И.Х.Сивашинский

НЕРАВЕНСТВА В ЗАДАЧАХ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга представляет собой сборник упражнений на доказательство и решение неравенств, на нахождение наибольших и наименьших значений. В книге имеются также задачи, связанные с неравенствами. Все задачи снабжены решениями.

Доказательство ряда неравенств проводится методом математической индукции. Зачастую учащиеся, окончившие школу, имеют весьма смутное представление об этом методе, являющемся эффективным средством доказательства в математике. Поэтому автор счел целесообразным в начале § 2 главы I дать некоторые сведения о методе математической индукции. Не ограничиваясь приложением этого метода к вопросам неравенств, автор разъяснил на примерах применение его и в доказательстве равенств.

В каждом параграфе задачи, объединенные общей темой или общим методом решения, по мере возможности, сгруппированы вместе и расположены в порядке возрастающей трудности.

Рекомендуется читателю каждую задачу попытаться решить самостоятельно и в случае успеха сравнить свое решение с тем, которое приведено в книге. Если же самостоятельно не удастся решить ту или иную задачу, то, ознакомившись с решением, следует обратить внимание не столько на специфику решения данной задачи, сколько на метод решения. Усвоение таких методов облегчит дальнейшее пользование книгой.

Автор выражает свою искреннюю признательность В. Г. Болтянскому и В. И. Левину, критические замечания и ценные советы которых способствовали улучшению книги, а также Н. Н. Дегтяреву и А. А. Могилевскому за большую работу по редактированию книги.

И. Х. Сивашинский

ГЛАВА I

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВ

§ 1. Простейшие неравенства

Для доказательства неравенств этого параграфа достаточно знать основные свойства неравенств, известные из курса математики средней школы. Напомним некоторые из них:

1) если $a>b$ и $b>c$, то $a>c$;

2) если $a>b$, то $a+m>b+m$;

3) если $a_1>b_1$, $a_2>b_2$, $\ldots$, $a_n>b_n$, то $a_1+a_2+\ldots+a_n>b_1+$ $+b_2+\ldots+b_n$;

4) если $a>b$, то $am>bm$ при $m>0$ и $am<bm$ при $m<0$;

5) если $a_1>b_1\geqslant 0$ $a_2>b_2\geqslant 0$, $\ldots$, $a_n>b_n\geqslant 0$, то $a_1a_2\ldots a_n>$ $>b_1b_2\ldots b_n$;

6) если $a>b>0$, то $a^x>b^x$ при $x>0$;

7) если $a>1$ и $x>y>0$, то $a^x>a^y$, если же $0<a<1$ и $x>y>0$, то $a^x<a^y$.

1. Доказать, что при любых действительных (вещественных)*) a и b имеет место неравенство $a^2+b^2\geqslant 2ab$.

2. Доказать неравенство $a^2-ab+b^2\geqslant ab$.

3. Доказать неравенство $(a^2-b^2)^2\geqslant 4ab(a-b)^2$.

4. Доказать неравенство $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac$.

5. Доказать неравенство

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2\leqslant n\left[2(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)-\right.$$
$$\left.-(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+\ldots+a_na_1)\right].$$

6. Доказать неравенство $a^2+b^2+1\geqslant ab+a+b$.

*) Здесь и в дальнейшем, где не оговорено противное, имеется в виду, что входящие в условия задач буквы могут означать любые действительные числа.

7. Доказать, что если $a+b\geqslant 1$, то имеет место неравенство $a^4+b^4\geqslant 1/8$.

8. Доказать, что если $a+b=1$, то имеет место неравенство $a^8+b^8\geqslant 1/128$.

9. Доказать неравенство $\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

10. Доказать, что если $a>0$, $b>0$, то имеет место неравенство $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}}$.

11. Доказать, что если $a\geqslant 0$, то имеет место неравенство $a^3+2\geqslant a^2+2\sqrt{a}$.

12. Доказать неравенство

$$(ab+bc+ca)^2\geqslant 3abc\,(a+b+c).$$

13. Доказать, что если $a>0$, $b>0$, $ay+bx>0$ и $x\neq y$, то имеет место неравенство $\frac{(a+b)\,xy}{ay+bx}<\frac{ax+by}{a+b}$.

