законы (лагранжианы) выступают как вторичный объект в математическом описании.

В физических изложениях, подчеркивающих скорее формализм, чем его теоретико-множественную интерпретацию, бывает иногда затемнено описание того, на чем действует группа симметрии. Вот два крайних случая, ведущих, по существу, к разной физике: а) группа симметрии G действует на фазовом пространстве системы и переводит в себя ее фазовый портрет; б) фазовое пространство X системы само представляется в виде множества орбит некоторого другого пространства Y под действием группы G.

К случаю а) принадлежит описание рассмотренного выше атома водорода. Дискретные инварианты неприводимого представления — это квантовые числа соответствующего состояния, но сам вектор состояния в пространстве представления еще не определен однозначно, как в примере с изгибом стержня. Симметрия снова спонтанно нарушена. В схемах описания фундаментальных взаимодействий часто постулируют схему нарушения симметрии более слабым взаимодействием. Нарушение симметрии — это тоже многозначный термин. О спонтанном нарушении можно говорить, когда фазовый портрет системы симметричен, но не симметричны его отдельные траектории. Учет нового взаимодействия нарушает симметрию всего фазового портрета, ибо, вообще говоря, изменяет его. Но если это изменение невелико, то его можно учитывать приближенно, рассматривая как малое возмущение исходной симметричной картины.

К случаю б) относятся так называемые калибровочные теории. Классическое поле материи в такой теории (объект, подлежащий вторичному квантованию) является не сечением расслоения внутренних степеней свободы, как мы говорили раньше, а целой орбитой таких сечений под действием калибровочной группы преобразований. Над одной точкой пространства-времени такая группа представляется некоторыми вращениями пространства внутренних степеней свободы, но эти вращения могут независимо и непрерывно меняться с изменением точки. Условие, чтобы лагранжиан теории был инвариантен относительно таких преобразований, накладывает на него очень жесткие требования, что резко ограничивает выбор лагранжиана. В суперсимметричных теориях, о которых мы вкратце говорили в первой главе, калибровочная группа может быть еще более общим объектом, перемешивающим, в частности, бозонные и фермионные поля. С калибровочными и суперсимметричными теориями сейчас связаны основные надежды на построение единой теории фундаментальных взаимодействий.

В заключение я хотел бы сказать несколько слов о теории чисел — высоко развитой и обладающей изумительной красотой математической дисциплине, которая до сих пор не нашла никаких глубоких естественнонаучных приложений. Один из главных объектов ее изучения — простые числа: целые положительные числа, не имеющие целых делителей, кроме себя и единицы. Еще в «Началах» Евклида содержится теорема о том, что простых чисел бесконечно много (зная их конечную систему $p_1, \ldots, p_n$, мы можем построить еще одно простое число как наименьший, отличный от единицы делитель числа $p_1 \ldots p_n + 1$). Это — замечательное рассуждение при всей его краткости. Вот более свежий образец теоремы о простых числах. Обозначим через $\tau(n)$ (n-е число Рамануджана) n-й коэффициент ряда, который получится после формального разложения бесконечного произведения $x \prod_{m=1}^{\infty} (1 - x^m)^{24}$. *Если p — простое число, то* $|\tau(p)| < 2p^{11/2}$. Доказать это здесь никак невозможно; по оценке его автора, П. Делиня, чтобы изложить это доказательство, считая известным все, что знает студент третьего курса мехмата, понадобилось бы около двух тысяч страниц печатного текста. Вероятно, по отношению длины доказательства к длине формулировки эта теорема занимает рекордное место во всей современной математике. Разумеется, вместе с ней мы поняли еще много интересных вещей — для доказательства была создана большая новая теория («l-адические когомологии») и пришлось пользоваться двумя-тремя старыми (группы Ли, автоморфные функции...).

Замечательно, что самые глубокие идеи теории чисел обнаруживают далеко идущее сходство с идеями современной теоретической физики. Подобно квантовой механике, теория чисел доставляет совершенно не очевидные образы соотношения между непрерывным и дискретным (техника рядов Дирихле и тригонометрических сумм, p-адические числа, неархимедов анализ) и подчеркивает роль скрытых симметрий (теория полей классов, описывающая связь между простыми числами и группами Галуа полей алгебраических чисел). Хочется надеяться, что это сходство не случайно, и мы уже слышим новые слова о мире, в котором живем, но только не понимаем пока их смысла.

Литература

1. *Вигнер Е.* Этюды о симметрии. М.: Мир, 1971.
2. *Компанеец А. С.* Симметрия микро- и макромира. М.: Наука, 1978.
3. Математика в современном мире. М.: Мир, 1969.
4. *Фейнман Р.* Характер физических законов. М.: Мир, 1968.
5. *Эйнштейн А.* Физика и реальность. М.: Наука, 1965.

Связи между математикой и физикой

Вкратце описав математическую структуру современной физики, мы переходим к анализу расхождения между математикой и физикой, возникшего в первой половине XX века; особое внимание будет уделено роли, которую в каждой из этих наук играют строгие определения и доказательства, алгебраические вычисления и нечетко сформулированные идеи.

§1. Предисловие

Начать мне бы хотелось с явного описания общей концепции этой статьи.

Для этого удобно обратиться к опыту сравнительного языкознания. История языка — это не история всех (или хотя бы «самых важных») высказываний на этом языке, письменных или устных. Это — история эволюции *языка как системы*. Для изучения же эволюции системы необходимо предварительно описать ту систему, историей которой мы занимаемся. Применение этой соссюровской схемы к истории математики (стоит заметить, что я не считаю, что математика — это только язык) было бы, видимо, очень по душе Жану Дьедонне, который, будучи активным членом группы «Бурбаки», участвовал в создании систематизированной картины современной математики[1]. В этом докладе я последую его примеру, но в гораздо более скромных масштабах. Само собой разумеется, что недостаток времени, места и познаний вынуждает меня ограничиться одной тонкой цепочкой связанных друг с другом идей, представленных в высшей степени односторонне.

Тем самым я отказываюсь (хоть и неохотно) обсуждать историю по Леопольду фон Ранке, с упором на то, «как оно было на самом деле». Одна из причин этого отказа состоит в том, что история современной математики в значительной мере сводится к утверждениям

Впервые опубликовано в сб.: Materiaux pour l'histoire des mathématiques au XX^{e} siècle. Actes du colloque à la mémoire de Jean Dieudonné (Nice, 1996). *Перевод с английского С. М. Львовского.*

[1] Жан Дьедонне, каким я его запомнил, был человеком с мощным голосом, сильными руками и твердыми взглядами. В частности, он настаивал на том, что в вычислениях с тензорами следует использовать тензорные произведения и коммутативные диаграммы, а не классические верхние и нижние индексы. Я был солидарен с его мнением, что это экономит бумагу, пока в какой-то момент мне самому не понадобилось провести вычисление с тензорами. Тогда я обнаружил, что индексы гораздо экономичнее.

о том, кто что доказал и кому принадлежит приоритет: ей сильно недостает того драматизма, который присущ истории борьбы за реальную власть. Более личная и более существенная причина кратко сформулирована Иосифом Бродским в его автобиографическом эссе «Меньше единицы»: «То немногое, что я помню, еще уменьшается, когда я вспоминаю это по-английски».

Наконец, последнее предупреждение и извинение. Всякая система, разумеется, является теоретическим конструктом. Как таковой, она в лучшем случае является относительной и культурно обусловленной, в худшем — субъективна. Именно в таком виде она и может служить материалом для истории математики XX века.

§ 2. Математическая физика как система

0.1. Физика. Физика описывает внешний мир; в пределах своей применимости, она делает это в двух модальностях: классической и квантовой.

В *классической модальности* события происходят с телами и полями, расположенными и эволюционирующими в пространстве-времени. Физические законы накладывают ограничения непосредственно на наблюдаемые величины. В своей основе эти законы детерминистичны и выражаются дифференциальными уравнениями; для этих уравнений выполняются (иногда гипотетически) подходящие теоремы существования и единственности.

Статистическая разновидность классической модальности имеет дело с вероятностями и средними значениями, которые (иногда гипотетически) можно вывести из идеального детерминистического описания. Необходимость статистического описания диктуется двумя основными обстоятельствами: слишком большим количеством степеней свободы и неустойчивостью. (Выражаясь метафорически, неустойчивость означает, что каждый последующий десятичный знак добавляет новую степень свободы.)

Фундаментальными физическими абстракциями являются *изолированная система*, эволюционирующая независимо от всего остального мира, и *взаимодействие* между потенциально изолированными системами (или между изолированной системой и остальным миром).

Пространство-время — один из самых замечательных взлетов воображения в классической физике — также выглядит как изолированная система, управляемая уравнениями Эйнштейна из общей теории относительности (при этом, возможно, тензор энергии-импульса отвечает за все то, что не является чистым пространством-временем).

В *квантовой модальности* теоретического описания наблюдаемый мир является вероятностным по своей сути. Более того — и это особенно важно, — основные законы, являющиеся в некотором смысле детерминистическими, описывают ненаблюдаемую сущность, *амплитуду вероятности*, являющуюся комплекснозначной функцией на пространстве квантовых траекторий. Грубо говоря, амплитуда составного события является произведением амплитуд его составных частей, а амплитуда события, представленного в виде суммы взаимоисключающих событий, равна сумме амплитуд этих событий.

Вероятность события равна квадрату модуля его амплитуды. Физические наблюдаемые суть средние значения, даже если речь идет об индивидуальном акте рассеяния одной элементарной частицы. Наблюдаемое волновое поведение (скажем, света) всего лишь огрубленно отражает внутреннее волновое поведение амплитуд (волновых функций) неопределенного количества фотонов, описываемых фоковским пространством квантованного электромагнитного поля.

Многие квантовые модели содержат в себе (отчасти по историческим причинам) классическую модель, которая подвергается квантованию. Слово «квантование» почти без разбора применяется к большому количеству различных процедур, из которых наиболее важными является операторное, или гамильтоново, квантование и квантование с помощью *фейнмановских интегралов*. Первая из этих двух процедур более алгебраична и обычно имеет более твердые математические основания; вторая обладает огромным эвристическим и эстетическим потенциалом, и именно ее мы в дальнейшем обсудим подробнее. Если бы я вместо нее выбрал операторное квантование, то картина расхождения математики и физики в первой половине XX века, о которой пойдет речь в § 4, выглядела бы менее впечатляющей, но основные результаты моего анализа не изменились бы.

Еще одна тема, заслуживающая отдельного исторического и структурного исследования, — это двойственность между двумя названными выше подходами. Она началась с классической механики, Лагранжа и Гамильтона, и продолжилась в волновой механике Гейзенберга—Шрёдингера и в противопоставлении интегралов по траекториям и матрицы рассеяния. Этой двойственности на окраинах физики соответствуют такие недавние математические жемчужины, как представления алгебры Вирасоро на пространстве модулей кривых.

0.2. Математика. Если в математической физике есть самое важное понятие, то это *функционал действия*: он содержит в себе классические понятия энергии и работы, его плотность в области пространства-времени — это лагранжиан, а если его умножить на $\sqrt{-1}$ и взять экспоненту, то получится основная амплитуда вероятности. Действие измеряется в абсолютных планковских единицах, так что его можно рассматривать как действительное число. Точнее говоря, следующую схему описания мы будем рассматривать как основную для обеих модальностей физического описания, о которых шла речь выше.

Моделирование физической системы начинается с того, что описывается ее кинематика, включающая пространство $\mathcal{P}$ виртуальных классических траекторий и функционал действия $S\colon \mathcal{P} \to \mathbb{R}$. Например, $\mathcal{P}$ может состоять из параметризованных кривых в классическом фазовом пространстве механической системы, или из римановых метрик на данном гладком многообразии (пространстве-времени), или из троек, состоящих из связности в данном векторном расслоении, метрики на этом расслоении и его сечения. Значение функционала действия в точке $p \in \mathcal{P}$ обычно имеет вид $\int_p L$ — интеграл формы объема по одному из пространств, участвующих в описании точки p.

Классические уравнения движения задают подпространство $\mathcal{P}_{cl} \subset \mathcal{P}$. Это подпространство состоит из решений вариационных уравнений $\delta(S) = 0$, т. е. из стационарных точек функционала действия.

Если классическое описание является статистическим, то $\exp(-S)$ есть плотность вероятности.

При квантовом описании мы выбираем физически мотивированные подмножества $B \subset \mathcal{P}$ (в типичных случаях они определяются граничными условиями), а затем определяем среднее по B значение наблюдаемой O как фейнмановский интеграл (интеграл по траекториям) вида

$$\langle O \rangle_B := \int_B O(p) e^{i \int_p L} Dp. \qquad (*)$$

Это — наши основные персонажи. Далее я представлю некоторые размышления об истории этой картины с точки зрения физиков и математиков.

Особое внимание я уделю идее интеграла и ее последнему воплощению в форме *интеграла по траекториям*.

§ 3. Интеграл

Понятие интеграла — одна из центральных и постоянно повторяющихся тем в истории математики за последние два тысячелетия. Периоды увлеченного решения задач сменяются периодами напряженного поиска определений, а затем снова появляются нестрогие, но поразительно эффективные эвристики, повергающие в ужас логически ориентированного фундаменталиста, живущего в каждом из нас.

Ричард Фейнман, создатель магической формулы $(*)$, у которой до сих пор отсутствует точная математическая интерпретация как раз в тех случаях, когда она особенно нужна физикам[2], с гордостью рассказывал, что с помощью $(*)$ удалось вычислить значение аномального магнитного момента электрона, совпавшее с экспериментальным в десяти значащих цифрах:

«В 1983 году теоретическое значение равнялось 1,00115965246, с ошибкой порядка 20 в двух последних цифрах, а экспериментальное равнялось 1,00115965221, с ошибкой порядка 4 в последней цифре. Такая точность — все равно, что померить расстояние от Лос-Анджелеса до Нью-Йорка (около трех тысяч миль) с погрешностью, равной толщине человеческого волоса» [7, с. 118].

Недавно произошло аналогичное поразительное событие: с помощью физических вычислений (названных даже «предсказаниями», ср. [4]) были найдены различные индексы пересечения в алгебраической геометрии, такие, как число N_d рациональных кривых степени d на общей трехмерной квинтике (например,

$$N_{10} = 70428\,81649\,78454\,68611\,34882\,49750$$

— теоретическое (?) значение, до сих пор не проверенное в эксперименте (?), в котором должны участвовать математическое определение числа N_d и компьютер). Идеология интегрирования по траекториям сыграла существенную роль в этих вычислениях: формула $(*)$ интерпретировалась как сумма по инстантонам в сигма-модели, и в данном случае инстантоны были рациональными кривыми на квинтике.

Интуитивный физический смысл интеграла — «количество чего-то в данной области». Если первые вычисления этого «чего-то» интерпретировались, скажем, как объем пирамиды, то вряд ли можно сомневаться, что они использовались для фактической оценки количества камня (и рабского труда), необходимого для сооружения гробницы египетского фараона. В заглавии книги Кеплера «Stereometria Doliorum» упоминаются винные бочки. Когда длина пути вычисляется как интеграл от скорости, область, по которой проводится интегрирование, приобретает временно́е измерение; соответственно, понятие энергии постепенно заменяется понятием *действия*. В XX веке *то-*

[2] См. также более оптимистическую оценку в замечательной книге [8], оказавшей влияние на структуру этой работы. Впрочем, на с. 313 авторы пишут: «Существует ли *теория* электродинамики в математическом смысле — это загадка».

пология также становится субстанцией, количество которой можно измерить с помощью интегрирования замкнутых дифференциальных форм (деерамовская теория периодов, предугаданная Пуанкаре). Другой такой субстанцией оказалась *вероятность*, и винеровская трактовка броуновского движения как меры на пространстве непрерывных траекторий проложила путь и колмогоровской аксиоматизации теории вероятностей, и нашему нынешнему неохотному принятию фейнмановских интегралов. (Это последнее частично поддерживается успехами конструктивной теории поля и стохастического интегрирования. Тем не менее, случайные поверхности, на которых основываются струнные фейнмановские интегралы, доставляют значительные трудности.)

С математической точки зрения, всякое вычисление (или определение) интеграла основывается на двух физически очевидных принципах — аддитивности относительно области интегрирования и относительно подынтегрального выражения и на предельном переходе в какой-нибудь форме. Имеются по крайней мере две архетипические формы перехода к пределу.

Одна форма представлена «неделимыми» Кавальери, римановыми суммами и т. п. Она связана с топологической структурой области интегрирования, а именно, с понятием границы и тонкого $(d+1)$-мерного слоя, окружающего d-мерный объект. К этому кругу идей относится формула Стокса во всех ее видах; комплекс де Рама — это ее линейная двойственная форма.

Другая форма предельного перехода принадлежит скорее теории меры, чем топологии. Имеются базисные области, наполненные легко измеримым количеством интересующей нас субстанции (объема, действия, вероятности и т. п.); мы пытаемся аппроксимировать другие распределения с помощью их мозаичных портретов, устремляя локальные погрешности к нулю. Локальность, однако, уже не понимается в топологическом смысле, а понятие границы становится ненужным или неважным. Вместо этого нам приходится иметь дело с измеримыми множествами, образующими всего лишь алгебру относительно пересечений и объединений. К этому типу обычно относятся бесконечномерные конструкции. Из-за хорошо известного «эффекта арбузной корки» (в больших размерностях объем сконцентрирован вблизи границы) не удается эффективно воспользоваться неделимыми. Даже в конечной размерности граница может не подходить на роль неделимого по Кавальери, если она является очень негладкой (фракталом). В тонких исследованиях по теории меры, датированных началом XX века, об этом много сказано.

В формуле (∗) присутствуют *два* интеграла совершенно разной природы. Действие $S=\int_p L$ является обычно величиной классической (L — локальный лагранжиан). Красивая недавняя идея, возникшая в результате совместной работы физиков и математиков (основную роль сыграли Виттен [14] и Атья [1]; ключевой исходный пример принадлежит А. С. Шварцу), состоит в рассмотрении тех интегралов по траекториям, для которых действие является топологическим инвариантом траектории p. Локально это означает, что классические уравнения движения $\delta(S)=0$ выполняются тождественно. Пример такого функционала действия — инвариант Черна—Саймонса, определенный на пространстве связностей в векторном расслоении на трехмерном многообразии. Квантовые наблюдаемые (их выбор и название мотивированы теорией сильных взаимодействий) — это петли Вильсона: усредненные следы операторов монодромии вдоль замкнутых кривых на базе.

В этом контексте алгебраические свойства интеграла по траекториям, отражающиеся в аддитивности $\int_p L$ и вытекающей из нее «мультипликативности» выражения (∗), оказываются настолько сильными, что с их помощью удается определить достаточно жесткую математическую структуру «топологической квантовой теории поля», которую можно изучать точными математическими методами. См. [13] и [2] по поводу недавних математических результатов в этой области.

История интеграла в таком виде, как мы ее рассмотрели, укладывается в концепцию Тойнби «вызов—ответ». Вызовы приходят из широко понимаемой физики (включающей в себя геометрию). Можно привести убедительные доводы в пользу того, что евклидова геометрия есть на самом деле кинематика твердого тела в отсутствии гравитации (искривленного пространства-времени) и что изобретение и развитие первых неевклидовых геометрий (постоянной кривизны) было тесно связно с физикой. Гаусс хотел узнать, какова *реальная* геометрия межзвездного пространства. Гильбертовское возвращение к аксиоматике было математическим ответом на вызов, состоящий в открытии множественности *возможных* геометрий реального мира.

§4. Раскол

Основной тезис этой части моего доклада состоит в том, что главное событие во взаимоотношениях математики и физики в первой половине XX века — это возникновение отчуждения между ними после нескольких веков тесного сотрудничества.

Расхождение, начавшееся еще в 1880-х годах, было связано с углублением понимания двух микромиров: математического, воплощенного в идее классического континуума действительных чисел, и физического, доступного эксперименту.

Грубо говоря, на рубеже XIX и XX веков Пеано, Жордан, Кантор, Борель, Стилтьес и Лебег открыли и обнародовали новые и очень тонкие свойства континуума, непрерывности и измеримости. Они дали последовательно ряд определений интеграла, все в большей общности, и открыли конструкции и доказательства существования для многих странных математических объектов, которые не принадлежали миру классической геометрии и анализа, но существование которых приходилось признать как следствие из классических способов математических рассуждений, использованных, как тогда казалось, по максимуму.

Растущее недовольство многими контринтуитивными открытиями заставило математиков предпринять самоанализ, концентрирующийся вокруг нескольких основных вопросов: Что такое математическое доказательство? Какой смысл следует придавать утверждению о существовании того или иного математического объекта? Каков статус математической бесконечности?

Результаты этой рефлексии хорошо известны. Пятьдесят лет самонаблюдения были весьма плодотворны с математической точки зрения: их итогом было появление зрелой математической логики, включая теорию доказательств, теории вычислимости, а также возникновение ясной картины все расширяющихся языков и систем аксиом, которые математики должны были принимать в своем поиске математической истины.

Между тем физики были заняты совершенно другими поисками. Планковское открытие кванта действия, анонсированное 14 декабря 1900 года, ознаменовало начало квантовой эры. Физика нуждалась в изощренной математике, необходимой для формулировки новооткрытых неклассических законов, а от новой математики никакого толку не было. Все, что было нужно, срочно изобреталось или переоткрывалось: матричная алгебра, спиноры, пространство Фока, дельта-функция, теория представлений группы Лоренца. Никто из пионеров (Бор, Эйнштейн, Паули, Шрёдингер, Дирак) не пользовался интегралом Лебега и не интересовался мощностью континуума. Логика интересовала их и того меньше.

Это не означает, что физики не интересовались философскими вопросами, напротив, этот интерес присутствовал. Но если математики обсуждали взаимосвязь языка и мышления, то физиков волновали отношения языка и реальности. Основная проблема, занимавшая критиков классической математики, состояла в невыразимости бесконечности посредством языка, все конструкции которого синтаксически конечны. Основная проблема, составлявшая предмет спора Бора и Эйнштейна, состояла в невыразимости квантовой неопределенности, проистекающей из того, что семантика языка классична по сути. Философия математики и философия физики почти полностью утратили точки соприкосновения. И математик Брауэр, и физик Паули яростно критиковали то, что они считали неадекватностями в современной им науке, но при этом у них не было ни единой совпадающей идеи. Математическая критика становилась все более и более аутичной, тогда как физическая критика была направлена на то, чтобы найти лучшие способы описания сложной реальности[3].

Традиционные профессиональные связи также оказались разорваны. От первых успехов квантовой электродинамики в тридцатых годах и до возобновления взаимодействия в шестидесятых математики не внесли почти никакого вклада в квантовую теорию поля — основную физическую исследовательскую программу XX века. Точно так же и физики не обращали внимания не только на математическую логику, что понятно, или на аналитическую теорию чисел, что соответствовало традиции, но и на зарождающуюся алгебраическую топологию. Тридцать лет спустя топология станет новым полем для сотрудничества двух сообществ. Парадоксальным образом математики от этого возобновленного сотрудничества получили больше, чем физики: новые инварианты трех- и четырехмерных многообразий, квантовые группы, квантовые когомологии — все это плоды сотрудничества с физиками.

В нарисованную нами картину хорошо укладывается следующее эмпирическое наблюдение. Как только возникает нужда в новом математическом инструменте, предназначенном для понимания физики, так физики очень быстро изобретают для этих целей новый или модифицируют уже имеющийся *алгебраический* формализм. Мы уже упоминали алгебру Гейзенберга, спиноры и дельта-функцию Дирака. Можно сюда добавить уравнение Швингера—Дайсона (для не определенного другим способом фейнмановского интеграла), интеграл Березина на супермногообразиях и виттеновские топологические инварианты, выраженные как фейнмановские интегралы топологической

[3] Характерно, что Харди в своей лекции «Математическое доказательство» [10] (1928 год) даже не упоминает о существовании квантовой механики.

квантовой теории поля. Все это — только малая часть изобретений, которые к настоящему моменту полностью усвоены и преобразованы в строгую математику.

И «только» в том случае, когда приходится иметь дело с инфинитарными конструкциями, то есть с предельными переходами различных видов, математики делают свою работу без посторонней помощи. Согласно Бурбаки [3], в XIX столетии вклад математиков в теорию интеграла состоял исключительно в тщательном анализе пределов.

После создания современного понятия топологического пространства и открытия предельных переходов, на которых основывается теория меры, следующий крупный пакет поразительно новых инфинитарных конструкций был введен в обращение Александром Гротендиком, с его подходом к гомологической алгебре, производными категориями и функторами, топосами и ситусами. Но это уже другая история.

§5. Обсуждение

При прямом контакте между математическим и физическим способами мышления зачастую возникает напряжение. Основные ценности различны, допустимые типы социального поведения вступают в противоречие, промежутки времени, в течение которых та или иная задача привлекает внимание публики, выглядят несоизмеримыми[4]. В статье [5], представляющей собой замечательный пример самонаблюдения, Ф. Дайсон продемонстрировал, сколь непроницаемыми могут оказаться перегородки между математикой и физикой в сознании одного и того же человека. Мы были бы гораздо терпимее друг к другу, если бы могли увидеть в себе две разные личности, столь убедительно описанные Дайсоном. Недавняя дискуссия [11, 12] продемонстрировала, сколь уязвимым становится наше сообщество, когда в период возобновленного плодотворного сотрудничества мы пытаемся согласовать наши взгляды на то, что можно и что нельзя считать доказательством, что можно и что нельзя публиковать и какими должны быть правила признания академических заслуг.

[4] Описание возникающих при этом психологических затруднений на печатные страницы попадает редко. Интересный и относительно недавний пример доставляет реплика Маклейна в дискуссии [12], из которой мы процитируем только одну фразу: «А когда я приехал на конференцию, чтобы понять, как используется один мой небольшой результат, я услышал лекции по „топологической квантовой теории поля“ — без всякого определения; мне сказали, что это понятие возникло на одной из предыдущих конференций, так что „все это знают“».

Все это, к счастью, не выходит за пределы нашей социальной жизни. Похоже, что глубокие открытия выживают, как мы ни путаемся в шнурках собственных ботинок, и что именно дополнительность математического и физического мышления делает взаимодействие математиков и физиков плодотворным.

Во второй половине XX века главное расхождение в способах представления наших идей состоит не столько в нашем отношении к строгим доказательствам, сколько в отношении к точным определениям.

Математики развили очень точный общепринятый язык для выражения своих мыслей. Эта точность выражается в первую очередь в *определениях* объектов, с которыми они работают, формулируемых обычно в рамках более или менее аксиоматизированной теории множеств (или категорий), а также в искусном использовании *метаязыка* (основанного на нашем естественном языке) для придания статуса утверждениям. Все прочие механизмы математической строгости вторичны, включая и понятие строгого доказательства. На самом деле, если исключить прямые ошибки, то основная трудность при проверке доказательства состоит в недостаточности или отсутствии определений. Попросту говоря, нас больше беспокоит, когда мы не понимаем, что́ автор хочет сказать, чем когда нам не вполне ясно, верно ли то, что он утверждает. Когда все определения и ограничения четко прописаны, пробелы в рассуждениях находятся легко. Хороший математический текст вполне можно написать на стадии, когда доказательства еще неполны или отсутствуют, но осмысленные догадки уже образуют красивую систему; выдающимися примерами являются гипотезы Вейля и программа Ленглендса, но есть множество примеров и меньшего масштаба.

Этимология слова *о-предел-ение* (и в русском, и в европейских языках) показывает, что первая задача определения — установить строгие границы. Пусть вы в своем исследовании рассматриваете только локально компактные топологические пространства со счетной базой, только конечномерные алгебры Ли, только грубые пространства модулей алгебраических кривых и т. п.; если в докладе на профессиональном семинаре вы забудете указать эти ограничения, то вам об этом вежливо напомнят. Если же вы претендуете на то, что сделали что-то серьезное, то вашу работу внимательно рассмотрят на предмет всех возможных опасностей, проистекающих от невыполнения условий различных определений.

Разумеется, наши определения отнюдь не произвольны. Одна из функций хорошего определения — содержать в себе аналогии между различными ситуациями, так что клетка, которой является определение, должна иметь оптимальный размер. Например, есть серьезные доводы в пользу того, что самый важный результат теории групп — это само определение абстрактной группы и ее действия на множестве, поскольку это определение описывает структуру, постоянно возникающую в геометрии, теории чисел, теории вероятностей, теории пространства-времени, теории элементарных частиц и т. д. Вся идеология трактата Бурбаки состоит в том, что математика представляется в виде строения, поддерживаемого строгой системой хороших определений (аксиом основных структур). А поскольку хорошее определение нередко оказывается результатом работы целых поколений крупных математиков, может возникнуть сильное искушение поверить, что все хорошие определения нам уже известны.

Если, напротив, неопытный читатель попробует почитать действительно интересную физическую статью, то при попытке выяснить значение наиболее употребительных терминов он почувствует себя, как в пустыне. Что такое алгебра токов, преобразование суперсимметрии, топологическая теория поля, фейнмановский интеграл, наконец? Это весьма открытые концепты, и именно из-за этой открытости они и интересны.

Итак, вот чему учит история наших двух ремесел: мы не можем жить друг без друга. По крайней мере у некоторых из нас жизнь станет скучной, если в ней слишком долго не будет места контактам с хорошей физикой.

Ценнее всего именно взаимодействие с чудовищно отличной системой ценностей.

Проницательная статья Харди Гранта [9] показывает, что, если воспользоваться терминологией истории культуры по Исайе Берлину, математика является весьма классицистским предприятием: она основана на общепризнанном понятии об истине и путях ее постижения и строит при этом устойчивую систему. Романтическая революция XIX века не оказала реального внимания на математику в основном потому, что в математике мало места для индивидуальных капризов.

В XX веке романтизм приходит из физики: бескрайние просторы Вселенной, чудесно-случайное поведение микромира, субъективизм наблюдателя и мощь ненаблюдаемого, Большой взрыв, Антропный принцип, наш роман с непочтительной Природой в лихорадке робости и мегаломании.

Математика привносит во все это гигиенические навыки и головные боли.

Литература

1. *Atiyah M. F.* Topological quantum field theories // Publ. Math. IHES. 1989. Vol. 68. P. 175—186.
2. *Blanchet C., Habegger N., Massbaum G., Vogel P.* Topological quantum field theories derived from the Kaufman bracket // Topology. 1995. Vol. 34, № 4. P. 883—927.
3. *Bourbaki N.* Éléments d'histoire des mathématiquess. Hermann; Paris, 1974. [Русский перевод более раннего издания: *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики. М.: Наука, 1963.]
4. *Candelas P., de la Ossa X., Green P., Parkes L.* A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory // Nuclear Phys. 1991. Vol. 359. P. 21—74.
5. *Dyson F.* Missed opportunities // Bull. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 78. P. 635—652. [Русский перевод: *Дайсон Ф. Дж.* Упущенные возможности // Успехи математических наук. 1980. Т. 35, № 1. С. 171—191.]
6. *Feynman R. P.* The space-time approach to non-relativistic quantum mechanics // Rev. Mod. Phys. 1948. Vol. 20. P. 367—387.
7. *Feynman R. P.* QED. The Strange Theory of Light and Matter. Princeton Univ. Press, 1988. [Русский перевод: *Фейнман Р.* КЭД — странная теория света и вещества. М.: Наука, 1988.]
8. *Glimm J., Jaffe A.* Quantum physics. A functional integral point of view. Springer, 1981.
9. *Grant H.* What is modern about 'modern' mathematics? // Math. Intelligencer. 1995. Vol. 17, № 3. P. 62—66.
10. *Hardy G. H.* Mathematical proof // Mind. 1929. XXXVIII-149. P. 1—25.
11. *Jaffe A., Quinn F.* Theoretical mathematics: toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics // Bull. Amer. Math. Soc. 1993. Vol. 29, № 1. P. 1—13.
12. Responses to 'Theoretical mathematics etc.' by A. Jaffe and F. Quinn // Bull. Amer. Math. Soc. 1994. Vol. 30. P. 161—177.
13. *Reshetikhin N., Turaev V.* Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups // Inv. math. 1991. Vol. 103. P. 547—597.
14. *Witten E.* Quantum fiels theory and the Jones polynomial // Comm. Math. Phys. 1989. Vol. 121. P. 351—399.

Размышления об арифметической физике

Александру Гротендику к шестидесятилетию

> Есть и такие, кто при виде всего этого всего лишь недоверчиво пожмут плечами и скажут, что ничего, кроме фантазий, из этого не получится. Эти люди забывают или не знают, что наша наука, как и всякая другая, мало чего бы достигла, если бы с самого начала она не питалась мечтами и видениями тех, кто отдается ей со всей страстью.
>
> *А. Гротендик* [0, с. 18]

Развитие теоретической физики в последней четверти XX века определяется весьма романтической системой ценностей. Стремясь описать фундаментальные процессы в планковском масштабе, физики склонны терять какую бы то ни было прямую связь с наблюдаемым миром. В этом социальном контексте изощренная математика, появляющаяся в теории квантовых струн, перестает быть исключительно техническим инструментом, необходимым для вычисления каких-то измеримых эффектов, но становится делом принципа.

Сегодня по крайней мере некоторые из нас снова испытывают древнее платонистское чувство, что математическим идеям каким-то образом суждено описывать физический мир, сколь бы отдаленными от реальности ни казались их истоки.

Если быть последовательным, придется принять неправдоподобную (?) идею, что самые глубокие приложения в физике получит теория чисел. И действительно, явственно различима тенденция по крайней мере допускать теорию чисел в мир идей современной теоретической физики.

Автор этих строк был удивлен и обрадован, когда обнаружил, что для нахождения меры Полякова в струнной теории можно воспользоваться результатами Фальтингса, вычислявшего специфическую теоретико-числовую функцию — так называемую высоту (см. [1, 2, 3]).

Reflections on arithmetical physics // Conformal Invariance and string theory. Poiana Brasov, 1987. Boston, MA: Academic Press, 1989. P. 293—303. *Перевод с английского С. М. Львовского.*

Потом Саша Поляков сказал мне, что после доклада Фальтингса на международном математическом конгрессе в Беркли Эд Виттен скупил все книги по теории чисел, которые нашел в магазине через дорогу. (Я не спрашивал у Эда, так ли это: se non è vero, è ben trovato).

Стало быть, сейчас самое время представить некоторые размышления профессионального теоретико-числовика и физика-любителя о таком противоречивом предмете, как арифметическая физика.

Спросим себя для начала, можно подсчитать что-нибудь физическое с помощью средств, являющихся бесспорно теоретико-числовыми? Я полагаю, что ответ должен быть утвердительным. Давайте посмотрим на одну из самых красивых формул Эйлера:

$$\pi^2/6 = \prod_{p\ \text{простое}} (1 - p^{-2})^{-1}. \tag{1}$$

Правая часть, без всяких сомнений, принадлежит теории чисел: простые числа $p = 2, 3, 5, 7, 11, \ldots$ — один из ее главных предметов изучения. Осмелюсь сказать, что левая часть, в которой участвует число π, является физической константой, хотя, видимо, чтобы убедить в этом читателя, потребуется какая-то аргументация. В самом деле, число π может быть (и было) измерено, так же, как температура кипения воды или длина земного экватора. Можно сказать, что евклидова геометрия, в которой π появляется как математическая константа, является на самом деле кинематикой идеальных твердых тел, работающей в макроскопическом приближении плоского гравитационного вакуума.

Чтобы лучше понять формулу (1), полезно вспомнить некоторые свойства простых чисел. Классически простое число p определяется как целое положительное число, не имеющее делителей, кроме самого себя и единицы. Каждое целое число можно единственным образом разложить в произведение простых; простых чисел бесконечно много; они распределены довольно нерегулярно; простейшая асимптотическая формула для количества простых чисел, не превосходящих N, имеет вид $N/\log N$. Это, однако, не тот подход, который нам сейчас нужен.

Современное объяснение роли простых чисел дается теоремой Островского: простыми числами описываются все разумные способы (в дополнение к традиционному) ввести понятие непрерывности на множестве $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.

Говоря более конкретно, определим функцию $|a|_p$ от числа $a \in \mathbb{Q}$ таким образом: $|a|_p = p^{-n}$, если $a = p^n c d^{-1}$, где c и d — целые числа, не делящиеся на p. Эта функция обладает обычными свойствами нормы: $|ab|_p = |a|_p |b|_p$, $|a+b|_p \leqslant |a|_p + |b|_p$ (на самом деле даже $\leqslant \max(|a|_p, |b|_p)$ — так называемое неархимедово неравенство треугольника). Следовательно, эта норма определяет на $\mathbb{Q}$ топологию, в которой $a_i \to 0$, если $|a_i|_p \to 0$. Эта топология называется p-адической. Поскольку сложение и умножение p-адически непрерывны, можно стандартным образом определить фундаментальные последовательности и множество пределов таких последовательностей, называемых p-адическими числами.

Множество p-адических чисел, обозначаемое $\mathbb{Q}_p$, является новым аналогом множества действительных чисел $\mathbb{R}$, которое можно построить таким же способом с использованием обычной абсолютной величины, которую удобно обозначать через $|a|_\infty$. Теорема Островского утверждает, что всякая норма (говорят еще «нормирование») на $\mathbb{Q}$ задает ту же топологию, что $|\cdot|_\infty$ или $|\cdot|_p$ для некоторого простого p.

Разумеется, свойства $\mathbb{Q}_p$ во многих отношениях отличны от свойств $\mathbb{R}$. Главная причина в том, что $\mathbb{Q}_p$ и $\mathbb{R}$ сильно отличаются топологически: p-адические числа образуют канторово множество, или «фрактал» [4]. Тем не менее, многие разделы классического анализа и геометрии удается развить над p-адическими числами; прекрасное введение можно найти в книге [5].

Как мы знаем, физический мир весьма эффективно описывается с помощью математики, основанной на $\mathbb{R}$ (и на его последующем расширении $\mathbb{C}$ — комплексных числах). Недавно было высказано предположение, что в планковских масштабах больше подходит p-адическая топология [6]. При этом, однако, возникает вопрос: почему какое-то одно p должно быть выделенным с физической точки зрения? Не разумнее ли верить в демократию и считать, что все имеющиеся топологии равноправны? (Или, по крайней мере, все p-адические топологии: $\mathbb{R}$, бесспорно, является «первым среди равных», так как оно задано с помощью единственной архимедовой нормы.)

Оказывается, что тождество Эйлера (1), так же как и целый ряд аналогичных фактов, можно объяснить способом, который подсказывает очень убедительную картину такой демократии.

Начнем с почти очевидной формулы $|a|_\infty = \prod_p |a|_p^{-1}$. Она означает, что знать обыкновенную абсолютную величину рационального числа — то же самое, что знать все его p-адические абсолютные величины. Или, если быть полностью демократичными, $\prod_v |a|_v = 1$, где v равно ∞ или $p = 2, 3, 5\ldots$ В теории чисел полно формул такого типа; они называются формулами произведения, законами взаимности и т. п.

В выписанной нами формуле произведения мы рассматривали рациональное число a по очереди как действительное, 2-адическое, 3-адическое и т. д. Введем, более общим образом, множество бесконечных векторов $(a_\infty, a_2, a_3, \ldots)$, где $a_\infty \in \mathbb{R}$ и $a_p \in \mathbb{Q}_p$. Такой вектор, с дополнительным условием, что $|a|_p \leqslant 1$ для всех достаточно больших p, называется аделем. Этот термин был изобретен Клодом Шевалле около 1940 года, вместе с термином «идель», означающим «обратимый адель» (т. е. $a_v \neq 0$ для всех v и $|a_p|_p = 1$ для больших p). Этимология этих слов неясна; предположительно, «идель» происходит от слова «идеальный», а «адель» означает «аддитивный идель». Как бы то ни было, для современных теоретико-числовиков это стандартные термины.

Давайте теперь представим первые шаги математики, в которой действительные числа заменены на адели. У аделя $a = (a_v)$ имеются компоненты, вещественная a_∞ и p-адические компоненты a_p для всех p. Множество всех аделей образует топологическое кольцо $A_{\mathbb{Q}}$, с покомпонентными сложением и умножением. Его топология совмещает в себе архимедовы и фрактальные свойства. Рациональные числа $\mathbb{Q}$ вкладываются в $A_{\mathbb{Q}}$ диагонально: $a \equiv (a, a, a, \ldots)$. Простое, но важное наблюдение состоит в том, что $\mathbb{Q} \subset A_{\mathbb{Q}}$ — дискретная подгруппа, как $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Иными словами, последовательность рациональных чисел не может сходиться во всех v-адических топологиях одновременно (если, например, она p-адически сходится к нулю для всех p, то она должна состоять из растущих до бесконечности целых чисел).

Вспоминая, что $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = U(1)$ является окружностью, мы приходим к понятию адельной окружности:

$$A_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q} = \Big(\mathbb{R} \times \prod_p \mathbb{Z}_p\Big)/\mathbb{Z}, \tag{2}$$

где $\mathbb{Z}_p$ — множество p-адических целых чисел ($a \in \mathbb{Z}_p \Leftrightarrow |a|_p \leqslant 1$). Из (2) видно, что адельная окружность — это смесь $U(1)$ и компактной топологической вполне несвязной группы, которую можно также описать как «предел решеточных приближений» для $U(1)$, т. е. как $\varprojlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Тем самым мы опять наблюдаем соединение архимедовых и фрактальных свойств в одном объекте. Фурье-анализ, основанный на $A_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ вместо $U(1)$, чрезвычайно изящно связывает воедино обычное и конечное преобразования Фурье. См. диссертацию Тэйта [7].

Если продвинуться еще на шаг дальше, можно определить простейшую некоммутативную адельную группу $SL_2(A_{\mathbb{Q}})$, являющуюся по существу множеством бесконечных матричных векторов

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_v & b_v \\ c_v & d_v \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Q}_v) : v = \infty, 2, 3, 5, \ldots \right\},$$

для которых (a_v), (b_v), (c_v) и (d_v) являются аделями. Подгруппа $SL_2(\mathbb{Q})$ также дискретна в $SL_2(A_\mathbb{Q})$. Пользуясь левоинвариантной дифференциальной формой на SL_2 и нормами $|a|_v$, можно определить левоинвариантную меру $dm = \prod_v dm_v$ на группе $SL_2(A_\mathbb{Q})$ так же, как на ее классической компоненте $SL_2(\mathbb{R})$. Если нормализовать dm с помощью условия $\int\limits_{SL_2(A_\mathbb{Q})/SL_2(\mathbb{Q})} dm = 1$, а затем вычислить интеграл покомпонентно, то мы в конце концов придем к красивому объяснению формулы (1):

$$1 = \int\limits_{SL_2(A_\mathbb{Q})/SL_2(\mathbb{Q})} dm = \int\limits_{SL_2(\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{Z})} dm_\infty \times \prod_p \int\limits_{SL_2(\mathbb{Z}_p)} dm_p, \tag{3}$$

$$\int\limits_{SL_2(\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{Z})} dm_\infty = \pi^2/6, \qquad \int\limits_{SL_2(\mathbb{Z}_p)} dm_p = 1 - p^{-2}. \tag{4}$$

Здесь формула (3) устанавливается так же, как (2), архимедова часть формулы (4) доказывается с помощью трюка, основанного на формуле суммирования Пуассона, а p-часть формулы (4) следует из того факта, что SL_2 над конечным полем из p элементов состоит из $p^3 - p$ точек, так что относительное количество точек в $SL_2(\mathbb{Z}_p)$ по отношению к $\mathbb{Z}_p^3$ равно $1 - p^{-2}$.

Теперь мы видим следующую закономерность:

- (по крайней мере некоторые) существенные понятия действительного и комплексного анализа и геометрии имеют адельные аналоги;
- адельные объекты имеют сильную тенденцию быть проще, чем их архимедовы компоненты; например, адельные фундаментальные области арифметических дискретных подгрупп в полупростых группах обычно имеют объем 1 (философия Зигеля—Тамагавы—Вейля, см. [15]);
- благодаря этому факту и «формулам произведения», воплощающим идею равноправия всех топологий, информация о вещественной компоненте адельного объекта может быть считана либо с самой этой вещественной компоненты, либо с произведения p-адических компонент для всех p.

Если теперь позволить себе несколько рискованное обобщение, то можно сформулировать основную гипотезу этого доклада.

На фундаментальном уровне наш мир не является ни вещественным, ни p-адическим: он адельный. По каким-то причинам, связанным с физической природой нашей разновидности живой материи (возможно, с тем, что мы состоим из массивных частиц), мы обычно проектируем адельную картину в вещественную сторону. С тем же успехом мы могли бы духовно проектировать ее в неархимедову сторону и вычислять наиболее важные вещи арифметически.

«Вещественная» и «арифметическая» картины мира находятся в отношении дополнительности, напоминающем отношение между сопряженными наблюдаемыми в квантовой механике.

Разумеется, никто не обязан принимать эту метафизику всерьез. Скептический читатель может тем не менее пользоваться ею как руководящим принципом при математическом исследовании структуры струнной теории.

Теперь я опишу некоторые работы, которые кажутся обещающими в этом отношении.

Для начала отметим, что реинтерпретация вычисления поляковской меры [1] показывает [3], что если взять точку пространства модулей M_g с алгебраическими координатами, то плотность данной меры по отношению к канонической будет равна обратному от архимедовой части функции, называемой высотой точки x.

Замечательное свойство высоты, совместимое с нашей философией, состоит в том, что она определяется как произведение множителей, соответствующих всем нормированиям поля, в котором лежат координаты точки x.

Я выдвигаю следующую гипотезу: *на пространстве адельных точек универсального пространства модулей можно определить адельную меру Полякова, архимедова компонента которой совпадает с обычной мерой Полякова; хочется надеяться, что соответствующий полный адельный объем будет вычислим как в* (3), (4) *и тем самым даст арифметическое выражение для струнной статистической суммы.*

Если эти надежды оправдаются, у нас будут некоторые основания говорить об адельных струнах. Разумеется, главное основание для веры в это — замечательное появление в теории струн алгебраических многообразий (пространства модулей) и мер на них (формы Мамфорда), инвариантно определенных над целыми числами, а не только над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Чтобы объяснить чуть подробнее, нам понадобится расширить картину, в рамках которой мы до сих пор работали. Теория чисел изучает не только рациональные числа $\mathbb{Q}$, но и все алгебраические числа $\bar{\mathbb{Q}}$, т. е. корни многочленов с рациональными коэффициентами. Удобно работать с меньшими числовыми полями K, например с конечномерными $\mathbb{Q}$-подпространствами в $\bar{\mathbb{Q}}$, содержащими 1 и замкнутыми относительно умножения. Для каждого такого поля K можно доказать обобщение теоремы Островского, описывающее все нормирования поля K. Поскольку $\mathbb{Q} \subset K$, всякое такое нормирование w индуцирует на $\mathbb{Q}$ нормирование v, эквивалентное либо $|\cdot|_\infty$, либо какому-нибудь $|\cdot|_p$. Мы будем говорить, что w продолжает, или делит, нормирование v. Имеют место следующие факты: а) всякое нормирование поля $\mathbb{Q}$ продолжается до конечного числа нормирований поля K; б) нормирования, продолжающие $|\cdot|_\infty$, соответствуют различным вложениям K в комплексные числа. Коль скоро эта теорема доказана, можно определить w-адические числа K_w, адели A_K, идели J_K и другие объекты, которые мы ранее рассматривали «над $\mathbb{Q}$».

Пусть теперь у нас есть векторное пространство L над K, снабженное нормами $\|\cdot\|_w$ (по одной для каждого нормирования w на K) таким образом, что $\|al\|_w = |a|_w \|l\|_w$ при $a \in K$, $l \in L$, и $\|l\|_w = 1$ для почти всех w, если $l \neq 0$. Тогда можно определить высоту элемента $l \in L$ по формуле

$$h(l) = \prod_w \|l\|_w.$$

Из формулы произведения $\prod_w |a|_w = 1$ при $a \in K$ следует, что $h(l)$ зависит только от луча Kl в L, т. е. что высота — функция на проективном пространстве, ассоциированном с L.

Поскольку пространство модулей M_g по существу задается алгебраическими уравнениями с целыми коэффициентами, мы можем вложить M_g в такое проективное пространство. Если это вложение провести с помощью мамфордовских детерминантных векторных расслоений, то при этом получится высота, связанная с мерой Полякова.

Полная высота, в отличие от ее архимедовой части, определена только для точек с алгебраическими координатами, которые хоть и плотны в M_g, но с физической точки зрения не выглядят особенно привлекательными. Тем не менее, в недавней работе [8] было установлено, что именно эти точки появляются естественным образом как точки решетки в струнной схеме решеточного приближения.

Ситуация выглядит следующим образом. При струнном решеточном приближении риманова поверхность, т. е. струнный мировой лист с метрикой ds^2, заменяется на триангулированную метрическую поверхность, по существу задающуюся комбинаторными данными, состоящими, например, из списка вершин и длин дуг, соединяющих некоторые вершины. Это — двумерный аналог исчисления Редже в общей теории относительности.

Рассмотрим теперь компактную ориентированную поверхность, разбитую на равносторонние треугольники, у которых длины всех сторон равны 1 (если заменить эту длину на другую, конформный класс поверхности не изменится). Легко доказывается, что такая поверхность снабжена комплексной структурой, совместимой с метрикой (сначала надо удалить вершины, а затем продолжить получающуюся комплексную структуру, что возможно, так как сумма углов при каждой вершине равна $\pi n/3$ для некоторого целого n). Следовательно, такая поверхность задает точку на M_g. Основная теорема работы [8], которую предвидел Гротендик [0], утверждает, что таким образом мы получаем в точности все алгебраические точки. Стало быть, теоретико-числовая картина хорошо отражает комбинаторно-метрическую картину. Важная проблема — установить дальнейшие связи между этими двумя описаниями, в частности, вычислить высоту в метрических терминах.

Теперь мы переходим к заключительной части нашего обсуждения.

Наиболее широкие обобщения формулы Эйлера (1) связаны с вычислением адельного объема однородных пространств вида $H(A_K)/H(K)$, где H — полупростая алгебраическая группа, а K — алгебраически замкнутое поле (мы вкратце остановились на случае $H = SL_2$). Аналогичные вычисления для других типов алгебраических многообразий, например, для M_g, связаны с серьезными трудностями. Почему же тогда мы надеемся, что с M_g удастся работать арифметически?

Возможный выход замечательным образом связан с новым подходом к другому поразительному свойству поляковской статсуммы, а именно, с тем, что она по сути является разложением теории возмущений. Несколько авторов предложили работать не с M_g, а с чем-то вроде универсального пространства модулей $\overline{M}$, включающего в себя все M_g (и кое-что еще).

В работе [9], руководствуясь этой идеей и операторным подходом, я высказал гипотезу, что это $\overline{M}$ должно быть однородным пространством относительно алгебры Вирасоро.

Эта гипотеза была недавно доказана четырьмя группами авторов (см. работы [10]–[13]). Во всех этих работах используется одна и та же основная конструкция, принадлежащая Сато и Сегалу—Уилсону. В этой конструкции $\overline{M}$ является бесконечным грассманианом, а «модульная часть» пространства $\overline{M}$ параметризует тройки (X, p, z), где X — комплексная риманова поверхность, p — точка на X и z —

локальная координата в этой точке. Если удастся определить непертурбативный фейнмановский интеграл как интеграл по $\bar{M}$, то он вполне может стать вычислимым арифметически. Для этого нам понадобится обобщение теории Тамагавы—Вейля на бесконечномерные группы, наподобие групп Каца—Муди и $GL(\infty)$. (Заметим в скобках, что $\mathrm{vol}(SL(n,\mathbb{R})/SL(n,\mathbb{Z})) = \zeta(2)\ldots\zeta(n)$ имеет корректно определенный предел при $n \to \infty$. Можно ли получить его как объем при $n = \infty$?)

В заключение я очень кратко опишу некоторые вопросы, волнующие теоретико-числовиков, которые могут иметь отношение к программе арифметизации физики.

У теории чисел есть своя группа большого объединения: это группа Галуа $G = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, состоящая из всех перестановок алгебраических чисел, сохраняющих алгебраические соотношения между ними с рациональными коэффициентами. Это бесконечная топологическая группа «фрактального» типа; ее структура очень сложна и, в некотором смысле, содержит в себе всю арифметику (если учесть также некоторые канонические центральные расширения ее подгрупп — так называемые группы Вейля). Для иллюстрации этого утверждения отметим только, что ее максимальная абелева факторгруппа G^{ab} изоморфна $\prod_p \mathbb{Z}_p^*$, так что простые числа появляются вновь, совершенно неожиданным образом — по существу как образующие G^{ab}. При изучении представлений G и ее замкнутых подгрупп теоретико-числовик встречается с автоморфными и модулярными функциями почти так же (точнее говоря, двойственным образом), как физик, изучающий представления алгебр Каца—Муди и Вирасоро. Серия глубоких гипотез, принадлежащих Ленглендсу [14], связывает теорию представлений группы G с теорией представлений групп $H(A_K)$, через модулярные формы и их преобразования Меллина.

Я искренне надеюсь, что столь замечательные совпадения не являются простой случайностью.

В заключение хочу сказать, что я с удовольствием и гордостью посвящаю эту заметку Александру Гротендику, чьи прозрения оказали огромное влияние на математику, а сейчас начинают влиять и на физику.

Литература

0. *Grothendieck A.* Esquisse d'un programme. Preprint. 1984. Опубликовано в кн.: Geometric Galois actions, 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. P. 5—48.
1. *Manin Yu. I.* The partition function of the Polyakov string can be expressed in terms of theta functions // Phys. Lett. 1986. Vol. B172. P. 184—186.

2. *Faltings G.* Calculus on arithmetic surfaces // Ann. Math. 1984. Vol. 119. P. 387—424.
3. *Smit D.-J.* String theory and algebraic geometry of moduli spaces // Comm. Math. Phys. 1988. Vol. 114, № 4. P. 645—685.
4. *Mandelbrot B.* Fractals. San Francisco: Freeman, 1977.
5. *Koblitz N.* p-adic numbers, p-adic analysis and zeta-functions. Heidelberg; Springer-Verlag, 1977. [Имеется русский перевод: *Коблиц Н.* p-адические числа, p-адический анализ и дзета-функции. М.: Мир, 1982. 192 с.]
6. *Volovich I. V.* a) Number theory as the ultimate physical theory. Preprint CERN-TH 4781/87; b) *Волович И. В.* p-адическое пространство-время и теории струн // ТМФ. 1987. Т. 71, № 3. С. 337—340.
7. *Tate J.* Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta-functions // Algebraic number theory / Ed. by J. W. S. Cassels, A. Frölich. Academic press, 1967. P. 305—347.
8. *Воеводский В. А., Шабат Г. Б.* Равносторонние триангуляции римановых поверхностей и кривые над полями алгебраических чисел. Препринт. 1987.
9. *Манин Ю. И.* Критические размерности в струнных теориях и дуализирующий пучок на пространстве модулей (супер)кривых // Функц. анализ. 1986. Т. 20, № 3. С. 88—89.
10. *Концевич, М. Л.* Алгебра Вирасоро и пространства Тейхмюллера // Функц. анализ. 1987. Vol. 21, № 2. P. 78—79.
11. *Beilinson A., Schechtman V. V.* Determinant bundles and Virasoro algebras // Comm. Math. Phys. 1988. Vol. 118, № 4. P. 651—701.
13. *Arbarello E., De Concini C., Kac V., Procesi C.* Moduli spaces of curves and representation theory // Comm. Math. Phys. 1988. Vol. 117. № 1. P. 1—36.
14. *Langlands R. P.* L-functions and automorphic representations // Proc. ICM 1978. Helsinki, 1980. Vol. 1. P. 165—176.
15. *Kneser M.* Semi-simple algebraic groups // Algebraic number theory / Ed. by J. W. S. Cassels, A. Frölich. Academic press, 1967. P. 250—265 [Русский перевод в кн.: Алгебраическая теория чисел / Под ред. Дж. Касселса, А. Фрёлиха. М.: Мир, 1969. С. 347—396.]

Часть III

Из ненаписанного

Стихи и переводы

Из цикла «Книги моей юности»

Название цикла, «Книги моей юности», отсылает к Мандельштаму:

«Разночинцу не нужна память, ему достаточно рассказать о книгах, которые он прочел, — и биография готова». («Шум времени»).

Один из моих дедов говаривал: «Истинный разночинец не принадлежит никакому сословию, ни даже и разночинству».

Неохотные комментарии обращены к читателю, который в юности читал другие книги.

Подражание И. Б.

Russians are tragic Italians.

(*anon.*)

Я мог бы родиться в Италии. Звали б меня,
скажем, Джорджо Манини. По воскресеньям родня
собиралась бы в церкви, а мужчины сидели в таверне,
обсуждая политику и австрияков браня.

На шершавых фасадах поганками после дождя
высыпа́ли б портреты Дуче, то есть Вождя
Всех Времен и Народов, а Владимир Владимирович
Маринетти будил меня утром, старый мир нещадно гвоздя.

В Пионерском саду, где Салгир вливается в Тибр,
и мафиози идут из киношки в тир,
науке любви меня бы учила Мазина
в воспаленных сумерках, после школьных игр.

Впрочем, все так и было. *Nel mezzo del*
cammin... (и т. д.) душа покидает юдоль
скорбей... (и проч.) и оглядывается. Таврида с Тосканой
уплывают, неразличимо сливаясь, вдаль.

Филиппо Томмазо Маринетти — основатель итальянского футуризма. Владимир Владимировичем звали, конечно, Маяковского.

Салгир — речка, протекающая через город Симферополь в Крыму, где автор родился и жил в годы 1937—41 и 1945—53.

Джульетта Мазина — актриса и муза Феллини.

Обэриуты

Прекрасной женщины душа
Ленивой бабочкой летает.
Художник, житель чердака,
Ее внезапно уловляет,
Накалывает на булавку
И сносит в государственную лавку.

Она уж не порхает.
Он водку пьет и тяжело вздыхает.

Архитектурный памятник устало
Фронтоном оседает в новый век.
Шаг вбок, шаг вверх — считается побег.
Из дома вышел человек — его не стало.

ОБЭРИУ (Объединение Реального Искусства) — название неформальной группы ленинградских поэтов, основанной в 1927 году, коллективный голос русского модернизма и «абсурдизма». Судьба их была предрешена. Александр Введенский (1904—1941) был подвергнут «превентивному аресту» в 1941 году и, по разным свидетельствам, либо умер от дизентерии, либо был застрелен тюремной охраной. Даниил Хармс (1905—1942), согласно официальной информации, скончался в тюремной психушке. Николай Заболоцкий (1903—1958) пережил арест и ссылку (1938—1946). После смерти Сталина несколько лет публиковал хорошие стихи, написанные в традиционной поэтике. Николай Олейников (1898—1937) был арестован и расстрелян в 1937…

«Шаг влево, шаг вправо считается побег: охрана стреляет без предупреждения» — лагерная мудрость, которую большинство моих сверстников, к счастью, узнало только от Шаламова и Солженицына.

«Из дома вышел человек…» — строчка Хармса.

Из У. Одена
(*As I walked out one evening...*)

Я вышел вечером в город.
На Бристоль-стрит пала мгла.
Как поле перед жатвой,
Толпа, колыхаясь, шла.

Вдали, где река втекала
Под мостовой пролет,
Влюбленный пел свои клятвы:

«Любовь моя не умрет!
Покуда Китай и Африка
Не снимутся с якорей
И стерлядь не выйдет с песней
На улицы из морей,
Развешенных сохнуть, подобно
Выжатому белью,
И звезды не взмоют, кряча,
Тебя я не разлюблю!
Как кролики, столетья
Проскачут стороной,
Пока я тебя сжимаю
в объятиях, ангел мой!»

Но все часы городские
Заскрежетали так:
«Ты Время вокруг пальца
Не обведешь, простак!

Ты Истину нагую
Обнимешь в полусне —
Закашляется Время
Из темной ниши в стене.

Уходит жизнь сквозь пальцы
Под головную боль,
И что пожелает Время,
То и станет с тобой.

Зеленую долину
Укроет белый снег,
И хоровод рассыплется,
И оборвется бег.

Черпни воды в ладони,
В черную воду взгляни,
И то, чего не понял,
Пока не поздно, пойми.

Ледник стучит в буфете,
В постели пески шелестят,
И трещина в чайной чашке
Открывает дорогу в ад,

Где Принц навеки нищий,
Русалочка — в огне,
И Золушка танцует
На костяной ноге.

Но вглядись в свое отраженье,
В отчаяние свое,
Жизнь — это благословенье,
Благослови ее.

Стань у окна, сквозь слезы
В лица ближних взгляни,
И каждую грешную жизнь
В грешное сердце прими».

Умолкли часы на башнях.
Сгустилась ночная мгла.
Любовники исчезли.
И только река текла.

Двенадцать цезарей, салют!
Привет мой и тебе, Светоний,
историк пакостных историй.
Теперь и нас от этих блюд
мутит.

Поспорим о властях
и властелинов побичуем.
Недуг шкодливый, не пустяк,
страдают им, как почечуем.

Как дети, деспоты просты,
святы пресветлые тираны,
хоть их обязанности странны
и непонятны их посты.

Вконец подорвано здоровье
от людоедства натощак,
пока поэты верещат
про *славу, купленную кровью*...

А впрочем, ладно.
С ними Бог,
и с нами Бог, и Бог со всеми,
а историческое время
все норовит куда-то вбок...

1967, 2005

У греков — жизнь любить, у римлян — умирать…

А. Кушнер

Весеннее небо в огрехах
просыпанных мимо дождей…

Да что все о Риме да греках,
не эллин я, я — иудей,
летучая малая спора,
грибницы усохшей зерно,
от Книги ослепшего взора
поднять не успевший.

Давно
у Рима, и мира, и рока
я выучил смерти урок.

А жизнь убегает с урока,
туда, где в ветвях ветерок.

16 февраля 2001

Из Р. М. Рильке
(*Fremde Geige, gehst du mir nach?..*)

Странница-скрипка, ты бродишь за мной?
Кто тебя неволит порою ночной
в городах моих одиноких ночей?
Все тот же скрипач? Или сто скрипачей?

Почему повсюду со мною в соседстве
те, кому от пустоты —
камень на шею, пулю в сердце,
если бы только не ты?

Неужели мне вековать с чужими,
в чужих городах, неужели
вечно слышать стон твой, что тяжесть жизни
всех на свете вещей тяжеле?

Der Untergang des Abendlandes

я покинул хронотоп где упорный карабах растирает в прах врагов
и уехал в конотоп где вдоль рейнских берегов черепа на черепках
волкодав не доглядел что по крови я волчок колыбельный недозверь
кончит черный передел что бахтин надерридел далее молчок

16 февраля 1997

Название известной книги Освальда Шпенглера обычно переводится «Закат Европы».

«Хронотоп» — литературоведческий термин Михаила Бахтина (1895—1975), философа, историка и критика литературы. Жак Деррида (1930—2004) — французский философ, известный автор концепции и методики деконструкции текстов.

В. Захарову

Я узнаю по коду
деревьев, стен и лиц
последнюю погоду
перед отлетом птиц.

Последнюю погоду,
прощальное тепло.

Меняю на свободу
родное ремесло,
с каким почти до края
мне вышло добрести,
зеленый лист теряя
из высохшей горсти...

Из У. Б. Йейтса
(*«In memory of Eva Gore-Booth and Con Markievicz»*)

Вечерний свет над Лиссадель.
На юг и настежь окна в доме.
Две девушки — хозяйки, обе
красавицы, одна — газель.

Как листья, годы отгорят,
и старшую приговорят,
потом помилуют, потом
ее укроет старый дом
от судей и подпольных свар.
Что будет на душе у младшей —
бог весть. Политики увядшей
в увядшем теле перегар.
Потом обеих примет гроб.

Я столько раз напропалую
мечтал — одну или другую
призвать и вспомнить пылкий трёп
про жизни цель, и юный хмель
шальных несбыточных утопий,
вечерний свет над Лиссадель,
двух девушек хозяек... Обе
красавицы, одна — газель.

О тени милые, теперь
и вам открылась тщетность бунта.
Как будто есть победа, будто
от времени и от потерь
невинность с юностью защита...
Прощайте и простите нас.

Вы этот сумрак озарили,
вас за поджог приговорили,
но лучик вспыхнул и погас.

24 апреля 1916 года в Дублине началось «Пасхальное Восстание» и была провозглашена Ирландская Республика. Британские войска подавили его на шестой день. Констанс Гор-Бут Маркевич (1868—1927) *была приговорена к смерти за участие в восстании, ее освободила общая амнистия в июне 1917 года. Ева Гор-Бут (1870—1926) писала стихи.*

У. Б. Йейтс был знаком с сестрами с 1894 года и посещал их семейный дом Лиссадель (Lios a'Daill, «The courtyard of the Blind Man»), построенный в 1832 году.

Западно-Восточный Диван

Жил человек рассеянный
на улице Бассейной.
Вместо шапки на ходу
Он надел сковороду...

Он надел сковороду,
Он в чужую дул дуду,
(*Я говорю про всю среду,*
С которой я имел в виду
Сойти со сцены, и сойду,
Но не решил, в каком году,
Вот какой рассеянный...)

Он взошел на ауто-да-фе —
Оказалось, там кафе.

Ожидать он стал Годо —
Говорят ему, — Не то!

Он отправил в Амстердам
Чемодам,
А приехал чемодан
В Магадан.

Сев в отцепленный вагон,
Укатил он за кордон,

И его менталитет
Потерял идентитет,

Вот какой...
Расея...

Над равниною неровной
Дует ветер хладнокровный.

16 февраля 1999

Цитируются С. Маршак и Б. Пастернак («Высокая болезнь»).

Памяти Иосифа Бродского

До-светания, — как бы прощаясь глухо,
Тело есть лишь продукт разложенья духа,
Слабый свет — продукт разложенья тела,
Кто-то это сказал, но не в этом дело.

Из-за поля Хиггса на берег Стикса
Выбираться, теряя остатки смысла,
Да и голоса, словно бельмо на глотке,
Так что не докричаться гребца и лодки,
Над водой, над которой еще светлеет
Слабый свет. Постепенно и он слабеет,
Потому что, подрагивая, уплывает с сетчатки на дно
Золотой пятак, медный обол, пятно…

Квантовое поле Хиггса — причина, по которой в ранней Вселенной изначально безмассовые частицы приобрели массу. В результате люди сделаны не из света, как ангелы, а из тяжелой материи. Выдумка трех нобелевских лауреатов, эквивалент первородного греха.

«На сетчатке моей — золотой пятак. Хватит на всю длину потемок» — последние две строки двенадцатой Римской элегии Бродского.

Из Р. Киплинга
(*When Earth's last picture is painted…*)

Когда будет дописан последний холст и засохнет последний тюбик
белил,
И последний художник закроет глаза, ибо отдых он заслужил,
Нам всем, усталым мастеровым, Вечность дадут поспать,
И Хозяин Честных Работников призовет нас к труду опять.

И каждому даст золотой табурет, и кисть из хвостов комет,
И туго натянутый холст шириной в сто световых лет,
И Магдалина, Павел и Петр позировать станут для нас,
И никогда, никогда, никогда не устанут рука и глаз!

Ни денег, ни славы не будет вовек, а будут работа и честь,
И каждый напишет каждую вещь, как видит, и как она есть,
На каждой звезде, которыми полн ликующий Млечный Путь,
Для Прекрасного Бога Сущих Вещей, Таких, Как Они Суть!

Прощальные буриме

цель творчества самоотдача
а не прогулки при луне
любовь не вздохи на скамейке
а не шумиха не успех
и муза убегает плача
кляня центоны и римейки
от них от времени от всех
и колокол звонит по мне

Первые четыре строки заимствованы у Бориса Пастернака и Степана Щипачева. Я огорчился, услышав, как легко они идут рядом, рука об руку.

Из цикла «Я люблю ходить босой по бутербродам с колбасой»

Из Г. Берджесса
(*Trapping fairies in West Virginia...*)

Ловил я фей сачком в Молдавии —
Нигде не видел фей костлявее!

Вот разве в Западной Вирджинии
Такие ж тощие да синие...

* * *

Загляну-ка я под мини:
Интересно, что под ними?

Ведь на миди мы в обиде,
Ничего под ним не видя,

А заглядывать под макси
Удается только таксе.

* * *

Из Огдена Нэша
(*Called by a panther, don't anther*)

Окликнутый пумой —
Подумай.

Если тигр подзовет тебя: Вася! —
Не отзывася.

Но если Президент, светло улыбаясь и прямо глядя в глаза,
Предложит тебе занять пост Премьер-Министра —
Убегай быстро.

* * *

Ржание — конской речи содержание.
А если нет корма, то форма.

* * *

Закон есть закон...

...но неужели и марсиане
распределены по гауссиане?

Вагнериана

1. *Вагнер на свой день рождения, проведенный в туманном Лондоне*

Сияли майским солнцем небеса,
когда я вылупился из яйца,
да, видно, зря поторопился,
а лучше бы назад влупился.

2. Валькирия летела-летела и села.
Села, все съела, и дальше полетела.

Немецкая классическая философия
(*читая дневники Эрнста Юнгера*)

Сидючи на пихте,
мы читали Фихте,
изучая Гегеля,
для здоровья бегали,
и уселись в танки
с мыслями о Канте.
А которые, услыхав о культуре,
хватались за пистолет,
тех, в натуре,
с нами уж нет.

* * *

Из Р. Киплинга
(*Общая эпитафия 1914—1919*)

— Отчего вы лежите здесь, мертвецы?
— Оттого, что лгали наши отцы.

Из А. Бренделя

Альфред Брендель — знаменитый пианист, живущий в Лондоне. Опубликовал несколько книг стихов, о которых говорит:

Все это приснилось мне по-немецки, потому что сны мне снятся по-немецки, и многие стихи зачинались в том состоянии между сном и явью, где смысл сливается с бес-смыслицей и порядок с хаосом.

В числе своих учителей Брендель называет дадаистов, Христиана Моргенштерна и Шекспира.

* * *

Когда чертям становится скучно
они усаживаются играть в святых
За столом заседаний
с постными лицами
они прощают друг другу
все благодеяния
причиненные человечеству
Кто рыдает громче всех
срывает банк

Моц—АРТ

Когда Моцарт был убит
никому
даже Гайдну
и в голову не пришло
что злодейство свершил сам Бетховен

Как-то на дачной тусовке
когда Моцарт лежал в саду
утомившись игрой в чехарду
как кот подкрался Бетховен
переодетый Сальери
и вкапал яд в несравненное ухо творца

Тут пора
открыть ужасный секрет
который Бетховен скрывал много лет
Бетховен был НЕГР
а Моцарт ДОГАДАЛСЯ

Слышали как Моцарт
после одного из знаменитых концертов мэтра
громким шепотом сказал Зюссмайру
Черножопый а сбацал неслабо

И теперь он лежал
с ядом сочившимся в вены

А виновник с мрачной ухмылкой во тьму
ускользнул унося подмышкой басовый ключ
принадлежавший отныне ему одному

Опус Альфреда Шнитке. Переводчик не удержался и добавил это название к оригиналу Бренделя.

Мы курица и петух
Мы маленькие цыплятки

А яйцо
Кто же яйцо

МЫ ЖЕ ЯЙЦО
желток с белком заодно

Дальше больше мы Лис
который хрямкает кур

Мы ну прям все

* * *

Склонясь надо мной ко мне
я вижу
незнакомую рожу
полную сомне-
ний

я забыл
даже то что помню
ванну водой наполню
пар над водой поплыл

* * *

Зайдя в рай
Эйнштейн
застал Бога играющим в кости
Он спросил повернувшись
А где тут у вас братцы ад

Местное производство

Можем предложить вам ангела
ну в точности как настоящий
Лицо мягкое
Одежды развеваются
Крылья шуршат
Пупа нет
Гарантия три года
Местное производство
Если подойдете слишком близко
он внятно прошипит
Канай на нары чукча

* * *

Где у нас нынче сидит
душа
Говоришь в заднице
Исключено
Я сам на ней сижу
человек не может
сидеть на своей душе
Это она
должна сидеть как влитая
как платье по мерке
как вставная челюсть
как на корове седло
гхм
Душа должна сидеть плотно
не то что моя
все где-то вертится
то в щитовидке
то в легком
то в желудке
то в почках
опять куда-то съехала
чего она там внизу ищет

* * *

Мышь смутно знала
что за пределами мышиного горизонта
иной
величавый
глубокий
нутряной
Мир
весь грызущий
пищащий
котомыший
возвышается
как огромный
золотистый
а с какими дырочками
превышающий разумение

Ящички

Перед Большим Взрывом
были в основном выдвижные ящички
Мир до Большого Взрыва
не считая нескольких шариков
состоял из ящичков
В ящичках помещался
миллион с лишним световых лет
а больше ровно ничего
Потом при невыясненных обстоятельствах
ящички
медленно но верно
стали наполняться динамитом
Мир перед Большим Взрывом
был в большом порядке
По временам даже слышался чей-то смех

Скупка мыслей на Арбате

Двадцать третье августа 1987 года, три часа дня. Я сижу на раскладной табуретке посередине Арбата, прислонившись спиной к бетонной цветочной урне. Солнце осеннее; лето в этом году было нещедрым. У моих ног на мостовой кучка пятаков; рядом расставлен металлический треножник, с каким ходят на этюды. Вместо картона в струбцине зажат лист ватмана с надписью:

ПОКУПАЮ
оригинальные
УМНЫЕ
МЫСЛИ
по цене 15 коп. штука

Чтобы лист не отдувало ветром, он утяжелен снизу парой прищепок. Блокнот для записи умных мыслей свисает на веревочке.

* * *

Арбат-87 прошлым летом не существовал. Каков он будет, пережив зиму, неизвестно. Превращенный в пешеходную зону, подмалеванный в эстетике театральных задников, вышученный и оплаканный, он озирается в недоумении, ища себя.

Нынешней весной он стал — вдруг — рынком художников. Во второй половине дня, а то и с утра, от Арбатской площади до Вахтанговского театра и, слегка редея, дальше к кольцу, по обеим сторонам узкой улочки и посередине, у фонарей и ваз, стоят мольберты, треноги, висят пейзажики и портреты. В удачные часы, при хорошей погоде, через каждые пять-десять метров на табуретке, подоконнике витрины, скамейке, вазе сидит «модель», ожидая своего портрета, — карандашом, углем, сангиной, маслом. Полчаса — двадцать рублей. Или шаржа — пять минут — пять рублей.

Утоляется неутолимая жажда — взглянуть на себя чужими глазами.

* * *

Лет пятнадцать назад художники уже выходили на улицу — на знаменитую «бульдозерную выставку». Для тех, кто не помнит: «улица» была пустырем в Черемушках, бульдозеры на пустырь пригнала городская власть, очень оперативно. Не для борьбы с художниками — что вы — просто в то же утро оказалось, что на пустыре срочно должно начаться строительство или, допустим, посадки зеленых насаждений. Сейчас там, на углу Профсоюзной и Островитянова, и впрямь все застроено.

Рынки художников этого года — впрочем, как и выставки — отвечают изменившемуся духу времени. Никакой конфронтации никого ни с кем. Эмиграции, смерти и уходы в себя остались в прошлом поколении. Бульдозеры, идеологические проклятия, разоблачительные статьи остались в прошлом поколении. Прошлое поколение живет рядом, но оно как-то... несущественно, что ли?

* * *

Мимо моего плаката проходят. Останавливаются, читают. Хмыкают. То собираются, то рассасываются кучки. Некоторые реплики повторяются с удивительным постоянством.

* * *

— Пятнадцать копеек за мысль? Что ж так дешево?

Отвираюсь, сначала экспромтом, а потом уже заученно:

— Вы сначала товар покажите, а там посмотрим, может, сторгуемся.

Качают головой, отходят.

* * *

— Мысль, и чтобы умная, и еще оригинальная? Таких не бывает.

Странно, с таким убеждением я столкнулся впервые. Надо подумать. Оказывается, многие так считают.

* * *

— А что такое мысль?

Большинству из тех, кто задает такой вопрос, я просто доброжелательно улыбаюсь. Но вот об этом очень серьезно спрашивает ребенок. Маленькая девочка в очках, синий сарафан в белую полоску, держится за папину руку. Семейство с юга.

— Ну вот, понимаешь, когда ты думаешь что-нибудь интересное, это мысль. Запиши мне ее в блокнот и получай пятнадцать копеек.

— А фантастику можно?

— То есть как фантастику?

— Чтобы когда люди говорят, и их было видно.

— Не понял. Вот мы с тобой говорим, и нас же и так видно?

— Нет, по телефону, и чтобы как в телевизоре!

Папа объясняет, что такие линии связи уже существуют, и стало быть, мысль неоригинальная. Я говорю, что раз девочка ее сама придумала, то оригинальная, и я готов ее купить, но отец уводит дочку прочь.

* * *

— А зачем Вы покупаете умные мысли?

Боже мой, это же так очевидно: что может быть интереснее умной мысли? Так и говорю.

Элемент игры сознают все, кроме детей. Но никто не уверен в правилах этой игры со мной. Поэтому попытки контакта робкие. Почти у каждого — подозрение, что я хочу унизить или обидеть.

* * *

— Давайте, я запишу Вам мысль.

— Да Вы сперва скажите, я, может, еще и не куплю.

— Я Вам скажу, Вы не купите, а мысль-то уже узнаете!

— Ну что ж, это Ваш риск. А Вы мне, может, чужую мысль продадите, Платона, а выдадите за свою. Это мой риск.

— Так Вы же все равно ее получите, какая разница, что не мою?

— Так я же Вам пятнадцать копеек плачу, а причитается — Платону!..

* * *

— А из какой области мысль?

— Из какой хотите.

Молодой человек, Володя, из художников. Принес несколько пейзажей. Один в рамке из грубого дерева, торчит сучок с мизинец. Сучок симпатичный.

— А можно подумать?

— Ну конечно! — говорю я, счастливый. — Конечно, подумайте!

Володя отходит, минут через десять возвращается, садится на корточки, чтобы быть вровень со мной (в следующий раз надо бы принести вторую табуретку).

— А можно из области школьной реформы?

— Ну-ну? — говорю я, заинтригованный донельзя.

— Я предлагаю ввести в школах риторику и усилить физкультуру.

— Володя, а почему риторику?

— Понимаете, никто разговаривать не умеет...

Я приобретаю первую в этом сезоне мысль:

«Насчет „школьной реформы“. Введение в преподавание предмета „Риторика“ как умение вести разговор вообще и усиленное преподавание физкультуры для укрепления человеческого организма в нашей насыщенной стрессами жизни». В. Д.

* * *

Сижу я метрах в пятидесяти от «Праги». С другого конца Арбата доносятся звуки неформальной культурной жизни: кажется, танцуют кришнаиты и выступает ансамбль «Отцы и дети».

Вчера еще я ходил по Арбату в качестве пассивного потребителя, нынче с некоторой гордостью ощущаю себя вносящим свою лепту. Во что?

Повыше, за Староконюшенным, кольцо зрителей, в центре демонстрируют брейк.

На Арбат вышла генерация музыкальная, рисующая, двигательно активная, объединенная системой невербальных сигналов. Они узнают друг друга не как мы когда-то, не по стихам на слуху (что́ вспоминал недавно Маканин с насмешливой ностальгией? Ах, да: «Он знал, что вертится Земля, но у него была семья»), — а по облику и повадке.

Я надеюсь иногда, что Природа произвела на свет несловесное поколение, чтобы хоть немного отдохнуть от отцов, планирующих, перестраивающих, ученых, привычно лгущих, планирующих.

Homo Ludens, сын Homo Faber.

* * *

Только что в Москве закончился Международный Конгресс по Логике и Методологии Науки. Часть заседаний проходила в главном здании МГУ на Ленинских горах. Международные Логики были несколько изумлены тем, что вход в МГУ охраняет группа милиционеров, а без пропуска туда попасть и вовсе невозможно.

Я связан с этим Большим Домом со дня его открытия в 1953 году, когда первого сентября сел на студенческую скамью. Стало быть, тридцать четыре года бываю там три-четыре раза в неделю. Милиция на входе появилась лет десять назад. Странно, что университетское образование сочтено нуждающимся в такой плотной опеке.

В кучке собравшихся передо мной замечаю профессора Ш. из Ленинграда. Встаю с табуретки и здороваюсь с ним. У него делается опрокинутое лицо.

— Юрий Иванович, это Вы?!

— Я, а что?

— Вы меня убили... Это самое потрясающее впечатление, которое я уношу из поездки... я напишу об этом в отчете!

Усаживаю профессора Ш. рядом на цветочную вазу и расспрашиваю о Конгрессе. Джон Маккарти вел семинар по «немонотонной логике» (не знаю, что это такое), Маккарти профессору Ш. понравился, а его логика — нет.

— Ну, не буду Вам мешать, — откланивается профессор. — Знаете, я всегда говорил: каждый, кто хочет быть счастливым, должен делать это своими руками!

* * *

Подходит серьезный бородач. Предлагает купить мысль:

— Жизнь похожа на портянку: длинная и дурно пахнет.

— Эту мысль я не куплю.

— Почему?

— Она дурно пахнет. И, по-моему, я ее уже где-то читал.

— Нет, я ее сам придумал! У меня есть свидетели!

— Ну, может быть. Но все равно не куплю.

* * *

Молодая пара. Он начинает:

— На какую тему Вы хотите мысль?

— А я не знаю, Вы — продавец, я — покупатель.

— Ну, я могу дать мысль на любую тему: как заработать миллион, как стать любимым, как украсть и чтоб тебя не поймали.

— Нет, этого мне не надо.

Вмешивается спутница. Обращаясь к нему:

— Это пошло. Это не мысли. Скажи о смысле жизни, например!

Он:

— Ну, этот товарищ же, наверное, понимает, что меня о смысле жизни спрашивать не надо.

— А ты не ему, ты мне скажи!

Разговор начинает становиться личным, я хватаюсь за карандаш. Остывая, она спрашивает:

— А что это Вы записываете?

— Вашу беседу, если позволите.

* * *

Собралась очередная кучка. Между ногами взрослых приседает девчушка, пытаясь разглядеть, что происходит, улыбается мне ослепительно и убегает, убедившись, что ничего не происходит. Мальчик долго стоит, шевеля губами, наконец, отходит, высказавшись:

— Это сколько же мыслей надо, чтобы машину купить!

* * *

Художник Володя с приятелем перебрался ко мне поближе. На вазу сел Костя, у которого я не купил мысль о жизни-портянке. Солнце пригревает уже правое ухо, со стороны Вахтанговского. Коммерция у Володи сегодня идет туго, вот в Измайлове удавалось иногда что-нибудь продать. Володе двадцать три, он студент первого курса Суриковского, сдавал трижды, удалось поступить на четвертый. Родители — строители, рисование ставят ни во что. Через полчаса нам с ним уходить, оба идем в театры, к сожалению, в разные. В конце августа в Москве лишь запоздалые гастроли да еще студии, он — в одну, я — в другую. Хвастаюсь, что мой бывший ученик стал главрежем в Доме Культуры МГУ; Володя уважительно спрашивает, трудно ли быть режиссером. Беседуем насчет того, что всякое дело требует всей жизни, чтобы жена была — в нем, и дом — в нем, и круглые сутки — в нем, а иначе — ничего и не выйдет. Костя сообщает, что переменил семнадцать занятий, перечисляет их все, загибая пальцы, а теперь пишет. Пишет, пишет, и недоволен написанным, такой сюжет есть, а никак, и надо бы поступить в Литинститут, чтобы поучили. И быт мешает: в туалете писать — ноги затекают.

Подходит крупный, довольный собой мужчина, представляется режиссером-постановщиком массовых действ. Предлагает мысль, что-то насчет очередей в баню. «Ну что Вы, — говорю увещеваючи, — разве это мысль? Вы уж постарайтесь, что-нибудь благородное, глубокое такое...» — «Да мы живем столько десятилетий среди стереотипов, все повторяют одно и то же. Вот был у нас царь, он высказался так: искусство бывает разное. Бывает искусство хорошее, а бывает искусство плохое». — «Так вот Вам и случай — не повторяйте стереотипы, а скажите что-нибудь свое, выношенное». Режиссер некоторое время стоит, подняв взор, но видно, что ему трудно, и он быстро сбивается на рассказы о своей постановочной деятельности. Все слушают с интересом. Оказывается, он ставил открытие и закрытие прошедшего недавно Фестиваля Дружбы с Южной Страной, фон был — семь тысяч курсантов КГБ (не знаю, что такое фон, не спросил). Приглашает в Олимпийский Дворец на демонстрацию мод и выступление рок-ансамбля. Спросить у служебного входа Валерия Петровича, два места десять рублей минус пятнадцать копеек, итого, девять рублей восемьдесят пять копеек. (По-моему, пятнадцать копеек — за мысль — нужно было прибавлять, а не вычитать, но к этому времени я сам запутался).

* * *

Режиссер уходит. Присевший рядом молодой человек, которого я только сейчас замечаю, раздумчиво говорит:

— Как пыжатся люди...

— Пыжатся-то немногие, — отвечаю я. — Большинство зажаты очень. Человек вдруг обнаруживает, что от него ждут умной мысли, а у него ее нет — тут же, под рукой нет! — и пугается. И зажимается, чтобы никто не заметил, что ее нет. Почти никто не размышляет дальше: вот сидит чудик с плакатиком, он же, наверное, такой же испуганный. Но нашел в себе силы, плакатик повесил, сел, предлагает какую-то игру. Значит, в эти игры играть можно, а в какие же, собственно, игры, а попробую-ка и я...

Костя подает голос с цветочной вазы:

— Да, когда Вы мою мысль не купили, я сначала почувствовал себя очень униженным. И больше ничего вроде придумать не могу. Потом посидел тут, посмотрел на людей. И вижу, что я никого не хуже. Вот непонятно: эгоизм — это хорошо или плохо? Человек для других старается, а оказывается, это потому только, что ему самому так приятнее, чем для себя только...

Костя печально вздыхает.

И следа улыбки на его лице за два часа не мелькнуло.

* * *

Веселый человек, в шляпе, на ходу:

— Дарю Вам мысль: Арбатская Республика переживает Ренессанс!

— Это не мысль, а наблюдение; но все равно, спасибо.

* * *

Костя:

— Это какое же Возрождение, и откуда оно взялось?

Аркадий, Борис, Володя

Я познакомился с Аркадием Стругацким в начале шестидесятых годов. Насколько помню, прочтя «Страну багровых туч», я послал Аркадию и Борису письмо, вероятно, на адрес редакции, получил вежливый ответ и напросился на встречу.

Я был к тому времени молодым, подающим надежды математиком, только что закончил аспирантуру и защитился, был взят на работу в Математический институт имени Стеклова Академии наук.

«Оттепель» Хрущева, измученные благородные старики, вернувшиеся из лагерей в окраинные пятиэтажки без лифтов, спутник, песни Окуджавы и Высоцкого, и упрямое чувство, которое я позже назвал «вера в Просвещение», вместе с оптимизмом молодости, определили круг моих друзей на долгие следующие годы.

В конце декабря 1966 года Аркадий и я поехали вместе в Академгородок в Сибири. Тамошний клуб молодых ученых «Под интегралом» присудил Стругацким свою литературную премию.

У меня в Академгородке был близкий друг, Владимир Захаров, тогда молодой физик, а нынче академик РАН. Кроме того, он был и остался прекрасным поэтом; мы и познакомились с ним в пятидесятые, когда оба читали свои стихи и слушали чужие в литературном объединении МГУ «Высотник».

В клубе «Под интегралом» были два этажа, называвшиеся «числитель» и «знаменатель». После церемонии вручения близкие друзья собрались на чьей-то квартире и всю ночь коротали застолье, слушая импровизированный устный роман, который по очереди, глава за главой, сочиняли Аркадий и другой Володин друг, Сергей Андреев. (В феврале 1970 года он погиб от несчастного случая в своей лаборатории).

Роман был посвящен грядущей русско-китайской войне. К рассвету, когда все уже с трудом удерживались в сидячем положении на стульях, я вдруг разлепил веки и прислушался: это Аркадий завершал роман душераздирающей картиной — последний защитник Кремля подрывал себя противотанковой гранатой в последнем еще не сдавшемся Кремлевском сортире, «чтоб не достался врагу».

Я думаю, что поначалу именно эта пластическая картинность, вместе с афористичными репликами героев, привлекли меня в книгах

Стругацких: вспомните неподражаемое восклицание Барона Пампы, висящего вниз головой в пыточном подземелье, куда врывается дон Румата: «Дорогой друг, наконец-то я Вас нашел!» (Цитирую по памяти). Однако в книгах была также странная серьезность: просвещенческое Будущее, условно называемое коммунизмом, вглядывалось в нас, и в наше будущее (со строчной буквы), с тяжелым сомнением во взоре.

Позже интонация их книг стала ощутимо меняться, попытка к бегству не удалась, и еще через некоторое время я сказал Аркадию полушутя, что теперь в их работе можно явственно различить три периода: розовый, голубой, и черный с золотом.

К тому времени издательства принимали и печатали их уже без прежнего энтузиазма, и наступил момент, когда братья решили оставлять у друзей, включая меня, машинописные копии своих новых работ, «чтобы не пропали». Эти тяжелые, некоторые переплетенные, некоторые в папках, пачки слепой, под копирку, печати так и хранятся на шкафу в нашей московской квартире: «Улитка на склоне», «Сказка о тройке», «Гадкие лебеди», «Жук в муравейнике», «Град обреченный»...

Аркадий, японист, и Борис, астроном, были непохожи, как бывают непохожи душевно близкие друг другу братья. Я пытался вообразить, как они пишут вместе, и однажды попросил, нельзя ли мне тихо посидеть в уголке, пока они работают. Аркадий сделал страшные глаза и зарычал. (А мне очень хотелось, я желал увидеть, как рождаются и живут черновики, может быть даже узнать, каким был черновик человека. Позже я понял, что мы и есть черновик.)

Что происходило с поэтикой Стругацких в то время, описать труднее. Безусловно, просвещенческие («утопические») иллюзии ушли, их место постепенно занимали мотивы, взывающие к архаическому и подсознательному.

В конце восьмидесятых я присматривался к языку архетипов Карла Густава Юнга, основателя аналитической психологии. В 1992 году была напечатана моя статья «Архетип Пустого Города»[1], в которой я постулировал и попытался доказать существование нового архетипа, не вошедшего в классический список Юнга. Ниже следует цитата из этой работы, имеющая прямое отношение к творчеству Стругацких.

«Архетипы, систематизированные Юнгом, скорее принадлежат родовому, *нежели* коллективному *бессознательному. Их манифестации связаны с биологической природой человека как особи до такой*

[1] В сборнике: Arbor Mundi // РГГУ. 1992. № 1. С. 28—34. См. наст. изд., с. 303—310

степени, что Юнг может рассматривать архетип как эволюционное развитие инстинкта. ⟨…⟩

Архетип Пустого Города, постулируемый здесь, принадлежит коллективному бессознательному в более прямом смысле. ⟨…⟩ [Это] есть форма социума, лишенная его души и не ждущая наполнения, труп, никогда не бывший живым телом, Голем, сама жизнь которого есть смерть. Выявление этого архетипа в проектном и утопическом сознании именно и связано с возможностью воспринять пустую форму как план. Проектное сознание, однако, глухо к гулу мертвой воды. Его доносит искусство: „опустелый улей“ Гумилева и ручей в руинах Тарковского.

Характерно, что два современных кинорежиссера, наиболее остро чувствующих этот архетип, Тарковский и Сокуров, обратились к двум вещам Стругацких, чьи лучшие страницы (дневник Абалкина из „Жука в муравейнике, экспедиция из „Града обреченного“, описания Леса в „Улитке на склоне“) посвящены Пустому Городу, и проявили этот мотив даже там, где в прозе Стругацких он особо не прописан».

История знакомства, сотрудничества, и к концу — конфликта Аркадия и Бориса с Андреем Тарковским пунктиром помечена в Дневниках Тарковского «Мартиролог», 1970—1986.

26 января 1973 года Тарковский пишет: только что прочел «Пикник на обочине», из него можно сделать замечательный сценарий. (Так зачинался «Сталкер».) 27 января 1975 года: повидался с Аркадием Стругацким. Тот очень доволен, что Андрей хочет снять «Пикник». 3 июня 1975 года: договорились со Стругацкими о «Пикнике». Познакомился с Борисом. Он милый, но, в отличие от Аркадия, умник; сразу видно, что он тут идеолог. Аркадий — работяга и симпатяга. Впрочем, и тут не так все просто[2].

К концу лета 1977 года в работе над «Сталкером» происходит целая серия кризисов: уже отснятая пленка загублена при проявлении на «Мосфильме», Аркадий и Борис намерены переписать сценарий, полностью изменив характер героя… В записи от 28 июня 1978 года, кажется впервые, прорывается неприязнь к Аркадию, и после этого,

[2] Я не беру эти слова в кавычки, потому что они даны в обратном переводе — пересказе — с немецкого и французского. Я никогда не видел русского текста. Берлинское и парижское издания «Мартиролога» прислали мне независимо друг от друга мои коллеги, которые в записи Тарковского от первого сентября 1970 года нашли стенограмму моей импровизированной речи на просмотре «Андрея Рублева» в клубе Московского Университета. «Рублев» в то время «лежал на полке», к широкому показу разрешен не был, и горечь текста Тарковского даже при перечитывании сорок лет спустя оставляет медный привкус во рту.

несмотря на завершение съемок и успех картины, отношения охлаждаются и кончаются разрывом.

После странных событий на съемке в 1977 году Аркадий говорил мне, что они вызвали на себя какие-то космические силы, и теперь не властны над тем, что сами начали. Этот мотив был разработан в «За миллиард лет до конца света». Художники, которые так чувствуют свою работу, вряд ли могут сойтись на множестве повседневных компромиссов, которых требует жизнь; и их пути расходятся.

У Тарковского есть еще несколько записей о «Сталкере» и о прерванной совместной работе над сценарием «Ведьма», который он переделал сам и снял по нему в 1985 году свой последний фильм «Жертва».

Аркадий был огорчен тем, что Тарковский даже не упомянул его в титрах, хотя замысел и первый вариант сценария принадлежали ему; он говорил мне об этом, оставляя у меня машинопись «Ведьмы».

Насколько я знаю, ничем не была омрачена их взаимная симпатия с Володей Высоцким. Оба были крепкие мужики, знавшие себе цену, этот внешний образ, совпадавший с внутренним самоощущением, оба признавали друг в друге и уважали.

В шестидесятые годы Аркадий с Леной жили у Киевского вокзала, а я — на Вавилова. Кажется, с Володей они познакомились у меня. Володя приезжал после театра, перекусывал и брался за гитару. В те годы, когда мы общались регулярно, Володя дал зарок не пить, и во избежание соблазна бутылок на стол не ставили. Пение затягивалось далеко заполночь; стены были тонкие, но соседи никогда не жаловались.

Я и сейчас слышу, как Володя поет, скажем, песенку застенчивого боксера

Бить человека по лицу я с детства не могу...

а Люся, жена, смотрит на него такими глазами, каких я никогда больше не видел у женщины, ни тогда, ни потом.

Просторечие, а чаще роскошная до барочности имитация просторечия в песнях и словесных импровизациях Высоцкого были неподражаемы.

Как-то мы случайно оказались с Володей и несколькими знакомыми за столом в Болшеве. Он стал рассказывать историю о том, как охранник не пускал его в автобус, увозивший Марину Влади с группой иностранцев в экскурсию. «А ты кто такой?», — вопросил его охранник. «Ну, я ему и сказал» — тут Володя сделал сценическую паузу, обвел глазами замершее застолье, остановил взгляд на Ксане, единственной женщине в компании, и завершил: «...БЕЗО ВСЯКОГО СЛОВАРНОГО ЗАПАСУ!»

В начале семидесятых Аркадий и я стали почти соседями: мы оба переехали в длинные шестнадцатиэтажки, выстроенные торцом к проспекту Вернадского, почти напротив Тропаревской церкви, а потом и нового здания Академии Генерального Штаба. Дома стояли (и стоят) по краю щедро распланированного жилого района, со школой, сквериком и пивным баром «Ракушка», позже пришедшим в упадок и заброшенном. Именно в этом баре, по свидетельству Аркадия, произошла передача партитуры труб Страшного Суда.