14. Доказать неравенство $a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2)\geqslant 6abc$.

15. Доказать, что если $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$, то имеет место неравенство

$$6abc\leqslant ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\leqslant 2(a^3+b^3+c^3).$$

16. Доказать, что если $a>0$, $b>0$, $c>0$, то имеет место неравенство $\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b}\geqslant 3$.

17. Доказать, что если $a>x>0$, то имеет место неравенство $\frac{a-x}{a+x}<\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$.

18. Доказать, что если $abc>0$, то имеет место неравенство $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}$.

19. Доказать, что если $ab>0$, то имеет место неравенство $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$.

20. Доказать, что если $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $u>0$, то имеет место неравенство $au+\frac{b}{u}\geqslant 2\sqrt{ab}$.

21. Доказать, что если $x>0$, $y>0$, то имеет место неравенство $\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{x}}\geqslant 2\sqrt[4]{xy}$.

22. Доказать неравенство $\dfrac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}}>2$.

23. Доказать, что если $ab<0$, то имеет место неравенство $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\leqslant-2$.

24. Доказать неравенство $\dfrac{x^2}{1+x^4}\leqslant\dfrac{1}{2}$.

25. Доказать, что при $a\geqslant 0$ имеет место неравенство $2a^3+2a^2+1>a$.

26. Доказать, что при любом неотрицательном x имеет место неравенство $x^3+2x^2-x+1>0$.

27. Доказать, что если $a>0$, $b>0$, $c>0$, то имеет место неравенство

$$ab(a+b-2c)+bc(b+c-2a)+ac(a+c-2b)\geqslant 0.$$

28. Доказать неравенство

$$a^2(1+b^4)+b^2(1+a^4)\leqslant(1+a^4)(1+b^4).$$

29. Доказать неравенство $x^8+x^6-4x^4+x^2+1\geqslant 0$.

30. Доказать, что если $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{2}{b}$ и $ac>0$, то имеет место неравенство $\dfrac{a+b}{2a-b}+\dfrac{c+b}{2c-b}\geqslant 4$.

• **31.** Доказать, что сумма наибольшего и наименьшего членов пропорции $a:b=c:d$, члены которой положительны и не равны между собой, больше суммы двух остальных (Евклид).

32. Доказать неравенство $a(a-b)\geqslant b(a-b)$.

33. Доказать, что если $a\geqslant 1$, $b+c<a+1$, $c\geqslant b$, то $a>b$.

34. Доказать, что если $a<b$, то $a<\dfrac{a+b}{2}<b$.

35. Доказать, что если $\dfrac{a}{b}\leqslant\dfrac{c}{d}$, то $\dfrac{a+b}{b}\leqslant\dfrac{c+d}{d}$.

36. Доказать, что если $\dfrac{a}{b}\leqslant\dfrac{c}{d}$, то $\dfrac{a+bk}{b}\leqslant\dfrac{c+dk}{d}$.

37. Доказать, что если b и d положительны и $\dfrac{a}{b}\leqslant\dfrac{c}{d}$, то имеет место неравенство $\dfrac{a}{b}\leqslant\dfrac{a+c}{b+d}\leqslant\dfrac{c}{d}$.

38. Доказать, что если $a>1$, $b<1$, то имеет место неравенство $ab+1<a+b$.

•**39.** Доказать, что если c, d положительны, $a\geqslant c+d$, $b\geqslant c+d$, то $ab\geqslant bc+ad$.

40. Доказать неравенство

$$x^4+y^4+z^2+1\geqslant 2x(xy^2-x+z+1).$$

41. Доказать, что если $x+y+z=1$, то $x^2+y^2+z^2 \geqslant 1/3$.

42. Доказать, что если $xy+yz+zx=1$, то

$$x^2+y^2+z^2 \geqslant 1.$$

43. Доказать, что если $a+b \geqslant 0$, то имеет место неравенство $a^3+b^3 \geqslant a^2b+ab^2$.

44. Доказать, что если $a>b>c$, или $c>a>b$, или $b>c>a$, то

$$a^2b+b^2c+c^2a > a^2c+c^2b+b^2a,$$

а если $a<b<c$, или $c<a<b$, или $b<c<a$, то

$$a^2b+b^2c+c^2a < a^2c+c^2b+b^2a.$$

45. Доказать неравенства $-1 \leqslant \frac{a^2-1}{a^2+1} < 1$.

46. Доказать, что если $a>b>0$, то имеют место неравенства $\frac{(a-b)^2}{8a} < \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} < \frac{(a-b)^2}{8b}$.

•**47.** Доказать, что если $0<x<1$, то имеет место неравенство $(1+x)^{1-x}(1-x)^{1+x} < 1$.

48. Доказать, что если $a>0$, $b>0$, $c>0$, то имеет место неравенство $(a^3+b^3+c^3)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant (a+b+c)^2$.

•**49.** Доказать, что если $a>b \geqslant 0$, то имеет место неравенство $\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{2ab-b^2} \geqslant a$.

50. Доказать, что если a, b, c и d неотрицательны, то имеет место неравенство $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{ab}+\sqrt{cd}$.

51. Доказать неравенства $2\sqrt{x+1}-2\sqrt{x} < \frac{1}{\sqrt{x}} < 2\sqrt{x}-2\sqrt{x-1}$, где $x \geqslant 1$.

• **52.** Доказать, что при любом натуральном $n \geqslant 2$ имеют место неравенства

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{2}+1 < \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}-1.$$

53. Доказать, что если $ab \geqslant 0$, то имеет место неравенство $(a^2-b^2)^2 \geqslant (a-b)^4$.

54. Доказать, что если $ab \leqslant 0$, то имеет место неравенство $(a^2-b^2)^2 \leqslant (a-b)^4$.

55. Доказать неравенство $(a^2-b^2)(a^4-b^4) \leqslant (a^3-b^3)^2$.

56. Доказать неравенство $(a^2+b^2)(a^4+b^4) \geqslant (a^3+b^3)^2$.

57. Доказать неравенство $2x^4+1 \geqslant 2x^3+x^2$.

58. Доказать, что $2x^3 > x+1$, если $x > 1$, и $2x^3 < x+1$, если $x < 1$.

• **59.** Доказать неравенство $x^{12}-x^9+x^4-x+1>0$.

• **60.** Доказать, что если $|a| \geqslant |b|$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и $c = \sqrt{a^2-b^2}$, то имеет место неравенство $(x-c)^2+y^2 \leqslant 4a^2$.

61. Доказать, что

$$y=\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{(x-5)^2} \geqslant 4.$$

62. Доказать, что при всех допустимых значениях x имеют место неравенства $-3 \leqslant \frac{|x|}{x}+\frac{|x-1|}{x-1}+\frac{|x-2|}{x-2} \leqslant 3$.

• **63.** Доказать, что $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}<2\sqrt[3]{3}$.

64. Доказать, что если $a>b>0$, то $\frac{x+a}{\sqrt{x^2+a^2}} > \frac{x+b}{\sqrt{x^2+b^2}}$ при $x>\sqrt{ab}$, и $\frac{x+a}{\sqrt{x^2+a^2}} < \frac{x+b}{\sqrt{x^2+b^2}}$ при $x<\sqrt{ab}$.

65. Доказать неравенство $|\alpha+\beta| \leqslant |\alpha|+|\beta|$.

66. Доказать неравенство $|\alpha+\beta| \geqslant |\alpha|-|\beta|$.

67. Доказать неравенство $|\alpha-\beta| \geqslant |\alpha|-|\beta|$.

68. Доказать, что если $a^2+b^2=1$ и $c^2+d^2=1$, то $|ac-bd| \leqslant 1$.

69. Доказать, что если $a^2+b^2+c^2=1$ и $m^2+n^2+p^2=1$, то $|am+bn+cp| \leqslant 1$.