Мы собирались иногда с немногими друзьями, то у меня, то у него. Об одной такой встрече на нашей кухне вспоминает в своем стихотворении Володя Захаров:

> ⟨...⟩ — Хороша была армия и у японцев,
> есть у них такая солдатская песенка:
> Когда наша дивизия мочится у Великой Китайской стены,
> над пустыней Гоби встает радуга,
> сегодня мы здесь,
> завтра в Иркутске,
> а послезавтра
> будем пить чай в Москве!
> Перевод Аркадия Стругацкого,
> он пел эту песенку
> и по-русски и по-японски.
> — Вы были с ним друзья?
> — Сильно сказано,
> большая разница в возрасте.
> Хотя июльским утром,
> в некой квартире на юго-западе,
> семь бутылок «Эрети»,
> было такое грузинское вино,
> дешевое, кисленькое,
> но совсем неплохое. ⟨...⟩

Несмотря на такую же разницу в возрасте, я ощущал, быть может самонадеянно, что мы были с Аркадием друзьями. Я не могу ни обосновать это чувство, ни подкрепить его свидетельствами. Мы были очень разными, наши жизненные опыты почти не пересекались. Но я чувствовал к Аркадию глубокую симпатию, а его и Бориса размышления о человечестве и его судьбе воспринимал с жадностью, потому что они удовлетворяли какую-то глубокую потребность, которую нельзя было утолить иначе.

В шестидесятые годы я читал довольно много фантастики, но кроме работ Стругацких, воспринимал ее как чистое развлечение. В памяти мало что осталось, кроме смешного этюда Азимова — далекое будущее, мальчик-вундеркинд, к общему изумлению, открывает нечто немыслимое: он ухитряется умножить шесть на семь с помощью каких-то каракулей на бумажке, тогда как все нормальные люди просто нажимают клавишу на компьютере...

Такие вещи делать было легко. Братья занимались чем-то совсем другим.

Все наши встречи, компании, выпивки (однообразные, и потому не запомнившиеся, а запомнилось почему-то первое знакомство с соевым соусом на посиделках с братьями в ресторане «Пекин») были всего лишь ритуалом, смысл которого почти никак в этом ритуале не проявлялся.

Секрет этот, как сказал поэт, «разгадке жизни равносилен».

Бонн, 4 февраля 2007 года

Часть IV

Язык, сознание, статьи о книгах

К проблеме ранних стадий речи и сознания (филогенез)

Введение

Пушкинская метафора «дым столетий» точна: количество деталей, различимых историческим зрением, быстро падает, и субъективное время прошлого удобно отмечать в логарифмической шкале. Около двадцати лет назад родились Вы, или Ваш ребенок, или Ваш внук. Около двухсот лет назад родилась современная техническая цивилизация. Около двух тысяч лет назад сформировалась духовная культура, в которой живет современный (условно говоря, западный европоцентричный) мир; к этому времени было сказано все, что мы знаем и сейчас о человеке как о социальном существе; были произнесены все великие формулы морали; были кодифицированы все образцы человеческого поведения в отношении к богам, природе и людям. Нужды нет, что они противоречат друг другу, — мы таковы. Около двадцати тысяч лет назад, в верхнем палеолите, процесс гоминизации, сделавшей нас таковыми, завершился биологически; человеческая конституция сложилась в современном виде; человек овладел развитой речью, изготовлял разнообразные каменные и костяные орудия. Где-то в середине этого двадцатитысячелетнего периода появился первый город — Иерихон, а ближе к началу нашей эры пала Троя, и сквозь ее пламя мы видим бесчисленные пожары Нового и Новейшего времени.

Время, которое интересует нас в этой статье, — еще на порядок дальше: это интервал между $2 \cdot 10^4$ и $2 \cdot 10^5$ (может быть, $5 \cdot 10^5$) лет до нашей эры. Десять тысяч праотцов отделяет каждого из нас от этой эпохи. К этому периоду относится процесс глоттогенеза, рождения речи и языка, развития органов речи и управляющих ими мозговых центров до современного уровня; формирование межполушарной асимметрии и кристаллизация человеческой психики, какой мы ее знаем сейчас.

Научные представления об этом процессе накапливаются медленно и с трудом. Периоды умозрительных концепций сменяются вре-

---

Впервые опубликовано в кн.: Интеллектуальные процессы и их моделирование. М.: Наука, 1987. С. 154—178.

менами, когда сама постановка вопроса представляется ненаучной. Одна из трудностей любой эволюционной теории коренится в том, что мы всегда недостаточно знаем структуру того, что́ эволюционирует. Дело в том, что описание эволюции не есть описание истории как временно́го процесса: мы не пытаемся реконструировать все события, имевшие место, но лишь те, в которых менялся системный характер изучаемого фрагмента действительности. Естественные языки как система подробно изучены на уровне фонологии, грамматики и в какой-то мере лексики. Благодаря такой направленности сравнительного языкознания появилась возможность глубоких реконструкций древних языков, и мы знаем словари ностратического и сино-кавказского языкового состояния, включающие несколько сот корней и относящиеся к дописьменному периоду, возможно, десятитысячелетней давности. Может ли компаративистика заглянуть намного дальше вглубь? Экспоненциальный распад основного словаря, постулируемый глоттохронологией для языкового развития, при продолжении назад означает полное исчезновение следов более раннего состояния [1, 2]. До какого-то уровня дело спасает учет все более обширного современного материала. Если мы хотим сказать что-нибудь о еще более ранней истории языка, мы должны отказаться от реконструкции словаря и начать следить за эволюцией других системных характеристик. Например, любое представление о структуре исполняемых языком функций позволяет поставить вопрос об эволюционном формировании этой структуры. Примем в качестве иллюстрации классификацию функций языка в зависимости от установки говорящего, по Р. Якобсону [3]: а) эмотивная (установка на выражение внутреннего состояния); б) конативная (установка на адресата с целью вызвать у него определенное состояние); в) поэтическая (установка на сообщение); г) метаязыковая (установка на систему языка); д) денотативная, когнитивная (установка на действительность); е) фатическая (установка на контакт). Обдумывая эту классификацию в эволюционном плане, мы можем констатировать, что эмотивная функция является наиболее архаичной и унаследована еще от животного состояния; что когнитивная и фатическая функции должны были играть огромную роль уже на первых стадиях глоттогенеза; что метаязыковая функция сформировалась поздно и ее преобладание характеризует очень своеобразные культуры, как древнеиндийская [4]. Конативная функция — один из особо интересных для нас в этой статье сюжетов; мы попытаемся аргументировать тезис о ее доминирующей роли на ранних стадиях глоттогенеза. Наконец, поэтическая функция, вероятно, неудачно выделена: при ориентации на эволюционный процесс генезис поэзии должен описываться иначе.

Переходя от эволюции словаря к эволюции системы функций языка, мы, однако, меняем предмет исследования — переходим от лингвистики к психолингвистике. Это означает, что внимание переориентируется с языка как знаковой системы на язык как феномен психики и средство социального взаимодействия. Но психика человека эволюционировала вместе с языком; более того, до окончательного формирования членораздельной речи не мог сформироваться и психический облик исторического человека. Следовательно, мы должны располагать и представлением о системной психике, которая могла бы меняться как система в диахроническом плане.

Выбором такого системного описания будут определяться и вопросы, которые мы ставим. Например, мозг образует замечательно сложную материальную систему, которая обслуживает психику и является ее носителем. Поэтому законен и очень интересен вопрос об эволюции нейрофизиологических коррелятов психических процессов. С другой стороны, предположим, что нас интересует естественная история самосознания, представления живого существа о своем «я». Тогда окажется, что надежно переформулировать этот вопрос в проблему эволюции центральной нервной системы мы не умеем. Исследователь в зависимости от своих ценностных установок либо откажется от такой задачи (таковы установки бихевиоризма), либо вынужден будет привлекать как можно более обширный материал, свидетельствующий о самосознании хотя бы косвенным образом: данные о поведении животных и психопатологии человека, сведения об эволюции синтаксического строя естественных языков и отчеты о действии галлюциногенов; интерпретацию мифов и теорию баз данных; наконец, интроспекцию и мысленный психологический эксперимент.

В начале века интроспекция и «понимающая психология» постепенно выходили из моды, и надолго стала влиятельной жесткая структурная схема организации психики по Зигмунду Фрейду, с топографией «Оно—Я—Сверх-Я» и четкими контурами теории развития этой системы, как индивидуального, так и родового. Вероятно, нельзя считать исторической случайностью близость по времени возникновения таких концепций, как психоанализ Фрейда, теория фонетических законов по младограмматикам, анализ волшебной сказки Проппом и принципы формальной школы в литературоведении. Критерии авторитетности и научности гуманитарного рассуждения сместились, образцом стали все в большей степени служить естественные науки, а течение психологии, избегшее абстракций фрейдизма, проявило склонность к превращению себя в науку о человеке как управляющем звене технологического процесса. Время покажет, наступает ли в конгломерате гуманитарных наук период нового синтеза.

В этой статье мы занимаемся одним кругом вопросов психолингвистического характера, который связан со следующей проблемой.

Стандартный прием исследования филогенетической эволюции состоит в привлечении онтогенетических параллелей. В применении к истории речи и языка это означает, что мы должны сопоставлять развитие речи и истории гоминизации с развитием речевых навыков у ребенка. Но ребенок начинает говорить, лишь поскольку он погружен в речевую среду — вокруг него и с ним говорят взрослые. Кто был «взрослым» для раннего человека?

В попытках ответить на этот вопрос мы обсуждаем два обстоятельства: неравномерность языкового развития индивидуумов и наличие на шкале речевого поведения двух полюсов, которые ниже условно названы «доминантным» и «субдоминантным».

Неравномерность языкового развития в историческое время проявляется уже в том, что несмотря на демократизацию образования, такие национальные поэты, как Данте и Пушкин, настолько превосходят по своим языковым способностям общий уровень, что на столетия выступают учителями языка всей нации. Роль людей с выдающимися речевыми способностями, вероятно, была еще более значительна на заре становления языка.

Мы противопоставляем доминантное и субдоминантное речевое поведение, грубо говоря, по степени участия в нем воли и сознания. В современной литературе, вопреки предостережениям А. С. Выготского, речевое поведение рассматривается преимущественно как компетенция рациональных и целесообразных начал в человеческой психике. Если говорить упрощенно, предполагается, что при порождении речи в слове формируется (или оформляется) осознанная мысль, а при восприятии речи эта мысль влияет на поведение воспринимающего опосредованно, через ее понимание и оценку. Именно такое поведение мы называем доминантным, а скажем, некоторые типы поведения под гипнозом или в патологии — субдоминантным (см. ниже).

Мы аргументируем позицию, согласно которой субдоминантное речевое поведение весьма архаично; оно играло важную роль в эпоху позднего глоттогенеза, после тысячелетий медленной, плохо артикулированной и лексически бедной речи. Субдоминантное порождение речи — возможно, основная функция шаманов — могло быть мощным фактором суггестии, объединяющим первобытный клан независимо от степени понимания этой речи рядовыми членами клана.

Это архаичное говорение было в значительной мере речью вне языка, т. е. распространенными речевыми актами, не находящимися в рамках стабильной языковой системы. Парадоксальность представления о речи вне языка, т. е. вне нормы, может быть несколько смягчена разными аргументами. Умелое ситуативное использование речи даже на незнакомом слушателю языке может быть вполне эффективным. Специалист по искусственному интеллекту Э. В. Попов [5] отмечает даже, что «благодаря ведущей роли смысла человеческая речь способна преодолеть практически любое сопротивление языка путем привязки речевого акта к той или иной ситуации». К этому следует добавить, что суггестивное воздействие речи предполагает актуализацию других уровней значения, чем те, которые передаются словами сложившегося национального языка. В [3, с. 382] отмечено в качестве малоисследованной лингвистической задачи то обстоятельство, что языковая компетенция рядового индивидуума в роли слушающего, как правило, выше его же компетенции в роли говорящего. Мы уверены, что эта разница компетенций для древних людей была максимальной.

Итак, концепция, обсуждаемая здесь, такова. Архаичной функцией речи в эпоху позднего глоттогенеза было программирование поведения, в большей мере, чем сообщение информации. Носителями (потенциального) языка были отдельные индивидуумы, в большей мере, чем социум. Порождение речи было вызвано мощными индивидуальными психологическими силами, действующими изнутри, в большей мере, чем общественными нуждами, хотя закрепление системы речевого поведения оказалось связано со способностью речи суггестивно объединять группу людей, превращая их в единый социальный организм (в сочетании с ритуальным поведением). Кодификация и закрепление структуры языка были долгое время сакральной функцией поколений жрецов-шаманов. Период распространения этого активного речевого поведения нового типа, совпавший с периодом превращения Homo sapiens в Homo sapiens sapiens, мог быть относительно коротким, поздним (50 000—20 000 лет назад) и связанным с распространением по ойкумене специфического генотипа, условно говоря, кроманьонского, который вытеснил неандертальский, генотипа, несущего потенции новой человеческой речи. Этот относительно короткий период мог быть также эпохой резкого повышения активности обоих полушарий головного мозга в связи с перестройкой межполушарных связей при формировании речевых центров; в таком случае не случайно его конец в Европе совпадает с эпохой расцвета пещерной живописи. Отражением этого периода в мифологическом сознании служит комплекс черт «мифологического плута». Формирование индивидуального самосознания относится к еще более позднему времени и завершается лишь в историческое время. Кратко говоря, можно утверждать, что речь предшествует языку, язык предшествует сознанию.

Эта работа не является ни обзорной, ни полемической; это частная попытка рассмотреть проблему глоттогенеза в свете данных психолингвистики. Обзор различных точек зрения и современных исследований можно найти в книгах [6, 7, 8]; особенно цельная и оригинальная концепция изложена в [9].

Я глубоко признателен Вяч. Вс. Иванову, Е. М. Мелетинскому, А. А. Нейфаху, В. А. Файвишевскому за многие стимулирующие обсуждения. В частности, роль суггестивной функции речи в филогенезе была аргументированно подчеркнута В. А. Файвишевским в ряде работ.

Речь и сознание

Эксперименты Фромма. В работе [10] описана серия гипнотических экспериментов со студентом Доном. Отец и мать Дона были японцами американского происхождения. Дон родился за пять дней до нападения на Перл-Харбор. После этого нападения японцы, находившиеся в Америке, «нисеи», были задержаны в Центрах для «перемещенных лиц» (которые Дон называет концлагерями). В результате детские годы Дон провел в японоязычной среде.

К моменту эксперимента Дон, по его собственному утверждению, не говорил и не понимал по-японски, за исключением нескольких слов вроде arigato (спасибо), которым его научила бабушка.

Один из экспериментов имел целью добиться «возрастной регрессии». Во внушенном возрасте 7 лет Дон по-прежнему не понимал по-японски даже простых вопросов. Следующая стадия внушения перевела его в возраст около 3 лет, «в день, когда он чувствовал себя хорошо и счастливо». После недолгой паузы он возбужденно заговорил по-японски; монолог продолжался 15—20 мин. Возвращенный в семилетний возраст, он вернулся к английскому языку.

К следующему аналогичному эксперименту был подготовлен магнитофон. Экспериментатор побудил Дона говорить по-японски непрямым методом, использовав американское приветствие hi!, омонимичное японскому hai («да»). Услышав это слово, испытуемый повторил его трижды и разразился потоком японской речи. Магнитофонная запись была позже прослушана и переведена.

Сам Дон не помнил хода эксперимента в результате спонтанной амнезии (постгипнотическая амнезия может быть также внушенной). Слушая позднее запись, он мало что понимал. Он, однако, сумел вспомнить некоторые из своих мыслей во время говорения: он думал об умной собачке с большими глазами, ее подарила мама, и он маму благодарил. Это воспоминание согласовалось с переводом магнитофонной записи. Вне гипнотического состояния Дон не помнил, что у него была собака, и полагал, что в Центре собаки были запрещены.

С помощью нового гипнотического эксперимента, имевшего целью вызвать «скрытого наблюдателя», удалось получить самоотчет Дона о его ощущениях во время японоязычной речи [10, с. 82]: «Мои губы как будто сами вдруг стали так смешно складываться. Я хотел сказать что-то, но не знал, что я говорю на самом деле. Слова просто выходили сами, и я не знал, настоящие ли они. Самое удивительное было, что мускулы действовали помимо моей воли, как будто мое сознание (mind) в этом не участвовало».

Концепция доминантного и субдоминантного речевого поведения. Мы будем понимать под речевым поведением производство или восприятие текстов, устных или письменных. Как уже упоминалось, речевое поведение изучается главным образом в его связи с рациональными и волевыми инстанциями психики (ср. [11, с. 102] по поводу характерных формулировок).

Такое речевое поведение мы будем называть доминантным.

Описанные выше эксперименты Фромма доставляют образцы субдоминантного речевого поведения. Когда Дон воспринимает гипнотическое внушение, побуждающее его говорить по-японски, его поведение меняется не таким образом, каким оно могло бы измениться в обычной беседе. Когда Дон говорит по-японски, вопреки своему убеждению, что он этого делать не может, характер порождения речи также не таков, каким он бывает в нормальном состоянии.

Хорошо известно, что у гипнабельных испытуемых прямое воздействие слов экспериментатора может произвести амнезию, анальгезию и гиперестезию; положительные и отрицательные галлюцинации; каталептический мост; наконец, побудить испытуемого к отсроченному, постгипнотическому действию, истинный повод которого не осознается. При таком воздействии речи на поведение сильно подавлены сознательные и критические механизмы ее восприятия; тем эффективнее оказывается само воздействие.

Итак, в доминантной моде восприятия речи содержание речи осознается, критически оценивается; реакция, речевая или поведенческая, является произвольной. В субдоминантной моде восприятия содержание речи не подвергается критической оценке, уровень его сознания понижен, императивная компонента содержания речи приводит к непроизвольным реакциям (иногда такие реакции в норме и не бывают произвольными). По аналогичным признакам противопоставляется доминантное и субдоминантное порождение речи (см. самоотчет Дона и ниже): в субдоминантной моде речевой акт может стать полностью неподконтрольным сознанию.

Нельзя представлять себе, что субдоминантное поведение является только ущербным по отношению к доминантному: напротив, по каким-то параметрам оно может расцениваться как более эффективное. Сознание действует не как порождающий механизм речевого поведения, но скорее как фильтр, который задерживает или переориентирует действия и реакции, генерируемые более глубинными слоями психики.

О выборе терминов. В исследованиях по межполушарной асимметрии головного мозга доминантным принято называть то полушарие, в коре которого находятся центры, управляющие речевым поведением (у праворуких в норме это левое полушарие). Противоположное полушарие называется субдоминантным.

Наше предложение называть доминантным сознательное речевое поведение не противоречит духу этой терминологии.

В более широком плане открытие межполушарной асимметрии часто рассматривалось как обнаружение нейрофизиологического коррелята большого количества оппозиций, обсуждавшихся ранее в разных областях исследования (ср. [12]). В [13] приведен неполный список таких дихотомий разных уровней, куда входят рациональное/интуитивное, логическое/образное, последовательное/одновременное, дискретное/непрерывное, сознательное/бессознательное и т. д., вплоть до таких широких культурно-исторических противопоставлений, как Запад/Восток. При этом сам характер корреляции таких пар друг с другом и с межполушарной асимметрией часто проблематичен и, во всяком случае, пока не может быть установлен на том же уровне строгости, на каком разными методиками и в разном материале обнаруживаются сами оппозиции.

Тем не менее наличие корреляций представляется несомненным. Иными словами, мы полагаем, что все упомянутые оппозиции и многие другие не без оснований выстраиваются в один ряд, хотя бы детальные связи между членами этого ряда оставались непрослеженными или плохо понятыми. В этих условиях удобно иметь родовые термины для двух членов постулируемой более фундаментальной оппозиции. Кажется, пара доминантный/субдоминантный могла бы эффективно выполнять эту роль. Пользуясь ею дальше в таком смысле, мы определенно не постулируем конкретного участия механизмов разных полушарий в той или иной моде поведения, а лишь ставим вопрос о нем.

Со всеми этими оговорками внимание к возможной неоднородности любого изучаемого материала по отношению к указанной оппозиции кажется полезным методическим принципом. Покажем это на примере двух конкретных исследований. Интересный цикл работ Фрумкиной, подытоженный в [14], посвящен изучению семантики цветообозначений естественного языка. При этом автор аргументированно отвергла любые системы семантических описаний, опирающиеся на науку о цвете (или же цветовосприятии): «...наша исходная позиция состоит в том, что означаемое, сигнификат, раскрывается только через те отношения, которые устанавливаются между означаемыми во внутреннем мире говорящего». Между тем, работы по межполушарной асимметрии с использованием временного угнетения одного из полушарий показывают, что лексика цветообозначений довольно четко делится на две группы по характеру своего сохранения в таких экспериментах. Так, простые цветообозначения «красный», «черный» сохраняются при шоках доминантного полушария, тогда как «песочный», «лимонный» (и, вероятно, такие выражения, как «цвета кофе со сливками» и т. п.) преобладают при шоке субдоминантного полушария [15]. Возникает предположение, что «внутренний мир» испытуемого принципиально неоднороден уже в аспекте семантики цветообозначений и по-разному обрабатывает лексику из двух частей всего списка: типично доминантной и типично субдоминантной. Очевидно, это следует учитывать при организации эксперимента.

Наш второй пример относится к проблеме «руки» в палеолитическом искусстве [16, 17]. В «репертуаре» верхнепалеолитического творчества известно большое количество оттисков ладони или кисти, намазанных охрой, на стенах пещер (реже встречаются оттиски черной краской и негативные изображения рук). «Гипотеза руки», критике которой посвящена работа [16], состоит в предположении, что отпечатки рук суть ранняя стадия развития палеолитического рисуночного искусства, продолжением которой являются контурные анималистические рисунки (Столяр отвергает также старую концепцию, согласно которой отпечатки рук символизируют роль руки в трудовом процессе и гоминизации предков человека). Столяр проницательно замечает, что «силуэтные эстампы отдельных рук и раннеориньякский контурный рисунок „зверя вообще“ резко различаются как явления разной, генетически не связанной природы» (с. 24). Можно высказать гипотезу, что по своим психологическим корням отпечатки рук относятся к субдоминантной категории, тогда как контурный рисунок — к доминантной (примерно такова точка зрения, высказанная в [17]). Согласно [15], «при угнетении правого полушария... кисти рук в целостном изображении человека обычно не представлены... При угнетении левого полушария... чаще всего в целостном изображении человека представлены и кисти рук, и стопы, при этом может наблюдаться исключительно диспропорциональное увеличение их размеров». Эксперименты с угнетением одного полушария, при которых испытуемым была бы представлена возможность выбора между техникой контурного рисования и техникой отпечатка, могли бы дать дополнительную информацию по этому вопросу.

Филогенез речи неразрывно связан с формированием доминантности полушарий. Поэтому для темы нашей статьи существенны любые свидетельства о стадиях этого формирования.

Вернемся теперь к субдоминантной моде речевого поведения. Ниже следует обзор некоторых относящихся к ней явлений.

Эффекты внушения. В обзоре [18] гипноз ставится в широкой контекст диссоциативных явлений психики. Согласно определению автора, «цель гипнотических процедур — привести испытуемого в состояние готовности к диссоциативному опыту (experience), нарушив обычную непрерывность памяти и исказив или подавив ориентацию на реальность, посредством прямой словесной суггестии, при выборочной концентрации внимания и невнимания и подходящей стимуляции воображения» (с. 226).

Как подчеркивает В. А. Файвишевский, самое существенное в гипнозе — измененное состояние сознания; повышенная внушаемость — лишь его эпифеномен. «Соскальзывание в гипноз подобно вывиху сустава». Гипноз стал возможен лишь после возникновения речи.

Когда гипнотическое состояние достигнуто, экспериментатор производит то или иное словесное внушение и наблюдает поведенческие эффекты. Вот несколько типичных явлений.

А) *Гипнотическая амнезия.* Согласно Хилгарду [18, с. 77], «первая и наиболее поразительная характеристика амнестического ответа — это власть слова при индуцировании и снятии амнезии». В одном из экспериментов Хилгарда загипнотизированный Мэтт выучил список слов и получил внушение забыть его. Самоотчет Мэтта: «Я не думал, что забуду эти слова, когда он велит мне забыть. Но потом я старался их вспомнить и повторить, и не мог. Первое слово или два вспоминались, а дальше никак. Потом и эти исчезали... Знаешь, что они где-то тут, прямо чувствуешь, что они тут, но на их месте пустота. До них невозможно добраться». После снятия амнезии: «Не то чтобы пришло озарение. Я должен был стараться вспомнить. Но теперь это удалось».

Степень произвольного участия испытуемого в достижении амнезии может меняться. Некоторые гипнабельные испытуемые чувствуют, что они активно участвуют в амнестическом опыте, хотя не ощущают ответственности за это. Самоотчет Мари: «Вдруг как будто экран появился между словами и мной... Странное ощущение, потому что знаешь, что что-то случилось, и чувствуешь себя глупо, потому что не можешь высказать это, и в то же время знаешь, что он сказал, что его слова забудешь... Как ни стараешься, не вспомнить... может, часа за два, но столько времени мне не дали». После того как Мари сказали, что она может вспомнить все: «Экран вроде как медленно поднялся. Слова стали появляться, по одному».

Б) *Автоматическое письмо и автоматическая речь.* Согласно классическому описанию [19, с. 234], поле сознания человека может подвергаться вторжению подсознательных импульсов к действию или бездействию, источника которых человек не сознает; соответствующие поведенческие реакции носят общее название автоматизмов. «Эти импульсы могут вызвать автоматическую речь или письмо, значения которых человек не сознает в самый момент их производства».

Постгипнотическая суггестия, на время или по сигналу, доставляет контролируемую технику порождения автоматизмов. Исполняя внушенное действие, испытуемый не сознает, что оно внушенное, и изобретает его мотивировку. В эксперименте, описанном в [18, с. 200, 201], диссоциация была настолько полной, что и само действие не осознавалось. Загипнотизированному испытуемому было внушено, что его левая рука потеряла чувствительность, а правая рука будет писать автоматически. Когда экспериментатор уколол левую руку иголкой, правая написала: «Ouch, damn it, you are hurting me». Обе руки были закрыты экраном и находились вне поля зрения испытуемого, который через некоторое время спросил, когда же начнется эксперимент.

Другие образцы субдоминантного речевого поведения доставляют суггестивное обучение по Лозанову, аутотренинг и т. п. Обилие имеющегося материала здесь резко контрастирует с его теоретической неизученностью.

Для дальнейшего обсуждения предположительной роли субдоминантного речевого поведения в процессе глоттогенеза существенно представлять себе, с какими свойствами личности связана высокая гипнотическая внушаемость. Согласно [20, с. 259, 260], гипнабельные люди не характерны ни патологией личности, ни слабостью «я», ни интровертностью. «Испытуемый — доброволец, проявляющий высокую гипнабельность, должен, по-видимому, быть охарактеризован скорее как в высшей степени общественная личность (которого привлекает группа и который способен ей противостоять)». «Наиболее гипнабельными по тесту Кэттелла оказываются самые *открытые* и *властные*, и по тесту Гилфорда—Циммермана — самые *общительные* и пользующиеся достаточно сильным влиянием на окружающих».

Не вполне ясна роль эмоционального аспекта коммуникации при внушении; во всяком случае, с ним коррелирует степень императивности внушающего. Известно, что восприятие эмоционального аспекта речи часто является бессознательным и опирается на системы субдоминантного полушария. Эмоциональная, субдоминантная семантика сообщения может восприниматься как главная, особенно если она противоречит доминантной семантике прямого смысла слов. При этом, как отмечено Бассиным, «по своему „филогенетическому возрасту“ он (эмоциональный аспект) не только не уступает аспекту содержательно-смысловому, но в некоторых случаях его даже значительно превосходит. Этот „язык“ врожденно воспринимаем не только всеми людьми Земли (независимо от их возраста и уровня культуры...), но даже высшими животными» [21, с. 22].

Глоссолалия, эхолалия, синдром Туретта. Эхолалией называется непроизвольное повторение слушающим того, что он услышал (чаще — концов фраз или последних слов).

Глоссолалия — это своеобразное речевое поведение, наблюдающееся всегда в группах и всегда в контексте религиозных служб.Оно возникает вслед за некоторым состоянием транса и заключается в текучей речи, подобной речи на иностранном языке, непонятном для самого говорящего. Первые зафиксированные случаи глоссолалии связаны с ранним христианством. В «Первом послании к коринфянам» апостол Павел несколько раз упоминает это «говорение на языках», например в 14:2: «Ибо кто говорит на [незнакомом] языке, тот говорит не людям, а Богу, потому что никто не понимает [его], он тайны говорит духом».

Современные магнитофонные записи глоссолалии с несомненностью показывают, что эта речь не является речью ни на одном из естественных языков. В то же время эти записи обнаруживают некоторые инвариантные паттерны чередования ударных/безударных, интонации повышения/спуска в конце фраз и т. п., не зависящие от родного языка говорящего. Вот образец (записан у индейца племени майя в Юкатане): aria ariari isa, vena amiria asaria.

У Данте (Ад. XXXI: 67) Немврод, первый царь Вавилона и строитель Вавилонской башни, стало быть, легендарный виновник дифференциации языков, произносит непонятную фразу: «Raphel mai amech zabi almi». Интересно отметить, что по огласовке она очень напоминает цитированный глоссолалический запев.

Наконец, редко встречающийся синдром Туретта [22, с. 351] состоит в периодическом непроизвольном испускании, посреди нормальной беседы, так называемой хульной речи, рычащих звуков, непристойностей и др., что обычно относится к речевой компетенции субдоминантного полушария. Почти все пациенты леворуки.

Разобранные выше формы субдоминантного речевого поведения, возможно, отражают действие каких-то глубинных порождающих механизмов речи, не подвергнутое контролю высших инстанций.

Смешанный случай субдоминантного поведения: «голоса». Слуховые галлюцинации («голоса») представляют особо интересный образец субдоминантного речевого поведения, поскольку объединяют в себе субдоминантные порождение и восприятие речи. Трудным представляется вопрос о границах между нормой и патологией. Джейнз, из книги [22] которого почерпнуты следующие сведения, отмечает что после чтения лекций о голосах поразительно большое количество слушателей подходили к нему и рассказывали о своих голосах.

Описано множество случаев слуховых галлюцинаций у шизофреников (особенно до современных средств химической терапии, которые почти исключили классические формы заболеваний). Голоса могут как угодно относиться к пациенту: они беседуют, угрожают, клянут, критикуют, советуют, улещивают, утешают, издеваются, командуют, комментируют происходящее и предсказывают будущее, кричат, стонут; говорят медленно, быстро, в рифму, ритмично, на иностранном языке; два голоса могут обсуждать пациента.

Очень существенно, что голоса обладают высокой степенью императивности; при независимости от контролирующего сознания, голос может побудить человека совершить самоубийство или, как в случае Жанны д'Арк, спасти страну и короля.

Гипотеза Джейнза

Одна из центральных концепций книги [22] основана на предположении, что возбуждение слуховых галлюцинаций у человека связано с превышением некоторого порога стресса и что в древности этот порог был много ниже, а голоса слышал практически каждый человек, чем и определялось его поведение в критических обстоятельствах. Сознание современного человека, по Джейнзу, является весьма поздним психическим механизмом, заместившим следование голосам, которое воспринималось как следование голосу Бога (или богов). «В бикамеральном человеке повиновение своему голосу и было заменой *произвольности* [действия]».

Распад этого поведения Джейнз относит примерно ко времени создания гомеровского эпоса, полагая, что в «Илиаде» зафиксировано еще архаическое состояние психики человека, управляемого голосами Богов, тогда как Одиссей — уже человек, обладавший современным сознанием (см. детальный разбор части аргументации Джейнза в [23]).

Даже считая концепцию Джейнза чрезмерно жестко сформулированной, трудно отказаться от мысли, что в ней отражены существенные черты долгого процесса формирования современного сознания и «доминантной психики» в филогенезе.

Сознание, диссоциации и компьютерная метафора. Итак, психика древнего человека преимущественно субдоминантна; современного — преимущественно доминантна; различие этих двух мод мы связываем с участием и развитостью сознания; так что следует сказать несколько слов о сознании.

Употребление этого слова никогда не имело терминологического характера: см. [24, 25], где обсуждены наиболее часто встречающиеся контексты. Мы попытаемся лишь выявить такие черты представления о сознании, которые существенны для целей этой статьи.

Будем понимать под психикой совокупность информационных процессов, происходящих в центральной нервной системе. Мы указываем, таким образом, на уровень рассмотрения: один и тот же процесс проведения импульса по нервному волокну мы не относим к психике, пока и поскольку интересуемся его физическими характеристиками; но относим, если рассматриваем его в составе сигнала «в поле зрения появилась косая черта».

Мы предполагаем, что часть психических процессов выполняет особую роль: информация, носителями которой они являются, есть информация о самой психике. В качестве первого приближения можно вообразить подробный план комнаты, лежащий на столе комнаты; на этом плане есть изображение стола, а на нем — изображение самого плана. Введем теперь динамический аспект: предметы на плане вырезаны из бумаги, их можно двигать, примеряясь к другой расстановке мебели; план, таким образом, моделирует возможные состояния мира, информацию о котором он несет. Мы связываем представление о сознании с такими постулируемыми процессами внутри психики, которые:

а) несут информацию о самой психике, т. е. рефлексивны;

б) способны имитировать состояния психики, отличные от текущих, т. е. обладают моделирующей функцией;

в) способны влиять на состояние психики в целом и через это на поведение, т. е. обладают управляющей функцией.

Согласно этому описанию, сознание есть относительно малый «функциональный» орган психики, динамическое содержание сознания включает очень обедненное и обобщенное отражение содержания текущих процессов психики, а также модели ее возможных состояний. Почти вся психика относится к бес- или подсознательному. Сознание представлено достаточно изолированной частью динамических процессов в психике (иначе эта часть не сможет исполнять три упомянутые функции). Наконец, психика способна функционировать без того, чтобы ее специализированный функциональный орган, сознание, принимал активное участие в этом функционировании.

Мера участия сознания в поведении — это а) мера отражения в сознании информационных процессов, обеспечивающих поведенческий акт (его начало, продолжение, завершение); б) мера роли сознания в формировании этих информационных процессов. Впервые обучающийся игре по нотам осознает более значительную часть процессов, промежуточных между зрительным восприятием нотного текста и моторной реакцией пальцев, чем профессиональный музыкант: профессионал сознательно решает начать игру, но бессознательно играет.

Именно потому, что основной характеристикой сознания представляется рефлексия (возможно, второго и более высокого порядка), участие сознания не является обязательным для таких действий, как реакция на внешние стимулы, использование навыков, речевое поведение, вплоть до формирования суждений и творчества. Даже когда содержанием сознания кажется внешний опыт, это означает лишь, что мы опускаем одну инстанцию в описании: «я вижу» означает «я осознаю, что я вижу», а если это не так, значит «я вижу, не осознавая».

Психика может содержать два и более динамических отражений самой себя, с разным соотношением взаимно отражающих и управляющих функций. Связанные с этим режимы функционирования психики проявляются в широком спектре диссоциативных явлений [18]: кратные личности, автоматизмы, фуги, гипнотические феномены и т.д.

Развитие речевой функции в процессе гоминизации открыло перед центральной нервной системой совершенно новые возможности для формирования рефлексивных, моделирующих и управляющих механизмов. Может быть, самой принципиальной из них оказалась возможность сколь угодно точной рефлексии сколь угодно высокого уровня (достижимой лишь на уровне социума, а не индивидуума).

Идеология этого краткого очерка — соединение интроспекции с компьютерной метафорой. Интроспекция — наше единственное прямое свидетельство о единственном доступном нам сознании, своем; компьютерная метафора — единственный источник действительно сложных и динамических концептуальных моделей психики, способных к саморазвитию и, в будущем, к сравнению с нейрофизиологическими данными. Пользуясь этой идеологией, мы не пытаемся ответить на вопрос «что такое сознание», но лишь выделяем его характеристики, которые представляются существенными. Если этими же характеристиками обладают какие-то техногенные информационные процессы, к ним можно, со всеми приличествующими оговорками, отнести слово «сознание». В таком именно плане в работе [5, с. 348] обсуждаются перспективы разработок компьютерных систем пятого поколения, допускающих общение с пользователем на естественном языке: «С точки зрения модели себя (= модели системы) основное направление исследований лежит в создании систем, обладающих элементами „самосознания“, т.е. способностями объяснить свои знания, возможности и состояния. Важность „самосознания“ вызвана тем, что создание систем, понимающих и знающих ответ на любой вопрос пользователя (даже в ограниченной предметной области), недостижимо...» По мнению автора, задача системы общения не в том, чтобы все понимать и знать, а в том, чтобы уметь объяснить пользователю, что система знает, что не понимает и почему. Единственным известным автору средством решения указанной задачи является развитие «самосознания». Отметим, что необходимость «самосознания» является следствием не языка общения, а того, что для достижения цели в процессе общения система должна уметь в терминах, понятных пользователю, выражать свои знания, свои состояния и причины затруднений. Другими словами, необходимость «самосознания» является следствием не столько языка общения, сколько сложности окружающего мира, обсуждаемого в процессе общения.

Итак, в то время, когда пишется эта статья, «филогенез компьютеров» проходит стадию развития речи на естественном языке, и уже надвигается стадия развития «самосознания», необходимость которой связана с потребностью в эффективном социальном функционировании.

Предположительно, человеческая речь и человеческое сознание проходили в филогенезе гомологичные стадии в том же порядке. Раннее сознание — фильтр между психикой и поведением, новое сознание — канал связи между своей психикой и чужими психиками.

Гомеровское φρενόζ и сознающее «я». Хорошо известно, что в разных культурах органом мышления, сознания, эмоциональной жизни считались сердце, пуп, печень — внутренние органы грудной клетки или брюшной полости. Например, анализ гомеровских текстов, описывающих психические состояния (см. [23] и цитированную там литературу), показывает особую роль слова φρενόζ. Оно имеет двоякое значение: какой-то внутренний орган тела, диафрагма (в традиционном понимании) или легкие и сердце — и в то же время вместилище психики человека, сознания, эмоций.

Распространена такая интерпретация этих свидетельств: они отражают отсутствие у древнего человека знаний о физиологии и роли центральной нервной системы. Люди «думали», что сердце есть орган духовной жизни. Эта точка зрения страдает чрезмерным рационализмом и, что хуже, упускает роль психологической реальности, стоящей за этими представлениями.

Современный западный человек также обладает ощущением локализации своего «я», однако помещает его в голове, между глазами, в точке, смещенной вперед по отношению к центру черепной коробки. Эта позиция представляется почти само собой разумеющейся. Но эксперименты, связанные с сенсорной депривацией, когда человек проводит много часов в темном тихом помещении, погруженный в ванну с подсоленной водой при температуре тела, обнаруживают такие измененные состояния сознания, при которых это ощущаемое расположение «я» может сместиться в разные места внутри тела и даже спроецироваться вовне тела. Такие данные поддерживают представление о сознающем себя «я» как о рефлексивной структуре в ЦНС с планом психики, планом тела, планом окружения и буквальной локализацией наблюдающего «ego» на этом экране. Смещение «я» есть смещение внутреннего наблюдателя.

Поскольку со времен Гомера стандартное положение «я» в теле изменилось, оно должно считаться социально обусловленным. Помещение «ego» в сердце, пуп, печень и др., отмеченное в разных культурах, фиксировало реальное самоощущение членов соответствующего социума. Приняв эту гипотезу как наполненную психологическим содержанием, мы сможем сделать еще шаг и представить себе архаичные состояния расчлененного сознания. Два (или три) сознания египетского фараона, семь сознаний кетских шаманов должны подвергнуться психологическому изучению как возможные стадии на пути развития человеческого сознания вообще. Современные материалы по расщепленному сознанию дают материал для изучения этого.

Архаичность субдоминантного поведения и фигура «мифологического плута»

Расщепленное сознание трикстера Вакдьюнкага. Цикл мифов о трикстере, «мифологическом плуте» индейцев Виннебаго, был получен в начале этого века в записи этнографом Паулем Радином и опубликован вместе со статьями П. Радина, К. Кереньи и К. Г. Юнга в книге [26]. Пятый эпизод этого цикла повествует о том, как правая и левая руки Вакдьюнкаги боролись друг с другом, после того как он (держа нож в правой руке) зарезал буйвола:

«Вдруг левая рука ухватилась за буйвола. „Отдай, это мое! Отпусти, не то я тебя зарежу! — вскричала правая рука. — На куски тебя искромсаю!“. Левая рука выпустила буйвола, но тут же ухватилась за правую. И как только правая рука пыталась ободрать буйвола, левая удерживала ее за запястье. Так руки подрались, и дрались до тех пор, пока левая не оказалась изранена. „Ах, зачем я это сделал(а)? Сам себе боль причинил(а)“. Левая рука сильно кровоточила». (Из немецкого перевода неясно, произносит ли последнюю реплику Вакдьюнкага или его правая рука; левая рука, связанная с субдоминантным полушарием, характерно молчит.) Буквально такое поведение рук эпизодически наблюдалось у больных, перенесших комиссуротомию — операцию, разъединяющую два полушария головного мозга. «Один больной, в частности, описал такой случай: однажды он обнаружил, что его левая рука борется с правой при попытках надеть утром брюки. Одна рука тянула их вверх, в то время как другая вниз. В другом случае тот же больной, рассердившись, замахнулся левой рукой на свою жену, а его правая рука схватила левую, пытаясь ее остановить» [13, с. 44].

Культурные герои и трикстеры. Еще до того, как эффекты межполушарной асимметрии стали привлекать всеобщее внимание, этот эпизод борьбы рук, как и другие характеристики Вакдьюнкаги, воспринимались публикаторами мифологического цикла как свидетельства о глубоко архаичном состоянии психики героя мифа. В частности, Радин писал [26]:

«Он [трикстер] живет еще в своем бессознательном, в детском состоянии психики, что и символизирует борьба его левой и правой рук, в которой левая оказывается тяжело пострадавшей» (с. 117).

«...его левая и правая руки борются, он сжигает свой анус и съедает собственные кишки, части его тела ведут независимое существование и не исполняют свои собственные функции. Все происходит само собой, помимо его воли» (с. 117).

«В его фигуре воплощены смутные воспоминания архаичного и изначального времени... Его голод, его сексуальность, его страсть к блужданиям не свойственны ни богам, ни людям. Телесно и духовно они — из другого мира...» (с. 154).

Сейчас можно слегка уточнить эти предположения. Расщепленное сознание трикстера могло быть характерным состоянием отдельных первобытных людей в эпоху нейрофизиологического оформления межполушарной асимметрии. Формирование речевых центров в коре левого полушария, связанная с этим перестройка межполушарной кооперации и начало (или усугубление) дифференциации функций полушарий могло служить постоянной основой неврологических дисфункций.

Косвенные свидетельства в пользу этой гипотезы доставляет общий анализ мифологических мотивов, связанных с фигурой трикстера (см. подробнее [27]). «Мифологический плут» является комическим спутником, братом-близнецом или травестией «культурного героя». Если сфера деятельности культурного героя — добывание огня, изобретение предметов культуры, кодификация поведения и установление культурных запретов, то функции плута — уничтожение, нарушение, ложь и плутовство.

Интересно, как эти архаические черты проглядывают в фигуре первосвященника Аарона, брата и духовного соратника пророка Моисея. Весьма характерна прежде всего мотивировка введения в повествование Аарона: Моисей, слышащий голос Бога, который повелевает ему обратиться к сынам израилевым и призвать их к исходу из Египта, отговаривается своим косноязычием. Голос тогда велит призвать Аарона: «...Я буду при устах твоих и устах его и буду учить вас, что вам делать. И будет говорить он вместо тебя к народу» (Исх. 4, 15—16). Аарон далее выступает толмачом Голоса, вещающего Моисею перед израильтянами и перед фараоном, так что, видимо, он не только речист, но и полиглот. Когда фараон отказывается отпустить израильтян, именно Аарон осуществляет три первые теургические знамения — «египетские казни»: превращение посохов в змей и др. Происходит нечто вроде шаманской борьбы между Аароном и волхвами египетскими, и чары-чудеса Аарона оказываются сильнее. Сакральные функции Аарона, таким образом, сопряжены с исключительным владением речью, трюкачеством и, видимо, умением внушать коллективные гипнотические состояния (превращение воды в кровь). В то же время именно Моисей, несмотря на свое косноязычие, является проводником воли Голоса, тогда как в фигуре Аарона сохраняются черты мифологического плута. Табу нарушает, правда, не сам Аарон, но два его сына, за что их сжигает божественный огонь (Лев. 10, 1—2; Чис. 3, 4). Жадность Аарона проявляется в эпизоде с упреками Моисею за жену-эфиопку (Чис. 12, 1—2), за что Мариам, сестра Аарона, наказана семидневной «проказой».

Лишь в позднейшей традиции, как отмечает С. Аверинцев, Аарон приобретает образ идеального первосвященника, и архаичные приметы трикстера стираются.

Плуты европейских мифологий также недвусмысленно обнаруживают черты, свидетельствующие о том, что они связаны с архаичной стадией речевой деятельности. В работе [28] читаем, например:

«Целый ряд фактов указывает на то, что Гермес связан с непонятной речью, (гибельной, зловещей) ложью, бессмысленными звуками. В отличие от истины такие речи, во-первых, не-прямые, не-простые..., а во-вторых, не связаны с речевыми регистрами голоса. Во втором случае выделяются, с одной стороны, смех, шепот, бормотанье ⟨...⟩, а с другой стороны, — крик...».

Это описание хорошо согласуется с тем, что при прямой стимуляции определенных областей субдоминантного полушария, а также древней лимбической системы регистрируются именно такие голосовые реакции. Вероятно, они были много более обычными в эпоху становления левополушарной речи. Сама констатация неистинности снов и пророчеств возможна лишь на фоне достаточно развитой речи, функция которой состоит в передаче истины. Следует учесть, что «истинность» снов и пророчеств еще весьма далека от привычной нам «истинности» объективно проверяемых суждений. В них очень сильна императивная компонента, они побуждают к тому или иному выбору действий, и «Истинность» является функцией от эффективности этих действий.

Итак, трикстер — это воспоминание о человечестве, «которым речь учится говорить»; через которое впервые проявляются странные возможности речи — насилие запретов и ложь во их избежание; которое начинает слышать речь всего окружающего — деревьев, воды, камней, собственного тела и богов и пытается разгадать этот язык; чье сумеречное и расщепленное сознание вспыхивает и гаснет; чьи «муки слова» являются также физическими муками, лишь слабое воспоминание о которых мы храним через много поколений[1].

Более подробная интерпретация мотива трикстера приведена в статье автора «Мифологический плут по данным психологии и теории культуры» (Природа. 1987. № 7. С. 42—52); см. наст. изд., с. 291—302.

Уроки санскрита. Много позже периода начального становления древнеиндийская санскритоязычная культура зафиксирует и кодифицирует вполне сознательно это древнее состояние «говоримого» и «действуемого» человека, для которого Речь является субъектом говорения и действования. В работе [4], из которой заимствовано дальнейшее, выразительно описаны интересующие нас черты.

Уже название речи у ведийских арьев vāc не следует распространенной модели — по органу речи, языку во рту (русское — язык, древнегреческое — glōssa, латинское — lingua и пр.). «Для древнеиндийского языкового состояния назвать язык, считавшийся божественным, по органу, служащему для его выявления, обнаружения, перехода из невидимого состояния в видимое, было бы недопустимым грехом механицизма, умалением вечной сущности языка. Язык-орган (jihvā́) — не более чем проводник речи... vāc как язык, речь, слово — не только и не столько некий результат говорения, внутренний объект соответствующего действия, сколько творческая сила (в смысле, который связывал с языком Гумбольдт)» [4, с. 6].

Это подчеркивание изнутри напирающей энергии речи, не подчиненной воле, но подчиняющей ее, совместимо с нашим предположением о субдоминантном характере праречи.

Речь имеет своих хранителей и воплотителей; при этом существен «мотив создания мудрецами Речи как просеивания зерна с помощью сита» [4]. Мы усматриваем в этом мотиве метафору индивидуального сознания, фильтрующего, отсеивающего результаты действия порождающих механизмов речи в ЦНС, но также и метафору социальных механизмов отбора спонтанных речевых актов и формирование над речью нового структурного уровня — языка.

«Напрашивается, по сути дела, естественное предположение, что древнеиндийский „грамматик“ ведийского периода был одним из

[1] Любопытно отметить в связи с нашей темой фигуру Феликса Крулля. Томас Манн, воспитавший в себе высокую чувствительность к мифологическим мотивам, безошибочно приписал этому современному герою-трикстеру почти магический и почти бессознательный полиглотизм — обстоятельство, которое следовало бы отмечать в исследованиях по мифологизму в современной литературе.

жрецов, контролировавших речевую часть ритуала... В этом случае получает свое объяснение исключительное сходство операций, совершаемых „грамматиком“, с тем, что делает жрец (принесение жертвы. — *Ю. М.*). Как и жрец, „грамматик“ расчленяет, разъединяет на части первоначальное единство, целостность (текста, соответственно жертвы), идентифицирует разъятые элементы..., собирает воедино, синтезирует в новое единство более высокого плана эти элементы» (с. 10)[2].

Грамматик-жрец обладал высокой чувствительностью к Слову. В каждом поколении каждого племени в предшествующие эпохи такие люди должны были направленно отбираться, выделяться и воспитываться. Вокруг них племя собиралось как вокруг станового хребта (гимн единения Ригведы: saṃ́ gachadhvaṃ sáṃ vadadhvaṃ sáṃ vo mánāńsi jānatām — «Вместе сходитесь! Вместе ведите речь! Вместе настраивайтесь в ваших помыслах!»). Сильный, властный, активный (и легко внушаемый) вождь племени и жрец-шаман, глоссолалирующий, плутующий, слышащий голоса богов, полубезумный — эти две фигуры, вероятно, отразились в паре культурный герой/трикстер.

Сгущающееся сознание. Развитие сознания современного ребенка есть результат взаимодействия двух типов процессов: нейрофизиологических (рост и созревание нейронов, установление связей), которые происходят в нервной системе, и социальных (обучение речи, социальному поведению, восприятию других людей и через них себя), которые обеспечиваются взаимодействием ребенка с другими, взрослыми, людьми. Огонек сознания разгорается в мозгу — социальное сознание «сгущается» и питает это пламя.

Филогенез сознания должен быть реконструирован как такой же двойной процесс. Коллективное сознание предшествует индивидуальному и является тем полем, средой, «грибницей» (К. Г. Юнг), из которой кристаллизуются индивидуальные самосознания.

Реликтом эпохи «коллективного сознания» является, вероятно, зафиксированное в различных ранних юридических установлениях

[2] Мифологема жертвоприношения как расчленения жертвы и разбрасывания ее частей по многим разным местам, реконструируемая в [4], может быть сопоставлена также с приемами анаграмматической зашифровки ключевых слов, в особенности имен бога, в древних мифоритуальных текстах, а также в современной поэзии. Психолингвистическое значение анаграмм нуждается в изучении. Напрашивается гипотеза о том, что анаграммы представляют собой некоторую имитацию правополушарной «голографичности», осуществляемую левополушарными средствами. В качестве (инвертированного) параллельного явления можно рассматривать чертеж или «мысленный эксперимент» как правополушарный аналог «вычисления» (осуществляемого манипуляцией над символами).

отсутствие противопоставления так называемой отчуждаемой собственности (земля, имущество, дом) и неотчуждаемой собственности человека (органы тела). «...В законах Ману (VIII. 125), где излагаются десять видов объектов наказания, имущество как один из них включается в список, попадая при этом между ухом и туловищем» [29, с. 95]. Нанесение увечья вору не есть просто наказание — это есть воздаяние, эквивалентное проступку, ибо хищение собственности человека равно нанесению ему увечья. Первобытное «я» имело размеры «я плюс мое имущество плюс мое племя». Притом это отождествление было данным первично, и не результатом волевого или рационального усилия, оно совершалось «на минимальном уровне рефлексии» [там же]. Следы этого состояния сохраняются очень поздно, вплоть до появления авторского типа литературного творчества. До этого речь не есть и не может быть принадлежностью индивидуума. Ее профанные, низшие виды принадлежат племени (племенной язык и есть «человеческий» язык), а сакральная речь принадлежит богам и лишь передается от поколения к поколению.

Впервые человек осознает себя, когда начинает говорить от своего имени.

В современной психологии феномен «расширяющегося сознания» играет маргинальную роль и практически находится вне поля зрения; называемое этим именем состояние, индуцированное приемом галлюциногенов, вероятно, является лишь эрзацем естественного примитивного дознания. В художественной литературе имеется глубокое описание психологии участника ночной атаки, где слом атаки описан именно как следствие слома первоначального коллективного сознания атакующих. Внезапное установление такого сознания в экстремальных ситуациях есть один из фундаментальных законов психологии боя.

История языка и сознания и некоторые теоретические проблемы общей семиотики

Семиотика и большие системы. Любые нынешние догадки о ранних стадиях языка и сознания поневоле выражаются метафорически из-за отсутствия надлежащего понятийного языка. Недостаток метафоры — не в том, что она неточна или неистинна, а в том, что она сопротивляется организации в систему. Научная модель явления также может быть ложной или грубо приближенной, но ее преимущество — в том, что она входит в систему научного знания, которая эту модель поддерживает, питает извне и несет потенциал ее улучшения или смены. Метафора, выраженная на естественном языке, полагается лишь на самое себя; она гибнет или выживает безотносительно к истине.

«Компьютерная метафора» имеет, однако, другой характер. То, что эта метафора призвана отобразить, — центральная нервная система и ее функции — является биологической большой системой. То, чем эта метафора пользуется в качестве образа, — компьютер, вычислительный процесс, база данных — является техногенной большой системой. Сама метафоризация есть динамическая, творческая и долговременная деятельность по наложению, примеркам и прикидкам нашего разветвленного и точного знания о технологических процессах переработки информации к биологическим процессам. Любой промежуточный результат этой деятельности может быть (и, как правило, будет) отвергнут. Но в ходе этой деятельности медленно кристаллизуется новое знание.

Основной постулат семиотики состоит в гипотезе о структурном подобии различных знаковых систем и возможности выделить идеальный объект исследования — «знаковую систему». В этом пункте мы обсудим возможность семиотического подхода к протопонятию «большая система» и соответствующего расширения компьютерной метафоры, которое представляется нам совершенно необходимым.

На надлежащем уровне рассмотрения большими системами являются вселенная, галактика, общество, биоценоз, биологический вид, экономика, промышленная отрасль, армия, ЭВМ, симфонический оркестр, организм, мозг, клетка, метаболизм. Большую систему нужно представлять себе прежде всего как некоторую физическую данность, подлежащую и поддающуюся естественнонаучному изучению. Ее пространственные характеристики образуют ее структуру, а временны́е — поведение и эволюцию. В научном знании каждая большая система представляется в виде совокупности относящихся к ней моделей. Модель обычно учитывает лишь часть объектов и процессов системы и притом рассматривает эту часть достаточно суммарно, блочно, обобщенно. Интеграция моделей, относящихся к одной и той же системе, либо является новой моделью, либо совершается вне уровня научного знания — в индивидуальном или коллективном сознании, в действиях людей, обслуживающих, изучающих или использующих большую систему. Исторически новый метод интеграции моделей — компьютерная интеграция.

Предметом общей семиотики должен быть уровень информационных процессов (в других контекстах — знакового или символического поведения) большой системы, притом те аспекты этого уровня, которые поддаются сравнению во всех больших системах.

Плодотворность такого сравнения может проявиться при двух условиях: а) сравниваемые системы достаточно хорошо изучены сами по себе; б) семиотические аналогии между ними нетривиальны. Структурализм в стиле Леви-Стросса изобилует такими семиотическими сопоставлениями на уровне структура языка/структура социального поведения. Методологические этюды Р. Тома добавляют к этому сопоставления морфогенез/синтаксис/особенности гладких отображений и т. д. Справедливо предположить, что такие сопоставления по своему гносеологическому статусу подобны «компьютерной метафоре». Тогда будет понятно, что практически все они в своей конкретности должны быть отвергнуты. Но если они станут исторически преходящей стадией развития длительного процесса сравнительного изучения больших систем, тогда они сохраняют свое значение как ростки новой методологии.

С точки зрения традиционного понятийного аппарата семиотики этот подход подразумевает обращение иерархии основных понятий. Если считать исходным понятием семиотики «знак», то исходным протопонятием общей семиотики будет «информационный процесс», а «знак» — возможно, последним результатом анализа данного класса информационных процессов. Есть все основания думать, что в будущей теории гомологи таких понятий, как «база данных» или «память», следует относить к более элементарному уровню, чем «знак». Так, во всяком случае, развиваются наше знание больших биологических систем и проектирование больших технических систем. В пользу этой же точки зрения говорит известное явление информационной безразличности материальной природы знака (ср. в лингвистике тезис о произвольности языковых знаков).

Следующие разрозненные замечания относятся к некоторым проблемам общей семиотики.

Проблема объективного выделения информационных процессов. При естественнонаучном анализе большой системы информационные (знаковые) аспекты ее поведения не могут считаться известными априори, они должны как-то изолироваться в процессе анализа. Попытки сформулировать критерии такой изоляции приводят к следующим предварительным наметкам.

А) *Критерий «спускового крючка».* К информационным (сигнальным) процессам следует относить те, которые при прочих равных условиях вызывают или прекращают другие процессы, энергетический масштаб которых значительно превосходит масштаб сигнального процесса.

Б) *Критерий системности.* Сигнальные процессы выделены правильно, если анализ позволяет выявить черты их организации в систему: «речь» подчинена «языку».

В) *Критерий автономности.* Развитые информационные процессы имеют тенденцию образовывать «замкнутые вихри», «сети», «жесткие структуры» и пр., которые хорошо изолированы от обратного влияния на них высокоэнергетической материальной жизни системы. Обнаружение таких процессов и хранилищ, наоборот, позволяет предположить, что они выполняют информационные функции.

Проблема многоязычия. Большая система может пользоваться многими разными языками, которые обслуживают разные уровни информационных процессов. Выявление и описание таких языков — важнейшая задача. Взаимоотношения языка (точнее, соответствующих информационных процессов) со своим окружением грубо описывается вариантом традиционной семиотической триады: язык чем-то производится, на что-то воздействует и несет информацию о чем-то. Взаимодействие языков разных уровней изучено значительно хуже. Традиционное отношение между текстами на двух естественных языках — «один текст является переводом другого» — основано на идеализации существования общего значения двух текстов, который и сохраняется при переводе. Эта идеализация плохо работает уже в случае, когда один из текстов является программой на алгоритмическом языке, а другой — ее переводом в машинные коды. Значение первого текста определяется характером его взаимодействия с головным мозгом программиста, а смысл второго — с hardware компьютера. Гумбольдтовский тезис о том, что высказывание само по себе не несет информации, выступает в этой ситуации еще более выпукло. Язык программирования есть посредник между «внутренними мирами» человека и ЭВМ. Необходимость такого медиатора вызвана несоизмеримостью элементарных семантических единиц этих миров. В частности, то, что элементарно в A, может быть сложной конструкцией в B, и наоборот. В той мере, в какой языковое поведение большой системы должно обладать моделирующими возможностями по отношению к Миру, т. е. к другим большим системам (и к себе самой), такая семантическая несоизмеримость представляется естественной, если постулировать, что Мир представлен в большой системе иерархией моделей, так же как и в общечеловеческом научном Знании.

С этой точки зрения (как и с ряда других) естественные языки можно рассматривать как изоморфные представления одного языка, который обладает значительным интегрирующим семантическим потенциалом. В особенности научная речь активно пользуется этим потенциалом, постоянно порождая выражения, семантика которых находится выше уровня любой конкретной модели Мира или его части. Оборотной стороной этого являются чрезвычайно бедные возможности естественного языка в отношении алгоритмической переработки текстов на нем, сохраняющей некоторые свойства «истинности».

Омонимия текстов на естественном языке, как она ни обильна, исчерпывается перефразировками. Омонимия языка алгебраических выражений несравненно более содержательна. Выполнение любого расчета, решение любой математизированной задачи с формально лингвистической точки зрения может рассматриваться как перефразировка условий задачи в ее решение по известным заранее правилам. Однако эквиваленты этого процесса отсутствуют или не характерны в естественном языке. Для иллюстрации стоит вспомнить, что одним из первых языков математики, отделившихся от естественного языка, была позиционная система записи чисел. Ее фундаментальное преимущество состояло в том, что арифметические операции над позиционными записями могут выполняться алгоритмически, а не с помощью бессистемной серии рецептов ad hoc. Римская запись целых чисел, промежуточная между словесной и позиционной, не обладает никакими преимуществами позиционной, кроме краткости; по своим структурным свойствам она почти тождественна системе словесных обозначений.

Н. Бор отмечал, что математические обозначения важны в силу того, что они не несут никакой априорной семантической нагрузки, а позволяют рассматривать акт интерпретации как независимую мыслительную операцию. В соединении с обильными возможностями алгоритмической переработки это обстоятельство и определяет огромные моделирующие потенции математики. Существует ли «математика мозга» и какие языки и структуры ее обслуживают? Очевидно, что почти все содержание бессознательного должно относиться к такому информационному поведению просто потому, что любой алгоритмический процесс переработки информации, пока он происходит, не терпит вмешательства извне, кроме подачи входных данных и сигнала начать их обработку.

Оппозиции и организация поведения. Комбинаторный аппарат двоичных (иногда троичных) противопоставлений (ср. [12]), широко применяемый в структуралистски ориентированных исследованиях, часто сближается с бинарной системой записи чисел или булевой алгеброй классификационных признаков. Леви-Стросс, констатируя основные оппозиции мифологического мышления, усматривает в них раннюю стадию развития логики. Не оспаривая этого, мы хотим подчеркнуть специфику семантики оппозиционных пар и черты этой семантики, имеющие, так сказать, «субдоминантный» характер (если логику, в духе обсуждения в разделе «Речь и сознание», относить к «доминантной» области).

Чтобы понять эту специфику, рассмотрим статус членов оппозиции и самого их сопоставления.

Отдельный член оппозиции, как «природа», «культура», «верх» и т. п. в других контекстах может, как термин, вводиться определением. О—предел—ение (de—fin—itio) есть указание пределов, границ явления, обозначаемого данным термином. Вне пределов находится нечто другое.

То, что говорит оппозиция о своих членах, вовсе не есть указание этих пределов; напротив, это указание некоего ядра, бассейна притяжения, аттрактора. При наложении оппозиции на реальность, при ее семантическом наполнении, элементы реальности начинают тяготеть к тому или иному полюсу, как опилки в магнитном поле. Одна и та же оппозиция, например добро/зло, может накладываться на реальность разными способами, включая собственную инверсию; одна оппозиция может быть символом или метафорой другой. Человеческое поведение имеет тенденцию организовываться в систему даже тогда, когда в этом нет прямой социальной или биологической необходимости; как дети, мы предпочитаем ступать по квадратикам. Оппозиции помогают организовать систематическое поведение без того, чтобы сама конкретная система поведения была обязательной в высшем плане. Элементарный пример этого — символика цветов в разных культурах.

Мы полагаем, что эта функция оппозиций противостоит познавательной и является более архаичной по своей природе. Анализ Леви-Стросса должен быть уточнен в плане выяснения того, какие из существенных для первобытного мышления оппозиций являются действительно «преднаучными», а какие в широком смысле слова произвольны. Кроме того, как мы уже предполагали в другом месте, постулируемая Леви-Строссом медиация «эмоционально напряженных» оппозиций, вероятно, является артефактом исследовательской методики. Целостное состояние психики представляется более архаичным, чем внутренне конфликтное, и в диахроническом плане мифы скорее фиксируют процесс рождения оппозиций, чем их медиацию.

Проблема семантических примитивов. В современной культуре язык осознается в первую очередь как средство передачи объективного знания. «Лингвистический критицизм» направил свои усилия на упрочнение и очищение именно этой функции языка. Организация поведения выступает как вторичное явление и обычно понимается как организация эффективного поведения. Если принять точку зрения, согласно которой само по себе упорядочение поведения является первичным явлением, «субдоминантным» по существу, то в новом свете предстанут роль табу и первичная семантика отрицания.

В самом деле, любая организация поведения в первую очередь требует ограничения степеней свободы большой системы (типологическая параллель — синергии в организации движений по Бернштейну), и в смысле Тома сигнал, способствующий этому, является катастрофой. Такие сигналы образуют самый фундаментальный класс семантического тезауруса.

А. Вежбицка, анализируя семантические примитивы, возвела отрицание к «*nolo*» — «не хочу» [30, с. 239]. Точнее было бы возводить его к «*noli*» — «нельзя», как убедительно показано в [9].

Литература

1. *Иллич-Свитыч В. М.* Опыт сравнения ностратических языков: Сравнительный словарь *B—K*. М.: Наука, 1971. 370 с.
2. *Дыбо В. А., Терентьев В. А.* Ностратическая макросемья и проблема ее временной локализации // Лингвистическая реконструкция и древнейшая история Востока: Тез. докл. конф. Ч. 5. М.: Наука, 1984. 45 с.
3. *Якобсон Р.* Избранные работы. М.: Прогресс, 1985. 455 с.
4. *Топоров В. Н.* Санскрит и его уроки. Древняя Индия. М.: Наука, 1985. С. 5—29.
5. *Попов Э. В.* Общение с ЭВМ на естественном языке. М.: Наука, 1982. 360 с.
6. Glossogenetics. The origin and evolution of language / Ed. by E. de Grolier. Chur: Harwood, 1983. 654 p.
7. *Якушин Б. В.* Гипотезы о происхождении языка. М.: Наука, 1985. 137 с.
8. *Чуприкова Н. И.* Психика и сознание как функция мозга. М.: Наука, 1985. 200 с.
9. *Поршнев Б. Ф.* О начале человеческой истории (проблемы палеопсихологии). М.: Мысль, 1974. 187 с.
10. *Fromm E.* Age regression with unexpected reappearance of a repressed childhood language // Internat. Journ. of clinical and experimental hypnosis. 1970. Vol. 18. P. 79—88.
11. *Дридзе Т. М.* Текстовая деятельность в структуре социальной коммуникации. М.: Наука, 1984. 321 с.

12. *Иванов Вяч. Вс.* Чет и нечет. М.: Сов. радио, 1978. 123 с.
13. *Спрингер С., Дейч И.* Левый мозг, правый мозг. М.: Мир, 1983. 234 с.
14. *Фрумкина Р. М.* Цвет, смысл, сходство. М.: Наука, 1984. 175 с.
15. *Николаенко Н. Н.* Функциональная асимметрия мозга и изобразительные способности // Текст и культура. Труды по знаковым системам. Тарту: ТГУ, 1983. Вып. XVI. С. 84—89.
16. *Столяр А. Д.* О «гипотезе руки» как традиционном объяснении происхождения палеолитического искусства // Первобытное искусство. Новосибирск: Наука, 1976. С. 8—24.
17. *Иванов Вяч. Вс.* Об одном типе архаичных знаков искусства и пиктографии // Ранние формы искусства. М.: Искусство, 1972. С. 105—147.
18. *Hilgard E. R.* Divided consciousness: multiple in human thought and action. New York: Wiley and Sons, 1977. 423 p.
19. *James W.* The varieties of religious experience. Boston: Penguin, 1982. 876 p.
20. *Шерток Л.* Непознанное в психике человека. М.: Прогресс, 1982. 234 с.
21. *Бассин Ф. В.* О современном кризисе психоанализа. — Вступительная статья к [20].
22. *Jaynes J.* The origin of consciousness in the breakdown of the bicameral mind. Boston: Houghton Mifflin Co., 1976. 253 p.
23. *Иванов Вяч. Вс.* Структура гомеровских текстов, описывающих психические состояния // Структура текста. М.: Наука, 1980. С. 81—117.
24. *Popper R. R., Eccles J. G.* The self and its brain. An argument for interactionism. New York: Springer, 1977. 654 p.
25. *Дельгадо Х.* Мозг и сознание. М.: Мир, 1971. 264 с.
26. *Jung C. C., Kerenyi K., Radin P.* Der Göttliche Schelm. Ein Indianischer Mythen-Zyklus. Zürich: Rhein Verlag, 1954. 354 s.
27. *Мелетинский Е. М.* Первобытные истоки словесного искусства // Ранние формы искусства. Л.; М.: Искусство, 1972. С. 149—189.
28. *Менская Т. Б.* ΑΜΗΧΑΝΟΣ ΕΡΟΣ в контексте мифа о Гермесе // Структура текста. М.: Наука, 1980. С. 174—183.
29. *Романов В. Н.* Из наблюдений о композиции «Махабхараты» // Древняя Индия. М.: Наука, 1985. С. 88—104.
30. Семиотика / Под ред. Ю. С. Степанова. М.: Радуга, 1983. 626 с.

«Мифологический плут» по данным психологии и теории культуры

В мифах и эпосе разных народов известны фигуры, получившие название плутов, или трикстеров (англ. trickster, нем. Göttliche Schelm), по характерному комплексу комически-демонических черт образа и поведения. К ним относятся Локи у скандинавов, Гермес у греков, Сырдон у осетин, Вакдьюнкага у индейцев виннебаго, Ворон в чукотско-камчатском эпосе. Анализ сюжетов и мотивов, связанных с этой фигурой, показывает, что мифологический плут является комическим спутником, братом-близнецом или пародийным двойником, негативным вариантом другого образа — культурного героя. В архаических системах культурный герой — активный деятель мифов о происхождении, который изобретает или крадет у богов первопредметы культуры, добывает огонь, оживляет первых людей, устанавливает культурные запреты — табу. Действия плута пародируют эти функции: он уничтожает, нарушает, лжет — словами и поступками, снами и пророчествами. Он крадет, как Гермес, стадо коров у Аполлона, он строит беспричинные козни, как Локи, подсунувший слепому Хёди побег омелы, который убил Бальдра; он оборотень, меняющий облик и пол; он посредник между богами и людьми, между живыми и мертвыми; его снедает неутолимый голод, гиперэротизм, страсть к блужданиям.

Чем архаичнее мифологическая фигура, тем труднее выделить в ней тот специфический комплекс черт: тотемический (часто животный) предок предстает как неразделимый сплав культурного героя и его двойника. Чем более поздний срез эволюционной картины мы рассматриваем, тем отчетливее — но теряя свою мифологическую первооснову — проявляется этот комплекс в народной смеховой культуре, в волшебной сказке, в литературе, от Гомера (Одиссей — внук Автолика, сына Гермеса) до Рабле (Гаргантюа) и Томаса Манна (Феликс Круль).

Плут является как бы персонификацией комического, но совсем не обязательно смешного, иногда по преимуществу враждебного и страшного, в средние века христианской Европы — дьявольского:

Впервые опубликовано: Природа. № 7. 1987. С. 42—52.

«...дьявол трактовался как simia Dei, как «обезьяна Бога», его недостойный подражатель, трикстер, полишинель неба и земли»[1].

Но не только этот эволюционный ряд делает фигуру мифологического плута столь привлекательным объектом теории культуры.

Дело еще в том, что трикстеру свойственна совершенно особая психологическая напряженность. Другие герои мифа и эпоса часто ощущаются «лишенными психологии» — то ли оттого, что, по К. Г. Юнгу, они сами по себе суть порождения психики, манифестации бессознательных архетипов; то ли оттого, что, согласно О. М. Фрейденберг[2] (и отчасти — К. Леви-Строссу), они не столько субъекты жизненных действий, сколько заместители когнитивных категорий.

Непосредственное внутреннее чувство говорит нам, что трикстер не таков, что он тем в большей мере психологичен, чем глубже погружен в свою сферу нарушения и разрушения. Именно эта психологическая наполненность позволяет плуту с такой естественностью стать героем сказки или романа, а в его архаическом варианте — донести до нас черты филогенетически древнего психологического состояния. Мы попытаемся в этой статье рассмотреть фигуру плута в описанных аспектах — истории культуры и истории психики.

Вот краткое описание основных позиций, развиваемых автором. Смысловое ядро образа трикстера составляет конфликт «прорастания» культурного из докультурного, природного. Архаические пласты образа отсылают нас к эпохе формирования неоантропа как говорящего и социального существа. Внутренняя конфликтность трикстера взрывает любое гармонизированное традицией соотношение природного и культурного. Смеховые и игровые характеристики — результат временной победы культуры в этом конфликте, его укрощенное, сглаженное и эмоционально упорядоченное выражение. Постоянная пограничность поведения трикстера оправдывает привлечение психопатологического материала к рассмотрению этой фигуры в уже освещенной временем традиции.

Что такое комплекс плута

Ядром комплекса плута является ювенильность. В филогенетическом плане это означает отсылку к раннему периоду формирования

[1] *Панченко А. М.* Русская культура в канун петровских реформ. Л., 1984. С. 7.

[2] «Как это ни странно для нас, но эти борющиеся, похищающие и похищаемые герои представляют собой архаическую форму наших будущих абстракций, наших философий и гносеологии, систем наших восприятий мира». (*Фрейденберг О. М.* Миф и литература древности. М., 1978. С. 50).

неоантропа; в онтогенетическом — к периоду юности[3]. Говоря о древнем человеке, следует учесть, что овладение речью должно было приходиться у него, по-видимому, на более поздний, чем сейчас, возраст (возможно, 7—10 лет), а половая зрелость наступала раньше, чем сейчас, так что под юностью можно представить себе непосредственно предшествующий инициации (ритуалу посвящения во взрослый социальный мир) и включающий ее период обучения социальному поведению, не столь долгий и дифференцированный, как в наше время.

Производной чертой от ювенильности является общая подвижность. В поведенческом аспекте она объясняет неопределенность, нефиксированность функции трикстера, его путешествия, его посреднические, медиаторские черты. В характерологическом аспекте она выражается в свободном обращении с речью и истиной, т. е., с более поздней точки зрения, в плутовстве, лживости и аморальности.

Понимание того, что содержание речи может быть независимым от конкретной наличной ситуации, было великим открытием человека. Овладение речевой свободой на практике показало, что речь может моделировать отвлеченные и воображаемые предметы, а также управлять поведением. Россказни плута — это первые попытки управлять поведением партнера не используя грубой силы, и тем программировать длинные цепи неожиданных событий.

Подвижность трикстера сама по себе нейтральна в ценностном плане; она приобретает знак лишь в конкретных условиях проявления и бытования.

Оцениваемая положительно, подвижность трикстера есть неконформность, пренебрежение табу и предписаниями, свобода от сковывающих предрассудков. Она способствует преодолению социальных перегородок и переворачиванию социальной иерархии, содержит в себе возможность отказа от традиции и замены авторитета первопредков ищущей деятельностью современников. Именно это позволило Ж. Дюмезилю оценивать Локи и Сырдона как духовных предшественников первых ученых: «Существующий строй реагирует на всесокрушающую силу беспокойной мысли самозащитой, враждебностью, что и вынуждает разум направлять часть — и нередко большую часть — своих способностей на то, чтобы хитрить, обманывать, интриговать, а также, когда этому способствует уязвимость натуры, глумиться, отрицать, ненавидеть...»[4]. Таковы же истоки положительной оценки шута или скомороха, который катализирует

[3] Сравним фаустовский мотив сделки с дьяволом-трикстером: юность дается в обмен на душу — сознание.

[4] *Дюмезиль Ж.* Осетинский эпос и мифология. М., 1977. С. 127.

средневековую «карнавальность» (М. М. Бахтин) или временную «перемену статуса» (В. Тэрнер) в ритуалах традиционных обществ.

Оцениваемая отрицательно, подвижность трикстера таит в себе разрушительное и саморазрушительное начало. Его асоциальность, его опасное для себя и других любопытство, не сдержанное запретами, его психологическая неустойчивость — все это чревато бедами, предвидеть и предотвратить которые мешает его левополушарная эйфория (в чем он также может считаться предшественником современных ученых). В крайнем выражении трикстер ведет себя как гебефренный психотик. (Психиатрия отмечает, что для больных гебефренией — юношеской формой шизофрении — характерны асоциальность, половая расторможенность и гротескное изменение психики.)

Мы рассмотрим ниже некоторые аргументы в пользу этой кратко описанной схемы. Разумеется, она проблематична. Отчасти это связано с общим затруднением при осмыслении мифологических мотивов, отсутствием здесь определенности. Нам также недостает полноты и точности обработки материала, четких хронологических и географических рамок бытования фигуры плута.

Палеопсихологическая реконструкция

В рамках нашей интерпретации мы рассмотрим два круга свидетельств, которые привели к постулированию ювенильного ядра психики трикстера:

- свидетельства о связи трикстера с особыми, регрессивными и, возможно, филогенетически ранними модальностями речи;
- характеристики, сопоставимые с психопатологией, в особенности юношеского возраста.

В истории гоминизации — становления человека — критическую роль сыграл период овладения звуковой речью современного типа. Вопрос об исторической длительности, последовательных стадиях этого процесса и их абсолютной датировке не получил пока общепризнанного решения. Косвенные свидетельства извлекаются из различных рядов данных, в числе которых: а) измерения характеристик ископаемых черепов, позволяющие судить о развитии головного мозга и голосового аппарата; б) исследование ископаемых каменных орудий, которое показывает возрастание числа их типов и сложности процесса обработки одного орудия, позволяя судить о развитии праворукости и, косвенным образом, видовой функциональной асимметрии полушарий головного мозга; в) изучение раннего искусства и ранней знаковой деятельности.

В общем, можно предполагать, что какие-то критические изменения произошли в мустьерский период между 100 тыс. (или 50 тыс.) и 20 тыс. лет назад. В это время произошла смена антропологического типа палеоантропа (неандертальца Европы) на неоантропа (кроманьонца), причем, по данным антропологии, второй не мог быть потомком первого. Сценарий появления Homo sapiens современного вида, его дивергенции и взаимоотношений с «тупиковой ветвью», расселения по ойкумене и перехода от биологической эволюции к социальной неясен во многих деталях, дискуссионен, но, кажется, именно мустьерская эпоха является ключом к самым глубинным палеопсихологическим мотивам мифологии[5].

Нейробиологически современная речь неразрывно связана с функциональной асимметрией полушарий головного мозга. Доминантное полушарие, обычно левое, содержит центры распознавания и порождения звуковой речи. Сама по себе эта асимметрия, возможно, развилась раньше. Особенность центральной нервной системы человека состоит в весьма развитой интегративной функции мозга, в частности наличии связей между основными видами восприятий: зрением, слухом, осязанием. По некоторым предположениям, нейробиологической основой звуковой речи явился гипотетический «внутренний язык — посредник» мозга, на который переводились все частные языки восприятий. Пользуясь компьютерной метафорой, можно сопоставить этот период развития центральной нервной системы человека с появлением операционной системы, обслуживающей одновременно много каналов ввода-вывода при одном центральном процессоре. Появление звуковой речи тогда означает формирование канала для динамического перепрограммирования этой операционной системы, первоначальный, биологический режим действия которой символизирует «природу», а вторичный, социальный — «культуру». Хотя в мире современности язык по большей части осознается как канал связи для передачи информации, его важнейшая архаическая функция, согласно одной из точек зрения, состояла в прямом влиянии на поведение, а первые смыслы были запретами, ограничениями и табу. На

[5] Датировки, разумеется, проблематичны. Я благодарен Вяч. Вс. Иванову за следующие указания. В журнале «Science» недавно предложена схема движения Homo sapiens в Евразию из Африки, где этот вид сформировался около 100 тыс. лет назад. Движение шло со скоростью два-три (или даже один-два) человека за поколение. Предполагается, что оно началось около 30 тыс. лет назад, а это примерно соответствует возможной датировке исходного общего языка для группы родственных макросемей языков Старого и Нового Света. Время порядка 15 тыс. лет соответствует разделению каждой из этих макросемей. Эти последние датировки доставляются глоттохронологическими подсчетами.

следующем этапе развития эта система запретов становилась внутренним планом психики (индивидуальной памяти) и соответственно — регулятором социального и трудового поведения. Это подготовило почву к формированию внутреннего мира человека, с использованием все более разнообразной вербальной информации, уже не сводящейся к прямым предписаниям. Такая реконструкция хорошо согласуется с концепцией развития речи у ребенка, по Л. С. Выготскому.

Формирование речевых центров в коре и соответствующая перестройка межполушарных связей должны были отразиться на структуре психики раннего неоантропа. Наиболее ярко это могло проявиться у отдельных индивидуумов, условно характеризуемых как «протошаманы» (нужно учесть, что уровень языковой компетенции резко неравномерен даже в нашу эпоху, а в древности этот разброс мог быть особенно значительным). Некоторые свидетельства о трикстерах можно проинтерпретировать как отражение этой эпохи.

Цикл мифов о трикстере Вакдьюнкаге был получен в начале этого века в записи этнографом Паулем Радином и опубликован вместе с интерпретирующими работами П. Радина, К. Кереньи и К. Г. Юнга. Пятый эпизод этого цикла повествует о том, как правая и левая рука Вакдьюнкаги боролись друг с другом после того, как он (держа нож в правой руке) зарезал буйвола.

«Вдруг левая рука ухватилась за буйвола. „Отдай, это мое! Отпусти, не то я тебя зарежу! — вскричала правая рука. — На куски тебя искромсаю!“ Левая рука выпустила буйвола, но тут же ухватилась за правую. И как только правая рука пыталась ободрать буйвола, левая удерживала ее за запястье. Так руки подрались, и дрались до тех пор, пока левая не оказалась изранена. „Ах, зачем я это сделал(а)? Сам себе боль причинил(а)“. Левая рука сильно кровоточила»[6].

Буквально такое же поведение рук эпизодически наблюдалось у больных, перенесших комиссуротомию, — операцию, которая разделяет два полушария головного мозга. «Один больной, в частности, описал такой случай: однажды он обнаружил, что его левая рука борется с правой при попытках надеть брюки. Одна рука тянула их вверх, в то время как другая вниз. В другом случае тот же больной, рассердившись, замахнулся левой рукой на свою жену, а его правая рука схватила левую, пытаясь ее остановить»[7].

[6] *Jung C. G., Kerenyi K., Radin P.* Der Göttliche Schelm. Ein Indianischer Mythen. Zürich: Zyklus, 1954.

[7] *Спрингер С., Дейч И.* Левый мозг, правый мозг. М., 1983. С. 44.

Еще до того, как эффекты функциональной асимметрии полушарий стали привлекать всеобщее внимание, этот эпизод борьбы рук, как и другие характеристики Вакдьюнкаги, воспринимались публикаторами мифологического цикла как свидетельства о глубоко архаичном состоянии психики героя мифа. Сейчас можно с большей уверенностью узнавать в расщепленном сознании трикстера Вакдьюнкаги неврологические дисфункции, связанные с формированием речевых центров и перестройкой межполушарной кооперации.

Интересующие нас мотивы мифа о Гермесе выявляются пристальным семантическим анализом гомеровского гимна Гермесу, который был проделан (с другими целями) в работе Т. Б. Менской:

«Описание... обманчивых, ложно пророческих сновидений в Od. 19.560—67 представляет скопление характерных для «стихии Гермеса», «стихии герметизма» определений... Эти сны беспорядочны... бормочут нечленораздельно... неся невоплотимые (обещания)...»

«Целый ряд факторов указывают на то, что Гермес связан с непонятной речью, (гибельной, зловещей) ложью, бессмысленными звуками. В отличие от истины такие речи, во-первых, не-прямые, непростые... а во-вторых, не связаны с речевыми регистрами голоса. Во втором случае выделяются, с одной стороны, смех, шепот, бормотанье... а с другой стороны — крик...»[8]

Это описание можно сопоставить с тем, что при прямой стимуляции определенных областей субдоминантного полушария, а также древней лимбической системы (обонятельный, или висцеральный, мозг) регистрируются именно такие голосовые реакции. Вероятно, они были много более обычными в эпоху становления левополушарной речи. Сама констатация неистинных снов и пророчеств возможна лишь на стадии достаточно развитой речи, функция которой состоит в передаче истины. Но нужно помнить, что «истинность» снов и пророчеств еще весьма далека от привычной нам абстракции истинности объективно проверяемых суждений. В них очень сильна императивная компонента, они побуждают к тому или иному выбору действий, и архаическая «истинность» есть оценка эффективности этих действий.

Наконец, в связи с пением Гермеса, гимн неоднократно и настойчиво упоминает левую сторону, левую руку, подтверждая гипотезу о правополушарности его психики.

[8] *Менская Т. Б.* ΑΜΗΧΑΝΟΣ ΕΡΟΣ в контексте мифа о Гермесе // Структура текста. М., 1986. С. 175, 181.

Мифы о Вороне, по-видимому, также обнаруживают его тесную связь с правополушарной речью, в особенности хульной. В психопатологии известен синдром Туретта, включающий генерализованные тики, вокализацию (хрюканье, визг, лай) и в части случаев копролалию — непроизвольное произнесение непристойностей. Вместе с эхолалией (повторение фраз или концов фраз за говорящим) и глоссолалией (речеподобный поток звуков, не являющийся речью ни на каком языке) эти моды говорения представляют собой регресс к ранним стадиям становления речи. Они неизменно отмечаются как сопутствующие шаманизму, раннему (и сектантскому) христианству, скоморошеству и т. п.

Отметим, наконец, что архаические черты трикстера проглядывают в известной ветхозаветной фигуре первосвященника Аарона, брата и духовного соратника пророка Моисея. Сама парность этих фигур отвечает парности «культурный герой — трикстер» в мифологическом плане и «вождь племени — шаман» в этнографическом (конечно, мы не отождествляем эти пары). Весьма характерна мотивировка введения Аарона: Моисей, слышащий голос Бога, который повелевает ему обратиться к сынам Израилевым и призвать их к исходу из Египта, отговаривается своим косноязычием. Голос тогда велит призвать Аарона: «Я буду при устах твоих и устах его и буду учить вас, что вам делать; и будет он говорить вместо тебя народу» (Исх. 4, 15—16). Аарон далее выступит толмачом Голоса, вещающего Моисею, — перед израильтянами и перед фараоном, — так что, видимо, он не только речист, но и полиглот. Когда фараон отказывается отпустить израильтян, именно Аарон осуществляет три первые теургические знамения — «египетские казни»: превращение посохов в змей и др. Происходит нечто вроде шаманской борьбы между Аароном и волхвами египетскими, и чары Аарона оказываются сильнее. Сакральные, обрядовые функции Аарона, таким образом, сопряжены с исключительным владением речью, трюкачеством и, видимо, умением внушать коллективные гипнотические состояния (превращение воды в кровь). В то же время именно Моисей, несмотря на свое косноязычие, является проводником воли Голоса, т. е. истинным культурным героем, тогда как в фигуре Аарона сохраняются черты его неполноценного двойника. Табу нарушает, правда, не сам Аарон, но два его сына, за что их сжигает божественный огонь (Лев. 10, 1—2; Чис. 3, 4). Жадность Аарона описана в эпизоде с упреками Моисею по поводу его жены-эфиопки (Чис. 12, 1—2), за что Мариам, сестра Аарона, наказана семидневной «проказой». Лишь в позднейшей традиции, как указывает С. С. Аверинцев, Аарон приобретает образ идеального первосвященника, и архаичные приметы трикстера выветриваются.

Коснемся вкратце психопатологических черт трикстерства. В общем плане такие параллели имеют давнюю традицию[9]. (Недавний интересный обзор по эволюционной психопатологии выделяется тем, что практически опирается лишь на клинический и лабораторный, а не на этнографический и историко-культурный материал, в отличие от известных классических реконструкций[10].) Приводимые ниже соображения имеют предварительный характер. К толкованию трикстера следовало бы привлечь, в частности, сибирские материалы о «шаманской болезни» — некотором специфическом психическом расстройстве, которое предшествовало тому, что человек становился шаманом, и в измененной форме сопровождало его всю жизнь. Описание сеанса камлания как управляемого истерического припадка согласуется с общим представлением о том, что повышенная «судорожная готовность» имеет адаптивное значение — как биологическое, так и социальное, в соответствии с предположениями С. П. Давиденкова и Дж. Джейнза о том, что «общество производило направленный отбор людей с шизофренической психикой»[11].

Но здесь мы хотели бы продолжить параллели между поведенческими характеристиками трикстера и гебефренией (автор признателен В. А. Файвишевскому, который обратил его внимание на эти параллели); в другой связи о палеопсихологических аспектах гебефрении писал Б. Ф. Поршнев. Гебефренный синдром был описан немецким психиатром К. Кальбаумом в 1889 году. Само название дано в честь юной Гебы, дочери Зевса, исполнявшей обязанности виночерпия на пирах богов; ее «громокипящий кубок» чудно зазвенел в русской поэтической речи. Гебоидное состояние — это гиперкритическое отношение к окружающим, особенно к старшим; ослабленная способность к самоконтролю, дурашливость; сенсорная жажда и страсть к бродяжничеству; преувеличенная сексуальная ориентированность периода полового созревания, приводящая к распущенности поведения. С этим совмещается общее рационалистическое отношение к себе и миру, продумывание и планирование действий без обратной

[9] Мы не обсуждаем здесь острые проблемы психологического подхода к психопатологии: об этом много говорили критики классического фрейдизма. Автор разделяет уравновешенную точку зрения А. Б. Добровича. См.: *Добрович А. Б.* Проблема бессознательного в ее связи с вопросами психосоматических отношений и клинической патологии. — Бессознательное. Тбилиси, 1985. Т. IV. С. 237—253.

[10] Генетические и эволюционные проблемы психиатрии. Новосибирск, 1985.

[11] *Иванов Вяч. Вс.* Структура гомеровских текстов, описывающих психические состояния // Структура текста. М., 1980. С. 82.

связи с их результатами, «метафизическая интоксикация» философскими системами, религией, искусством.

Сравнение этих рядов характеристик говорит само за себя.

Оно подтверждает мысли Б. Ф. Поршнева о невнушаемости, которая является общей чертой большинства психозов, а в филогенетическом плане, предположительно, характеризует одну из ранних эволюционных стадий становления речи.

Трикстер и проблема комического

Комизм божественного плута в архаике, возможно, еще не был связан со смешным. Согласно О. М. Фрейденберг, «античный комический план представлял собой познавательную категорию. Двуединый мир постоянно и во всем имел две колеи явлений, из которых одна пародировала другую…»[12]. Так понимаемая стихия комического не может быть психологически однородной; разные оппозиции обладают слишком несравнимой значимостью.

Сверх того, не является ли определяющим в формуле «двуединый мир» не «дву-», а «-единый»? Глубокое переживание вообще, в том числе комического, иррационально. Рационализация поводов к такому переживанию снимает его и заменяет серией открытий, имеющих неопределенную ценность.

Семантическое поле смехового и комического обширно и неоднородно. Один из его центров — идея позитивно окрашенной коммуникации. Это — докультурная составляющая: первая улыбка ребенка такова; хотя животные не знают смеха, игры юных зверят как бы погружены в атмосферу смеха. (Отметим, что смешным может быть только человеческое, человекоподобное, относящееся к человеку: красивый пейзаж может отсылать воображение к идее мировой гармонии, но смешной пейзаж — если такой можно представить — напомнит нам лишь о самих себе.) Если вычесть из игровой ситуации ее коммуникативный и эмоциональный аспекты, останется моделирование «настоящей» деятельности, подготовка к ней или замена ее. Игра в рамках культуры — это моделирование со специальными функциями. Его цель — как бы проявить все фазовое пространство культуры, все потенциально доступные ей состояния; экономный метод сделать это — построить модель в «дальнем углу» фазового пространства. Инверсии обычных отношений — самый распространенный прием такого конструирования. («Таскать вам не перетас-

[12] *Фрейденберг О. М.* Цит. соч. С. 282.

кать» — на похоронах.) Создатель смеховой ситуации смещается по нескольким осям; доходя до предела возможного, он переворачивает оппозицию, существенную для культуры. Но смеховая ситуация конвенциональна, она есть плод соглашения. Нарушение табу может находиться в рамках позитивно окрашенной коммуникации лишь по общественному согласию и на время, иначе культура взрывается и сменяется другой. Перевод нарушения в вербальный план осуществляет моделирование второго порядка. Это облегчает достижение общественного соглашения о комичности: над рассказами о шутах смеются дольше, чем над их проделками. Не возник ли смех как побочный эффект развитой речи?

Сравним несколько интерпретаций скатологического (от греч. σκῶρ, род. пад. σκατόζ, — испражнения) мотива — универсального для «низовой» смеховой культуры. Одно его иконологическое представление — это нагая фигура (дьявол, шут) в позе дефекации над (или перед) символом храма или мира. А. М. Панченко полагает, что оно выражает идею «нечеловеческой, именно сатанинской, гордыни, высокомерного презрения к миру» (если фигура изображает дьявола) или ту же идею, переведенную «в план комической деградации». Для автора жития юродивого Василия Блаженного, на людях отправлявшего естественные потребности, смысл этих действий иной — свобода души от плоти: «душу свободну имея... не срамляясь человеческого срама, многаши убо чреву его свое потребование и пред народом проход твори»[13]. Эта альтернативность и двусмысленность восприятия принята и подчеркивается как существенная характеристика мотива, но ею не исчерпывается его глубинная семантика.

Вспомним известное свидетельство К. Г. Юнга о его юношеском видении: бог на золотом небесном троне, экскременты которого разрушают сверкающий собор. В рамках аналитической психологии Юнга мы имеем дело, стало быть, с некоторым архаичным прамотивом, который лишь манифестируется в видении, сопровождаясь глубоким эмоциональным потрясением, но принципиально не может быть исчерпан рационализацией. Наконец, практика психиатрической клиники и ее осмысление предлагают интерпретацию этого круга мотивов в терминах болезненных аутистических изменений личности при шизофрении: дефицит возможностей больного получать удовлетворение от контакта с другими людьми и объектами ведет к нарциссизму и аутоэротизму. Скатологические образы с этой точки зрения образуют базисный психологический язык аутоэротизма; он прочитывается

[13] *Лихачев Д. С., Панченко А. М., Понырко Н. В.* Смех в Древней Руси. Л., 1984. С. 90.

во многих сюжетах о Вороне и Вакдьюнкаге, а также в житиях юродивых и святых.

И в этой сфере, разумеется, изысканное выражение в рамках развитой литературной традиции усиливает, а иногда впервые создает смеховой эффект. Рабле — бездонный источник примеров (260418 человек, потонувших в моче Гаргантюа, должны вызвать адекватную реакцию у читателей «Природы»: комизм связан с точностью измерения).

Итак, архаичный комизм изначально не смешон. Персонифицированный в фигуре трикстера, он воплощает ювенильное нарушение границ культуры. Экскурсии в докультурное и во внекультурное расширяют поле культуры, но главное — расширяют отношение к ней. Дестабилизирующий эффект трикстерства исходно разрушителен. Комическое перерастает в смеховое по мере созревания индивидуальной и социальной психологии, которое помогает нейтрализовать эти разрушительные силы, переводя их в игровой план. В конечном счете цивилизированный смех есть радостное согласие на временный переход границ.

Архетип Пустого Города

Памяти Игоря Юрьевича Кобзарева

Цивилизация как форма общественного бытия имеет одну центральную идеологему: Город. В этой статье мы рассматриваем Город с точки зрения аналитической психологии К.-Г. Юнга, в частности, оперируем такими конструктами, как коллективное бессознательное и архетипы.

Обе темы при этом — Город и глубинная психология — в замысле статьи полагаются как равноправные. Одна из них поверяет другую. Иными словами, мы не постулируем заранее, что имеется теория цивилизации, из которой можно логически вывести или объяснить открытые Юнгом элементы коллективного бессознательного; точно так же мы не предполагаем, что гипотеза Юнга (или любая другая психологическая концепция) «истинна» и может быть положена в основу универсального объяснения той формы социального бытия, которая связана с концентрированным и технологизированным общежитием и «отрывом от почвы». Если угодно, сюжет нашего этюда — отсвет, бросаемый каждым из этих предметов на другой.

С точки зрения теории цивилизации, мы пытаемся понять, какова природа встроенных в нее механизмов саморазрушения.

С точки зрения глубинной психологии, мы ищем новых свидетельств реальности коллективного бессознательного в проявлениях проектного сознания.

I

25 ноября 1984 года в Гуггенхеймовском музее Нью-Йорка закрылась выставка архитектурных рисунков Билла Инсли. На ней были представлены многочисленные листы и объяснительные записки, относящиеся к огромному проекту города на 400 миллионов жителей (все население США), который Инсли называет ONECITY. Мы рискнем дальше пользоваться русифицированным вариантом ЕДИНГРАД, имея в виду, что читатель поэкспериментирует с другими корнеслова-

Впервые опубликовано в международном журнале по теории и истории мировой культуры «Arbor Mundi». М., 1992. № 1. С. 28—34.