70. Доказать, что если $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2=1$ и $b_1^2+b_2^2+b_3^2+\ldots+b_n^2=1$, то имеют место неравенства

$$-1 \leqslant a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_nb_n \leqslant 1.$$

71. Доказать неравенство $\sqrt{a^2+b^2+c^2} \leqslant |a|+|b|+|c|$.

72. Доказать, что если $x^2+y^2 \leqslant 2$, то $|x+y| \leqslant 2$.

73. Доказать неравенство $x^2y^4+2(x^2+2)y^2+4xy+x^2 \geqslant 4xy^3$.

74. Сформулировать условия, при которых:

1) $mx+\frac{n}{x}>m+n$; 2) $mx+\frac{n}{x}<m+n$ $(m>0,\ n \geqslant 0)$.

75. Доказать, что для любых натуральных n и p имеют место неравенства

$$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p+1}<\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{(n+p)^2}<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}.$$

76. Доказать, что если $a>0$, $b>0$, $c>0$, то имеет место неравенство $\frac{3}{a+b+c}<\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}$.

77. Доказать, что если $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, то имеет место неравенство $\frac{1+a+b}{2}\geqslant\frac{1+a+b+ab}{2+a+b}$.

78. Доказать, что если a, b, c — попарно не равные между собой числа, то $a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)\neq 0$.

79. Доказать, что $[x+y]\geqslant[x]+[y]$, где $[a]$ — целая часть числа a.

80. Доказать, что $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geqslant abc(a+b+c)$.

81. Доказать, что неравенство $pa^2+(1-p)(b^2-pc^2)>0$ верно тогда и только тогда, когда верны одновременно три неравенства: $a+b-c>0$, $a+c-b>0$, $b+c-a>0$, где p — любое число, $a>0$, $b>0$, $c>0$.

82. Доказать, что если $a>b>0$ и $p>q$, то имеет место неравенство $(a^p-b^p)(a^q+b^q)>(a^q-b^q)(a^p+b^p)$.

83. Доказать, что если m и n — натуральные числа, такие, что $n-m\geqslant 1$, и r — положительное число, то имеет место неравенство $1+r^{n-1}\geqslant r^m+r^{n-m-1}$.

84. Доказать, что при положительных a, b, c и d имеет место неравенство $a^{c+d}+b^{c+d}\geqslant a^cb^d+a^db^c$.

85. Доказать неравенство $a^k+\frac{1}{a^k}\geqslant a^{k-i}+\frac{1}{a^{k-i}}$, где $a>0$ и i, k — целые числа такие, что $0\leqslant i\leqslant k$.

86. Доказать, что если $a>0$ и k — натуральное число, то имеет место неравенство

$$k(1+a^{2k})-a^k\geqslant a^{2k-1}+a^{2k-2}+\ldots+a^2+a.$$

87. Доказать, что если $x+y=a>0$ и n — любое натуральное число, то имеет место неравенство $x^n+y^n\geqslant\frac{a^n}{2^{n-1}}$.

88. Доказать, что если $a>b>0$ и n — натуральное число, большее 1, то имеет место неравенство $\sqrt[n]{a-b}>$ $>\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}$.

89. Доказать, что если $a>0$, $b>0$, $c>0$, $a+b>c$ и n — натуральное число, то имеет место неравенство $\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}>\sqrt[n]{c}$.

90. Доказать, что если $|x|<1$, то имеет место неравенство $(1-x)^n+(1+x)^n\leqslant 2^n$, где n — натуральное число.

91. Доказать, что для натуральных n и k, где $k\leqslant n$, имеют место неравенства $k!\,(k+1)^{n-k}\leqslant n!\leqslant k!\,n^{n-k}$.

92. Доказать, что если $a<\sqrt[3]{b}<a+1$, где $a>0$, то имеют место неравенства

$$\frac{a(a^3+2b)}{2a^3+b}<\sqrt[3]{b}<\frac{(a+1)[(a+1)^3+2b]}{2(a+1)^3+b}.$$

93. Доказать, что при натуральном n имеет место неравенство $n!\geqslant 2^{n-1}$.

94. Доказать, что при n — натуральном, большем 2, имеет место неравенство $\sqrt[n]{n}<\frac{2}{\sqrt{n}}+1$.