ми; как мы увидим дальше, Инсли работает с глубоко невербальной реальностью, а перевод — один из эффективных приемов расшатать ограничения словесной оболочки.

Знакомство с проектом ЕДИНГРАДА можно начать с объяснения урбанистических проблем, на которые он как бы призван дать ответ.

Нью-Йорк быстро разрушается, — говорит Инсли. Как и многие американские города, он может в конечном счете перестать функционировать в качестве поселения. Люди будут жить, кочуя по незастроенным землям, и когда-нибудь решат объединить свои усилия в отчаянной попытке обеспечить свое выживание в новой городской общности.

ЕДИНГРАД раскинется на площади 675 квадратных миль в озерном и холмистом краю между Миссисипи и Скалистыми Горами. Его основные жилые массивы образуют Внешний Город: 14 000 квадратных девятиэтажных зданий, со стороной в две с половиной мили, разбитых на сто «комнат». Только одна пятая площади Внешнего Города будет отведена под застройку, остальное составят природоохранные и рекреационные зоны.

Жилые здания будут иметь также до девяти подземных этажей, в которых разместятся все производственные и административные органы города, магазины, концертные залы, музеи; разумеется, все процессы управления и производства будут компьютеризованы.

Центр ЕДИНГРАДА занят единственным зданием, которое известно как Внутренний Город. Сердце Внутреннего Города — Матовая Библиотека, пустой и запретный лабиринт, хранящий спиритуальные тайны ГРАДА, неудержимо влекущий горожан, но закрытый для них реально и духовно.

ГРАД, по-видимому, будет иметь какую-то форму демократического самоуправления, с принудительным и почти ежедневным голосованием по всевозможным вопросам. Реальных проблем политической демократии Инсли, как и все утописты, не касается. Религиозная жизнь общества связана с поклонением линии горизонта, понимаемой как мистическая грань между прошлым и будущим. Инсли полагает, что он пересекал эту грань и видел свой Город.

Вне городского периметра размещены загадочные /строения/ (косые скобки предупреждают читателя, что речь не идет об обычных единицах застройки). Они не имеют видимого функционального назначения. Пробираясь между косыми стенами, созерцая внезапно открывающиеся провалы или открытые пространства, пытаясь разгадать тайну, горожанин осуществляет индивидуальный мистический акт.

Работа над /строениями/ начинается еще до строительства самого ЕДИНГРАДА, и после завершения /строения/ должны быть навсегда покинуты. Время и стихии немедленно примутся за их уничтожение, но память и легенды о них переживут их материальное существование. В конце концов ЕДИНГРАД предстает взору современников как «руины, погребенные в будущем».

II

Прежде чем пытаться проанализировать этот проект с точки зрения аналитической психологии, мы должны сделать две вещи: вкратце напомнить понятийный аппарат последней, а также обсудить более традиционные способы осмысления культурных явлений, в ряду которых находится проект ЕДИНГРАДА.

Представление о личностной сфере бессознательного достаточно обсуждалось в психологической литературе, чтобы в этой статье считать его известным. Коллективное бессознательное в трактовке Юнга прежде всего противопоставляется личностному, как родовое — индивидуальному (см., однако, ниже уточнение этой трактовки).

Бессознательное имеет свой язык, экспликация и дешифровка которого являются одной из главных целей глубинной психологии. Единицы выражения этого языка суть «комплексы», если речь идет об индивидуальном бессознательном, и «архетипы», если о коллективном.

Пользуясь компьютерной метафорой, язык бессознательного имеет промежуточный уровень, в частности, его семантика двулика. Тот ее лик, который обращен вглубь, нам непосредственно не доступен, и архетипы, как и комплексы, реконструируются лишь по их внешним манифестациям, когда последние осознаются как таковые.

Терапевтическая роль осознания комплексов в практике фрейдовского психоанализа может трансформироваться в идею коллективной терапии социума по Юнгу: эта тема явственно слышна в последней книге, задуманной Юнгом и вышедшей под его редакцией, «Человек и его символы». Однако в структуре теоретических взглядов Юнга инвентаризация архетипов скорее является просто необходимым этапом работы по выявлению содержания коллективного бессознательного.

В работах Юнга некоторые архетипы перечислены (Анимус и Анима, Мать, Дитя); им посвящены отдельные статьи, дающие представление о методологии их поисков. Очень существенны при этом некоторые предостережения Юнга, в частности замечание о том, что каждый архетип является чистой формой, что он может лишь проявляться в различных осознанных вариантах, но никогда не сводится к ним, не исчерпывается ими.

Присутствие архетипического мотива в произведении искусства (или в данных мифологии, этнографии) распознается по нескольким признакам, из которых два главные — высокая интенсивность переживания при загадочности содержания и культурно-независимая повторяемость.

Архетипический мотив «не цивилизован». Он выламывается из рамок любых этических и эстетических оценок. Можно сказать, что архетип этически амбивалентен и эстетически вездесущ (Райдер Хаггард может быть столь же архетипичен, сколь и Гёте), но это будет лишь рабочим выражением того факта, что он принадлежит к другой сфере психики.

Мы обсудим ниже гипотезу о том, что проект ЕДИНГРАДА и историко-культурный ряд, в который он включен, свидетельствуют о существовании архетипа, не зарегистрированного Юнгом, который назовем архетипом Пустого Города.

Но сначала несколько слов о самом этом культурном ряде.

Проект ЕДИНГРАДА проще всего рассматривать как выдающийся образец хорошо известного искусствоведам явления «бумажной архитектуры». Его истоки принято возводить к архитектурным листам Пиранези. В простейшем варианте это фантазии художника или архитектора, с самого начала не предназначенные для исполнения, но в принципе реализации поддающиеся. В условиях нашей страны и эпохи такое упрощенное истолкование бумажной архитектуры ставило ее в один ряд с неисполняемой музыкой и непубликуемой литературой и подразумевало, что проект, оставшийся на бумаге, есть род выкидыша в нормальном творческом процессе. Конечно, такое примитивно политизированное понимание имеет мало общего с реальностью.

Несколько ближе к истине понимание бумажной архитектуры как полноценного продукта «проектного сознания». Жизнедеятельность цивилизованного общества в огромной степени спланирована. План предполагает некоторый список параметров создаваемой ситуации и стремление к их оптимизации. Оптимизация, а также выявление неожиданностей (которые могут оцениваться как положительно, так и отрицательно) достигаются в ходе моделирования, разработки проектов, часть которых тогда вполне естественно оставляется на бумаге как свидетельство отброшенных возможностей и резервуар идей. Регулярное планирование вырабатывает особый тип индивидуального и коллективного сознания, которое принято называть «проектным».

Деятельность проектного сознания очень часто принимается за чистую монету, и любая бытующая идеология исторического оптимизма имеет проектное сознание в своем списке ценностей.

Отчего же бумажная архитектура Инсли (и многих других, от Пиранези с его Carceri до московских школьников, чей проект Города Будущего предлагал холмы, засыпавшие былые здания, и реки, текущие по бывшим улицам) с таким трудом рационализируется и внушает безотчетное беспокойство?

Разумеется, оттого, что подразумеваемая цель проектирования в проекте не только не воплощена, но как бы с ним и несовместима. Очевидно, что в городе Инсли нельзя жить; что Пиранези менее всего заботился о разумном устройстве пенитенциарной системы; что «Columbarium Habitabile» А. Бродского и И. Уткина с его посмертными масками умершего жилья лишь притворяется, и не слишком настойчиво, архитектурным проектом.

Это внутреннее противоречие проектного сознания лишь в простейших случаях удается осмыслить как «предостережение», т. е. сознательное выявление нежелательных тенденций развития, их заострение, с единственной целью увидеть их яснее и тем легче избежать. Автора и нас выдает упоение на краю бездны, готовность шагнуть в черный квадрат.

И тогда, вглядываясь в эти жутковатые плоды творческого воображения, мы начинаем различать в них манифестации глубоко архаичных бессознательных структур и угадывать темный смысл метафор и оговорок проектного сознания, вроде «машины для жилья» или «призрака коммунизма».

III

Архетипы, систематизированные Юнгом, скорее принадлежат *родовому*, нежели *коллективному*, бессознательному. Их манифестации связаны с биологической природой человека как особи до такой степени, что Юнг может рассматривать архетип как эволюционное развитие инстинкта. Исключением является, возможно, архетип Мудрого Старца, или Смысла, хотя и на его этиологию некоторый свет проливают наблюдения над животным миром Лоренца и его школы.

Архетип Пустого Города, постулируемый здесь, принадлежит коллективному бессознательному в более прямом смысле. Его основное измерение имеет внеличностный и интерличностный характер, его главные манифестации прямо соотносятся с communitas В. Тэрнера, понимаемым именно как потенциальные состояния общества, отраженные в его социальной психологии (а не оцениваемые внешним наблюдателем).

Архетип Пустого Города есть форма социума, лишенная его души и не ждущая наполнения, труп, никогда не бывший живым телом, Голем, сама жизнь которого есть смерть. Выявление этого архетипа в проектном и утопическом сознании именно и связано с возможностью воспринять пустую форму как план. Проектное сознание, однако, глухо к гулу мертвой воды. Его доносит искусство: «опустелый улей» Гумилева и ручей в руинах Тарковского.

Характерно, что два современных кинорежиссера, наиболее остро чувствующих этот архетип, Тарковский и Сокуров, обратились к двум вещам Стругацких, чьи лучшие страницы (дневник Абалкина из «Жука в муравейнике», экспедиция из «Града обреченного», описания Леса в «Улитке на склоне») посвящены Пустому Городу, и проявили этот мотив даже там, где в прозе Стругацких он особо не прописан. Упомянем еще Антониони, чьи метафоры отчуждения прямо связаны с нашим архетипом, и, по контрасту, Феллини, в чьих лентах мотив Пустого Города начисто отсутствует, будучи зрительно замещен его отрицанием, образом Рима, в котором, по слову Г. С. Кнабе, «очень тесно и очень шумно».

В той мере, в какой в искусстве проявление этого архетипа требует мотивировки, она обычно дается в виде стереотипа «руин древней, забытой, чужой, великой цивилизации».

Конечно, этот стереотип имеет исторические корни. Судя по хроникам, так, например, воспринимали остатки римских каменных построек саксы, считавшие эти постройки делом рук мифических гигантов и в них не селившиеся (я обязан обсуждением этого вопроса И. Ю. Кобзареву).

Тем более значима психологическая работа Инсли, в которой мотив «руин, погребенных в будущем», эксплицитно выражает основной ценностный ориентир, очень слабо, pro forma замаскированный проектной терминологией и просто вынуждающий искать его корни в глубинной психологии.

IV

Анализ, наброски которого мы представили, явился плодом предложенной С. С. Аверинцевым «установки на диалог» с аналитической психологией. Если предположить, что не все сказанное есть лишь плод исследовательской фантазии, то нужно понять, каковы возможности продолжения этого диалога.

В рамках аналитической психологии крайне важной представляется дальнейшая инвентаризация архетипов с одновременной разработкой методологии этой работы. До сих пор не ясно, какой уровень точности здесь принципиально достижим. Как только психиатр или культуролог переходит от эмпирической данности к классификации, встают две основные проблемы: как распознать само присутствие архетипического мотива и как произвести идентификацию архетипа в принципиально разнородных его манифестациях. Если, как это было до сих пор, объективные критерии заменяются апелляцией к авторитету или «голосу крови» (Дж. Мерри), то это значит лишь, что изучение коллективного бессознательного остается в научной среде лиминальной деятельностью. Возможно, впрочем, что такое положение глубинной психологии ей внутренне присуще, в силу оксюморонно звучащей постановки ее основной задачи: изучение бессознательного средствами сознания. Я не могу не привести выразительного описания лиминальности по В. Тэрнеру, которое удовлетворяет принципу конструктивизма молодого Сельвинского («он употреблял родительного падежа»): «Лиминальные существа ни здесь ни там, ни то ни се; они в промежутке между положениями, предписанными и распределенными законом, обычаем, условностями и церемониалом».

Если от времени до времени все же появляются исследователи, рискующие своим добрым именем ради деятельности вне парадигмы, то это лишь потому, что глубинная психология говорит слишком важные вещи, чтобы их можно было просто отвергнуть за ненаучностью.

Современная цивилизация, в значительной мере сознательно спроектированная и выстроенная, испытывает цепь кризисов разного характера и глубины. Вопрос состоит в том, может ли человечество позволить себе отказаться от этого пути развития. Мы полагаем, что ответ должен быть безусловно отрицательным.

Возвращение к иррационализму еще ни разу из кризиса не выводило. Неумолимое обращение утопий в антиутопии не означает, что будущее следует оставить лишь воображаемому «органическому росту». Разрушительные потенции коллективного бессознательного с легкостью принимают национальную, классовую или конфессиональную окраску, и отказ от научного проектирования не спасает от рытья социального котлована. Он только лишает надежды выкарабкаться из него.

Этим потенциям можно противопоставить лишь воспитание коллективного же сознания.

Иначе Пустой Город будет последним нашим обиталищем.

Литература

1. *Jung C. G.* The Archetypes and the Collective Unconscious / Transl. by R. F. C. Hull. Princeton University Press, 1968.
2. *Poirier M.* A Realm of Logical Insanity // Art News. 1984. Nov.
3. *Аверинцев С. С.* «Аналитическая психология» К.-Г. Юнга и закономерности творческой фантазии // О современной буржуазной эстетике. М., 1972. С. 110—155.
4. *Тэрнер В.* Символ и ритуалы. М., 1983.

Тынянов и Грибоедов. Заметки о «Смерти Вазир-Мухтара»

Дело поэта должно быть оценено
с какого-то пункта...
Вещь остается, работа поэта перед нами,
в любой момент она перед глазами у нас,
но функция вещи изменчива...

Ю. Н. Тынянов. Валерий Брюсов

Царя белого гусары, Петра Первова,
Наперед идут гусары со знаменами,
Позади идут гусары с барабанами.
Становилися гусары у крутой горы,
Как читали же гусарушки указы печальные:
«А у нас, гусарушки, урон сделался,
Человек пропал, генерал помер».

«Собрание народных песен» П. В. Киреевского

I

Люди шестидесятых, которым открылось «рукописи не горят», не заметили, что это дьявол утешает почти мертвеца. Рукописи, сожженные Грибоедовым в крепости Грозной перед арестом в январе 1826 года, сгорели; сгорели и рукописи, сожженные другими позже.

Много сетовали на недостаток у Тынянова исторического оптимизма. Исторический оптимизм, которого доставало у сетовавших, был основан на ложном чувстве наследования. Предполагалось, что унаследованы свободолюбивые идеалы. Тынянов вынуждал рассмотреть возможность того, что унаследованы также тайная канцелярия, восковая персона, граница по Араксу и бесплодие.

То, что главным в человеческой жизни является дело, есть стертая истина. Если задуматься над ней, можно понять дело как тот компо-

---

Впервые опубликовано: Rév. Etud. slaves. Paris: LV/3, 1983. P. 507—521.

нент жизни, который отчуждается от одиночной судьбы, социализируется и становится важным для многих. Но эта часть жизни переменна. Время и биограф могут превратить в дело человека его характер, страсть, предательство, лень, мученичество. Может возникнуть концепция передового человека, то есть человека, позавчера питавшего те иллюзии, которые рухнули только вчера.

Литературное дело Грибоедова поражало яркостью и изолированностью. Тынянов ввел в ряд социального его государственную службу, компромисс и разочарование. От героя, пошедшего на компромисс и разочаровавшегося в свободолюбивых идеалах, нельзя было просто отмахнуться, потому что он был гордостью отечественной словесности. Сверх того, разочарование сопровождалось толковой и талантливой службой в Министерстве иностранных дел Николая I. Согласно помянутому чувству наследования, такая служба сама по себе компрометировала. Не компрометировала бы ссылка в Сибирь или, по крайней мере, уход в отставку и житье во флигеле, отложившемся от России. Позже чувство наследования претерпело определенные сдвиги, и толковая государственная служба была зачтена Грибоедову в одном списке с идеалами и «Горем».

Но и тогда роман Тынянова не стал успокоительным.

Крепкая работа этого человека сопротивляется канонизации.

Пишущий о Тынянове против воли впадает в стилистику оценок по высшему счету, желчный лиризм и страсть к деталям. Со знаменитым вступлением к «Вазир-Мухтару», с музыкальной темой, метафорой, спорят натужно, как с историческим трактатом, — можно ли отделять людей двадцатых от людей тридцатых? — не замечая, что уже сами отделены (в другом веке).

«Этические ценности, социальные и нравственные оценки являются конструктивным, изнутри работающим началом художественного произведения»[1].

Мотив, который сейчас слышен так же явственно, как в то время, когда делались вещи Тынянова: маниакальность власти, ее жалкое безумие, ее мертвая сила.

Тынянов отказывается мистифицировать историю. Человека, который видел в ней «высокие зрелища», Тынянов подозревает в дилетантизме. Роковые мгновенья этого мира пахнут кровью. Попытка индивидуального сознания справиться с этим, подъяв очи горе, неадекватна. Для сохранения человеческого достоинства нужна другая, тяжелая, работа.

[1] *Гинзбург Л. Я.* О литературном герое. Л.: СП, 1979. С. 4.

II

Пустоты, оставленные огнем и страхом в теле истории, можно заполнить «сорока баррелями парижского пластыря»[2], но это — не то, что делает Тынянов. Он ищет утаенное.

Утаенное — значит не просто утраченное, но скрытое. Предположительно, тщательность скрывания сама свидетельствует о важности скрытого. Она же выдает скрытое: усилия, затраченные на скрывание, оставляют след. Человек оговаривается, государство выпускает опасного эмигранта; оказывается, что важность скрытого была преувеличена. Но все равно — его поиски входят в метод.

Любовь Грибоедова в романе важна тем, что ее нет. Есть «младенческая Азия» — Ленхен Булгарина, «молоко тела» Телешовой, «Овидиева наука» и мертвый ребенок Нины. Отсутствие любви подчеркнуто многократно, лексикой, сдвигом образного строя эпизодов, иногда дано впрямую: «Тогда он грубо сказал ей:

— Поедем к тебе.

Потом он сказал пустым голосом: „Радость“, или что-то другое, слово не вышло, и увидел, как она пошатнулась»[3].

Отсутствие любви есть приговор, вынесенный после пристального расследования; лишь перед гибелью на нее становится похожа жалость к жене.

Тынянов остро слышит тайну мужчины и женщины. Тайна любви Пушкина и Карамзиной развернута в широко известном, академическом, академически спорном, исследовании. Но вот в статье «Сюжет „Горя от ума“» Тынянов мимоходом говорит: «...Его [Платона Михайловича] жена Наталья Дмитриевна, которая, судя по началу ее встречи с Чацким, была с ним близка...»

Была ли Наталья Дмитриевна близка с Чацким, совершенно не существенно для сюжета «Горя от ума», для статьи вообще, для хода авторской мысли в этом ее месте; само предложение такого рода слегка еретично в системе тыняновского теоретизирования.

«Домысливание персонажа, наивные о нем догадки, то есть отношение к нему как к настоящему человеку разрушает познавательную специфику искусства»[4].

---

[2] «...Вспоминается, как... пошутил Резерфорд, прослушав лекцию своего друга — палеонтолога Эллиота Смита: „Итак, все, что нужно для полной реставрации гигантозавра — это одна берцовая кость и сорок баррелей парижского пластыря“» (*Данин Д. С.* Человек науки. М.: Наука, 1974. С. 75).

[3] *Тынянов Ю. Н.* Сочинения. М.; Л.: Гослитиздат, 1959. Т. 2. С. 57.

[4] *Гинзбург Л. Я.* О литературном герое. Л.; СП, 1979. С. 56.

Но ухо автоматически отмечает слом интонации диалога на реплике «Я замужем», — больше ничего. Достоверность речевой стихии горя включила рефлекс.

То, что Грибоедов был любовником Ленхен Булгариной, Тынянов, вероятно, услышал в обмолвке Грибоедова в письме Фаддею Булгарину от 24 июля 1828 года. Грибоедов описывает, как он сделал предложение: «Это было 16-го. В этот день я обедал у старой моей приятельницы Ахвердовой, за столиком сидел против Нины Чавчавадзевой, второй том Леночки, все на нее глядел, задумался, сердце забилось...»[5]

Письмо к В. С. Миклашевич, 3 декабря 1828 года: «Полюбите мою Ниночку. Хотите ее знать? В Malmaison, в Эрмитаже, тотчас при входе, направо, есть богородица в виде пастушки Murillo, — вот она»[6].

Письмо к Паскевичу, 6 сентября 1828 года: «Вы говорите, что я слишком озаботился моею женитьбою. Простите великодушно, Нина мой Карс и Ахалцых, и я поспешил овладеть ею, так же скоро, как в. с. столькими крепостями»[7].

Оба свидетельства Тынянов переадресовывает. Первое переплавляется в мотив замещения, при сравнении с документом, — двойного замещения: «Леночка расплачивалась за других, она кого-то напоминала Грибоедову, чуть ли мадонну Мурильо из Эрмитажа?»[8]

Второе кристаллизуется в одну из самых сухих эротических сцен во всей русской литературе: «Высшая власть и высший порядок были на земле.

Власть принадлежала ему.

Он тупым железом входил в тучную землю, прорезал Кавказ, Закавказье, вдвигался клином в Персию.

Вот он ее завоевал, землю, медленно и упорно, входя в детали»[9].

Человек живет не во внешнем мире, а в той карте внешнего мира, которую создает внутри себя. При столкновении с обстоятельствами, которые не были нанесены на карту, происходят срочные перекройки и дополнения. В период перекроек человек растерян и опаслив, его территория имеет зыбкие очертания, на ней разверзаются пропасти и появляются белые пятна. Потом все успокаивается.

На внутренней карте Азия и власть могут ненадолго совпасть с женщиной.

---

[5] *Грибоедов А. С.* Сочинения. М.: ГИХЛ, 1953. С. 585.
[6] Там же. С. 597.
[7] Там же. С. 590.
[8] *Тынянов Ю. Н.* Сочинения. Т. 2. С. 82.
[9] Там же. С. 58.

III

Внутренняя карта человека (и государства) — самое потаенное, что у него есть; человек (и государство) до конца не знает ее границ и рельефа.

На внутренней карте русского государственного сознания Сибирь была несколько мифологической страной, вроде берегов Стикса. Н. Эйдельман «видел в Иркутском архиве документ о партии, отправившейся 23 июня 1827 года из Тобольска в Нерчинские заводы. В ноябре Петербург, не имевший ясного представления о размерах подвластных пространств, запросил иркутского губернатора, почему не докладывает о прибытии арестованных. На это было отвечено, что прибытие ожидается не ранее *января*»[10]. Для русского просвещенного сознания Сибирь открыли декабристы; отмечалось с некоторой гордостью, что в этом была их историческая роль.

Кавказ и Персия в русском просвещенном сознании существовали скорее как пиитическая вольность. Вот как делает это Тынянов: «Елисавет Петровна сидела таким образом:

Сидит и ноги простирает
На степь, где хиной отделяет
Пространная стена от нас,
Веселый взор свой обращает
И вкруг довольства исчисляет,
Возлегши локтем на Кавказ.

Так описал ее Ломоносов.

В такой неудобной позе сидела Елисавет Петровна.

⟨…⟩

Кто там жил на Кавказе? Кто обитал?

Жуковский попробовал было набросать краткий список и утверждал, что там

Гнездятся и балкар, и бах,
И абазех, и камукинец,
И карбулак, и абазинец,
И чечереец, и шапсуг,

что они, как серны, скачут по скалам, а дома курят трубки.

Иноземная, барабанная музыка имен была превосходна и слишком щедра, потому что камукинцев и чечерейцев — таких племен на

[10] *Эйдельман Н. Я.* Лунин. М.: Молодая Гвардия, 1970. С. 223.

Кавказе не было… Гнездиться они, стало быть, не могли. Персидские повести входили в моду»[11].

Грибоедов в «Вазир-Мухтаре» и в жизни, в ее последние годы, был органом русской государственности, действовавшим на далекой периферии не только территории страны, но ее общественного сознания. Документов, свидетельствующих об этом, много. Ермолов полагал, что министру иностранных дел Нессельроде Персия «столь же известна, как всем нам верхний Египет»[12].

Тынянов учитывает эти свидетельства многократно и подчеркнуто. Поэтому особенного внимания заслуживает случай, когда документ, свидетельствующий именно об этом и написанный самим Грибоедовым, использован подчеркнуто иначе. Сделано это не в романе, а в статье «Сюжет „Горя от ума“», во многом загадочной.

В январе 1819 года Грибоедов пишет из Тифлиса издателю «Сына Отечества» письмо по поводу одной публикации в «Русском Инвалиде»: «Пишут из Константинополя от 26 октября, будто бы в Грузии произошло возмущение, коего главным виновником почитают одного богатого татарского князя. Это меня опечалило и рассмешило»[13].

Текст Грибоедова совершенно ясен: он возмущен неосновательностью журналистской работы и описывает истинное положение дел в Грузии, каким его видит. Он объясняет причину, по которой счел долгом написать письмо, — возможные дипломатические осложнения, и настаивает, что «обстоятельство, о котором идет речь, 〈…〉 чрезвычайно важно для меня собственно по месту, которое мне повелено занимать при одном азиатском дворе»[14].

Он кончает письмо недвусмысленно: «если здешний край в отношении к вам, господам петербуржцам, по справедливости может называться *краем забвения*, то позволительно только что забыть его, а выдумывать или повторять о нем нелепости не должно»[15].

Более того, он начинает письмо той самой цитацией из Ломоносова, слегка искаженной, которую потом Тынянов с той же интонацией введет в роман: «Я 〈…〉 вступил в скопище громад, на которые, по словам Ломоносова, Россия локтем возлегла, но теперь его подвинула уже гораздо далее»[16].

[11] *Тынянов Ю. Н.* Сочинения. Т. 2. С. 198, 200.

[12] *Шостакович С. В.* Дипломатическая деятельность А. С. Грибоедова. М.: Соц.-экон. лит., 1960. С. 170.

[13] *Грибоедов А. С.* Сочинения. С. 379.

[14] Там же. С. 381.

[15] Там же. С. 382.

[16] Там же. С. 378.

В статье «Сюжет „Горя от ума“» это письмо призвано поддерживать концепцию, согласно которой сюжет состоит в распространении клеветы.

Аргументация Тынянова обильна и косвенна; ее слабость не в недостатке материала, а в том, что этот материал убедительно поддерживает совсем иное понимание «выдумки» и «слухов» в комедии. Современная исследовательница по другому поводу описывает тот универсальный механизм, который был включен появлением Чацкого. Старушки, перемывающие кости соседке, «выполняют повседневную работу социального общения — совместно вырабатывают объяснение людских поступков. Такое убедительное для всех действующих лиц толкование есть основа и необходимое условие общения. Оно создает у собеседника то ощущение взаимопонимания и понимания других людей, без которого невозможна ориентация в социальной жизни. И пусть нас не вводят в заблуждение анекдотические формы этой работы»[17].

Именно эти анекдотические формы работы по пониманию Чацкого с блеском написаны Грибоедовым.

Страшный смысл, который угадывает за ними Тынянов, есть тень уже другого времени. Лексика первой части статьи последовательно смещается в сторону все более зловещих коннотаций: «слухи» и «выдумки» замещаются «клеветой», безымянный господин N обращается в агента фон Фока, светская болтовня становится «разглашением» и, наконец, вводятся слова «политический сыск» и «донос».

«В годы написания окончания комедии деятельность Особой Канцелярии, которой уже заведовал фон Фок, была сильно развита. Выдумки при деятельности Особой Канцелярии часто получали зловещее завершение».

Кажется, Грибоедов этого не писал, и, кажется, он не делал «предупреждения о Скалозубе как о главном военном персонаже эпохи»[18]. Но — функция вещи изменчива.

IV

Грибоедов, повторяю, действует у далеких границ. Пушкина влечет к ним страсть и неукротимая любознательность; также обида и потаенная мысль о бегстве (эта догадка разработана Тыняновым). Грибоедова к границам влечет талант, талант государственного чи-

[17] *Наумова Н.* Человек рационален? // Знание — сила. 1981. № 10. С. 32.
[18] Там же. С. 378.

новника. Этого таланта Пушкин, по счастью, был лишен, — отсюда его завидная свобода.

В качестве талантливого государственного чиновника Грибоедов принял самое деятельное участие в выработке того мирного договора, который вошел клином в Персию. Цитирую сводные исторические работы.

«Туркманчайский трактат завершил присоединение к России почти всей территории Грузии, Северного Азербайджана, а также Восточной Армении»[19].

Заложенные этим договором принципы действовали до 1919 года, а затем были совершенно отменены. «26 июня 1919 года Советское правительство направило обращение к правительству и народу Ирана. ⟨…⟩ Это был полный разрыв с политикой империализма и колониализма, которой противопоставлялась совершенно новая политика социалистического государства, основанная на принципах интернационализма и самоопределения наций, признания равноправия всех народов.

[Завершив полный разрыв,] части победоносной Красной Армии подошли к границам Ирана.

Под давлением английских оккупантов, иранское правительство направило в 1920 году жалобу в Совет Лиги наций, хотя к этому времени советских войск в Иране уже не было»[20].

В 1918 и 1919 году российская миссия в Иране была разгромлена дважды; посол И. О. Коломийцев, спасшийся в 1918-м, погиб в 1919-м.

Вазир-Мухтар продолжал существовать. История продолжала воспроизводиться в формах, казавшихся случайными и временными, как узор кожи на пальцах, поверх шрамов и ожогов. Через пятьдесят лет после выхода книги, написанной о том, что было за сто лет до нее, были пережиты снова возвращение пленных и безумие отложившихся от России, и мифологизирующее общественное сознание шло по прежним кругам.

Через пятьдесят лет по поводу деятельности Грибоедова были опубликованы рассуждения: «Я думаю, было бы неправильно полагать, что сам факт обращения Грибоедова к „Проекту“ и принятие им высокого поста в государстве Николая I может поставить под сомнение его верность свободолюбивым идеалам и намерениям. Не надо сопоставлять эти явления в жестко альтернативном плане. Здесь уместен более гибкий, пластичный подход.

[19] Всемирная история. Т. 6. М.: Изд. соц.-экон. лит., 1959. С. 278.
[20] История внешней политики СССР. М.: Наука, 1980. Т. 1. С. 131 и далее.

Во имя дела Грибоедов готов был поступиться своим нравственным престижем в глазах окружающих. Для этого требовалось *мужество*, которое Ю. Тынянов понять оказался не в состоянии»[21].

Эта *пластичная* и *мужественная* концепция свободолюбивых идеалов породила даже новое теоретическое понятие «отложенная свобода» («принятие невозможности осуществления свободы в данный момент. (Точка автора. — *Ю. М.*) При сохранении прежней ориентации на более отдаленную историческую перспективу»[22].). Читая это, начинаешь понимать достоинства вульгарного социологизма, — в нем были, по крайней мере, уверенность и прямота.

Итак, на карте установлены новые границы.

Поэтов они продолжают влечь неудержимо. Вслед за Вяземским будет сказано: «Читая шинельную оду о свойствах великой страны...» и повторено: «Империя — страна для дураков».

V

Все, знавшие Грибоедова, поминают его ум.

У Даля словарная статья «Ум» занимает почти четыре колонки. Она хороша: полна расхожих речений, банальностей, вздора. Пояснено, что «Горе от ума — ума строптивого, самовластного»; еще сказано «Поляки опять безумничают». В дефиниции отмечено: «[ум] это одна половина духа его [человека], а другая нрав, нравственность, хотенье, любовь, страсти; в точн. знч. ум, или смысл, рассудок, есть прикладная, обиходная часть, способности этой (ratio, Verstand), а высшая, отвлеченная: разум (intellecto, Vernunft). 〈...〉 Мужа чтут за разум, жену по уму. 〈...〉 В просторечьи *ум* нередко принимает значенье *воли*: худой ум, худой разум... в сем случае ум потому худ, что не мог осилить *воли*».

Богато представлена оппозиция *свой ум—чужой ум*. Самого же естественного для нас противопоставления ум—глупость почти нет; разве что сказано «умная ложь лучше глупой правды».

Статью стоит прочесть целиком, — вдруг открывается семантический дрейф слова за полтора века и перестает казаться странным заглавие великой комедии.

Ум — не мера способности решать интеллектуальные задачи, а черта личности; для умного человека — доминанта личности.

Можно попробовать продемонстрировать, что в романе Тынянова это доминанта сложной художественной системы. Самые существенные вещи здесь сказаны Эйхенбаумом; можно добавить, что формула

[21] *Лебедев А.* Грибоедов. М.: Искусство, 1980. С. 273.

[22] Там же. С. 278.

«конкретность перерастает в символику» неполна. Драпировка бросает отсвет на кувшин, а кувшин — на драпировку. Когда в сцене приема у Николая вскользь сообщается «был предуказан цвет подкладки и форма прически, была предустановлена гармония»[23], то отсвет дворцового церемониала падает на немецкую классическую философию. Это до́лжно воспринимать эстетически.

Л. Я. Гинзбург объясняет: «Типологическая принадлежность человека подтверждается, проверяется на боковых направлениях, на магистральных по отношению к его господствующей установке. Важно, как человек относится к *другим* вещам...»

Чувственный человек Стива Облонский чувственно совершает утренний туалет, а интеллектуального героя Пруста «раздражает присутствие любимой женщины, потому что своим присутствием она мешает ему о ней думать»[24].

VI

Любовь ставит зеркало, которое отражает и преображает человека. Отсутствие любви компенсируется замещениями, беседами со своей совестью и двойниками. Не позже седьмого века до нашей эры в Ассирии или Вавилоне был написан «Разговор господина с рабом», в современной научной литературе называемый также «Диалогом о пессимизме». Каждая строфа диалога, кроме постоянного зачина, состоит из двух реплик господина и двух ответных реплик раба. Две сжатых реплики господина говорят «да» и «нет», два развернутых ответа раба говорят «да» и «нет». Тынянов мог читать прозаический перевод этого текста, вышедший в Ленинграде в 1926 году.

«Раб, повинуйся мне!» — «Да, господин мой, да!»
«Свершу-ка я доброе дело для своей страны!» —
«Верно, сверши, господин мой, сверши.
Кто делает добро своей стране,
Деянья того — у Мардука в перстне».
«Нет, раб, не свершу я доброго дела для страны!» —
«Не свершай, господин мой, не свершай.
Поднимись и пройди по развалинам древним,
Взгляни на черепа простолюдинов и знатных:
Кто из них был злодей, кто был благодетель?»[25]

[23] *Тынянов Ю. Н.* Сочинения. Т. 2. С. 46.
[24] *Гинзбург Л. Я.* О литературном герое. Л.; СП, 1979. С. 148.
[25] Я открою тебе сокровенное слово. Литература Вавилонии и Ассирии. М.: Художественная литература, 1981. С. 207—208.

Цырлин и Белинков разбирают сквозную тему двойника у Тынянова вообще и в «Вазир-Мухтаре» в особенности, но говорят в связи с этим преимущественно о Мальцеве и поручике Вишнякове. Между тем, в романе Грибоедову дан двойник по канонам сюжетосложения, которые чересчур подробно знал Тынянов, — его слуга и молочный брат Александр Грибов. В продолжение всей первой половины романа, до пятой, — последней перед Персией, — главы, сцены с Сашкой Грибовым имеют служебную функцию. Функция эта состоит в травестировании главного героя, в снижении его темы, в контрапункте к трагическому напряжению, которое в параллельном плане разрешается как фарс.

В провинциальной Москве первой главы Грибоедов озирается и наносит визиты прежней жизни; государственный триумф ждет его с Туркманчайским миром лишь в Петербурге. Но он уже предварен пародийным триумфом Сашки, который «налетел, как персидский разбойник, на господский дом, взял его приступом, говорил: „мы“, брови у него разлетались, ноздри раздувались, белесые глаза стали глупыми. Он был даже величествен»[26].

Пародия не бросается в глаза, потому что она дана прежде пародируемого; роман, собственно, почти еще не начат.

Разговору Грибоедова с Нессельроде, ответственнейшему, сделанному с механической точностью, — с него начинается гибель Проекта, — предшествует чинный диалог нумерного и Сашки, в котором Сашка обходится одним междометием.

« — Но нужно очень много нынче внимания. Останавливаются важные бары.

— Рази?

— В прошлом году в десятом нумере играли в карты и одного барина полоснули шандалом.

— Рази?»

Здесь Тынянов обнажает прием: «Разговор ему [Грибоедову] помогал. Невозможно идти сейчас к Нессельроду для того, чтобы декламировать.

Если человек задекламирует, дело его пропало»[27].

После чтения «Грузинской ночи» на обеде у Булгарина, вернувшись к себе, Грибоедов «взял листки и начал их перебирать. Трагедия была прекрасна. Она должна была врезаться в пустяшную петербургскую литературу словом важным и жестоким. Звуки жестки были

[26] *Тынянов Ю. Н.* Сочинения. Т. 2. С. 14.
[27] Там же. С. 86.

намеренно. Какая связь между этой вещью и залой Фаддея, чаем, Петей Каратыгиным? Ее надобно читать на вольном воздухе, в кибитке, может быть, среди гор. Но тогда какая же это трагедия и какая словесность? Совсем один он перечитывал у камина вполголоса стихи»[28].

Оказывается, он был не один, а с Сашкой, и Сашка придерживался того же мнения о трагедии. Выразил он его так: «Вы не стихи читали, Александр Сергеевич, — поучительно сказал Сашка, — стихи это называется песня, а у вас про старуху»[29].

16 апреля 1827 года Грибоедов пишет из Тифлиса Булгарину: «1-я глава твоей Сиротки так с натуры списана, что (прости душа моя) невольно подумаешь, что ты сам когда-нибудь валялся с кудлашкой. Тьфу пропасть! как это смешно, и жалко, и справедливо. Я несколько раз заставал моего Александра, когда он это читал вслух своим приятелям»[30].

В романе подробно описано, как Александр читает «Сиротку» приятелям. В романе Грибоедов ее еще не читал, «Сашка стащил книжку из ящика, негодяй»[31]. В романе оценка Грибоедова отдана Сашке и потому сама становится смешной и жалкой (и, может быть, справедливой).

Третья глава романа, в которой Грибоедов едет из Петербурга в Тифлис, есть глава-задержка. Она является целиком задержкой, и в ней Грибоедова задерживает Марья, воронежская казачка. Марья, воронежская казачка, настоящая женщина, она женщина для Александра Сергеевича и для его молочного брата, Сашки Грибова, и когда это становится явным, задержка кончается.

Во второй, персидской, половине романа эта роль Сашки внезапно прерывается. Сашка становится отдельным человеком. Сцены с ним перестают пародировать Грибоедова и начинают звучать сигналом несчастья. Сказано «он сох, изменился в лице, на вопросы Грибоедова он не отвечал»[32]. Позже сказано: «И ведь действительно сохнет страна»[33] – это Грибоедов требует у Аббаса-Мирзы уплаты последних куруров.

Сашка умирает чуть раньше Грибоедова во время резни в посольстве. Отмечено, что «еще была не убрана постель, Сашка так и не прибрал ее»[34], и потом умирает Грибоедов.

[28] *Тынянов Ю. Н.* Сочинения. Т. 2. С. 144.
[29] Там же. С. 145.
[30] *Грибоедов А. С.* Сочинения. С. 557.
[31] *Тынянов Ю. Н.* Сочинения. Т. 2. С. 194.
[32] Там же. С. 320.
[33] Там же. С. 323.
[34] Там же. С. 416.

В тыняновской интерпретации судьбы Александра Грибова поражает одно обстоятельство. Оно поразило самого Тынянова, когда уже окончив работу над «Вазир-Мухтаром», уже дистанцировавшись от своего героя, он заметил, что пропустил без внимания сходство фамилий Грибоедов-Грибов. Тынянов сказал об этом в статье «Как мы пишем»: «Брат, услужающий брату, брат Грибоедова, лакей с усеченной фамилией»[35].

В издании 1931 года был дописан внутренний монолог Грибоедова, которого осеняет догадка о том, что Сашка его брат.

Новый монолог не кажется чужеродным, потому что во всем строе сцен с Грибовым уже в первом издании сознание того, что Сашка — брат Александра Сергеевича, как бы неявно присутствует.

Обстоятельство, поражающее в тыняновской интерпретации судьбы Александра Грибова, состоит в том, что самим Тыняновым, писавшим роман, это не было осознано явно.

Кажется, что это в необычных обстоятельствах сыграла свою роль психологическая защита. Кажется, слияние биографа со своим героем было таким полным, что он не мог осознать того, чего не хотел осознать его герой, «ненавидевший слово „раб“». Возможны более житейские или внутрилитературные объяснения.

VII

Слияние биографа со своим героем заявлено как прием, — в конце пролога, — но интонация заставляет отнестись к этому серьезно. Роман написан настолько изнутри его героя, что когда герой гибнет, мир в страшной и совершенно потерявшей смысл и вещественность враждебности некоторое время виден как бы его отлетающей душой.

Повествование перехватывает голос осиротевшего автора, который описывает российское прощение Хозрева-Мирзы на таком накале презрения, каким кончить роман о Грибоедове невозможно.

И тогда его кончает Пушкин.

VIII

К словам высшей частотности в пушкинском словаре относятся такие:

день	друг	человек	слава
время	душа	любовь	царь
бог	год	жизнь	дорога
рука	письмо	час	брат
дело	сердце	народ	сон

[35] Ю. Н. Тынянов, писатель и ученый. М.: Молодая Гвардия, 1966. С. 198 («Жизнь замечательных людей»).

И еще:

милый	живой	веселый	бедный
молодой	печальный	нежный	легкий
прекрасный	верный	пустой	гордый

У Тынянова Пушкин — *быстрый*.

Перед своим последним отъездом в Персию Грибоедов написал «Проект инструкции ***, посылаемому в Персию». Три звездочки означают, что инструкция адресована посланнику, а не конкретному лицу, которое назначено посланником. Согласно Тынянову, готовя проект, Грибоедов уже принял назначение; С. В. Шостакович считает, что проект был написан в то время, когда Грибоедов еще не знал, что посланником будет он.

Как бы то ни было, согласно проекту посланник должен «*продолжительностью, однообразием поступков, всегда правильных и откровенных* (подчеркнуто мною. — *Ю. М.*) восторжествовать над недоверчивостью азиатскою и превратить в убеждение со стороны Персии ту роковую необходимость, которая заставила ее принять наши мирные условия»[36].

IX

В «Вазир-Мухтаре» Грибоедов и Пушкин встречаются дважды: в театре и на обеде у Булгарина. О Грибоедове дважды сказано, что Пушкин его стеснял. О Пушкине дважды сказано (голосом Грибоедова), что он — чужой породы.

Первый раз сказано так: «Быть комическим автором одной пьесы — в этом было что-то двусмысленное. Он [Грибоедов] тогда писал для театра, теперь он будет поэт. С Пушкиным должно было быть осторожным. Он смущал его, как чужой породы человек»[37].

Это означает, что Грибоедов — не той породы, какой бывают поэты.

Второй раз сказано так: «Он [Грибоедов] понял сегодня двусмысленное существование Николая. Император был неполный человек. Холод его взгляда был необычаен... Пушкин писал ему стансы. Николай покорял его, потому что Пушкин был человек другой породы»[38].

Это означает, что Пушкин не той породы, какой бывают талантливые государственные чиновники. Талантливого государственного

[36] Цит. по *Шостакович С. В.* Дипломатическая деятельность А. С. Грибоедова. М.: Соц.-экон. лит., 1960. С. 167.

[37] *Тынянов Ю. Н.* Сочинения. Т. 2. С. 52.

[38] Там же. С. 54.

чиновника «известное лицо» покорить не могло. Известное лицо было неполным человеком. Его можно было перехитрить; писать ему стансы было бессмыслицей.

Сто лет спустя стансы были написаны вновь, поэтом, которого называли «мулат», с замечательной уверенностью в наследовании и в том, что теперь им уже пришло время:

Но лишь теперь сказать пора,
Величьем дня сравненье разня:
Начало славных дней Петра
Мрачили мятежи и казни.

Уверенность в наследовании, возможно, была оправдана.

Поэты и вообще не понимают неполноты известных лиц. Они склонны восхищаться, ужасаться (там, где должно служить, не прислуживаясь).

На обеде у Фаддея, где Грибоедов станет читать трагедию, стансы упомянуты вновь, а также «Полтава». О ней Пушкин говорит: «— ...Не будем говорить о ней. Поэма барабанная.

Он посмотрел на Грибоедова откровенно и жалобно, как мальчик.

— Надобно же им кость кинуть»[39].

Дальше во внутреннем монологе Грибоедов называет Пушкина тонким дипломатом. Но это нарочито неловкое слово, и сказано оно затем, что Пушкин совсем не дипломат (так же, как Грибоедов, вероятно, не поэт). «Вот он кидает им кость. Однако же никто об этом так прямо не говорит, а он говорит».

Они разной породы.

Тынянов замыкает Грибоедова в малом отрезке его жизни, и потом ставит вокруг дополнительные ограждения.

Пушкина он же расширяет в пространстве и времени. Пушкин почти магически поддержан кровью предков, ганнибальством, родом, который начинался в Абиссинии. Приходят на память Леви-Брюль и партиципация.

У Грибоедова нет ни предков, ни потомков. Он выведен за рамки своей судьбы «Горем» и какой-то иной магией.

В третий раз о породе сказано в «Ганнибалах» и третьей стороной поворачивается смысл: «„Он не нашей породы“, — сказали чиновники о нем то слово, какое сказала о черном прадеде неверная жена».

Человек чужой породы совершает завоевание России (так говорит Тынянов). Пушкин «увидел и выговорил — завоевал Россию.

[39] *Тынянов Ю. Н.* Сочинения. т. 2. С. 140.

В 1821 году был открыт стихом Кавказ, в 22-м — Крым, в 24-м — Бессарабия...»[40]

Пушкинская Россия появилась на внутренней карте России.

В 1947 году Крымиздат выпускал серию — «Крым в классической литературе». Книжки были в кремовых бедных обложках, с голубеньким тиснением. Кипарисы в пушкинских стихах заменяли отточием; в тот год известное лицо кипарисов не любило; их вырубили. Также опускались татарские топонимы; с Бахчисарайским фонтаном возникла некоторая неловкость. Главным редактором художественной литературы была моя матушка; когда начали разоблачать космополитов, сначала что-то перепутали и космополитом назначили не ее; потом инструкции были уточнены. «Горе» цитировали обильно: насчет «французика из Бордо» и «умного, бодрого нашего народа».

После смерти Пушкина Жуковский написал известное письмо С. Л. Пушкину о последних днях поэта. В. Вацуро толкует это письмо так.

«Официальное посмертное признание Пушкина было очень важно — в глазах Жуковского, Вяземского, А. Тургенева: это означало бы официальное признание литературы как формы деятельности, возведения ее на уровень общегосударственного, общенационального дела».

Но: «Пушкин не был ни политиком, ни военным, ни чиновником; он не проявил себя на государственной службе. Такова была официальная точка зрения»[41].

Поэтому его дело не могло быть общегосударственным.

Возведение литературы на уровень общегосударственного, общенационального дела было совершенно позже.

Великую страну отождествляют или отделяют от ее власти, ее власть отождествляют или отделяют от ее свободы. Свобода обретает смысл в противопоставлении с не-свободой. Не-свобода задана как реальность, а свобода нуждается в ней как в опоре для определения себя как идеала.

Иногда брезжит возможность свободы через измену.

Среди всех изменников в «Вазир-Мухтаре» самый жалкий — то есть более всех заслуживающий жалости — прапорщик Скрыплев, простой и смирный человек. История его измены рассказана на трех страницах. Она начинается с того, что прапорщик был обойден крестиком после первого дела, где он вел себя отважно; крестиком он был обойден потому, что не играл в карты и, следовательно,

[40] *Тынянов Ю. И.* Сочинения. Т. 2. С. 209—210.

[41] *Вацуро В.* Пушкин в сознании современников // Пушкин в воспоминаниях современников. Т. 1. М.: Художественная литература, 1974. С. 33.