95. Доказать, что если $0<x<1$, а n — натуральное число, то имеет место неравенство $\frac{1-x^{n+1}}{n+1}<\frac{1-x^n}{n}$.

96. Доказать, что если $n>1$, то $x+\frac{1}{nx}>1+\frac{1}{n}$ при $x>1$ или при $0<x<\frac{1}{n}$.

97. Доказать, что если $a\geqslant b$, то для натурального n имеют место неравенства

$$n(a-b)\cdot b^{n-1}\leqslant a^n-b^n\leqslant n(a-b)\,a^{n-1}.$$

98. Доказать неравенство

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\leqslant\frac{2n-1}{n}.$$

99. Доказать, что если $x>0$, $x\neq 1$, n — натуральное, то имеет место неравенство

$$x+\frac{1}{x^n}>2n\cdot\frac{x-1}{x^n-1}.$$

100. Доказать, что если n — натуральное число и $a\geqslant 1$, то имеет место неравенство $n(a-1)(a^{2n+1}+1)\geqslant a(a^{2n}-1)$.

101. Доказать, что если $x^2=y^2+z^2$, $x>0$, $y>0$, $z>0$, то $x^\alpha>y^\alpha+z^\alpha$, если $\alpha>2$, и $x^\alpha<y^\alpha+z^\alpha$, если $\alpha<2$.

102. Доказать, что при $p > n$ и $a > b > 0$ имеет место неравенство $\frac{a^p - b^p}{a^p + b^p} > \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$.

103. Доказать, что $\sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} + \sqrt{4z+1} \leqslant 5$, если $x + y + z = 1$ и каждое из чисел x, y, z не меньше $-\frac{1}{4}$.

104. Доказать, что если четыре положительных числа x, y, z и t связаны условиями $xy = zt$ и $x - y > z - t > 0$, то $(x-y)^2(z+t) > (z-t)^2(x+y)$.

105. Доказать неравенство

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)^2}{n}.$$

106. Доказать, что при натуральном n:

$$nx^2 - 2x(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n - n^2) + \\ + (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) - 2n(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + n^3 \geqslant 0.$$

107. Доказать, что $\frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$.

108. Доказать неравенство $k(n-k+1) \geqslant n$, если $1 \leqslant k \leqslant n$.

109. Доказать, что для натурального n имеет место неравенство $(n!)^2 \geqslant n^n$.

110. Доказать неравенство

$$\left(2 - \frac{1}{m}\right)\left(2 - \frac{3}{m}\right) \ldots \left(2 - \frac{2m-1}{m}\right) \geqslant \frac{1}{m!}.$$

111. Доказать, что

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n} - \sqrt{2}.$$

112. Доказать, что для натуральных m и n имеет место неравенство

$$\left(m + \frac{3}{2}\right)\left(m + \frac{7}{2}\right)\left(m + \frac{11}{2}\right) \ldots \left(m + \frac{4n-1}{2}\right) > \sqrt{\frac{(m+2n)!}{m!}}.$$

113. Доказать неравенство

$$P = \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \ldots (4n-1)}{5 \cdot 9 \cdot 13 \ldots (4n+1)} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

114. Доказать неравенства

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \ldots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

115. Доказать: $2!! + 4!! + \ldots + (2n)!! < (2n+1)!! - 1$, где $(2n)!! = 2 \cdot 4 \ldots 2n$; $(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)$.

116. Доказать, что $1!! + 3!! + 5!! + \ldots + (2n-1)!! < (2n)!! - 1$.

117. Доказать неравенство

$$S_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1.$$

118. Доказать, что если $k > -6$, то

$$\frac{k}{(7+k)^2 + (7+k)^3} < \frac{1}{6+k} - \frac{1}{7+k}.$$

119. Доказать, что при любом натуральном n, отличном от единицы, имеет место неравенство

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

120. Доказать, что

$$S = \frac{1}{8^2+8^3} + \frac{2}{9^2+9^3} + \ldots + \frac{n}{(7+n)^2 + (7+n)^3} < \frac{1}{7}.$$

121. Доказать неравенство

$$S = \frac{1}{3 \cdot 1!} + \frac{1 \cdot 3}{3^2 \cdot 2!} + \ldots + \frac{(2n-1)!!}{3^n \cdot n!} < 1.$$

122. Доказать, что для натуральных m и n, где $n < m$, имеет место неравенство

$$S = \frac{n+1}{2^{n+1}} + \frac{n+2}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{m}{2^m} < \frac{(n+1)^2}{n \cdot 2^n}.$$

123. Доказать, что если $x > 0$, то имеет место неравенство $x(4^x - 4 \cdot 2^x + 1) + 2^x(x^2 + 1) > 0$.

124. Даны арифметическая прогрессия с общим членом a_n и геометрическая прогрессия с общим членом b_n, причем $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_1 \neq a_2$ и $a_n > 0$. Доказать, что $a_n < b_n$ при $n > 2$.

125. Доказать, что если в арифметической и геометрической прогрессиях все члены положительны, число членов одинаково, первые и последние члены соответственно равны, то сумма членов арифметической прогрессии больше суммы членов геометрической прогрессии ($d \neq 0$).

126. Доказать, что если $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = 1$, то $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant \frac{1}{n}$.

127. Доказать неравенство

$$n(a_1^{p+q}+a_2^{p+q}+\ldots+a_n^{p+q})>$$
$$>(a_1^p+a_2^p+\ldots+a_n^p)(a_1^q+a_2^q+\ldots+a_n^q),$$

где n — натуральное ($n\neq 1$), a_1, a_2, ..., a_n — различные положительные числа, $p>0$, $q>0$.

128. Доказать, что если $a>0$, $b>0$, $c>0$ и a, b, c — три последовательных члена арифметической прогрессии, то имеет место неравенство $a^n+c^n>2b^n$ для натурального $n\neq 1$ ($d\neq 0$).

129. Доказать, что если между различными положительными числами a, b, c существует зависимость $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$, то имеет место неравенство $a^n+c^n>2b^n$ для любого натурального n.

130. Доказать, что если положительные различные числа a, b, c являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии, то для натурального n имеет место неравенство $a^n+c^n>2b^n$.

131. Доказать, что если $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$ и $\frac{1}{b}+\frac{1}{d}=\frac{2}{c}$, $b>0$, $\frac{b}{2}<c<2b$, $b\neq c$, то имеет место неравенство $a+d>b+c$.

132. Установить зависимость между натуральными числами m и n, если известно, что

$$\frac{1+2+3+\ldots+m}{m}>\frac{1+2+3+\ldots+n}{n}.$$

133. Доказать, что в геометрической прогрессии, все члены которой положительны и знаменатель отличен от нуля, среднее арифметическое крайних членов больше среднего арифметического всех членов.

134. Доказать, что если $a>0$ ($a\neq 1$), $p>q>0$, p и q рациональные числа, то имеет место неравенство $\frac{a^p-1}{p}>$ $>\frac{a^q-1}{q}$.

135. Доказать неравенство $x^2+xy+my^2-m\geqslant 0$, где y, m — целые числа ($y\neq 0$, $m>0$).

136. Доказать, что дробь $\frac{(x+m)^2-4mn}{2(x-n)}$ может принимать при вещественных x все числовые значения, кроме тех, которые заключены в интервале между $2m$ и $2n$.

137. Доказать неравенство $1\leqslant\frac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5}\leqslant 3$.

§ 2. Доказательство неравенств методом математической индукции

При доказательстве неравенств (как и равенств) часто прибегают к методу математической индукции. Этот метод основан на принципе, который поясним на примере. Если на полке самая левая книга в красном переплете, и правее каждой книги в красном переплете стоит книга в красном переплете, то все книги на полке в красном переплете. Это — пример рассуждения, который в математике называется принципом математической индукции (аксиомой индукции). Очевидно, что утверждение «на полке все книги в красном переплете» — верно. Также ясно, что если бы мы знали только то, что самая левая книга в красном переплете, то этого недостаточно, чтобы сделать заключение, что на полке все книги в красном переплете. Если же нам было известно лишь то, что правее каждой книги в красном переплете стоит книга в красном переплете, то и этого недостаточно, чтобы утверждать, что на полке все книги в красном переплете (первая книга может оказаться не в красном переплете). Таким образом, чтобы утверждение было верным, необходимо, чтобы имели место оба условия. Приведем более общий пример. Если имеется последовательность утверждений, у которой первое утверждение верно, и за каждым верным утверждением следует верное, то все утверждения в последовательности верны.