не проигрывал командиру полка; в карты он не играл потому, что так настаивал его отец. Прапорщик был безупречен, именно потому «такая простая вещь, как человеческая несправедливость», могла так подействовать на него. Прежде, чем изменить, он оказался «изменен в своем составе»[42]. (Так потеря шинели изменила состав Акакия Акакиевича.) Остальная цепь событий — карты, проигрыш 10 000 командиру, ночная вылазка и переход к людям Самсона Макинцева — развивалась уже как бы автоматически.

«Очнувшись уж в Тегеране, он постарался ни о чем этом не думать, был аккуратен как всегда...»[43]

В этом было безумие смирного прапорщика.

В механизме тегеранской трагедии, который выстроен в романе, отношение Грибоедова к русским дезертирам в Персии занимает едва ли не центральное место. Грибоедов добивался вывода их в Россию в соответствии с Гюлистанским и Туркманчайским договорами; для них возвращение на родину было гибелью, и это Грибоедов уже знал.

Еще в 1819 году он вывел из Тавриза в Тифлис партию из полутора сотен пленных и беглецов, волей преодолев сопротивление и саботаж персидских властей, страх самих солдат и тяготы пути. В письмах и дневниках Грибоедова обычны наблюдательность, сухость и ирония; совсем иначе звучат две краткие записи 1819 года:

«23 [августа]. Хлопоты за пленных. Бешенство и печаль.

24 [августа]. Idem. Подметные письма. Голову мою положу за несчастных соотечественников. Мое положение. Два пути, куда бог поведет...»[44]

Согласно воспоминаниям С. Н. Бегичева, Грибоедов обещал солдатам, что постарается отвратить от них наказание по возвращении, но что «если они и потерпят за преступление, то лучше один раз потерпеть, но очистить свою совесть». В России все тут же вышло из-под его власти; Грибоедов был жестоко разочарован; «я оказался обманщиком», писал он главе русской дипломатической миссии Мазаровичу. Министерство иностранных дел, в ответ на ермоловское представление Грибоедова к награде, заявило, что «дипломатическому чиновнику так не следовало поступать»[45].

Люди Самсона Макинцева в Персии обзавелись семьями и землей; они также составляли цвет персидского войска (спустя десятилетия цвет персидского войска составляли уже русские военные советники

[42] *Тынянов Ю. Н.* Сочинения. Т. 2. С. 357.
[43] Там же. С. 358.
[44] *Грибоедов А. С.* Сочинения. С. 422.
[45] Там же. С. 695.

и части, посланные русским правительством). Версию военного историка А. П. Берже о том, что русский батальон дезертиров в действиях против русской армии не участвовал, Тынянов называет конфетной историей. В «Вазир-Мухтаре» сказано, что на этом батальоне держалась вся Хойская область и что русские беглецы «втыкали себе штыки в животы, чтобы не сдаваться бывшей родине, России».

Эта правда сталкивается в лоб с той правдой, которую сформулировал Грибоедов, донося Паскевичу о своих переговорах с Аббасом-Мирзой. Аббаса-Мирзу нужно было уговорить прекратить военные действия и кончить миром, каким бы худым для Персии он ни был. С этой целью Грибоедов «сравнивал характеры двух народов: персиян — смелых при счастии, но теряющих бодрость и даже подчиненность при продолжительных неудачах, — с другой стороны, указывал на наших, *которые во всех обстоятельствах одинаковы, повинуются и умирают*»[46] (выделено мною. — *Ю. М.*).

Они не были одинаковы во всех обстоятельствах, но умирали все равно, повинуясь или не повинуясь; как солдат Васильков, которому Грибоедов растирал ревматические колени ромом и который в момент перелома «сказал с холодной решимостью, что не последует за мною и что я вправе его убить». Грибоедов пишет, что хотя он и вправе, но такой поступок «противен человеку чувствительному»; он предоставил Василькова своей судьбе, полагая, что «персы не упустят случая с ним покончить»[47]. Воплощенной ревностью России к своим блудным детям был Грибоедов, ревностью, равно жестокой в любви и заботе.

[46] *Грибоедов А. С.* Сочинения. С. 572.
[47] Там же. С. 488.

Солнце, бедный тотем

Выходящая в Рио-де-Жанейро газета «Маншети» опубликовала не так давно небольшую статью о племенах индейцев намбиквара, живущих на северо-западе штата Мату-Гросу и еще в нескольких районах Бразилии. «Охотятся они с помощью лука и стрел, — рассказывалось в статье, — спят на голой земле, преимущественно в золе». Представители «одного из племен намбиквара — хахаинтесу — считают себя первыми обитателями Земли. По словам старейшины племени... как только индейцы хахаинтесу утратят качества, присущие первым людям Земли, наступит конец света»[1]. Сейчас намбиквара насчитывают около 600 человек.

В «Печальных тропиках» намбиквара посвящена целая глава. В 1938 году, когда Клод Леви-Стросс, тридцатилетний этнограф из Парижа, изучал этот народ во время экспедиции, их было до двух тысяч.

Еще раньше, в 1915 году, председатель телеграфной комиссии Кандидо Мариано да Сильва Рондон оценивал их число в 20 тыс. человек. Рондон организовал «Службу защиты индейцев», стал во главе ее и сделал ее девизом один из непопулярных принципов человеческой этики: «Умереть, если неизбежно, но никогда не убивать». Видимо, намбиквара, по землям традиционного расселения которых прошла телеграфная линия Рондона, это не помогло.

Вымирали намбиквара, а также кадивеу, бороро, тупи-кавахиб и другие индейские племена Южной Америки, которые описал в своей книге К. Леви-Стросс. Поэтому тропики, увиденные им, печальны.

Клод Леви-Стросс родился в 1908 году в Бельгии, в семье художника, детство провел во Франции, учился философии и праву. Испытал глубокое влияние трудов Маркса. Увлекался музыкой, геологией, психоанализом. Сформировался как этнограф после полевых исследований среди индейцев Южной Америки и преподавания в университете Сан-Паулу (Бразилия) в конце 30-х годов. В 1941—1947 гг. жил и пре-

---

Рецензия на книги К. Леви-Стросса «Печальные тропики» (М.: Мысль, 1984. 218 с.) и «Структурная антропология» (М.: Наука, 1983. 535 с. (Сер. Этнографическая библиотека).). Впервые опубликовано: Природа. 1985. № 6. С. 123—127.

[1] Цит. по: За рубежом. 1984. № 10(1235). С. 18.

подавал в США, затем вернулся в Париж. В 1949 году защитил диссертацию «Об элементарных структурах родства». С 1958 года заведовал кафедрой структурной антропологии в Коллеж де Франс, с 1973 года — член французской Академии наук. Автор книг, выдержавших целый ряд переводов и переизданий, эрудит, философ, создатель структурной теории этнографии, К. Леви-Стросс — сам некоторым образом олицетворение структурализма — до сих пор почти не был представлен русскому читателю своими работами, хотя несколько публикаций его и о нем в нашей стране появилось[2].

Две книги, о которых здесь идет речь, были ключевыми трудами ученого. В молодости отношение исследователя к объекту своего изучения носило черты страсти, позже оно сменяется ностальгической привязанностью. «Печальные тропики» — книга о первых встречах с этим будущим «объектом», то есть с людьми, людьми первобытной и умирающей культуры, о встречах, увиденных уже издалека, с расстояния полутора десятилетий. Сокращенная в русском переводе почти вдвое, книга может восприниматься преимущественно как путевой дневник, о чем следует пожалеть. В издании выпущена, в частности, центральная глава «Как становятся этнографом», существенная для понимания биографии и психологии автора, где он пишет: «Как математика или музыка, этнография принадлежит к числу немногих подлинных призваний. Ее можно открыть в себе, даже если вас ей не обучали»[3]. «Печальные тропики» следует читать также и как дневник этого внутреннего открытия.

«Структурная антропология», в отличие от «Тропиков», обращена в первую очередь к читателю-специалисту. Это — даже не монография, а сборник научно-исследовательских работ по структурной теории этнографии, публиковавшихся ранее, дополненный полемическими «Послесловиями» к двум главам. И все же именно выход этой книги в 1958 году стал этапом в биографии К. Леви-Стросса и его идей и привлек к ним широкое общественное внимание. По-видимому, удачным оказался формообразующий принцип сборника: каждая статья либо с какой-то стороны освещает основную установку исследователя — отношение к объекту как к структуре, либо

[2] См., напр.: *Леви-Стросс К.* Колдун и его магия // Природа. 1974. № 7. С. 86; № 8. С. 88; *Курсанов Г. А.* Современный структурализм — философия и методология // Природа. 1974. № 7. С. 74; *Грецкий М. Н.* Человек и природа в концепциях структурализма // Там же. С. 78; *Алексеев В. П.* Структурный подход к проблеме бессознательного // Природа. 1974. № 8. С. 98; *Леви-Стросс К.* Миф, ритуал и генетика // Природа. 1978. №1. С. 90; *Иванов В. В.* Клод Леви-Стросс и структурная антропология // Там же. С. 77.

[3] *Levi-Strauss C.* Tristes tropiques. Paris, 1955. 41 p.

демонстрирует приемы структурного анализа на конкретном материале.

Существенным дополнением к сборнику в русском издании служит обзорная статья Е. М. Мелетинского «Мифология и фольклор в трудах К. Леви-Стросса». Кроме выпуклого изложения общетеоретических установок К. Леви-Стросса, она содержит детальный и критический реферат его четырехтомного труда «Мифологичные» («Mythologiques I—IV»), где механизм структурного анализа разворачивается на обширном пространстве.

Цель другого приложения «К. Леви-Стросс и структурная теория этнографии», написанного Вяч. Вс. Ивановым, — поставить научную судьбу и методологию К. Леви-Стросса в общий контекст гуманитарной мысли конца XIX и первой половины XX века. Сотрудничество К. Леви-Стросса с замечательным математиком А. Вейлем, влияние на него Р. Якобсона, одного из создателей современной структурной лингвистики, история усвоения уроков психоанализа и отталкивания от него — все это помогает увидеть идеи ученого в правильном свете. Третье приложение, статья Н. А. Бутинова «Леви-Стросс — этнограф и философ», написана с критической позиции. Ее крайнее выражение — заключительные фразы: «Сложился миф (о Леви-Строссе. — *Ю. М.*), который можно изучать и анализировать. Мы попытались раскрыть структуру этого мифа» (с. 466). Следует понять, какие особенности творчества К. Леви-Стросса могут психологически оправдать и такое мнение.

Чтобы дать читателю этой рецензии хотя бы первое представление о сути научной работы К. Леви-Стросса, следует выбрать из круга его интересов определенный сюжет. Вслед за Е. М. Мелетинским мы остановимся на вкладе К. Леви-Стросса в понимание мифологического мышления.

Есть ряд общих черт первобытного мышления, открывающихся взору исследователя, когда он работает в поле или изучает тексты архаичных мифов. Первобытный человек не отделяет себя от природы и своего окружения, он одухотворяет и персонифицирует неодушевленные предметы и явления природы. Мифологические представления являются средством и способом обобщения и объяснения повседневного эмпирического опыта, а также основной формой выражения и существования духовного опыта. Сущность вещи или явления раскрывается в мифе о происхождении (этиологии) этой вещи.

Действие мифов, особенно этиологических, происходит в начальное, сакральное, не эмпирическое время. Таковы тотемические мифы, повествующие о происхождении определенных групп (родов) людей из тотемов — видов животных или растений, иногда явлений природы. (Волчица, вскормившая Ромула и Рема, — вероятно, след архаичного тотемического верования.) Первобытное мышление оперирует предметными представлениями.

Каждый исследователь мифологии так или иначе формулирует свое отношение к нескольким фундаментальным вопросам. Следует ли рассматривать основные характеристики мифологического мышления как некоторую его недостаточность или же как типологическое своеобразие по сравнению, скажем, с научным мышлением, характерным для современной цивилизации? Осуществляет ли миф в первобытном обществе объяснительные, познавательные функции или же его роль иная? Каково относительное место личной и коллективной психологии в столкновении и функционировании мифологического мышления?

Согласно К. Леви-Строссу, на все эти вопросы можно дать решительные ответы. Первобытное мышление, при всей его чувственной и предметной конкретности, является мощным средством классификации и анализа. В этом смысле оно логично и рационально. «Логика мифологического мышления так же неумолима, как логика позитивная, и, в сущности, мало чем от нее отличается. Разница здесь не столько в качестве логических операций, сколько в самой природе явлений, подвергаемых критическому анализу... Человек мыслил всегда одинаково „хорошо“» (Структурная антропология. С. 206—207). Укажем вкратце на другие точки зрения, чтобы читателю было с чем сравнивать: первобытному мышлению не свойственна логичность, его организующие принципы — ассоциации, сопричастность, аналогии по смежности (французский философ и психолог Л. Леви-Брюль); миф не есть средство познания внешнего мира, он есть средство поддержания непрерывности, сохранения традиций, стабилизации космического и социального порядка; эту функцию миф осуществляет, когда он переживается как магическая реальность (английский этнограф и социолог Б. Малиновский).

Далее, по Леви-Строссу (эту мысль он разделяет с Леви-Брюлем), миф есть выражение коллективного бессознательного. Коллективное — значит обусловленное не личным опытом, но принадлежностью к биологическому виду и к социуму. Бессознательное — значит не осознаваемое. Содержание этого коллективного бессознательного — ментальные структуры, т. е. закономерности человеческой психики, которые подлежат выявлению при изучении мифа. (Употребление этих терминов не совпадает у К. Леви-Стросса с юнгианским или фрейдистским.) Удачно передает суть этого понятия несколько парадоксальное словосочетание «несознаваемо логическое»[4].

Чтобы представить мифологию как поле логических операций, Леви-Стросс широко пользуется инструментом бинарных оппозиций, примеры которых на разных уровнях абстракции даются такими парами, как «верх/низ», «день/ночь», «сакральный/профанный», «природа/культура». Логические операции для него — это операции трансформирования, переводящие одну позицию в другую, или так называемые медиации, с помощью которых оппозиция, рассматриваемая как противоречие, делается психологически и социально приемлемой посредством ее замены на ряд последовательных и все менее «интенсивных» оппозиций.

Поясняя идею медиации, Е. М. Мелетинский пишет: «Противоположность жизни и смерти подменяется противоположностью растительного и животного царства, противоположность растительного и животного царства подменяется противоположностью употребления растительной и животной пищи. А последняя снимается тем, что сам посредник — мифический культурный герой — мыслится в виде животного, питающегося падалью (Койот, у северо-западных индейцев — Ворон), и потому стоит посередине между хищными и травоядными» («Структурная антропология», с. 472).

Наконец, к числу логических операций Леви-Стросс относит, например, классификации, заложенные в тотемических системах, когда разнообразие видов животных используется как резервуар меток для обозначения социальных групп.

В уже цитированной XI главе «Структурной антропологии» Леви-Стросс демонстрирует методологию своего анализа «в пробирке», применяя этот анализ к мифу об Эдипе, который постоянно бытует и интерпретируется в европейской культуре и потому не может доставить читателю дополнительных трудностей экзотичностью своего материала (как это происходит с мифологией американских индейцев, толкуемой в «Мифологичных»). Читатель, знакомый с фрейдистской традицией интерпретации мифа об Эдипе, с работами советских ученых В. Я. Проппа, В. Н. Ярхо, С. С. Аверинцева, оценит своеобразие подхода Леви-Стросса.

«Что же выражает миф об Эдипе, истолкованный „по-индейски“? — рассуждает К. Леви-Стросс. — Вероятно, что общество, исповедующее идею автохтонности человека (см.: Павсаний, кн. VIII, XXIX, 4: расте-

[4] *Дараган Н. Я.* Предмет и метод исследования в «Структурной антропологии» К. Леви-Стросса // Пути развития зарубежной этнологии. М., 1983. С. 29.

ние есть прообраз человека), не может перейти к мысли о том, что каждый из нас рожден от союза мужчины и женщины. Это неодолимый барьер. Но миф об Эдипе дает логический инструмент, при помощи которого от первоначальной постановки вопроса — человек родился от одного существа или двух? — можно перейти к производной проблеме, формулируемой приблизительно так: подобное рождается подобным или чем-то другим?» («Структурная антропология», с. 193). Автохтонность здесь — происхождение из Земли; мотив этот в фиванских мифах скрыт в этимологии имен Эдипа, Лая, его отца, Лабдака, его деда, которая намекает на хромоту, леворукость и т. п., — качества, в разных мифологиях присущие хтоническим существам, рожденным Землей.

Как и в других областях науки, такие глубокие реконструкции поражают одних профессионалов своей глубиной, а других — своей произвольностью. Построения К. Леви-Стросса уязвимы для критики, и он подвергался ей с разных сторон.

Даже согласившись с ролью, которую К. Леви-Стросс приписывает медиации противоположностей в «логике мифа», можно сомневаться в основательности того, как ученый соотносит ее с логикой научного мышления. Прежде всего, в идее архетипов К. Г. Юнга можно усмотреть этап или уровень мифологического сознания, предшествующий выделению оппозиций как таковых. Архетипические образы, исходный материал мифа по Юнгу (также коллективный и бессознательный, но в другом смысле), внутренне амбивалентны и в то же время служат символами некоторой целостности. Поэтому и миф как целое можно рассматривать в качестве средства медиации еще не сформировавшейся противоположности.

В таком случае, оставаясь в русле мысли самого К. Леви-Стросса, можно предположить, что следует просматривать его серии медиаций «в противоположном направлении», как фиксацию рождения фундаментальных оппозиций. Хотя в строго структурном, синхроническом движении анализа направление этого движения почти безразлично (К. Леви-Стросс подчеркивает это в «Мифологических», имитируя «круг» — музыкальную форму рондо), для понимания мифа как идеологии такие проблемы могут иметь первостепенную важность. Е. М. Мелетинский, подчеркивая не абсолютность даже таких центральных для анализа К. Леви-Стросса оппозиций, как «природа/культура», приводит убедительный материал в поддержку точки зрения о постепенном вычленении оппозиций, а не их медиации.

Далее, форма существования «логики» в первобытном мышлении, реконструируемая К. Леви-Строссом, по самому своему характеру должна отторгаться научным мышлением, а не наследоваться им. Исторически так оно и было. Трезвее всех это выразил Фрэнсис Бэкон, назвав соответствующие коллективные представления призраками рода, рынка и театра и отвергнув эти мифопорождающие структуры сознания как мешающие дальнейшему научному освоению мира.

Но даже не соглашаясь с оценкой мифологического мышления как полноценного научного и лишь оперирующего другим кругом явлений, можно быть уверенным в том, что его глубокие механизмы в разных формах продолжают действовать во все времена.

В индивидуальной психологии способность к мифологизации может выступить в качестве мощного творческого или терапевтического фактора. Попытка З. Фрейда была, возможно, самой заметной героической вылазкой разума против иррационального в человеческой психике. Как было сказано, на кушетку психоаналитика легла вся западная культура этого столетия. Была ли в результате этого открыта «научная истина»? Едва ли, и все же не в этом дело. В главе X, названной «Эффективность символов», К. Леви-Стросс показывает, что важно одно: дать больному язык для выражения до того невыразимого, способы же выражения и побочная семантика этого языка могут быть в высшей степени произвольны, ибо анализ психоаналитика есть творимый миф.

В социальной психологии коллективное переживание мифа играет огромную стабилизирующую роль. На протяжении всей истории человечества гуманитарное знание вновь и вновь воспроизводит характерные образцы мифомышления, и рационализм К. Леви-Стросса-этнографа следует воспринимать с этой поправкой. Бэконианские призраки не исчезли от того, что на них указали пальцем, и шепчут нам что-то о нас самих. В исследовании природы бэконианский идеал был реализован за три с половиной столетия с величайшей последовательностью, но мир, в который он привел человечество, стал по-новому неустроенным и еще более опасным.

Анализ мифов, проделанный К. Леви-Строссом и направленный на выявление их глубинной структуры, подробен и блестящ. Но интерпретация социального функционирования этой структуры далеко не однозначна.

Работы К. Леви-Стросса уже заняли свое историческое место, как памятник целой эпохи в истории гуманитарного исследования. Образцом такого исследования считалась лингвистика, отчасти в силу замечательной определенности объекта лингвистического изучения — изначальной совокупности текстов.

Для лингвиста текст есть реальность — он звучит или записан, на камне или на бумаге. Между тем этнограф или культуролог, готовый объявить текстом тип поведения, обряд или даже «всю культуру», иногда скрывает от себя тот простой факт, что превращение этого обряда или типа поведения в языковый текст и есть решающий этап его работы. При этом отношение такого превращенного текста к внетекстовой реальности перестает быть в центре внимания исследователя, как только превращение в текст завершено. Между тем «текста культуры» не существует, он может лишь заново и заново создаваться, каждый раз по-разному огрубляя и структурируя реальность. Идеал полноты описания и потому его максимальной точности, хотя и недостижимый, всегда остается существенным и для лингвиста. Но уже специалист по мифологии может жаловаться на «избыточность материала». Есть существенная разница между изучением предмета и изучением описания этого предмета, каким бы научным такое описание ни казалось, и главная проблема структурализма, вероятно, содержится в вопросе: структуру чего он изучает?

В глазах автора этой рецензии, профессионального математика, два десятилетия пристально и пристрастно следившего за гуманитарной работой своих современников, гуманитарное исследование, по словам итальянского филолога Умберто Эко, есть «открытое дело». Систематическое проведение хорошо определившей себя методологии компенсируется и уравновешивается в нем проницательными фантазиями эссеита и визионера. К. Леви-Стросс как человек и ученый представляет в своей работе оба эти полюса, что в немалой степени определяет привлекательность его книг и их открытость для критики. Стоит ли долго сетовать на преувеличенный логицизм некоторых его формулировок? К счастью, он непоследователен.

В замечательной работе Ольги Михайловны Фрейденберг «Введение в теорию античного фольклора», где исследовано переходное состояние от мифологической образности к понятийному мышлению, на удивительном примере демонстрируется, как человек рационализирует изначально иррациональное и архаичное. В средние века исход судебного процесса между мужчиной и женщиной мог решаться поединком. При этом мужчину по пояс зарывали в землю. «Этим он уподоблялся женщине, становился Геей в ее классическом образе: однако такая метафористика, пройдя через каузализацию, объяснялась желанием сделать скидку на слабость женщины, уравнять силы мужчины с женскими».

Таким образом, магическое действие, уподобляющее мужчину женщине-Гее-Земле, переосмысляется как бытовое: женщине дают «фору» по ее слабости. Но такое истолкование происходящих действий не делает их рациональными по сути, они входят в систему, которая подчиняется скрытой логике мифомышления. Развивая эту мысль, О. М. Фрейденберг продолжает: «Так примерно продвигается вперед вся человеческая культура. Условная от конца и до начала, возведенная из кирпичей давно забытого мировосприятия, она беспрерывно претендует на логичность и целесообразность своих выражений. Она верит в прогресс и в новшество. Наука осторожно и скромно поправляет в ее руках вожжи. Но люди противятся таким жестам... Солнце, бедный тотем, показывается людям за несколько оболов только на пляже»[5].

[5] *Фрейденберг О. М.* Миф и литература древности. М., 1978. С. 162—163.

Ватикан, осень 1996

В конце прошлого года многие периодические издания сообщили своим читателям, что Римская Католическая Церковь признала дарвиновское учение об эволюции. Эта информация была основана на тексте послания, которое глава Католической Церкви Иоанн Павел II адресовал пленарному заседанию Папской академии наук.

Этот необычный институт состоит из 70 членов — ученых мира, пользующихся высоким научным авторитетом. Их выбирает Папа по рекомендации Совета Академии и по предложению академических кругов. Академия призвана «умножать славу науки», а также «поддерживать исследования». Ежегодно она проводит научные сессии и публикует результаты дискуссий в специальном издании.

Вид на Ватикан со смотровой площадки купола собора Св. Петра

Впервые опубликовано: Природа. 1997. № 8.

Мы попросили известного математика, члена-корреспондента РАН, являющегося членом Папской академии наук, прокомментировать это событие.

1. Несколько холмов, обнесенных стеной, к западу от Тибра, к которому обращена колоннада Сан-Пьетро, в плане похожая на жвалы большого жука, — это Ватикан. Академии отведен особняк, прячущийся в низине, Казина Пия IV. Сады пусты и тихи, уличный грохот Рима скорее стоит в ушах, чем слышен.

Папская академия была основана в 1603 году, но в современном виде существует только после коренной реформы, проведенной Пием XI в 1936 году. Согласно уставу 1936 года, цель Академии — способствовать прогрессу математических, физических и других естественных наук и изучению связанных с ними гносеологических проблем, членство в Академии не связано с какими бы то ни было ограничениями по этническому или религиозному признаку. В ее состав входили М. Планк, Н. Бор, Э. Резерфорд, Э. Шрёдингер, Ч. Шеррингтон, В. Вольтерра. В 1996 году я имел честь быть избранным в Академию вместе с моим коллегой С. П. Новиковым, биохимиком и Нобелевским лауреатом (1980) П. Бергом, астрономом В. Рубин, биологом и Нобелевским лауреатом (1958) Дж. Ледербергом. Научные сессии 1996 года были посвящены происхождению и ранней эволюции жизни и возникновению структуры во Вселенной на уровне галактик.

Папа Иоанн Павел II дважды в этом году обращался с посланиями к Академии. Во втором из них, от 29 ноября, он писал:

«Одна из задач вашей Академии — предоставлять святому престолу и Церкви по возможности полную и современную картину новейших открытий в различных областях научного знания. Этим вы способствуете росту взаимопонимания между наукой и верой. В прошлом взаимные недоразумения порой определяли эти отношения. К счастью, Церковь и научное сообщество могут сегодня рассматривать друг друга как партнеров в общем стремлении ко все более совершенному пониманию Вселенной, той сцены, по которой человек идет сквозь время навстречу своему трансцендентному предназначению. Плодотворный диалог происходит между этими двумя видами знания: тем, которое полагается на природную силу разума, и тем, которое проистекает из явленного вмешательства Бога в человеческую историю. ⟨…⟩ Оба вида знания суть чудные дары Творца.

Яркий пример общего интереса науки и религии, более того, их нужды́ друг в друге — тема вашего нынешнего собрания: „Возникновение структуры во Вселенной на уровне галактик“. Этой конференцией *вы завершаете общий обзор физического космоса. Потрясающе, что с помощью сложной современной техники вы „видите“ не только обширность Вселенной, но и невообразимую энергию и динамизм, пронизывающие ее. Еще более поразительно то, что, поскольку сигналы от ее самых дальних областей передаются светом с конечной скоростью, вы способны „заглянуть“ в отдаленнейшие прошлые эпохи, а не только описывать процессы, происходящие сегодня. Надежно установленные экспериментальные результаты позволяют вам построить общую схему или модель, прослеживающую полную эволюцию Вселенной: от бесконечно краткого мгновения начала времени до настоящего и далее, в отдаленное будущее.*

Вы, люди науки, внимая огромной пульсирующей Вселенной и разгадывая ее тайны, осознаете, что в некоторых точках наука, видимо, достигает той таинственной границы, у которой ее вопрошание соприкасается со сферами метафизики и теологии. В результате этого нужда в диалоге и сотрудничестве науки и веры становится все более животрепещущей и многообещающей».

2. Невдалеке от Сан-Пьетро — крепость XVI века, Кастель-ди-Сант-Анджело, построенная на остатках гробницы императора Адриана. Вмазанная в стену доска напоминает об императоре его пронзительным пятистишием, обращенным к душе, отлетающей в туман и холод, где ей уже не предаваться милым играм:

Animula vagula, blandula,
Hospes comesque corporis,
Quae nunc abibis in loca
Pallidula, rigida, nudula,
Nee, ut soles, dabis iocos[1].

Стоическая печаль прощания с жизнью вместо пламенных фантазий о воскрешении и воздаянии, к которым римляне относились с некоторой интеллектуальной брезгливостью.

На Палатинском холме тоже тихо. Фасады развалин отделены от редких туристов решетками, как слоны в зоопарке.

Католическая Церковь унаследовала античную роскошь праздничных одежд, архитектуру вилл и гражданскую страсть патрициев к жизнеустроительству. Традиционный титул Папы Pontificus Maximus

[1] Душа маленькая, хрупкая, потерянная,
Тела спутник и гость,
Ты сходишь теперь в места
Блеклые, холодные, туманные,
Где тебе уж не предаваться милым играм.

означает «Верховный мостостроитель» и был когда-то титулом цезаря как верховного жреца.

Светский Рим, шумящий вдоль магистралей, унаследовал варварские штаны германцев и варварские автомобили американцев.

Наши радиотелескопы, масс-спектрометры и теории Великого Объединения — плоды предприимчивого неоязычества и почти разочаровавшегося в самом себе Просвещения. В Риме времена прорастают друг сквозь друга, и Вера Рубин, одна из открывателей таинственной темной материи, участвующей только в гравитационном взаимодействии, гуляет под сводами Сикстинской капеллы и разглядывает Сотворение Мира.

Сотворение мира «по-научному» вызывает у Иоанна Павла II сильный эмоциональный отклик, но в свое время Галилей был подвергнут допросу и девятилетнему домашнему аресту за куда менее грандиозные обобщения, и стоит вслушаться, с какой осторожностью Папа касается этой болезненной истории в своем послании к Академии от 22 октября, где несколько последующих абзацев посвящены биологической эволюции:

«Принимая участников пленарного заседания вашей Академии 31 октября 1992 года, я уже имел случай, в отношении Галилея, привлечь внимание к необходимости строгой герменевтики при интерпретации Откровения. Следует отделить собственно содержание Священного Писания от его необязательных толкований, вкладывающих в него то, чего в нем не содержится. Чтобы отграничить область своей компетенции, экзегет и теолог должны быть осведомлены о достижениях естественных наук».

Логическая структура аргумента такова: Писание истинно, Галилей тоже был прав, но так как истина не может противоречить истине, не правы были те, кто усмотрели такое противоречие. (Напомню, что основное обвинение, предъявленное Галилею, гласило, что его защита коперниканства «наносит вред святой вере, поскольку наводит на мысль, что Писание ложно».) Если я правильно понимаю, формальная реабилитация Галилея все еще не состоялась.

Как бы то ни было, Папа созерцает огромный Мир, образовавшийся после Большого взрыва и, словно вспомнив прежние свои годы (Кароль Войтыла в юности — режиссер и драматург), выводит на его космическую сцену человека, «идущего навстречу своему трансцендентному предназначению».

Затем в послании начинается обсуждение эволюционной теории. Самое цитируемое место послания — «теория эволюции есть более чем гипотеза» — в более широком контексте звучит так:

«Принимая во внимание состояние науки своего времени, а также требования теологии, энциклика „Humani generis“ (1950) уже рассматривала доктрину „эволюционизма“ как серьезную гипотезу, достойную глубокого изучения наряду с противоположной гипотезой. Пий XII добавил два методологических условия: что это мнение не должно считаться окончательно доказанным и позволяющим полностью отвлечься от Откровения в существе вопроса. Он также сформулировал условие, при котором это мнение совместимо с христианской верой, к которому я вернусь ниже.

Сегодня, спустя почти полстолетия после публикации энциклики, новые открытия приводят к признанию того, что теория эволюции есть более чем гипотеза. Замечательно, что эта теория все шире принимается учеными вследствие серии открытий в разных областях знания. Не ожидавшаяся и не сфабрикованная внутренняя согласованность результатов этих работ, которые велись независимо, сама по себе служит значительным аргументом в пользу теории».

Все сказанное относится к биологической эволюции. Но с возникновением человека, утверждает далее Папа, мы оказываемся перед «онтологическим скачком», метафизическим разрывом, который нарушает физическую непрерывность:

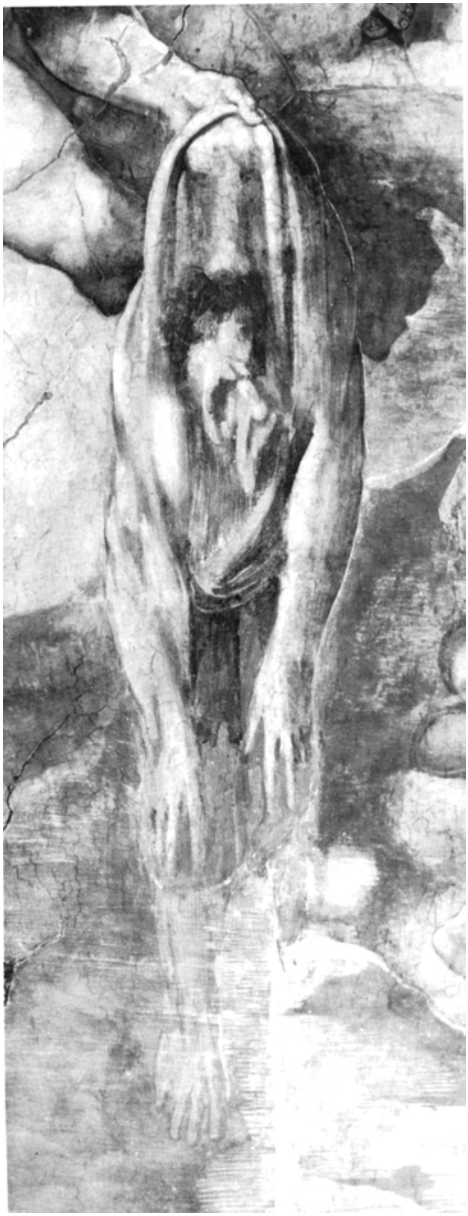
«Пий XII подчеркнул существенный момент: если человеческое тело возникает из предсуществовавшей живой материи, то его душа непосредственно создана Богом.

Следовательно, те теории эволюции, которые, в соответствии со своими философскими установками, рассматривают разум как явление, возникающее из внутренних механизмов живой материи, или просто как эпифеномен материи, несовместимы с истиной о человеке и не способны обосновать достоинство человека».

И далее:

«Наблюдательные науки описывают и измеряют многообразные проявления жизни с возрастающей точностью и размещают их на временно́й шкале. Момент перехода к духовному не может быть объектом наблюдений такого рода. Тем не менее они могут на экспериментальном уровне открыть ряд важных признаков специфичности человеческого существа. Но опыт метафизического знания, самосознания и рефлексии, совести, свободы, а также эстетический и религиозный опыт — все это относится к компетенции философского анализа, тогда как теология выявляет его конечный смысл в соответствии с планами Творца».

Иными словами, философской позицией церкви объявлен вариант дуализма, дающий полную свободу исследованию «материи» и моно-



Микеланджело. Фрагмент росписи Сикстинской капеллы полизирующий толкование «духа» в терминах одной из исторических версий христианства.

Эта четкость гносеологических установок заслуживает уважения. Она же позволяет яснее представить себе, насколько труден плодотворный диалог между наукой и верой, которые безнадежно разделены ценностными, если не гносеологическими, ориентациями.

Коротко говоря, если дух не является эмерджентным свойством материи, то невозможно не только его экспериментальное изучение, но и никакой рациональный дискурс о нем. Пример тому — история тысячелетнего раскола между западной и восточной Церквями. В западной редакции Символа веры Святой Дух исходит от Отца и Сына, тогда как в восточной — только от Отца. Невозможность преодолеть это догматическое различие существенно повлияло на образ жизни и отношение друг к другу христианских народов.

3. На алтарной стене Сикстинской капеллы, в которой по традиции происходит избрание Папы, в сцене Страшного суда, Микеланджело написал самого себя. Мускулистый святой Варфоломей, воскресший мученик, держит в руке заживо содранную с него кожу. У этого страшного мешка души искаженные черты лица художника. Может быть, венский философ[2] был прав: «О чем нельзя сказать ясно, о том следует молчать».

[2] Имеется в виду Людвиг Витгенштейн (1889—1951) — один из создателей аналитической философии.

Человек и знак

Семиотика возникла на глазах одного поколения. Ее содержание и название (в варианте — «семиология») определил замечательный швейцарский лингвист Ф. де Соссюр. Русский читатель может познакомиться с ней по запискам Тартуского государственного университета «Σημειωτιχη» («Семиотика»), которые выходят с 1964 года, по книге Ю. С. Степанова «Семиотика» (М.: Наука, 1971) и по сборникам «Семиотика и искусствометрия» (М.: Мир, 1972), «Структурализм: „за“ и „против“» (М.: Прогресс, 1975).

Отношение к семиотике не устоялось. Стороннему, хотя бы и сочувствующему наблюдателю еще трудно решить, обретет ли она статус науки, подобно логике и лингвистике, или же останется влиятельным и плодотворным стилем мышления междисциплинарного характера, подобно эволюционизму.

Наука по традиции должна иметь свой предмет. Предметом семиотики объявляются знаки, знаковые системы и все аспекты их функционирования и структуры. Математик мог бы определить семиотику как естественную историю (в старинном словоупотреблении) отношения «быть знаком».

В эпоху своего первоначального накопления семиотика черпает материал и идеи отовсюду, где так или иначе существенна знаковость. Из учения о поведении животных (этологии), которое рассматривает сигналы в животном мире — такие, как язык пчел, «релизеры» К. Лоренца[1] или химическая сигнализация у насекомых. Из лингвистики, в особенности структурной, поскольку человеческий язык является основной и универсальной знаковой системой. Из математики, в частности, теории информации, теории алгоритмических языков для общения с компьютерами, формальной логики, которая сама по себе есть учение о знаковой системе «математика». Из этнологии и истории в той мере, в какой целые культуры и их

Рецензия на книгу: *Иванов В. В.* Очерки истории семиотики в СССР. М.: Наука, 1976. 303 с. Впервые опубликовано: Природа. 1977. № 5.

[1] Релизер — от англ. releaser — стимул, вызывающий цепь инстинктивных реакций. Релизеры бывают оптическими (окраска, позы), обонятельными, осязательными и др. Как релизеры, так и вызываемые ими реакции характерны для данного биологического вида.

фрагменты удается описывать как реконструируемые знаковые системы. Из искусствоведения — теории стиха, музыки, живописи, где традиции структурализма нескольких школ (Москвы, Праги, Парижа) почти без коррекции включаются в круг семиотических идей.

Интерес к проблемам устройства и работы знаковых систем прослеживается с очень давних времен. К предшественникам семиотики относят Платона, Августина, Лейбница и многих более поздних мыслителей. Предыстории семиотики посвящена, в частности, недавно вышедшая работа Р. Якобсона[2]. Ряд современных штудий на границах традиционных дисциплин имеет семиотический оттенок, независимо от позиции их авторов. Физик Ю. Вигнер размышляет о механизме «непостижимой эффективности математики в естественных науках». Конечно же, этот вопрос включается в общую проблему того, как знаковые системы обеспечивают действенное поведение человека и познание им мира. Математик Р. Том разрабатывает «теорию катастроф» — перестроек фазовых портретов динамических систем под влиянием внешних процессов управления; его список «элементарных катастроф» каталогизирует архетипы событий, для выражения которых должны иметься средства в любой знаковой системе, описывающей пространственно-временные отношения (и, возможно, не только пространственно-временные).

Если логика изучает знаковые системы в их отношении к абстракции истинности, то семиотика делает упор на функционирование реальных систем, при том что эта реальность a priori может быть неосознанной и неэксплицированной. В таком случае сам акт экспликации может иметь значительные и неожиданные последствия, подобно психоаналитическому сеансу. (В качестве элементарного примера читатель может продумать знаковую роль кавычек, обрамляющих «за» и «против» в названии сборника, упомянутого в начале рецензии.)

Роль осознанности, эксплицированности, операциональности в методологии семиотических исследований очень высока. Семиотика равняется в этом отношении на структурализм и дескриптивную лингвистику, в свою очередь оглядывающуюся на математику. Насколько это необычно для гуманитарных наук, можно проследить по культуре использования *определений*, столь характерной для математики. Гуманитарные тексты все еще бывают посвящены долгим спорам на тему о том, что такое «на самом деле» романтизм или даже фонема. Математик сказал бы просто: «В этой статье фонемой называется то-то и то-то» — и приступил бы к изложению результа-

[2] *Jacobson R.* Coup d'œil sur le Développement de la Sémiotique. Bloomington, 1975.

тов своей работы. Какой обычай лучше, автор рецензии не берется судить, хотя традиции его науки — математики — кажутся ему эффективнее. Так или иначе, развитие семиотики у нас в стране совпало с повышением требований к методике гуманитарного исследования. «Поколение, испытавшее, какой ценой приходится расплачиваться за неточность представлений о реальности, сменилось поколением, выше всего ценящим эту точность» (В. В. Иванов, с. 169). Дискуссии относительно этих требований происходили, вероятно, более вокруг их подразумеваемого символического смысла, нежели вокруг их прямой гигиенической ценности: хороший образец неосознанного семиотического поведения.

В таких условиях книга В. В. Иванова должна рассматриваться не просто как историческое исследование, но как важный конституирующий акт молодой дисциплины. В этой книге семиотика отыскивает истоки и прецеденты, ощупывает границы своей территории, а чаще обозревает ее с высоты птичьего полета. В отличие от многих семиотических работ с их жестким планом и венской позиционной нумерацией пунктов, подпунктов и подподпунктов, книга В. В. Иванова построена как сложная иерархия вихрей разных масштабов, в центре которых находятся люди — С. М. Эйзенштейн, Л. С. Выготский, М. М. Бахтин, В. Я. Пропп, Н. Я. Марр, мысли, книги и статьи, неопубликованные рукописи, снятые и неснятые фильмы, наброски и черновики, вплоть до семиотического фольклора и легенд.

Все это обусловливает крайнюю трудность систематического обзора содержания книги, и мы ограничимся несколькими набросками.

Первая глава посвящена ранним этапам развития знаковых систем и ранним этапам их осознания. Обсуждается генезис человеческого языка и письменности, ритуалов, раннего искусства; имена и табу, обмены, дарения, загадки. В IV главе изложена концепция Ф. де Соссюра о структуре индоевропейского стиха и обсуждаются общие вопросы семиотики текста как одной из единиц высшего уровня в знаковых системах. Центральная часть книги — главы II и III — в значительной мере посвящены С. М. Эйзенштейну и его теориям киноязыка и искусства вообще.

Внимание к Эйзенштейну как к автору семиотических идей и активному «субъекту семиозиса» глубоко оправдано. Для темы книги весьма существенна сама личность рационализирующего художника, провозгласившего тезис о знаковости произведений искусства и его компонентов, полиглота и эрудита, для которого его штудии не являлись непосредственной целью, но средством подготовки к основному делу — системе создания произведения искусства. Эйзенштейн изучает художественные концепции самых разных народов и эпох, прослеживает механику выразительности в ее опоре на архаические структуры индивидуального сознания, реконструирует древние архетипы — личностные и социальные. Характерно и заслуживает специального рассмотрения многоязычие Эйзенштейна даже в его записях для себя, вроде следующей стенограммы важной для него мысли: «R[ythm] as presynt[ax] (d'ailleurs partout!)» — «Ритм как предсинтаксис (впрочем везде!)» (В. В. Иванов, с. 188).

Много места в книге занимает разбор мыслей Эйзенштейна об искусстве, изложенных в его рукописи «Grund-problem» — «Основная проблема»[3]. В. В. Иванов цитирует следующую формулировку этой проблемы: «В искусстве происходит „стремительное прогрессивное вознесение по линии высоких идейных ступеней сознания и одновременно же проникновение через строение формы в слои самого глубинного чувственного мышления“» (с. 165).

Диалектика этих двух противоположно направленных потоков заставляет Эйзенштейна обращаться к фактам этнографии, мифологии, теориям бессознательного, всему обширному материалу, показывающему нерасторжимую связь человека с природой и единство его истории, начиная с самых далеких времен. (Стоит отметить, какую роль играют эти же эмоциональные механизмы в современном беспокойстве человечества за окружающую среду обитания. Рациональная экология имеет глубинный иррациональный подтекст.) Удобно проиллюстрировать этюды Эйзенштейна, вкратце пересказав содержание десяти страниц книги В. В. Иванова (§ 3, глава II «Воплощение мифа», с. 75—85). Эйзенштейн активно занимается сравнительной мифологией и этнографией после поездки в Мексику (1930).

В своих наблюдениях над жизнью индейских племен он выделяет параллелизм между правилами обмена и правилами заключения браков, определяющими социальную структуру общества, что предвосхищает позднейшие выводы К. Леви-Стросса и Я. Бааля. Работая над постановкой «Валькирий», Эйзенштейн реконструирует за образами древнегерманских мифологических героев знаковые первоэлементы мифа, такие как вода, огонь, воздух. Он устанавливает исключительную роль символа мирового дерева, предвосхищая разработку этой темы в более поздних структуралистских исследованиях. Как отмечает В. В. Иванов, параллельные открытия психиатров позднее позволили показать, что «способ изображения дерева — это средство установления психического склада личности в развитии (от раннего детского

[3] Эта рукопись хранится в ЦГАЛИ, ф. 1923, оп. 2, ед. хр. 236—243, 259—270.

возраста) и распаде (при душевной болезни)» (с. 81). В тексте далее описаны размышления Эйзенштейна о ритуальной роли дупла дерева как «утробы», о тотемизме, о древесно-растительных метаморфозах, о геометризации растительных форм в орнаментах, а также о связи всего этого с физиогномикой и проблемой привлекательности басен.

По тем же десяти страницам можно ощутить облик всей книги — яркой, обильной, торопливой. Иногда автор слишком быстро проходит по длинной дороге фактов и сопоставлений, не давая читателю остановиться и продумать ключевые места.

Книга трудна и увлекательна, часто впечатляет лаконизмом изложения глубоких идей и проницательностью, местами раздражает скороговоркой и необязательностью ассоциаций. В целом она учит широте и щедрости мысли и демонстрирует глубинное единство гуманитарной и естественнонаучной культуры человечества. Ее следует прочесть каждому, кому это единство дорого.

«Это — любовь»

В 1958 году в небольшом американском городе в семье Клары и Дэвида Парков родился четвертый ребенок. Девочку назвали Джесси. Ко второму году жизни она стала беспокоить родителей замедленным развитием и неконтактностью. Через некоторое время был поставлен диагноз: детский аутизм.

Синдром раннего детского аутизма (от греч. αὐτόσ — сам) был выделен и описан в начале 40-х годов американским психиатром Л. Каннером. Его симптоматика возникает не позже двух-четырехлетнего возраста и характерна прежде всего отсутствием общения с людьми, в том числе с матерью, и крайней изолированностью от внешнего мира. Развитие речи может быть резко замедленным, как это произошло с Джесси. Если оно и не задержано, речь аномальна: она не направлена на коммуникацию. Аутичный ребенок не терпит изменения привычной обстановки и привычного порядка действий, имеет блестящую механическую память, хорошее физическое здоровье. Над всем его поведением доминирует закрытость от людей. Вот как это выглядит:

«Крошечное золотистое дитя кружит на четвереньках около пятна на полу в таинственном и самозабвенном восторге. Девочка заливается смехом, но не поднимает глаз. Она не пытается привлечь внимания к загадочному объекту своего восхищения. Она вообще не видит нас. Она и пятно — вот все, что существует. И хотя ей уже восемнадцать месяцев — возраст, когда дети трогают, тащат в рот, тянутся, толкают, исследуют, — она не делает ничего подобного. Она не ходит, не карабкается по ступенькам, не пытается подтянуться, чтобы достать вещь. Вещи ей не нужны» (с. 3).

Это — внешние диагностические признаки. Никто не знает глубинных механизмов детского аутизма. Детство Джесси пришлось на время, когда знакомство с синдромом Каннера даже в профессиональной среде было редким, практические рекомендации родителям и педагогам только формировались и были малодоступны.

Рецензия на книгу: *Park C. C.* The Siege. The First Eight Years of an Autistic Child. With an Epilogue, Fifteen Years After. Boston, Toronto: Little Brown and Company, 1982. 328 p. Впервые опубликовано: Природа. 1987. № 4. С. 42—52.

Дэвид Парк преподавал физику в небольшом колледже, Клара окончила университет. До рождения Джесси она намеревалась заняться профессиональной деятельностью, когда подрастут дети. Болезнь младшей заставила ее отказаться от прежних планов. После того как глубина аномалий стала ясной, родители приняли решение — не отдавать девочку в специализированное заведение и воспитывать ее в семье (позже и в специальной школе).

Клара Парк принадлежала к поколению «матерей сороковых и пятидесятых годов, для которых доктор Спок заменил житейскую мудрость» (с. 14). Это означало, что она и ее друзья не только наблюдали за развитием своих детей и делились опытом, но читали книги по детской психологии, думали над ними и вообще вкладывали в дело воспитания все силы сердца и ума — подчеркиваю, ума и сердца. Бунтующее поколение шестидесятых было воспитано этими матерями и своей эпохой.