Доказательство при помощи метода математической индукции того, что некоторое утверждение, в которое входят натуральные числа n, верно, состоит из доказательства двух теорем:

Теорема 1. Утверждение верно при $n=1$.

Теорема 2. Из справедливости утверждения для какого-либо произвольного натурального $n=k$ следует его справедливость для следующего натурального $n=k+1$.

Если обе эти теоремы доказаны, то на основании принципа (аксиомы) математической индукции заключаем, что утверждение верно для любого натурального n.

Наконец, если надо доказать утверждение не для всех натуральных n, а лишь начиная с некоторого натурального $m > 1$, то доказательство проводится так:

1) Доказывается, что утверждение верно при $n=m$;

2) доказывается, что из справедливости утверждения при $n=k$, где $k \geqslant m$, вытекает, что оно верно и при $n=k+1$ (см. ниже пример 4).

Пример 1. Доказать, что

$$S_n=\frac{1\cdot 2}{2}+\frac{2\cdot 3}{2}+\frac{3\cdot 4}{2}+\ldots+\frac{(n-1)\,n}{2}+\frac{n\,(n+1)}{2}=\frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{6}. \quad (1)$$

Доказательство. Если $n=1$, то доказываемое равенство справедливо. Таким образом, теорема 1 доказана. Далее, исходя из предположения, что доказываемая формула верна для какого-нибудь $n=k$, т. е.

$$S_k=\frac{1\cdot 2}{2}+\frac{2\cdot 3}{2}+\frac{3\cdot 4}{2}+\ldots+\frac{(k-1)\,k}{2}+\frac{k\,(k+1)}{2}=\frac{k\,(k+1)\,(k+2)}{6}, \quad (2)$$

докажем, что (1) имеет место и для $n=k+1$. Действительно,

$$S_{k+1}=S_k+\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}=$$
$$=\frac{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}{6}.$$

Итак, доказана и теорема 2. Поскольку обе теоремы доказаны, то на основании принципа математической индукции заключаем, что формула (1) верна для любого натурального n.

Пример 2. Доказать, что при натуральном n имеет место неравенство $2^{n+2}>2n+5$.

При $n=1$ доказываемое неравенство верно, так как $2^3>2+5$. Допустим, что доказываемое неравенство верно при $n=k$, т. е. $2^{k+2}>2k+5$. Тогда при $n=k+1$ имеем

$$2^{(k+1)+2}=2^{k+2}\cdot 2>(2k+5)\,2=2(k+1)+5+(2k+3)>2(k+1)+5,$$

т. е. $2^{(k+1)+2}>2(k+1)+5$. Следовательно, неравенство $2^{n+2}>2n+5$ верно при любом натуральном n.

Пример 3. Доказать, что при натуральном n имеет место неравенство $\sin^{2n}\alpha+\cos^{2n}\alpha\leqslant 1$.

При $n=1$ имеет место равенство, так как $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. Пусть при $n=k$ $\sin^{2k}\alpha+\cos^{2k}\alpha\leqslant 1$. Тогда для $n=k+1$ имеем $\sin^{2k+2}\alpha+\cos^{2k+2}\alpha=\sin^{2k}\alpha\cdot\sin^2\alpha+\cos^{2k}\alpha\cdot\cos^2\alpha<\sin^{2k}\alpha+\cos^{2k}\alpha\leqslant 1$, так как если $\sin^2\alpha\leqslant 1$, то $\cos^2\alpha<1$, а если $\cos^2\alpha\leqslant 1$, то $\sin^2\alpha<1$. Поэтому $\sin^{2n}\alpha+\cos^{2n}\alpha\leqslant 1$ при любом натуральном n.