Многолетнюю изнурительную работу любви, которую начала Клара Парк, борясь с аутизмом Джесси, и спустя шесть-семь лет описала в своей книге, она назвала осадой. Чтобы понять это слово, мы должны взглянуть на Джесси глазами матери и вообразить зачаточное, свернутое, как бутон, сознание маленького человека, укрывшееся за невидимыми крепостными стенами, самодостаточное, недоступное для человеческой речи, не поддающееся на приманки мира, его звуки, закрытое для самых близких.

Пристальные, повседневные, длившиеся долгие годы наблюдения Клары Парк очень ценны для изучения и терапии детского аутизма. В образе аутичной психики, который рисует книга, на первый план выступают дефекты мотивации — ребенок ведет себя так, как если бы он *не хотел* развиваться; отсюда повторяющаяся метафора: Джесси — волшебное дитя из Страны Юности ирландского фольклора. Этот образ оказался прагматически ценным для формирования стратегии осады аутичного сознания. Но Клара Парк прекрасно понимает (и фиксирует это понимание многими наблюдениями и интерпретациями), что поражения множественны и затрагивают все сферы психики.

В. Е. Каган на основании большого врачебного опыта полагает, что синдром Каннера вообще вынуждает выделить общение как специальную функцию психики[1]. Возможно, что она поддерживается особыми механизмами восприятия, как, например, зрительное распознавание человеческих лиц, которое может нарушаться как достаточно

[1] *Каган В. Е.* Аутизм у детей. Л., 1981.

изолированная функция при редком виде визуальной агнозии (нарушения процессов узнавания) — прозопагнозии.

В возрасте около трех лет Джесси научилась складывать из плоских частей картинки-головоломки. Дети обычно при этом руководствуются рисунком, целостности которого следует добиться, — скажем, Кота в Сапогах. Но Джесси настолько хорошо чувствовала форму, что могла сложить фигуру рисунком вниз. С другой стороны, восприятие самого рисунка было ослаблено или полностью отсутствовало. Особенно характерна была ее неспособность завершить легкую головоломку из пяти частей, где последним фрагментом было солнышко с нарисованными глазами. Круглое, почти симметричное, оно не давало ключа к правильному положению своей формой: нужно было, чтобы глаза оказались наверху. Этого Джесси не могла постичь — «глаза, лица просто не входили в ее систему значимостей» (с. 60).

Многие страницы книги дают материал к обсуждению роли нарушений межполушарного взаимодействия у детей с синдромом Каннера. Создается впечатление об общей пониженной активности доминантного (речевого, левого) полушария Джесси при гиперактивации субдоминантного. Например, при общем крайнем замедлении развития речи, начиная примерно с четырех лет у Джесси развивается компенсаторное использование мелодий в качестве замены слов. Песенка «Ring around a rosy» («Хоровод вокруг куста»), сопровождающая игру типа хоровода, последовательно становится обозначением этой игры, рисунка хоровода в книжке, венка и, наконец, просто нарисованного круга. «Мы заметили, что хотя она уже с легкостью напевает многие песенки, она никогда не пользуется своими лейтмотивами случайно или в роли мелодий. Не пела она их и музыкально, как остальные, но быстро, схематично, функционально — ровно настолько, чтобы они могли сыграть свою коммуникативную роль» (с. 84).

Словарь Джесси к пяти годам ограничивался тремя-четырьмя десятками изолированных слов, но затем стал быстро возрастать — по Каннеру, это было решающим признаком благоприятного прогноза. На шестом году жизни она стала усваивать новые слова со скоростью нормального двухлетки, но так и не начала говорить, как нормальный двухлетка. Вся система, порядок приобретения новой лексики, семантические и синтаксические особенности речи отличались от нормы. По проницательному замечанию Клары Парк, Джесси учила родной язык, как иностранный, — еще одно свидетельство правополушарности ее психики. (Предполагается, что изучение второго языка на ранних этапах происходит с большой опорой на субдоминантное полушарие[2].)

Ограничения контактности накладывали на ее языковую компетенцию особый отпечаток. Джесси без труда усваивала и правильно применяла слова такого рода, как «дуб», «вяз», «клен». Слова же «сестра», «бабушка», «друг», «чужой» были семантически недоступны ей в пять лет, последние два — и в семь лет. Это не было недоступностью абстракций вообще — «треугольник», «четырехугольник» и т. п., до «восьмиугольника», Джесси различала и употребляла безошибочно. Недоступен был круг абстракций, связанных с человеческими отношениями. Классический симптом аутизма — употребление «я» в применении к другим лицам, «ты» в применении к себе — пример такой недоступности. Нормальный ребенок в своем развитии быстро минует эту стадию, усваивая, что местоимения меняют смысл при смене говорящего, но аутичное сознание надолго задерживается на ней. Смысл местоимений «он», «она» и «они» Джесси уловила лишь к восьми годам и с большим трудом.

Другие особенности словоупотребления Джесси, услышанные чутким материнским ухом, требуют более тонкой интерпретации. Вот одно наблюдение из многих.

«Маленькие дети произносят слово „плохой“ со всеми оттенками страха или гнева. Джесси теперь тоже говорит „плохой“. Но она произносит это слово со спокойным удовлетворением, как бы помещая явление в надлежащую категорию. „Плохая банка“, — говорит она, собирая пивные банки на пляже. „Плохая собака“, — замечает она, разглядывая опрокинутую мусорную урну. Джесси не любит собак. Если пес подойдет слишком близко, она прижмется ко мне; если прыгнет, она захнычет. Но ей и в голову не придет вербализовать свои эмоции. В такой ситуации она не скажет „плохая собака“» (с. 211—212).

Эта неспособность вербализовать свои эмоции связана с общей недостаточностью аутоидентификации, процесса формирования своего «я». Аутизм с почти лабораторной точностью показывает, что осознание себя основано на осознании другого.

Последнее, что мы отметим, — зачастую повышенные способности аутичного ребенка в сфере элементарной математики, проявляющиеся в случае, когда воспитание этому способствует. Пример из жизни Джесси и здесь характерен. Около семи с половиной лет мать начала

[2] См. подробнее: *Иванов Вяч. Вс.* Чет и нечет. Асимметрия мозга и знаковых систем. М., 1978; *Черниговская Т. В., Балонов Л. Я., Деглин В. Л.* Билингвизм и функциональная асимметрия мозга // Семиотика. Труды по знаковым системам. Т. 16. Тарту, 1983. С. 62—83.

учить ее сложению. «Нуль» Клара не объясняла; это сложное понятие возникло поздно в истории цивилизации, и Клара решила, что если без нуля обходились древние греки, то обойдется пока и Джесси. Выяснилось, однако, что Джесси уже слышала о нуле, и возразила: «Нет нуль!» Оказывается, она желала услышать: $0 + 1 = 1$, что я ей и сообщила. В ответ последовало: «О, мы забыли! Нуль плюс нуль равно нуль!» (с. 241). В современной психиатрии термины «аутизм», «аутистическое поведение» используются также в широком смысле, в применении не только к психическим расстройствам, но и для характеризации черт нормальной психики. Когда Клара Парк вернулась к преподаванию, оказалось, что воспитание Джесси многое открыло ей в ее студентах, нормальных, способных людях, читающих, пишущих, исполняющих свои обязанности, но временами столь похожих на Джесси той системой внутренних преград, которая мешает им работать и жить. Один русский писатель назвал «Воспитанием по доктору Споку» свою книгу, мотив которой — обида на те черты времени, которые показались ему чужими и неуютными. Этот выбор ярлыка и случаен, и характерен, и достоин сожаления. Аутизм личности находит свои параллели в аутизме семьи, аутизме профессиональной группы, аутизме нации. Невидимые крепостные стены разделяют мир на камеры; слишком многие наши действия добавляют камни в их кладку; каждый рискует оказаться в одиночке. «Странная Джесси так похожа на нас» (с. 274).

После публикации первого издания в 1967 году книга Клары Парк многократно выходила на разных языках. Мы рецензируем здесь издание 1982 года, дополненное эпилогом «Пятнадцать лет спустя». Джесси двадцать три года; Клара с гордостью сообщает, что она работает, имеет свой банковский счет и вскоре будет платить налоги, как полноправный гражданин. Кроме того, она успешно занимается живописью, ее работы выставляются и покупаются. Черно-белая репродукция «Обогреватель в ванной Валери» — поп-арт — вклеена в книгу и описана несколькими выразительными фразами; мы можем вообразить интенсивное акриловое свечение этой вещи.

Счастливый конец?

Конечно, нет. Жизненные истории не кончаются, пока живы их герои, кончается лишь рассказ. Джесси не стала здоровым человеком. Жизнь, которую она ведет, отличается от жизни, которую ведут ее сестры и брат. Счастливый конец?

Послушаем в последний раз Клару Парк.

«Позвольте мне высказать просто и прямо общеизвестную истину. Я, как и все, дышу разреженным воздухом безверия своего века, и я не хочу сентиментальности. Но худшая сентиментальность из всех — это предательство просвещенных, которые не узнают дарованного добра, ибо оно чересчур просто. Итак: не мы выбрали этот жизненный опыт, мы отдали бы все, чтобы избежать его, но он изменил нас и сделал нас лучше. Он дал нам урок, который не берут добровольно, тяжкий, медленный урок Софокла и Шекспира: человек возвышается страданием. И этот урок — дар, полученный от Джесси. Теперь я пишу то, что пятнадцать лет назад написать была бы не в состоянии: если бы сегодня я получила право выбора — принять эту судьбу, со всем, что она принесла, или отвергнуть ее горькую щедрость — я бы раскрыла объятия ей навстречу, потому что жизнь, открывшаяся всем нам, не могла быть воображена. И я не изменю последнего слова этой книги. Это — любовь» (с. 320).

Новая встреча с Алисой

Пожалуйста, никогда меня не хвали.
Я всего лишь доверенное лицо, не более.

Л. Кэрролл

«Алиса в стране чудес» и «Алиса в Зазеркалье» выпущены издательством «Наука» в серии «Литературные памятники». Н. М. Демурова сделала перевод, написала две статьи и подготовила все издание. Оно снабжено примечаниями переводчицы, комментариями М. Гарднера и дополнениями, которые содержат, в частности, две статьи Г. Честертона, отрывок из книги де Ла Мара, эссе Вирджинии Вульф, работу Ю. А. Данилова и Я. А. Смородинского «Физик читает Кэрролла» и многое другое.

Какой внушительный научный аппарат! Не заковывает ли он в тяжелые латы Белого Рыцаря милую девочку в стране смешных нелепиц?

«Смех встречает нас на пороге обители мысли и приглашает войти. Не каждый сможет войти. Не каждый захочет войти: куда веселее просто смеяться на пороге»[1].

Войдем же, досточтимый читатель, — как писали в старину. (NB Тираж издания — 50 000 экз.; многим придется сначала потолкаться у порога.) Чарльз Лютвидж Доджсон, alias Льюис Кэрролл, автор «Алисы», родился в 1832 году и умер в 1898. Он был профессиональным специалистом по математической логике (до того, как эта математическая специализация возникла), профессиональным фотографом (до того, как художественная фотография стала профессией) и замечательным писателем. Само собой разумеется, что он был крайне необычным человеком.

А. Сент-Дьердьи, биофизик и поэт, заметил однажды: «Мозг есть не орган мышления, а орган выживания, как клыки или когти. Он

Рецензия на книгу: *Кэрролл Л.* Приключения Алисы в стране чудес; Сквозь зеркало и что там увидела Алиса, или Алиса в Зазеркалье. М.: Наука, 1978. 359 с. (Сер. Литературные памятники). Впервые опубликовано: Природа. 1979. № 7. С. 118—120.

[1] *Кривин Ф.* Юмор сказки и юмор действительности // Вопросы литературы. 1978. № 10.

устроен таким образом, чтобы заставить нас принимать за истину то, что является только выгодой».

Грустный мотив «горе уму» под сурдинку, но непрерывно звучит в мировой литературе как реквием по многим сильным интеллектам, так воспринимавшим себя и сдавшимся под ударами тех, кто когтями и клыками пользовался эффективнее. К Кэрроллу относится не эта часть мысли Сент-Дьердьи, а ее продолжение: «И тот, кто логически доводит мысли до конца, совершенно не заботясь о последствиях, должен обладать исключительной, почти патологической конституцией. Из таких людей выходят мученики, апостолы или ученые, и большинство из них кончает жизнь на костре или на стуле — электрическом или академическом»[2].

Размеренное благополучие Доджсона на академическом стуле было выстроено и хранимо с тщательностью, вызывавшей многие подозрения. Простое сочувствие подсказывает простые разгадки. Когда Алиса залилась слезами от одиночества, «подумай о чем угодно, — только не плачь!» — умоляла Белая Королева, обращаясь едва ли не к своему создателю.

«Алиса» оказалась очень труднопереводимой книгой. В объяснениях комментатора нуждаются реалии и быт викторианской Англии, полузабытые на родине и вовсе не известные в других странах. Впрочем, переводя Данте, также приходится напоминать подробности распрей между гвельфами и гибеллинами. Методические чудачества героев отражают английский национальный характер и сопротивляются усилиям найти им эмоциональное соответствие в иноязычном тексте. Но столь же трудно воссоздать английского Пушкина или очаровательную строфу из «Конька-Горбунка» (пример Д. М. Урнова):

А Данила и Гаврила,
Что в ногах их мочи было,
По крапиве босиком
Так и дуют прямиком.

Наконец, переводчика «Алисы» изводит языковая игра и знаменитый кэрролловский «нонсенс». Однако именно этот пласт поэтики Кэрролла оказался наиболее общедоступным. Двадцатое столетие, с его логическим анализом языка, привычкой к необычным соответствиям между теориями и их интерпретациями, к идеям, которые могут быть верными, лишь если они достаточно безумны, удобрило благодатную почву для семян, брошенных Кэрроллом. «Он купил

[2] *Цопф Г.* Отношение и контекст // Принципы самоорганизации. 1967. С. 419.

громадную карту, на которой было лишь море и ни клочка земли, и команда очень обрадовалась — такую карту могли читать все». Эта строфа из «Охоты на Снарка» стоит эпиграфом к четвертой главе книги американских физиков Р. Стритера и А. Вайтмана[3]. Глава называется «Некоторые общие теоремы релятивистской квантовой теории поля». Юмор эпиграфа мгновенно доходит до каждого, безотносительно к национальной принадлежности.

Н. М. Демуровой мы должны быть благодарны не только за прекрасную русскую «Алису», но за создание целостной концепции принципов ее перевода, без которой адекватная передача текста невозможна. Эта концепция объяснена в содержательной и интересной статье. Один из ее центральных моментов — явное указание на необычную «длину контекста» (термин М. Гаспарова), которую следовало учитывать переводчику. Трудность его работы сплошь и рядом обусловлена нелокальностью смысла, который решительно не умещается в границах слова, фразы или даже эпизода.

Кэрролл виртуозно пользуется двумя свойствами языка, которые после Ф. Соссюра мы можем обозначить как «произвольность наименований» и «системность». Первое воплощает свободу, второе — необходимость; ма́стера узнают по их балансу. Следующие ниже иллюстрации относятся к самым простым случаям.

Несуществующие создания воображения можно назвать как угодно, например Jabberwocky или Bread-and-butterfly. Но слово «Bread-and-butterfly» включается в систему английской лексики: «butterfly» — бабочка, «bread-and-butter» — бутерброд; и затем — семантики, английские «бутербродницы» должны питаться слабым чаем со сливками, и, конечно, мрут с голоду, не находя такой экстраординарной еды. Русские «баобабочки» Демуровой вынуждены занимать другую экологическую нишу: локальная замена имени влечет сдвиг целого фрагмента текста.

Экспозицией к леденящей душу битве с Бармаглотом (Jabberwocky) служит идиллическая картинка:

’Twas brillig, and the slithy toves
Did gyre and gimble in the wabe.

К сожалению, если не прибегнуть к помощи конгениального иллюстратора Тенниэла, этот пейзаж при пристальном вглядывании начинает колебаться перед глазами: ни одного из слов в его описании,

[3] *Стритер Р., Вайтман А.* PST, спин и статистика, и все такое. М., 1966.

кроме служебных, нельзя найти в словаре, все они выдуманы Кэрроллом. Русская версия Д. Г. Орловской

Варкалось. Хливкие шорьки
Пырялись по наве

на мой слух звучит чуть более тревожно; но как вообще переводить такие вещи? Шалтай-Болтай снисходительно объясняет Алисе, что «slithy» означает «lithe» и «slimy» — «гибкие» и «склизкие»; «хливкость» — это, кажется, как раз то самое качество.

После того как программа перевода Кэрролла сформулирована, возникает возможность ее разнообразных реализаций. Я не сомневаюсь, что многие читатели будут с наслаждением искать свои русские версии фрагментов этой книги, а со временем появятся ее совершенно новые варианты. Можно заметить, например, что в переводе Jabberwocky использованы не все лингвистические ресурсы. Шалтай-Болтай мог лукавить; сквозь неологизмы Кэрролла просвечивает прагерманский (местами даже праиндоевропейский) корнеслов. Недаром так естественно звучат немецкая и французская версии Бармаглота, приведенные в примечаниях. По-разному можно решать и задачу соотнесенности перевода «Алисы» с русскоязычной литературой. Борис Заходер в своем пересказе «Алисы» для детей, местами очень милом, сдвинул ее в мир волшебной сказки о приключениях «Алиски в Расчудесии». Не нужно забывать, однако, что в одном из вариантов книга называлась «Приключения в Подполье» — с возможностями совсем других коннотаций. Фон для русской Алисы могут создавать не только Маршак и «Винни-Пух», но, скажем, В. Хлебников и обэриуты[4] Д. Хармс и А. Введенский. Но как бы то ни было, принципы, предложенные Демуровой, сохраняют свое значение для всех последующих работ.

Литература о Стране Чудес и ее создателе — «Алисея и Кэрроллиада» — огромна. У каждого профессионала книга вызывает, кажется, все ассоциации, совместимые с его тезаурусом. Литературовед, психоаналитик, логик, физик, философ немедленно и активно резонируют на материал, предоставляемый текстом этой удивительной фантазии. Ее можно анализировать по З. Фрейду, а можно — по В. Я. Проппу и М. М. Бахтину (во второй статье Демурова со сдержанностью и тактом демонстрирует возможности разных подходов). Кэрролловские штудии с легкостью соотносятся с логико-философской концепцией Л. Витгенштейна, а при желании — со структуралистской мифологией К. Леви-Стросса. Американский антрополог К. Кастанеда

[4] Про обэриутов см. с. 222.

в интересной книге описывает свое ученичество у колдуна дона Хуана, индейца племени йаки. В одном из эпизодов герой превращается в ворона (в состоянии наркотического опьянения и после долгого психофизического тренинга). Метаморфозы Алисы поразительно сходны с описанием Кастанеды.

В нашем издании «Алисы» подобраны удачные образцы таких размышлений. Данилову и Смородинскому, в частности, принадлежат тонкие замечания о родстве «безумной логики» Кэрролла с логикой современной физической теории. Я не хочу лишать читателя удовольствия ознакомиться с ними самостоятельно.

Может быть, самое главное в языковых экспериментах Кэрролла — это настойчивое подчеркивание необходимости отказаться от привычки обыденного сознания к тому, что высказывания имеют предустановленный смысл. Кэрролл выявляет фундаментальный акт приписывания им содержания, которое становится переменной величиной. Слова могут временно оставаться без значения, а значения — без адекватных им слов, как улыбка Чеширского Кота. Если логика — это этика языкового поведения ученых, то некоторая зыбкость означаемых — существенная часть его эстетики. Возбуждающая неопределенность значений бывает могучим источником творческой энергии (для физиков я могу упомянуть фейнмановские интегралы и диаграммы).

На следующий день после того, как ко мне впервые попал восхитительный том Кэрролла, на семинаре в ФИАНе был доклад о новой теории сильных взаимодействий. Кварки (я едва не написал «снарки») удерживаются в мешке вакуума, сглаженного глюонным полем, вне которого бушуют инстантоны, рождающиеся и умирающие в мнимом времени.

Кэрроллу это понравилось бы.

Треугольник мысли

Жанр философского диалога, восходящий к Платону и возродившийся в эпоху Ренессанса, был почти забыт в прошедшем веке — как раз тогда, когда идея о диалогическом характере всей человеческой культуры оказалась центральным моментом психологических и культурологических исследований Мартина Бубера и М. М. Бахтина. Собственно говоря, голоса большинства философов и до, и после Платона были авторитарны, без всякой претензии на поиск истины в столкновении противоположных подходов и различных точек зрения.

Центральная фигура философского диалога — мудрец; в наше же время мудрость систематически заменяется на профессионализм, достигаемый в результате обучения. Мудрость представляется врожденным качеством, постепенно вызревающим с приобретением жизненного опыта; как таковая, она встречается редко, и еще реже из нее удается извлечь какую-нибудь пользу. Образование — демократический суррогат мудрости; при всех своих (эстетических по большей части) недостатках, оно превосходит мудрость в одном аспекте: обучение создает профессионалов.

Восхитительная книга «Треугольник мысли» была написана (рассказана?) мудрыми профессионалами, математиками с сильной склонностью к теоретической физике, истории культуры и теории познания. Читать ее надо медленно, возможно, по одному диалогу за раз; ее надо перечитывать, чтобы, например, уловить нить рассуждений, теряющуюся, а затем вновь возникающую в другом контексте через десяток страниц. Это трудная книга, и для ее полного понимания от читателя тоже требуется высокий уровень профессионализма.

Участники бесед обсуждают различные образы мира, создаваемые физиками. Основное содержание этих образов выражается на языке математики, причем, как мы знаем со времен Галилея, ни на каком другом языке его выразить нельзя. Но математика как таковая не сводится к языку и не в первую очередь является языком, а в той мере, в какой она языком является, семантика этого языка не сводится

Рецензия на книгу: *Connes A., Lichnerowicz A., Schützenberger M. P.* Triangle of thoughts. American Mathematical Society, 2001. *Перевод с английского С. М. Львовского.*

к какой-то одной физической интерпретации, хотя она и имеет корни в физическом мире.

Ален Конн, профессор в Коллеж де Франс и филдсовский лауреат 1982 года, сказал в своей речи, открывающей книгу: «...даже если не стремиться свести каждую науку к ее предмету, то физику, химику, геологу или астроному легко объяснить, над чем он работает: он изучает, на том или ином уровне, структуру и организацию материи. ⟨...⟩ С математикой дело обстоит иначе». И далее: «Для начала дискуссии я бы хотел сразу представить две диаметрально противоположные точки зрения на деятельность математиков: точку зрения „платонистов“, которые видят себя исследователями „математического мира“, в существовании которого они нимало не сомневаются и структуру которого они вскрывают, и точку зрения „формалистов“, скрывающихся за скептическим подходом, согласно которому математика — это последовательность логических выводов в формальной системе или, в некотором смысле, разновидность рафинированного языка».

Большая часть первых трех диалогов («Логика и реальность», «Природа математических объектов», «Физика и математика: обоюдоострое лезвие») посвящена развитию этого тезиса и выяснению позиций участников беседы.

Вкратце эти позиции выглядят так. Ален Конн верит в существующую изначально реальность математических объектов и рассматривает аксиоматический метод как средство для исследования этой реальности (см. [1] — его другую книгу диалогов). Андре Лихнерович (умер в Париже в 1998 году) далек от полного принятия формалистской философии, но при этом пользуется возможностью узнать побольше о доводах формалистов (серьезно используя, что и не удивительно, теорему Гёделя о неполноте). Марсель Поль Шютценберже (ум. в 1996) играет скорее роль провокатора, время от времени говорящего черт знает что, чтобы оживить атмосферу:

М. П. Ш.: С моей стороны было бы недопустимой дерзостью высказываться после вас двоих. Иногда я поддерживаю ленинистские идеи Алена, а иногда склоняюсь к поддержке сталинистских идей Андре.

А. Л.: Почему сталинистских?

М. П. Ш.: Сталинизм отличается от ленинизма добавлением большой дозы свободной воли; у Ленина, который смотрел на историю механистически, этого не было. Он не принимал в расчет свободную волю.

С композиционной точки зрения в первых трех главах вводятся не только основные темы для обсуждения, но и маски персонажей, personae (хотя персонажи и не вымышлены и являются реальными людьми)[1].

В остальных главах ведущей темой является физика. От многих других популярных книг эту отличает глубинное понимание того, сколь велик разрыв между физическим миром и теми средствами, с помощью которых мы стремимся его познать; все наши технические достижения позволяют лишь навести мост над этой пропастью, но не устранить ее.

В связи с этим уместно будет привести следующее замечание Лихнеровича: «...если сравнить то, что называлось „физикой“ или „математикой“ в XIX веке, с современной физикой, то нас удивят не уравнения, которые мы выписываем, но псевдорациональные сущности, которые мы конструируем для придания смысла этим уравнениям. Изменился дискурс, а не вид уравнений».

Если говорить именно об уравнениях, то буквально это неверно: с возникновением общей теории относительности и квантовой механики к классическому арсеналу уравнений добавилось много нового. Но при этом бесспорно, что «новая физика» принесла и новые способы изъясняться, в частности, создав в естественном языке многочисленные выражения, денотатами которых являются элементы математического описания реальности, а не сама реальность, в каком бы смысле мы ни были готовы понимать это слово со слишком размытым значением.

Для примера посмотрим на «амплитуду вероятности» и «принцип суперпозиции» — два центральных понятия квантовой механики. Ричард Фейнман в своих замечательных лекциях предпринял героическую попытку объяснить широкой публике физический смысл этих понятий, не вдаваясь в их математическое содержание, поскольку он не мог предполагать, что читатели понимают, что такое $\sqrt{-1}$, не говоря уж о формуле Эйлера для $e^{i\varphi}$ или понятии комплексного векторного пространства. На мой взгляд, эта попытка не удалась, но он сделал все, что можно.

Можно привести примеры и из классической физики. См. цитаты из Максвелла на с. 65 (относительно «терминов» для букв p и q в аналитической механике), а также постоянно встречающиеся упоминания о том или ином лагранжиане (можно было бы написать историю

[1] Книга завершается двумя краткими биографическими справками: про Лихнеровича (написана Конном) и про Шютценберже (написана Моше Флато). Внимательному читателю будет интересно сравнить портреты этих двух замечательных людей с собственными впечатлениями.

теоретической физики, построенную вокруг эволюции этой замечательной абстракции).

Дело осложняется еще и тем, что даже свободное владение формулой Эйлера, уравнением Шрёдингера и, скажем, электронной микроскопией не помогает сформулировать убедительную эпистемологию, но всего лишь вызывает тревожное чувство, что самое интересное нельзя выразить словами — или, по крайней мере, только словами.

Каждый, кто пишет про науку (включая автора этой рецензии — см. [3]), вынужден со вздохом признать это обстоятельство. Книга «Треугольник мысли» замечательна еще и тем, сколь много интересного в ней выражено именно в словах.

Вот обсуждение огня.

М. П. Ш.: ...я бы привел огонь в качестве примера загадочных явлений. Огонь совершенно невозможно объяснить. Огонь — это соединение специфических факторов...

А. Л.: ...я убежден, что у огня нет равных по его роли в истории человеческого мышления...

М. П. Ш.: Это только один из возможных способов говорить об огне. Это уникальное явление природы, и другие способы тоже будут. Но я хотел бы подчеркнуть, что всякий огонь имеет человеческие масштабы. Невозможно зажечь огонь размером в одну десятую миллиметра.

А. Л.: И с другой стороны, Солнце не является огненным шаром.

М. П. Ш.: И с другой стороны, если огонь слишком сильный, то это уже не огонь, это огненный шторм. Это то, что союзники устроили в Гамбурге, а затем еще раз в Дрездене. ⟨...⟩ Это довольно редкое явление, оно иногда случается во время лесных пожаров. Обычно температура бывает 600 или 700 градусов, а тут вдруг подскакивает до 1200 или 1300 градусов. Именно поэтому в Гамбурге и Дрездене было столько жертв. Английское командование сознательно хотело устроить огненный шторм.

А вот обсуждение того, в какой степени и в каком смысле общая теория относительности подтверждается недавними наблюдениями двойных пульсаров.

М. П. Ш.: Если я правильно понимаю, знания нескольких первых коэффициентов Фурье, первых семи коэффициентов, уже достаточно, чтобы определить физические параметры системы. Как только эти параметры известны, теория предсказывает остальные коэффициенты Фурье; тем самым теорию можно опровергнуть, получив из наблюдений любой из этих коэффициентов, что и позволяет теорию проверять.

А. К.: Именно так: как только 5 кеплеровских параметров измерены непосредственно, о них можно забыть. Если теперь измерить n посткеплеровских параметров (таких, как прецессия перицентра, растяжение времени, вековую вариацию периода), мы получаем n уравнений с двумя неизвестными — двумя массами, и отсюда получаем $n-2$ возможные опровержения релятивистской теории тяготения.

Например, для двойного пульсара $1913+16$ мы измеряем 3 посткеплеровских параметра и тем самым получаем $3-2=1$ проверку общей теории относительности. Для другого двойного пульсара, $1534+12$, мы измеряем 5 посткеплеровских параметров и получаем $5-2=3$ новых проверки общей теории относительности.

О языке, музыке, мультикультурализме и квантовых вычислениях:

М. П. Ш.: ...язык начинается скорее с поэзии, чем с грамматики; эвфония играет тут большую роль.

А. К.: Ваша точка зрения совпадает с моей, поскольку я искренне считаю, что музыка лежит в самых основах поэзии, так же как и язык на стадии эвфонии. Я думаю, мы можем таким образом научить человеческий ум справляться с полифоническими ситуациями, в которых сосуществуют несколько голосов или несколько состояний, тогда как в нашей обычной логике есть место только для одного.

Наконец, мы возвращаемся к проблеме адаптации, которую необходимо разрешить, чтобы мы смогли понять квантовую корреляцию и квантовое взаимодействие, о которых мы говорили ранее и которые изначально шизофреничны по самой своей природе. Ясно, что логика будет эволюционировать параллельно с развитием квантовых компьютеров, так же как она эволюционировала параллельно с теоретической информатикой. Несомненно, это позволит нам перейти новые границы и лучше интегрировать математический формализм квантового мира в нашу метафизическую систему.

Это последний абзац последней главы «Размышления о времени»; эта глава и захватывает, и повергает в уныние.

Книга может сыграть важную роль, если она поможет широким кругам интеллектуалов избежать «искушения безмыслием», о котором писал Джон Вейтман [4] в своей тонкой и здравой рецензии на книгу А. Сокаля и Ж. Брикмона [2], посвященную критике социально-философских дискуссий, в которых безнадежно запутались некоторые ведущие мыслители Франции и США.

В общем и целом, авторы демонстрируют удачное сочетание здравого смысла с его наиболее утонченными продуктами, развиваемыми в математике и физике, а вовсе не «странную смесь постмодернизма с древним культом харизматического лидера» [4].

Такова мудрость профессионалов.

Литература

1. *Changeux J.-P., Connes A.* Conversations on Mind, Matter, and Mathematics. Princeton Univ. Press, 1998.
2. *Sokal A., Bricmont J.* Impostures Intellectuelles. Paris: Oldie Jacob, 1998.
3. *Манин Ю. И.* Математика и физика (в наст. изд).
4. *Weightman J.* The lure of unreason // The Hudson Review. 1998. Vol. 1, № 3. P. 475—489.

Трилогия о математике

Свою науку Реньи идеализирует в двух смыслах этого слова: как идеализируют любимое существо и как идеализируют реальность, слишком обильную, чтобы передать ее во всей полноте.

Книгу[1] открывают и доводят читателя до середины четыре величавых апокрифа, где голос за голосом вступают в беседу Сократ, Архимед, Галилей и Паскаль.

Сократ прозревает в неясном будущем чашу цикуты; Архимед спешит окончить письмо Досифею из Пелузия с рассказом о своих новых результатах, пока римляне не установили блокаду Сиракуз; Галилею уже милостиво разрешили жить под домашним арестом после длительных допросов Священной конгрегации.

Паскаль читает Марка Аврелия; «На днях, приводя в порядок книги, я наткнулся на „Размышления“ Марка Аврелия и случайно открыл ту страницу, где он пишет о двух возможностях: либо мир является огромным хаосом, либо в нем царствует порядок и закономерность; какая из двух взаимоисключающих возможностей реализуется, мыслящий человек должен решить сам, — он, как скала в море, о которую разбиваются яростные волны, должен оставаться там, куда его забросила судьба или случай».

9 мая 1945 года Альфреду Реньи, уроженцу Будапешта, было двадцать четыре года с небольшим. Вторую послевоенную зиму он провел в Ленинграде, в докторантуре у Юрия Владимировича Линника, математика огромной технической силы и широты интересов, полиглота, писавшего стихи на нескольких языках. Вернувшись на родину, Реньи стал директором Института математики Венгерской Академии наук, организованного в 1950 году, и оставался им до своей смерти в 1970 году. Он был профессионалом и делал все, что делает профессиональный математик в наши дни: доказывал теоремы и публиковал их, читал лекции студентам, вел семинары, выступал перед учителями и школьниками.

Впервые опубликовано: Знание — сила. 1982. № 3.

[1] *Реньи А.* Трилогия о математике (Диалоги о математике. Письма о вероятности. Дневник. Записки студента по теории информации). М.: Мир, 1980.

В книгу улеглось то, что для профессионала не обязательно,— жизнь в более долгом времени, чем своя жизнь и свой век. Для Реньи это время — двухтысячелетняя традиция европейской мысли, традиция рационалистического гуманизма. В этой традиции органична вера в доброту разума и разумность добра. В этой традиции математика — символ спокойного, последовательного и упрямого в своей последовательности размышления, которое готово долго выбирать постулаты, но затем уже не отступает перед неизбежными выводами из них. И еще раз — размышления длительного, плоды которого делают в истории необходимую, хотя не вполне понятную работу. «Начала» Евклида дошли до мальчиков и девочек моего поколения в изложении школьного учебника Киселева. Но из Евклида выросла «Этика» Спинозы, космология Римана и Эйнштейна, Достоевский поминает о нем в лихорадочном споре о совести — уж совесть-то тут при чем?

Развалины, которые в очередной раз покрывали половину Европы в 1945 году, спустя десятилетие были уже расчищены и застроены. Реньи написал учебник теории вероятностей и был «за выдающиеся научные, педагогические и организационные заслуги награжден орденом Кошута (в золоте)». «Диалоги о математике» были задуманы и написаны между 1956 и 1965 годом, в Будапеште.

«**Архимед.** Может быть, ты сочтешь меня наивным, но я надеялся, что мне удасться изменить ход истории. Меня заботят судьбы эллинского мира. Мне казалось, что если бы мы могли шире применять математику, изобретение, по существу, греческое (а я считаю математику наиболее значительным и, безусловно, самым крупным достижением эллинского духа), то, может быть, нам удалось бы спасти эллинский образ жизни. Теперь я вижу, что время для этого упущено. Римляне захватят не только наши Сиракузы, но и другие греческие города. Наше время подходит к концу.

Герон. Я все-таки надеюсь, что наша эллинская культура не погибнет: римляне воспримут ее. Посмотри, как они повсюду и во всем пытаются подражать нам...»

Главной областью интересов Реньи, ученого и учителя, была теория вероятностей. Он много размышлял о том, как добиться, чтобы студенты проникли в смысл ее основных понятий. У теории вероятностей есть своеобразный источник трудностей, тех же, что при изучении языка, близкого к родному. Каждый начинающий уже имеет интуитивные представления о том, что такое вероятность, информация, независимость. С этими представлениями нельзя работать, но их нельзя ломать — нужно осторожно, за руку, перевести их в другую понятийную систему, из бытовой в научную. Кроме того, для эффективности последующей прикладной деятельности студенту-вероятностнику нужно помочь воспитать в себе почти артистическое чутье «статистического ансамбля», без которого формальные вычисления средних и дисперсий бесмысленны.

И здесь Реньи перевоплощается: вместо лекции профессора мы начинаем читать дневник его слушателя, некоего Бонифация Доната, который прилежно и подробно излагает собственные размышления, навеянные услышанным. Его замечания исполнены здравомыслия и старательности, за строками виден характер.

Иногда слышно, что это не тщательное вживание в роль, а голос автора, почти бесхитростный.

В «Заметках о преподавании теории вероятностей», не перепоручая свои мысли уже никому, Реньи скажет попросту: «Изучая теорию вероятностей, люди становятся более снисходительными и терпимыми к окружающим и, следовательно, с большей легкостью вписываются в жизнь общества».

Поверим в это на мгновение.

Книга с любовью написана и с любовью переведена. Профессор Б. В. Гнеденко, знавший Реньи, рассказывает в предисловии о человеке и литераторе, о науке, которой посвящена книга, и о ее истории. Переводчики Ю. Данилов, Д. Гнеденко, Е. Маслова, Д. Саас и А. Крамли в русском тексте передали неспешность и серьезность мысли.

Пространство свободы

Юрий Манин — математик. Его исследовательские интересы: алгебраическая геометрия, диофантовы уравнения, интегрируемые системы, квантовые струны, теория вычислимости, включая квантовые вычисления.

Юрий Иванович в последние годы работает в Германии, и предлагаемая вашему вниманию беседа велась по электронной почте.

— Юрий Иванович, давайте начнем с такого вопроса. Лет двадцать назад вы написали в одной из своих статей или книг (увы, не нашел источника — я был уверен, что это «Доказуемое и недоказуемое») примерно так: сегодня математика наступает на мир под заградительным огнем электронных арифмометров. Чем закончилась та «кампания»? Сейчас такое вряд ли можно было бы написать. Не прокомментируете ли это высказывание с сегодняшних позиций?

— Я не помню этой фразы, но попробую восстановить умонастроение, в котором она могла быть сказана.

В шестидесятые годы бытовал журналистский штамп: «Компьютеры — усилители человеческого разума». В одной публичной лекции того времени я просил не забывать, что в той же мере они усиливают человеческую глупость. (Вспомните точную формулу Аркадия Белинкова: «Глупость — это не отсутствие ума, а *такой* ум».)

Коэффициент усиления, обеспечиваемый современными компьютерами, на много порядков выше, доступ к ним намного легче, а количество глупости и жестокости, подвергаемых усилению, не уменьшилось.

— Компьютерное «усиление разума» сегодня связано с гигантским ростом качества коммуникации — в частности, научной. Каким образом это влияет на прогресс науки в принципиальных вопросах («прогресс понимания», если угодно)?

— Давайте посмотрим на нынешний день в исторической перспективе.

Прошло совсем немного времени с тех пор, когда укоренилась методика научного наблюдения и эксперимента, был создан математи-

Интервью Юрия Манина журналу «Компьютерра», № 2(379), 23 января, 2000.

ческий анализ и приобрела современные черты система общего светского образования, поддержанная книгопечатанием.

Благодаря научному эксперименту, мы научились задавать вопросы природе и получать на них ответы, а не придумывать их. Благодаря математике, мы смогли думать о природе, не будучи слишком связаны расплывчатой метафоричностью естественного языка. Благодаря школе и книгопечатанию, мы передаем эти знания и привычки своим детям.

К этому следует добавить еще одну неочевидную (или слишком очевидную) констатацию: нам все это нравится, в этом реализована наша идея прогресса.

Существуют традиционные общества с высокой гуманитарной культурой, которые обошлись бы без научного эксперимента, без светского образования и без компьютеров, если бы наша западная цивилизация им все это не навязывала.

Компьютеры ускорили наше движение по пути, по которому мы уже шли.

Там, где мы уже знали «законы природы», но выведение из них следствий требовало больших вычислений, компьютеры оказались незаменимы.

Там, где мы должны зафиксировать результаты многих измерений и наблюдений, чтобы затем размышлять над ними, делать выборки, статистически обрабатывать, — то же самое. Можно назвать базы данных, связанные с программой «Геном», с исследованиями крупномасштабной структуры Вселенной, скрининг химических веществ на фармакологическую активность, словари и более сложные лингвистические базы данных.

Наконец, демократический Интернет может вытеснить или преобразовать книгу и школу, но лишь в той мере, в какой возьмет их функции на себя.

Мне кажется, научный прогресс стал быстрее, даже много быстрее, но не приобрел качественно нового характера.

Понимание остается делом индивидуального сознания и, я бы сказал, каждый раз актом личного мужества. Каким образом собранная Дарвином «база данных» привела его к теории эволюции, мы не знаем. Как Эйнштейн, не имея никаких наблюдательных данных, придумал релятивистскую теорию гравитации, мы не имеем представления. Подобных прорывов, связанных с ростом объема и скорости коммуникации, я пока не могу назвать.

Однако один футуристический сценарий напрашивается. Может оказаться, что мы приближаемся к пределу, за которым интересующую нас информацию о природе мы просто не сможем воспринимать, не столько из-за ее объема, сколько из-за величины ее колмогоровской сложности. Иными словами, даже в максимально сжатом виде ее будет слишком много. Возможно, что работа генетического аппарата и мозга уже обречена остаться недоступной человеческому сознанию в силу этого фундаментального ограничения.

Если мы не захотим отказываться от накопления научного знания, эту задачу придется передать вычислительным машинам. Как они будут автономно работать и что они смогут нам сообщать время от времени?

Это не то что вычислять на суперкомпьютере тома знаков «пи»: у «пи» колмогоровская сложность пустяковая…

— Тут уж не спросить о компьютерном разуме невозможно! Убедительны ли аргументы против возможности такового на основе теорем Гёделя и Тьюринга (задача остановки, диагональный процесс), приведенные, например, Роджером Пенроузом (Roger Penrose) в его известной книге «Тени разума» («Shadows of the Mind»)? Ведь и нейросеть, и вероятностный компьютер, и даже, кажется, квантовый компьютер в принципе моделируемы на машине Тьюринга — и значит, если Пенроуз прав, не могут породить искусственный интеллект. Вообще, знаем ли мы сегодня больше, скажем, Раймонда Луллия о том, что такое разум?

— Теорема Гёделя — это очень точное, математически точное утверждение о дедуктивных системах определенного типа; то же можно сказать о теореме Тьюринга.

«Разум» — слово естественного языка, которое не имеет терминологического значения ни в одном известном мне контексте. Раймонд Луллий, вероятно, согласился бы с замечанием, что использование этого слова в научной или философской дискуссии есть типичный пример ошибки, называемой «реификация» — возникновение из воздуха предмета, для которого есть слово, материализация означаемого при произнесении означающего. Это как раз пример того, что я назвал выше расплывчатой метафоричностью естественного языка.

Я полагаю, что поэтому не может быть никаких научных аргументов ни за, ни против искусственного интеллекта — мы не условились, о чем говорим.

Ненаучные разговоры, однако, могут быть и занятными, и содержательными. Семантическое поле понятия «разум» очень широкое, в частности, оно имеет, по убыванию масштабов, эволюционный, цивилизационный и личностный пласты. Я оставлю в стороне первый: здесь речь идет о проторазуме животных, о возникновении Homo

Sapiens как существа разумного, о том разуме, который Сент-Дьерди назвал «средством выживания, как клыки и когти».

В цивилизационном аспекте я коснусь лишь одного обстоятельства, существенного для нашей дискуссии.

Разум занимает совершенно особое место в *шкале ценностей* людей Просвещения: будущее представлялось этим людям «царством Разума». Даже когда мы не сознаем этого, наши разговоры о разуме окрашены этой интенсивной ценностной установкой.

Любопытна амбивалентность идеи об искусственном интеллекте в этой ценностной ауре.

Вера в возможность его создания может рассматриваться как высшее достижение человеческого разума на его долгом пути к самопознанию. А говоря практически, под это удачное словосочетание можно получать крупные гранты, пока и поскольку оно ласкает слух современных политиков.

С другой стороны, эту же веру можно расценивать как глубокое заблуждение вульгарного материализма, в основе которого лежит неуважение к разуму — божественной искре, или к разуму — таинственному и чудесному плоду биологической эволюции.

Тьюринг, экспериментируя с идеей разума, занимался его личностным аспектом, и более того, его операционным аспектом. Условно говоря, для него разум отождествлялся с некоторыми специфическими видами деятельности. Где-то в его юношеских дневниках есть такой вопрос: если душа бессмертна, зачем ей вообще воплощаться в смертное тело? И ответ: затем, что только тело способно действовать.

Тьюринг сделал, или, скорее, детально разработал совершенно гениальное открытие. Он обнаружил генетический код хранения и переработки информации. Его биты и элементарные операции, действующие на один-два бита, это мельчайшие мыслимые единицы детерминированной интеллектуальной деятельности.

Второе озарение Тьюринга — это выбор слова «машина» и физической картинки для своего вычислителя: он подчеркнул, что действует материальный объект, хотя и описываемый идеализированно. Во всех других пионерских разработках того времени центральное место занимают лингвистические, а не физические абстракции: язык, алгоритм, формальная система.

Тьюринговский анализ интеллекта может быть правильно оценен только в рамках этой, центральной для него, парадигмы: «Разум есть специфическая деятельность».

Я не занимался специально обдумыванием позиции Пенроуза. Кроме прочего, кажется, он хочет сказать, что теория классических автоматов в духе Тьюринга не может хорошо работать в применении к мозгу, который должен быть существенно квантовым устройством.

Относительно вашего замечания, что квантовый вычислитель можно имитировать на вероятностном классическом автомате: да, но только с экспоненциальным возрастанием потребных ресурсов, памяти и времени.

— Теперь давайте коснемся другой темы, прозвучавшей в вашем ответе на мой второй вопрос: какие задачи математики, компьютерных наук, физики, может быть, естествознания в целом, вы считаете наиболее важными — и наиболее интригующими сегодня? И какие достижения этих наук в последние, скажем, десять лет были самыми впечатляющими?

— Я попытаюсь объяснить, на какие вопросы я бы очень хотел сам услышать ответы. Их три.

Первый относится к физике и космологии: верны ли основные идеи так называемой второй струнной революции, которая полностью изменила теоретическую структуру физики очень высоких энергий? Если вы заглянете в электронный архив физики высоких энергий, куда первым делом засылают свои работы все теоретики в этой области (`http://arXiv.org`), вы обнаружите массу замечательной математики и постоянное повторение нескольких ключевых слов, как *D*-branes, dualities, moduli spaces of theories, но никаких обсуждений масс элементарных частиц или констант взаимодействий. Основная задача теоретической физики, завещанная двадцатым веком двадцать первому, по традиции формулируется как объединение теории гравитации с квантовой теорией поля. Математический язык теории квантовых струн и мембран сохраняет рудименты терминологии этого классического периода, но его физическая семантика радикально изменилась и, к сожалению, не поддается прямому сравнению с реальностью. С чем мы имеем дело сейчас, с гениальными догадками или с фундаментальными заблуждениями? Математическая красота и плодотворность этих идей поразительны, и харизматическое обаяние творческой личности Эда Виттена (Edward Witten), который инициировал многие из них, неотразимо. И тем не менее, может оказаться, что как физика все это построено на песке...

Второй вопрос касается дарвиновской теории эволюции, а третий — работы мозга, и формулируются они почти так же, как первый: знаем ли мы уже правильный язык для описания этих процессов, так что речь идет лишь о построении все более детальной их картины, или же впереди нас ожидает полная смена основных парадигм?

Я попытаюсь объяснить основания для беспокойства. Оба круга наших представлений, об эволюции и о мозге, состоят из двух компонентов: очень обширные наблюдательные данные и очень примитивные качественные представления о том, как эти штуки могут работать. Компьютерный век открыл принципиальную возможность дополнить эти качественные представления количественными оценками, потому что мы научились измерять информацию, как когда-то физики — энергию (или, точнее, действие). При всей предварительности нынешних оценок мне кажется, что для переработки тех объемов информации, с которыми имеют дело эволюция и человеческий мозг, у них не должно хватать ресурсов, причем на много порядков — если принять, что мы правильно понимаем, как они работают.

Подумаем, скажем, о мозге. Мозг животного, грубо говоря, перерабатывает зрительную информацию в двигательную. Зрительной информации очень много, но по своему существу она прекрасно поддается параллельной переработке, и этим обычно отговариваются.

Человеческий мозг добавляет к этому язык. Мы уже знаем, как огромны базы данных, содержащие словари и грамматику, как трудно организовать в них поиск, учитывающий и семантику, и грамматику всех уровней, и написать программы, имитирующие порождение и понимание речи. С параллелизмом здесь дело обстоит очень плохо. Временные параметры элементарных процессов в нервной системе измеряются миллисекундами. Синхронизация отвратительная. Как можно поддерживать языковые алгоритмы в естественном времени на такой «wetware»?

Проще предположить, что мы чего-то очень важного еще не понимаем, и я был бы счастлив узнать, чего именно.

— Итак, в XXI веке машины, вероятно, выяснят механизм работы нашего мозга — но возможностей мозга не хватит, чтобы понять этот механизм... Ваш ответ наводит на мысли о «конце науки» (это заклинание сейчас мелькает все чаще). С одной стороны — математика, непостижимо изысканная, но уходящая «в мир призраков» (как сказал лет тридцать назад Рене Том [René Thom] о функциональном анализе), с другой — довольно бесперспективная ситуация с решением перечисленных вами важнейших проблем естествознания. В начале XX века революция в физике оказала огромное влияние на культуру в целом. Происходит ли нечто подобное сейчас? На первый взгляд, компьютерная парадигма влияет куда сильнее...

— Давайте расставим некоторые акценты, не то я рискую быть неверно понятым.

Коснусь по очереди трех пунктов вашего резюме.

В конец науки я не верю, как не верю в конец истории, царство Разума и второе пришествие. В частности потому, что человечество не забывает ничего из однажды придуманного. Если уж выжили людоедство, астрология и генералы, то и наука не исчезнет.

Три вопроса, о которых я говорил, я вовсе не называл важнейшими проблемами естествознания — это просто то, что мне бы ужасно хотелось узнать.

Относительно влияния революции в физике на культуру в целом в начале XX века можно говорить долго, культурологическая проблематика этого периода вообще очень интересная тема. Вероятно, ее лейтмотив — это кульминация Просвещенческого проекта одновременно с началом его распада, на фоне первой волны глобализации (железные дороги, Всемирная выставка, трансокеанские линии, радио).

Но самый интересный сюжет здесь — это как наука и технология меняли образ жизни людей вовсе не в тех направлениях, которые ожидались и казались очевидными.

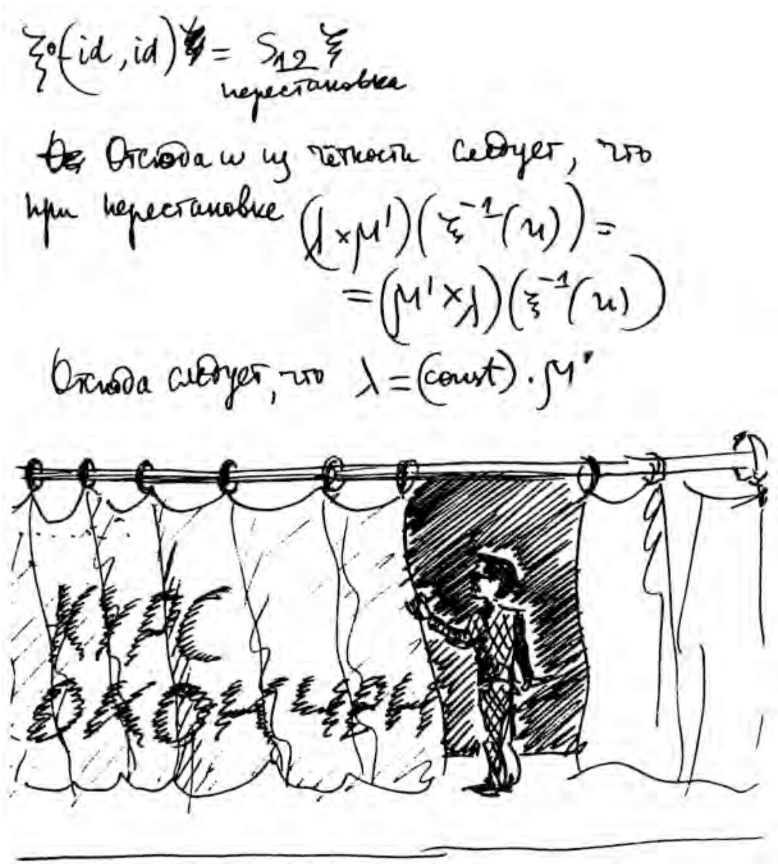
Вот пример, пунктиром. История двадцатого века во многом была следствием Первой мировой войны. Политически — это общеизвестно: война породила социализм в России и национал-социализм в Германии, она оставила пласты взаимной ненависти, взорвавшиеся Второй войной. Но она же окрасила и искусство двадцатого века, натужный взлет оптимистического модернизма и экзистенциальный ужас потерянного поколения.

Так вот, военные историки замечают, что характер Первой войны был в значительной мере определен железными дорогами. По старой привычке вести войны генералы полагали, что самое главное — это доставить как можно больше войск и вооружения к полю битвы. Железные дороги были идеальным средством доставки, и огромные армии застряли непереваренным комом в желудке войны и истории. Когда те, кому повезло, вернулись домой и ощутили зияющие пустоты на месте тех, кто не вернулся, тогда двадцатый век и приобрел свое лицо.

А ведь железные дороги были построены совсем не для этого...

Компьютеры тоже долго развивались вовсе не как новое средство связи, между тем именно в этой их функции они сейчас завоевывают мир.

Растет поколение, для которого компьютеры и Интернет являются повседневной обыденностью с детства. Чем эти ребята будут отличаться от моих, и даже ваших сверстников? Вот что страшно интересно — и непредсказуемо. Мой тринадцатилетний внук пишет многоголосные музыкальные композиции на компьютере, не получив ровно никакого музыкального образования и не испытывая от этого никаких комплексов. Я не знаю, как к этому относиться, но толкую в том смысле, что компьютеры расширяют пространство свободы. Славно, если так оно и окажется.



Полная библиография работ Ю. И. Манина

1956

1. О сравнениях третьей степени по простому модулю // Известия АН СССР. Сер. Математика. 1956. Т. 20, № 6. С. 673—678. English: AMS Translations. Ser. 2. 1960. Vol. 13. P. 1—7.

1958

2. Алгебраические кривые над полями с дифференцированием // Известия АН СССР. Сер. Математика. 1958. Т. 22, № 6. С. 737—756. English: AMS Translations. Ser. 2. 1964. Vol. 37. P. 59—78.

1959

3. О модулях поля алгебраических функций // Доклады АН СССР. 1959. Т. 125, № 3. С. 488—491.

1961

4. О матрице Хассе—Витта алгебраической кривой // Известия АН СССР. Сер. Математика. 1961. Т. 25, № 1. С. 153—172. English: AMS Translations. Ser. 2. 1965. Vol. 45. P. 245—264.
5. О диофантовых уравнениях над функциональными полями // Доклады АН СССР. 1961. Т. 139, № 4. С. 806—809.
6. О разветвленных накрытиях алгебраических кривых // Известия АН СССР. Сер. Математика. 1961. Т. 25, № 6. С. 789—796.
7. К теории абелевых многообразий: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. МИАН им. Стеклова. М., 1961. 66 с.

1962

8. К теории абелевых многообразий над полем конечной характеристики // Известия АН СССР. Сер. Математика. 1962. Т. 26, № 2. С. 281—292.
9. Замечание о p-алгебрах Ли // Сибирский мат. журнал. 1962. Т. 3, № 3. С. 479—480.
10. Элементарное доказательство теоремы Хассе // *Гельфонд А. О., Линник Ю. В.* Элементарные методы в аналитической теории чисел. Гл. 10. М.: Физматгиз, 1962. 13 с.
11. Двумерные формальные абелевы группы // Доклады АН СССР. 1962. Т. 143, № 1. С. 35—37.

12. О классификации формальных абелевых групп // Доклады АН СССР. 1962. Т. 144, № 3. С. 490—492.

13. Геометрические построения с помощью циркуля и линейки // Энциклопедия элементарной математики. М.: Физматгиз, 1962. Т. 6. Гл. 6. 14 с.

1963

14. О рациональных точках алгебраических кривых над функциональными полями // Известия АН СССР. Сер. Математика. 1963. Т. 27, № 6. С. 1395—1440. English: AMS Translations. Ser. 2. 1966. Vol. 50 C. 189—234.

15. Теория коммутативных формальных групп над полями конечной характеристики // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18, № 6. С. 3—90. English: Russian Math. Surveys. 1963. Vol. 18, № 6. P. 1—83.

16. Доказательство аналога гипотезы Морделла для кривых над функциональными полями // Доклады АН СССР. 1963. Т. 152, № 5. С. 1061—1063.

17. Об арифметике рациональных поверхностей // Доклады АН СССР. 1963. Т. 152, № 1. С. 47—49. English: Soviet Math. Dokl. 1963. № 4. P. 1243—1247.

1964

18. Высота Тэйта точек на абелевом многообразии, ее варианты и приложения // Известия АН СССР. Сер. Математика. 1964. Т. 28, № 6. С. 1363—1390. English: AMS Translations. Ser. 2. 1966. № 59. P. 82—110.

19. Диофантовы уравнения и алгебраическая геометрия // Труды 4-го Всесоюзного Математического Съезда. Физматгиз, 1964. Т. 2. P. 15—21.

20. Рациональные точки на алгебраических кривых // Успехи мат. наук. 1964. Т. 19, № 6. С. 83—87.

1965

21. Moduli fuchsiani // Annali Scuola Norm. Sup. di Pisa. 1965. № 19. P. 113—126.

22. Минимальные модели линейчатых и рациональных поверхностей (с Ю. Р. Вайнбергом) // Алгебраические поверхности / Ред. И. Р. Шафаревич (Труды МИАН). 1965. Т. 75. С. 75—91.

23. Алгебраическая топология алгебраических многообразий // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20, № 6. С. 3—12.

1966

24. Рациональные поверхности над совершенными полями // Publ. Math. IHES. 1966. Vol. 30. P. 415—457. English: AMS Translations. Ser. 2. 1969. Vol. 84. P. 137—186.

25. Дифференциальные формы и сечения эллиптических пучков // Современные проблемы теории аналитических функций. М.: Наука, 1966. P. 224—229.

26. Two theorems on rational surfaces // Simp. Int. di Geom. Algebrica. Roma, 1966. P. 198—207.

1967

27. Рациональные G-поверхности // Доклады АН СССР. 1967. Т. 175, № 1. С. 28—30.

28. Рациональные поверхности над совершенными полями // Мат. сборник. 1967. Т. 72, № 2. С. 161—192. English: Math. USSR Sbornik. 1967. № 1. P. 141—168.

1968

29. Соответствия, мотивы и моноидальные преобразования // Мат. сборник. 1968. Т. 77, № 4. С. 475—507. English: Mathematics of the USSR Sbornik. 1968. Vol. 6. P. 439—470.

30. Rational surfaces and Galois cohomology //Proc. Moscow ICM. M.: MIR, 1968. P. 495—509.

31. On some groups related to cubic surfaces // Algebraic geometry. Bombay: Tata Press, 1968. P. 255—263.

32. Кубические гиперповерхности I: Квазигруппы классов точек // Известия АН СССР. Сер. Математика. 1968. Т. 32, № 6. С. 1223—1244. English: Math. USSR Izvestia. 1968. № 2. P. 1171—1191.

33. Лекции по алгебраической геометрии. Вычислительный Центр МГУ, 1968. 185 с.

1969

34. p-кручение эллиптических кривых равномерно ограниченно // Известия АН СССР. Сер. Математика. 1969. Т. 33, № 3. С. 459—465. English: Math. USSR Izvestia. 1969. Vol. 3. P. 433—438.

35. Hypersurfaces cubiques II: Automorphismes birationnelles en dimension deux // Inv. Math. 1969. № 6. P. 334—352.

36. Кубические гиперповерхности III: Лупы Муфанг и эквивалентность Брауэра // Мат. сборник. 1969. Т. 79, № 2. С. 155—170. English: Math. USSR Sbornik. 1969. Vol. 24, № 5. P. 1—89.

37. Лекции о *K*-фунцторе в алгебраической геометрии // Успехи мат. наук. 1969. Т. 24, № 5. С. 3—86. English: Russian Math. Surveys. 1969. Vol. 24, № 5. P. 1—89.

38. Комментарии к пяти проблемам Гильберта // Проблемы Гильберта. М.: Наука, 1969. С. 154—162, 171—181, 196—199.

39. Регулярные элементы в группе Кремоны // Мат. заметки. 1969. Т. 5, № 2. С. 145—148.

1970

40. Тонкая структура высоты Нерона—Тэйта // Мат. сборник. 1970. Т. 83, № 3. Р. 331—348. English: Math. USSR Sbornik. 1970. № 12. P. 325—342.

41. Лекции по алгебраической геометрии. Ч. I: Аффиные схемы. М.: МГУ, 1970. 133 с.

1971

42. Le groupe de Brauer—Grothendieck en géométrie diophantienne // Actes Congr. Int. Math. (Nice, 1970). Paris: Gauthier—Villars, 1971. T. 1. P. 401—411.

43. Трехмерные квартики и контрпримеры к гипотезе Люрота (с В. А. Исковских) // Мат. сборник. 1971. Т. 86, № 1. С. 140—166. English: Math. USSR Sbornik. 1972. Vol. 15. P. 141—166.

44. Круговые поля и модулярные кривые // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26, № 6. С. 7—71. English: Russian Math. Surveys. 1971. Vol. 26. P. 7—78.

45. Теорема Морделла—Вейля. Дополнение к кн.: *Д. Мамфорд.* Абелевы многобразия. М.: Мир, 1971.

1972

46. Параболические точки и дзета-функции модулярных кривых // Известия АН СССР. Сер. Математика. 1972. Т. 36, № 1. С. 19—66. English: Math. USSR Izvestia // AMS. 1972. Vol. 6, № 1. P. 19—64.

47. Кубические формы: алгебра, геометрия, арифметика. М.: Наука, 1972. 304 с.

1973

48. Высота на семействах абелевых многообразий (с Ю. Г. Зархиным) // Мат. сборник. 1973. Т. 89, № 2. С. 171—181. English: Math. USSR Sbornik. 1972. №,18. P. 169—179.

49. Periods of p-adic Schottky groups (with V. G. Drinfeld) // J. reine angew. Math. 1973. Vol. 262/263. P. 239—247.

50. Периоды параболических форм и p-адические ряды Гекке // Мат. сборник. 1973. Т. 92, № 3. С. 378—401. English: Math. USSR Sbornik. 1973. Vol. 21, № 3. P. 371—393.

51. Explicit formulas for the eigenvalues of Hecke operators // Acta Arithmetica. 1973. № 24. P. 239—249.

52. Десятая проблема Гильберта // Совр. пробл. мат. 1973. № 1. С. 5—37.

1974

53. Значения p-адических рядов Гекке в целых точках критической полосы // Мат. сборник. 1974. Т. 93, № 4. С. 621—626. English: Math. USSR Sbornik. 1974. Vol. 22, № 4. P. 631—637.

54. p-адические ряды Гекке мнимых квадратичных полей (с М. М. Вишиком) // Мат. сборник. 1974. Т. 95, № 3. С. 357—383. English: Math. USSR Sbornik. 1974. Vol. 24, № 3. P. 345—371.

55. p-адические автоморфные функции // Соврем. пробл. мат. 1974. Т. 3 С. 5—92. English: Journ. of Soviet Math. 1976. № 5. P. 279—333.

56. Лекции о математической логике. Московский Институт инженеров электронного машиностроения. 1974. Ч. 1. 133 с. Ч. 2. 69 с.

57. Cubic Forms: Algebra, Geometry, Arithmetic. Amsterdam: North Holland, 1974. 292 p.

1975

58. Проблема континуума // Соврем. пробл. мат. 1975. Т. 5. С. 5—72.

59. Теорема Гёделя // Природа. 1975. № 12. С. 80—87.

1976

60. Неархимедово интегрирование и p-адические L-функции Жаке—Ленглендса // Успехи мат. наук. 1976. Т. 31, № 1. С. 5—54. English: Russian Math. Surveys. 1976. Vol. 31, № 1. P. 5—57.

1977

61. Скобки Пуассона и ядро вариационной производной в формальном вариационном исчислении (с И. М. Гельфандом, М. А. Шубиным) // Функ. анал. и его прил. 1977. Т. 10, № 4. С. 31—42. English: Func. Anal. Appl. 1977. Vol. 10, № 4.
62. Свертки рядов Гекке и их значения в целых точках (с А. А. Панчишкиным) // Мат. сборник. 1977. Т. 104, № 4. С. 617—651. English: Math. USSR Sbornik. 1977. Vol. 33, № 4. P. 539—571.
63. Уравнения длинных волн со свободной поверхностью И. Законы сохранения и решения (с Б. Купершмидтом) // Функ. анал. и его прил. 1977. Т. 11, № 3. С. 31—42. English: Func. Anal. Appl. 1977. Vol. 11, № 3. P. 188—197.
64. A Course in Mathematical Logic. Springer Verlag, 1977. XIII+286 p.
65. Assioma/Postulato // Enciclopaedia Einaudi. Torino: Einaudi, 1977. Vol. 1. P. 992—1010.
66. Applicazioni // Enciclopaedia Einaudi. Torino: Einaudi, 1977. Vol. 1. P. 701—743.
67. Человек и знак // Природа. 1977. № 5. С. 150—152.

1978

68. Уравнения длинных волн со свободной поверхностью II: Гамильтонова структура и высшие уравнения (с Б. Купершмидтом) // Функ. анал. и его прил. 1978. Т. 12, № 1. С. 25—37. English: Func. Anal. Appl. 1978. Vol. 12, № 1. P. 20—29.
69. Матричные солитоны и векторные расслоения над кривыми с особенностями // Функ. анал. и его прил. 1978. Т. 12, № 4. С. 53—63. English: Func. Anal. Appl. Vol. 12, № 4. (1978).
70. Алгебраические аспекты нелинейных дифференциальных уравнений // Соврем. пробл. мат. 1978. Т. 11. С. 5—152. English: Journ. of Soviet Math. 1979. № 11. P. 1—122.
71. Автодуальные поля Янга—Миллса на сфере (с В. Г. Дринфельдом) // Функ. анал. и его прил. 1978. Т. 12, № 2. С. 78—79. English: Func. Anal. Appl. 1978. Vol. 12, № 2.
72. О локально свободных пучках на CP^3 связанных с полями Янга—Миллса (с В. Г. Дринфельдом) // Успехи мат. наук. 1978. Т. 33, № 3. С. 241—242.
73. Construction of instantons (with M. F. Atiyah, V. G. Drinfeld, N. J. Hitchin) // Phys. Lett. A. 1978. Vol. 65, № 3. P. 185—187.

74. Instantons and sheaves on CP^3 (with V. G. Drinfeld) // Springer Lecture Notes in Math. 1978. Vol. 732. P. 60—81.

75. A description of instantons (with V. G. Drinfeld) // Comm. Math. Phys. 1978. Vol. 63. P. 177—192.

76. A description of instantons II (with V. G. Drinfeld) // Proc. of Int. Seminar on the Physics of High Energy and Quantum Field Theory. Serpoukhov, 1978. P. 71—92.

77. Modular forms and number theory // Proc. Int. Cogr. of Math. Helsinki, 1978. Vol. 1. P. 177—186.

78. Continuo/Discreto // Enciclopaedia Einaudi. Torino: Einaudi, 1978. Vol. 3. P. 935—986.

79. Dualità (with I. M. Gelfand) // Enciclopaedia Einaudi. Torino: Einaudi, 1978. Vol. 5. P. 126—178.

80. Divisibilità // Enciclopaedia Einaudi. Torino: Einaudi, 1978. Vol. 5. P. 14—37.

1979

81. Conservation laws and Lax representation of Benney's long wave equations (with D. R. Lebedev) // Phys. Lett. A. 1979. Vol. 74, № 3—4. P. 154—156.

82. Гамильтонов оператор Гельфанда—Дикого и копросоединенное представление группы Вольтерра (с Д. Р. Лебедевым) // Функ. анал. и его прил. 1979. Т. 13, № 4. С. 40—46. English: Func. Anal. Appl. 1979. Vol. 13, № 4. P. 268—273.

83. Поля Янга—Миллса, инстантоны, тензорное произведение инстантонов (с В. Г. Дринфельдом) // Ядерная физика. 1979. Т. 29, № 6. С. 1646—1653. English: Soviet Journal Nucl. Phys. 1979. Vol. 29, № 6. P. 845—849.

84. Modular forms and number theory // Proc. Int. Math. Congr. 1978. Helsinki, 1979. Vol. 1. P. 177—186.

85. Математика и физика. М.: Знание, 1979. 63 с.

86. Доказуемое и недоказуемое. М.: Сов. радио, 1979. 166 с.

87. Insieme // Enciclopaedia Einaudi. Torino: Einaudi, 1979. Vol. 7. P. 744—776.

88. Razionale/Algebrico/Transcedente // Enciclopaedia Einaudi. Torino: Einaudi, 1979. Vol. 11. P. 603—628.

89. Новая встреча с Алисой // Природа. 1979. № 7. С. 118—120.

1980

90. Инстантон определяется своими комплексными особенностями (с А. А. Бейлинсоном, С. И. Гельфандом) // Функ. анал. и его прил. 1980. Т. 14, № 2. С. 48—49. English: Func. Anal. Appl. 1980. Т. 14, № 2.
91. Twistor description of classical Yang—Mills fields // Phys. Lett. B. 1980. Vol. 95, № 3—4. P. 405—408.
92. Уравнения длинных волн Бенни II: Представление Лакса и законы сохранения (с Д. Р. Лебедевым) // Зап. научн. сем. ЛОМИ. Т. 96. 1980. С. 169—178.
93. Преобразование Пенроуза и классические поля Янга—Миллса // Теоретико-групповые методы в физике. М.: Наука, 1980. Т. 2. С. 133—144.
94. Methods of algebraic geometry in modern mathematical physics (with V. G. Drinfeld, I. Krichever, S. P. Novikov) // Math. Phys. Review. Chur: Harwood Academic, 1980. Vol. 1. P. 3—57.
95. Вычислимое и невычислимое. М.: Сов. радио, 1980. 128 с.
96. Линейная алгебра и геометрия (с А. И. Кострикиным). Изд-во МГУ, 1980. 319 с.

1981

97. Калибровочные поля и голоморфная геометрия // Совр. пробл. мат. 1981. № 17. С. 3—55. English: Journal of Soviet Math.
98. Hidden symmetries of long waves // Physica D. 1981. Vol. 3, № 1—2. P. 400—409.
99. On the cohomology of twistor flag spaces (with G. M. Henkin) // Compositio Math. 1981. Vol. 44, № 1—3. P. 103—111.
100. Expanding constructive universes // Springer Lecture Notes in Comp. Sci. 1981. Vol. 122. P. 255—260.
101. Simmetria (with I. M. Gelfand) // Enciclopaedia Einaudi. 1981. Vol. 12. P. 916—943, Torino, Einaudi.
102. Strutture matematiche // Enciclopaedia Einaudi. 1981. Vol. 13. P. 765—798, Torino, Einaudi.
103. О функционировании естественного языка в научных текстах // Структура Текста-81. М.: Наука, 1981. Р. 25—27.
104. Mathematics and Physics. Boston: Birkhäuser, 1981. 100 p.
105. Lo Dimostrable e Indimostrable. Moscow: Mir, 1981. 262 p.

1982

106. Нуль-геодезические комплексных пространств Эйнштейна (с И. Б. Пенковым) // Функ. анал. и его прил. 1982. Т. 16, № 1. С. 78—79. English: Func. Anal. Appl. 1982. Vol. 16, № 1.
107. Уравнения Янга—Миллса—Дирака как уравнения Коши–Римана на пространстве твисторов (с Г. М. Хенкиным) // Ядерная физика. 1982. Т. 35, № 6. С. 1610—1626.
108. Gauge fields and cohomology of spaces of null-geodesics // Gauge Theories, Fundamental Interactions and Related Results. Birkhäuser, 1982. P. 231—234.
109. What is the maximum number of points on a curve over F_2? // Journ. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 1982. Ser. 1A. Vol. 28, № 3. P. 715—720.
110. Замечания об алгебраических супермногообразиях // Алгебра (к 90-летию О. Ю. Шмидта). МГУ, 1982. С. 95—101.
111. Математика и физика. Перев. на болгар. София: Наука и Изкуство, 1982. 56 с.
112. Трилогия о математике // Знание — сила. 1982. № 3. С. 32.

1983

113. Flag superspaces and supersymmetric Yang—Mills equations // Arithmetic and Geometry, papers to honor I. R. Shafarevich. Birkhäuser, 1983. Vol. 2. P. 175—198.
114. Суперсимметрия и супергравитация в суперпространстве нуль-супергеодезических // Методы теории групп в физике. М.: Наука, 1983. Т. 1. Р. 203—208.
115. Геометрические идеи в теории поля // Геометрические идеи в физике. М.: Мир, 1983. Р. 5—16.
116. Тынянов и Грибоедов // Revue des Études Slaves. Paris, 1983. T. LV. F. 3. P. 507—521.

1984

117. Геометрия супергравитации и суперклетки Шуберта // Записки сем. ЛОМИ. 1984. Т. 133. Р. 160—176.
118. Грассманианы и флаги в супергеометрии // Проблемы соврем. анализа. МГУ, 1984. Р. 83—101.
119. Суперклетки Шуберта // Функ. анал. и его прил. 1984. Т. 18, № 4. С. 75—76. English: Func. Anal. Appl. 1984. Vol. 18, № 4. P. 329—330.

120. Новые точные решения и когомологический анализ классических и суперсимметричных уравнений Янга—Миллса // Труды МИАН. 1984. Т. 165. С. 98—114.

121. Голоморфная супергеометрия и суперполя Янга—Миллса // Совр. пробл. мат. 1984. Т. 24. С. 3—80.

122. Новые размерности в геометрии // Успехи мат. наук. 1984. Т. 39, № 6. С. 47—73. English: Russian Math. Surveys. 1984. Vol. 39, № 6. P. 51—83; Springer Lecture Notes in Math. 1985. Vol. 1111. P. 59—101.

123. The inverse scattering transform and classical equations of motion // Nonlinear and Turbulent Processes in Physics, Harwood Academic. Chur, 1984. Vol. 3. P. 1487—1502.

124. Линейные коды и модулярные кривые (с С. Г. Влэдуцем) // Совр. пробл. мат. 1984. Т. 25. С. 209—257. English: Journal Soviet Math. 1985. № 30. P. 2611—2643.

125. Некоторые приложения алгебраической геометрии // Труды МИАН. 1984. Т. 168. С. 110—131.

126. Калибровочные поля и комплексная геометрия. М.: Наука, 1984. 335 с.

1985

127. A supersymmetric extension of the Kadomtsev—Petviashvili hierarchy (with A.O.Radul) // Comm. Math. Phys. 1985. Vol. 98, № 1. P. 65—77.

128. Солнце, бедный тотем // Природа. 1985. № 6. С. 123—127.

129. Geometry unbound // Science. 1985. № 9. P. 89—91.

1986

130. Твисторное преобразование и алгебро-геометрические конструкции решений уравнений теории поля (с М. М. Капрановым) // Успехи мат. наук. 1986. Т. 41, № 5. С. 85—107. English: Russian Math. Surveys. 1986. Vol. 41, № 5. P. 33—61.

131. О высших порядках Брюа, связанных с симметрической группой // Функ. анал. и его прил. 1986. Т. 20, № 2. С. 74—75. English: Func. Anal. Appl. 1986. Vol. 20, № 2. P. 148—150.

132. Критические размерности в теории струн и дуализирующий пучок на пространстве модулей суперкривых // Функ. анал. и его прил. 1986. Т. 20, № 3. С. 88—89. English: Func. Anal. Appl. 1986. Vol. 20, № 3. P. 244—246.

133. The partition function of the Polyakov string can be expressed in terms of theta functions // Phys. Lett. B. 1986. Vol. 172, № 2. P. 184—185.

134. The Mumford form and the Polyakov measure in string theory (with A. A. Beilinson) // Comm. Math. Phys. 1986. Vol. 107, № 3. P. 359—376.

135. Преобразование Радона—Пенроуза для группы $CO(8)$ и инстантоны (с Хоанг Ле Минем) // Известия АН СССР. Сер. Математика. 1986. Т. 50, № 1. С. 195—206. English: Math. USSR Izvestia. 1986. 50(1). P. 189—200.

136. Многопетлевое приближение в теории фермионных струн (с М. А. Барановым, И. В. Фроловым, А. С. Шварцем) // Ядерная физика. 1986. Т. 43, № 4. С. 1053—1055. English: Sov. Journal Nucl. Phys. 1986, № 43. P. 670—671.

137. Расположения вещественных гиперплоскостей и уравнения Замолодчикова (с В. В. Шехтманом) // Методы теории групп в физике. Юрмала, 1985. Т. 1. С. 316—325. М.: Наука, 1986. English: Group Theoretical Methods in Physics. Yurmala, 1985. Vol. 1. P. 151—165. VNU Sci. Press, Utrecht, 1986.

138. Рациональные многообразия: алгебра, геометрия и арифметика (с М. А. Цфасманом) // Успехи мат. наук. 1986. Т. 41, № 2. С. 43—94. English: Russian Math. Surveys. 1986. Vol. 41, № 2. P. 51—116.

139. Cubic Forms: Algebra, Geometry, Arithmetic. 2nd edition, revised and completed. Amsterdam: North Holland, 1986. 326 p.

140. Bevezetés a kiszámithatósag matematikai elméletébe. Budapest: Müszaki Könyvvkiadó, 1986. 144 p. (Перев. на венгер. яз. книги «Вычислимое и невычислимое»).

1987

141. Quantum strings and algebraic curves // Proc. Int. Congr. of Math. Berkeley, 1986; Providence RI: AMS, 1987. Vol. 2. P. 1286—1295.

142. Some remarks on Koszul algebras and quantum groups // Ann. Inst. Fourier. 1987. Vol. 37, № 4. P. 191—205.

143. Значения дзета-функции Зельберга в целых точках (с А. А. Бейлинсоном) // Функ. анал. и его прил. 1987. Т. 21, № 1. С. 68—69. English: Func. Anal. Appl. 1987. Vol. 21, № 1. P. 58—60.

144. Sheaves of the Virasoro and Neveu-Schwarz algebras (with A. A. Beilinson, V. V. Shechtman) // Springer Lecture Notes in Math. 1987. Vol. 1289. P. 52—66.

145. A superanalog of the Selberg trace formula and multiloop contribution for fermionic string (with M. A. Baranov, I. V. Frolov, A. S. Schwartz) // Comm. Math. Phys. 1987. Vol. 111. P. 373—392.

146. К проблеме ранних стадий речи и сознания (филогенез) // Интеллектуальные процессы и их моделирование. М.: Наука, 1987. С. 154—178.

147. «Это — любовь» // Природа. 1987. № 4. С. 118—120.

148. «Мифологический плут» по данным психологии и истории культуры // Природа. № 7. 1987. С. 42—52.

1988

149. Quantum groups and non-commutative geometry. Montreal University Press, 1988. 88 p.

150. Neveu-Schwarz sheaves and differential equations for Mumford superforms // Journal of Geometry and Physics. 1988. Vol. 5, № 2. P. 161—181.

151. Brouwer Memorial Lecture-1987 // Nieuw Arch. Wisk. 1988. Vol. (4) 6, № 1—2. P. 1—6.

152. Элементы супергеометрии (с А. А. Вороновым, И. Б. Пенковым) // Совр. пробл. мат. 1988. Т. 32. С. 3—25.

153. Суперклеточные разбиения суперпространств флагов (с А. А. Вороновым) // Совр. пробл. мат. 1988. Т. 32. С. 27—70.

154. Методы гомологической алгебры. Ч. I: Введение в теорию когомологий и производные категории (с С. И. Гельфандом). М.: Наука, 1988. 416 с.

155. Gauge Field Theory and Complex Geometry. Springer Verlag, 1988. 295 p.

156. Гомологическая алгебра (с С. И. Гельфандом) // Совр. пробл. мат. Т. 38. 1988. 238 с.

1989

157. Arrangements of hyperplanes, higher braid groups, and higher Bruhat orders (with V. V. Schechtman) // Advanced Studies in Pure Math. Academic Press, 1989. Vol. 17. Algebraic Number Theory. P. 289—308.

158. Rational points of bounded height on Fano varieties (with J. Franke, Yu. Tschinkel) // Inv. Math. 1989. Vol. 95, № 2. P. 421—435.

159. Multiparametric quantum deformation of the general linear supergroup // Comm. Math. Phys. 1989. Vol. 123, № 1. P. 123—135.

160. Determinants of Laplacians on Riemann surfaces // Conformal Invariance and string theory (Poiana Brasov, 1987). Boston, MA: Academic Press, 1989. P. 285—291.

161. Reflections on arithmetical physics // Conformal Invariance and string theory (Poiana Brasov, 1987). Boston, MA: Academic Press, 1989. P. 293—303.

162. The formalism of left and right connections on supermanifolds (with I. B. Penkov) // Lectures on Supermanifolds, Geometrical Methods and Conformal Groups. World Scientific, 1989. P. 3—13.

163. Strings // Math. Intelligencer. 1989. Vol. 11, № 2. P. 59—65.

164. Письмо в редакцию // Известия АН СССР. Сер. Математика. 1989. Т. 53, № 2. English: Math. USSR Izvestia. 1990. Vol. 34, № 2. P. 465—466.

165. Linear Algebra and Geometry (with A. I. Kostrikin). Gordon and Breach, 1989. 309 p.

166. Elementary Particles: Mathematics, Physics and Philosophy (with I. Yu. Kobzarev). Dordrecht: Reidel, 1989. 227 p.

1990

167. Sur le nombre des points rationnels de hauteur bornée des variétés algébriques (with V. V. Batyrev) // Math. Annalen. 1990. Vol. 286, № 1—3. P. 27—43.

168. Non-standard quantum deformations of $GL(n)$ and constant solutions of the Yang—Baxter equation (with E. E. Demidov, E. E. Mukhin, D. V. Zhdanovich) // Progress of Theor. Phys. Supplement. 1990. Vol. 102. P. 203—218.

169. Quantized theta-functions Common trends in mathematics and quantum field theories (Kyoto, 1990) // Progress of Theor. Phys. Supplement, 1990, № 102. P. 219–228.

170. Теория чисел (с А. А. Панчишкиным) // Совр. пробл. мат. 1990. Т. 49.

171. Mathematics as metaphor // Proc. of ICM. Kyoto, 1990. Vol. II. P. 1665—1671. The AMS and Springer Verlag.

1991

172. Three-dimensional hyperbolic geometry as ∞-adic Arakelov geometry // Inv. Math. 1991. Vol. 104, № 2. P. 223—244.

173. Quantum Groups // Nederl. Acad. Wetensch. Verslag, Afd. Natuurk. 1991. Vol. 100. P. 55—68.

174. Topics in Non-commutative Geometry. Princeton University Press, 1991. 163 p.

1992

175. Notes on quantum groups and quantum de Rham complexes // Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika. 1992. Vol. 92, № 3. P. 425—450.

176. Архетип Пустого Города // Arbor Mundi / Ред. Е. М. Мелетинский. 1992. № 1. С. 28—34.

1993

177. Notes on the arithmetic of Fano threefolds // Comp. Math. 1993. Vol. 85, № 1. P. 37—55.

178. Points of bounded height on del Pezzo surfaces (with Yu. Tschinkel) // Comp. Math. 1993. Vol. 85. P. 315—332.

1994

179. Homological Algebra (with S. I. Gelfand) // Enc. of Math. Sci. Springer Verlag, 1994. Vol. 38. 222 p.

180. Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry (with M. Kontsevich) // Comm. Math. Phys. 1994. Vol. 164, № 3. P. 525—562.

1995

181. Lectures on zeta functions and motives (according to Deninger and Kurokawa) // Columbia University Number Theory Seminar, Astérisque. 1995. Vol. 228, № 4. P. 121—164.

182. Number Theory I. Fundamental Problems, Ideas and Theories (with A. Panchishkin) // Enc. of Math. Sci. Vol. 49. Springer Verlag, 1995. 303 p.

183. Generating functions in algebraic geometry and sums over trees // The Moduli Space of Curves / Ed. by R. Dijkgraaf, C. Faber, G. van der Geer. Progress in Math. Birkhäuser, 1995. P. 401—417.

184. Problems on rational points and rational curves on algebraic varieties // Surveys in Differential Geometry. Int. Press, 1995. Vol. 2. P. 214—245.

1996

185. Quantum cohomology of a product (with M. Kontsevich, Appendix by R. Kaufmann) // Inv. Math. 1996. Vol. 124. № 1—3. P. 313—339 (Remmert's Festschrift).

186. Quantum groups and algebraic groups in noncommutative geometry // Quantum Groups and their Applications in Physics / Ed. by L. Castellani and J. Wess, Proc. of the Int. School of Physics „Enrico Fermi". Amsterdam: IOS Press, 1996. P. 347—359.

187. Distribution of rational points on Fano varieties // Publ. RIMS Kokyuroku 958. Analytic Number Theory, 1996. P. 98—104.

188. Automorphic pseudodifferential operators (with P. B. Cohen and D. Zagier) // Algebraic Aspects of Integrable Systems (in memory of Irene Dorfman) / Ed. by A. S. Fokas, I. M. Gelfand, Birkhäuser. Boston, 1996. P. 17—47.

189. Stacks of stable maps and Gromov–Witten invariants (with K. Behrend) // Duke Math. Journ. 1996. Vol. 85, № 1. P. 1—60.

190. Higher Weil—Petersson volumes of moduli spaces of stable n-pointed curves (with R. Kaufmann, D. Zagier.) // Comm. Math. Phys. 1996. Vol. 181, № 3. P. 763—787.

191. Selected Papers // World Scientific Series in 20th Century Mathematics. Vol. 3. Singapore: World Sci., 1996. xii+600 p.

192. Methods of homological algebra (with S. I. Gelfand, translation of 154) // Enc. of Math. Sci. Vol. 38. Springer Verlag, 1996. Algebra V. xv+372 p.

1997

193. Mordell—Weil Problem for cubic surfaces // Advances in the Mathematical Sciences—CRM's 25 Years / Ed. L. Vinet. P. 313—318; CRM Proc. Amer. Math. Soc. Lecture Notes. Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1997. Vol. 11.

194. Semisimple Frobenius (super)manifolds and quantum cohomology of P^r (with S. A. Merkulov) // Topological Methods in Nonlinear Analysis. 1997. Vol. 9, № 1. P. 107—161 (Ladyzhenskaya's Festschrift).

195. Ватикан, осень 1996 // Природа. 1997, № 8. С. 61—66.

196. Gauge Field Theory and Complex Geometry. Second Edition (with Appendix by S. Merkulov). Springer Verlag, 1997. XII+346 p.

197. Linear Algebra and Geometry (with A. I. Kostrikin). Paperback Edition; Gordon and Breach, 1997. ix+308 p.

198. Элементарные частицы (с И. Ю. Кобзаревым). М.: Фазис, 1997. 206 с.

1998

199. Sixth Painlevé equation, universal elliptic curve, and mirror of P^2 // Geometry of Differential Equations / Ed. by A. Khovanskii, A. Varchenko, V. Vassiliev. Amer. Math. Soc. Transl. (2). Vol. 186. P. 131—151. e-print alg-geom/9605010.

200. Relations between the correlators of the topological sigma-model coupled to gravity (with M. Kontsevich) // Comm. Math. Phys. 1998. Vol. 196, № 2. P. 385—398. e-print alg-geom/970824.

201. Stable maps of genus zero to flag spaces // Topological Methods in Nonlinear Analysis. 1998. Vol. 11, № 2. P. 207—218; (Moser's Festschrift). Corrections. 2000. Vol. 15. P. 401. e-print math.AG/9801005.

202. Interrelations between mathematics and physics // Séminaires et Congrès. Soc. Math. de France. 1998, № 3. P. 158—168.

203. Truth, rigour, and common sense // Truth in Mathematics / Ed. by H. G. Dales and G. Oliveri. Oxford: Clarendon Press, 1998. P. 147—159.

1999

204. Three constructions of Frobenius manifolds: a comparative study // Asian Journal Math. 1999. Vol. 3, № 1. P. 179—220 (Atiyah's Festschrift). e-print math.QA/9801006.

205. Weak Frobenius manifolds (with C. Hertling) // Int. Math. Res. Notices. 1999. № 6. P. 277—286. e-print math.QA/9810132.

206. The work of Maxim Kontsevich // Notices of the AMS. Jan. 1999. P. 21—23.

207. Homological algebra (with S. I. Gelfand). Springer Verlag, 1999. 222 p.

208. Frobenius manifolds, quantum cohomology, and moduli spaces // AMS Colloquium Publications. Providence, RI, 1999. Vol. 47. xiii+303 p.

2000

209. Classical computing, quantum computing, and Shor's factoring algorithm // Séminaire Bourbaki. Vol. 1998/1999; Astérisque. 2000. Vol. 266. Exp. № 862, 5. P. 375—404. e-print quant-ph/9903008

210. Invertible Cohomological Field Theories and Weil–Petersson volumes (with P. Zograf) // Ann. Ist. Fourier. 2000. Vol. 50, № 2. P. 519—535. e-print math.AG/9902051

211. New moduli spaces of pointed curves and pencils of flat connections (with A. Losev) // Fulton's Festschrift, Michigan Journ. of Math. 2000. Vol. 48. P. 443—472. e-print math.AG/0001003

212. Mathematics as profession and vocation // Mathematics: Frontiers and Perspectives / Ed. by V. Arnold et al. AMS, 2000. P. 153—159.

213. Рациональные кривые, эллиптические кривые и уравнения Пенлеве // Студенческие чтения МК НМУ. Вып. 1. М.: МЦНМО, 2000. С. 27—36.

2001

214. Mathematics: recent developments and cultural aspects // Science and the Future of Mankind. Proceedings, Pontifical Ac. Sci. Vatican, 2001. P. 89—94; Max Planck Research, Sci. Mag. of the Max Planck Society. 2. 2000. P. 58—59.

215. Composition of points and Mordell-Weil problem for cubic surfaces (with D. Kanevsky) // Rational Points on Algebraic Varieties / Ed. by E. Peyre, Yu. Tschinkel (Progress in Mathematics). Basel: Birkhäuser, 2001. Vol. 199. P. 199—219. e-print math.AG/0011198

216. Theta functions, quantum tori and Heisenberg groups // Letters in Math. Physics. 2001. Vol. 56, № 3. (Special issue, Euroconference M. Flato. Part III). P. 295—320. e-print math.AG/0011197

217. Mirror symmetry and quantization of abelian varieties // Moduli of Abelian Varieties / Ed. by C. Faber et al. Progress in Math. Vol. 195. Birkhäuser, 2001. P. 231—254. e-print math.AG/0005143

218. Modules and Morita theorem for operads (with M. Kapranov) // Am. Journal of Math. 2001. Vol. 123, № 5. P. 811—838. e-print math.QA/9906063.

219. Moduli, Motives, Mirrors // European Congress of Mathematicians. Barcelona, 2000. Vol. 1. Progress in Math. Vol. 201. Birkhäuser, 2001. P. 53—74. e-print math.AG/0005144

220. Holography principle and arithmetic of algebraic curves (with M. Marcolli) // Adv. Theor. Math. Phys. 2001. Vol. 5, № 3. P. 617—650. e-print hep-th/0201036

221. Пространство свободы / [Интервью] // Компьютерра. 2001. № 2(379). С. 26—28.

2002

222. Continued fractions, modular symbols, and non-commutative geometry (with M. Marcolli) // Selecta math. New ser. 2002. Vol. 8. P. 475—521. e-print math.NT/0102006

223. Triangle of Thoughts (review of the book by A. Connes, A. Lichnerowicz, M. P. Schützenberger) // Notices of the AMS. March, 2002. P. 325—327.

224. Многообразия Фробениуса, квантовые когомологии и пространства модулей. М.: Факториал, 343 с.

2003

225. Methods of homological algebra. Second edition (with S. Gelfand) // Springer Monographs in Mathematics. Berlin: Springer Verlag, 2003. xx+372 p.

2004

226. Unfoldings of meromorphic connections and a construction of Frobenius manifolds (with C. Hertling) // Frobenius Manifolds / Ed. by C. Hertling, M. Marcolli. Wiesbaden: Vieweg & Sohn Verlag, 2004. P. 113—144. e-print math.AG/0207089

227. Extended modular operad (with A. Losev) // Frobenius Manifolds / Ed. by C. Hertling and M. Marcolli. Wiesbaden: Vieweg & Sohn Verlag, 2004. P. 181—211. e-print math.AG/0301003

228. Functional equations for quantum theta functions // Publ. Res. Inst. Mat. Sci. Kyoto. 2004. Vol. 40, № 3. P. 605—624. e-print math.AG/0307393

229. Multiple zeta-motives and moduli spaces $\overline{M}_{0,n}$ (with A. Goncharov) // Compos. Math. 2004. Vol. 140, № 1. P. 1—14. e-print math.AG/0204102

230. Real multiplication and noncommutative geometry // The legacy of Niels Henrik Abel / Ed. by O. A. Laudal and R. Piene. Berlin: Springer Verlag, 2004. P. 685—727. e-print math.AG/0202109

231. Moduli stacks $\bar{L}_{g,S}$. // Moscow Math. Journal. 2004. Vol. 4, № 1. P. 181—198. e-print math.AG/0206123

232. (Semi)simple exercises in quantum cohomology (with A. Bayer) // The Fano Conference Proceedings / Ed. by A. Collino, A. Conte, M. Marchisio. Universitá di Torino, 2004. P. 143—173. e-print math. AG/0103164

233. Georg Cantor and his heritage // Algebraic Geometry: Methods, Relations, and Applications: Collected papers dedicated to the memory of Andrei Nikolaevich Tyurin. Proc. V. A. Steklov Inst. Math. Moscow. Vol. 246. MAIK Nauka/Interperiodica, 2004. P. 195—203. e-print math.AG/0209244

234. Некоммутативная геометрия и квантовые тета-функции // Глобус. Записки мат. семинара МУН. 2004. Т. 1. С. 91—108.

235. Проблема Морделла—Вейля для кубических поверхностей // Глобус. Записки мат. семинара МУН. 2004. Т. 1. С. 134—146.

2005

236. F-manifolds with flat structure and Dubrovin's duality // Advances in Math. (M. Artin's Fest). 2005. Vol 198. P. 5—26. e-print math.DG/0402451

237. Introduction to modern number theory (with A. A. Panchishkin). 2nd edition, revised and expanded // Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Berlin: Springer-Verlag, 2005. Vol. 49. xv+514 p.

238. Von Zahlen und Figuren // Géométrie au XX^{e} siècle. Histoire et horizons / Ed. J. Kouneiher, D. Flament, Ph. Nabonnand, J.-J. Szczeciniarz. Paris: Hermann, 2005. P. 24—44. e-print math.AG/0201005

239. Iterated Shimura integrals // Moscow Math. Journal. 2005. Vol. 5, № 4. P. 869—881. e-print math.AG/0507438

2006

240. Iterated integrals of modular forms and noncommutative modular symbols // Algebraic Geometry and Number Theory. In honor of V. Drinfeld's 50th birthday / Ed. V. Ginzburg. Progress in Math. Vol. 253. Boston: Birkhäuser, 2006. P. 565—597. e-print math.NT/0502576.

241. Manifolds with multiplication on the tangent sheaf // Rendiconti Mat. Appl. Ser. VII. 2006. Vol. 26. P. 69—85. e-print math.AG/0502578

242. The notion of dimension in geometry and algebra // Bull. of the American Math. Soc. 2006. Vol. 43, № 2. P. 139—161. e-print math.AG/0502016

243. Stability Conditions, wall-crossing and weighted Gromov—Witten Invariants (with Arend Bayer). 28 p. e-print math.AG/0607580

244. Generalized operads and their inner cohomomorhisms (with D. Borisov). 71 p. e-print math.CT/0609748

2007

245. Lectures on modular symbols. 21 p.

246. Mathematical knowledge: internal, social and cultural aspects // Mathematics and Culture / Ed. by C. Bartocci and P. Odifreddi. 2007. Vol. 2. Introductory Chapter. 27 p. e-print math.HO/0703427

247. Modular shadows (with M. Marcolli). e-print math.NT/0703718