Равенство достигается лишь при $n=1$.

Пример 4. Доказать, что если a и b — катеты, а c — гипотенуза прямоугольного треугольника, то для всех натуральных $n\geqslant 2$ имеет место неравенство $a^n+b^n\leqslant c^n$. При $n=2$ имеет место равенство (по теореме Пифагора): $a^2+b^2=c^2$. Пусть $a^k+b^k\leqslant c^k$ при $n=k$. Тогда (при $n=k+1$) имеем $a^{k+1}+b^{k+1}=a^k\cdot a+b^k\cdot b<a^k\cdot c+b^k\cdot c=$ $=(a^k+b^k)\cdot c$. Итак, $a^n+b^n\leqslant c^n$ при любом натуральном $n\geqslant 2$.

Равенство достигается лишь при $n=2$.

Пример 5. Доказать, что среднее арифметическое n-х степеней двух положительных чисел не меньше n-й степени среднего арифметического этих величин, т. е.

$$\frac{a_1^n+a_2^n}{2}\geqslant\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^n. \qquad (1)$$

Сразу заметим, что если $a_1=a_2$, то при любом n достигается равенство. В дальнейшем будем считать, что $a_1\neq a_2$.

Если $n=1$, то соотношение (1) верно (имеет место равенство). Докажем, что при $n\geqslant 2$ имеет место строгое неравенство ($a_1\neq a_2$). Если $n=2$, то (1) перепишется в виде $\frac{a_1^2+a_2^2}{2}\geqslant\frac{(a_1+a_2)^2}{4}$, или $(a_1-a_2)^2\geqslant 0$, что очевидно, причем, так как $a_1\neq a_2$, имеет место строгое неравенство. Предположим, что при каком-нибудь $n=k$ ($k\geqslant 2$)

$$\frac{a_1^k+a_2^k}{2}>\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^k. \qquad (2)$$

Умножив обе части (2) на $a_1+a_2>0$, получим

$$\frac{a_1^k+a_2^k}{2}(a_1+a_2)>\frac{(a_1+a_2)^{k+1}}{2^k},$$

или

$$\frac{a_1^{k+1}+a_1^ka_2+a_1a_2^k+a_2^{k+1}}{2}>\frac{(a_1+a_2)^{k+1}}{2^k}. \qquad (3)$$

Докажем, что

$$a_1^{k+1}+a_2^{k+1}>a_1^ka_2+a_1a_2^k. \qquad (4)$$

Так как $(a_1^{k+1}+a_2^{k+1})-(a_1^ka_2+a_1a_2^k)=a_1^{k+1}-a_1^ka_2-a_1a_2^k+a_2^{k+1}=$ $=a_1^k(a_1-a_2)-a_2^k(a_1-a_2)=(a_1-a_2)(a_1^k-a_2^k)>0$, то неравенство (4) верно. Из неравенств (3) и (4) следует:

$$\frac{(a_1^{k+1}+a_2^{k+1})+(a_1^{k+1}+a_2^{k+1})}{2}>\frac{(a_1+a_2)^{k+1}}{2^k},$$

или

$$\frac{a_1^{k+1}+a_2^{k+1}}{2}>\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^{k+1}.$$

Итак, и теорема 2 доказана. Следовательно, на основании принципа математической индукции неравенство (1) верно для любого натурального n.

Пример 6 (обобщение примера 5). Доказать, что

$$\left(\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_p}{p}\right)^n\leqslant\frac{a_1^n+a_2^n+a_3^n+\ldots+a_p^n}{p}. \qquad (1)$$

Если $p=2$, то мы приходим к примеру 5. Пусть теперь $p=4=2^2$.

Так как $\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)^n=\left(\frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}}{2}\right)^n$, то на основании примера 5 получаем

$$\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)^n\leqslant\frac{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^n+\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)^n}{2}.$$

Но так как $\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^n\leqslant\frac{a_1^n+a_2^n}{2}$ и $\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)^n\leqslant\frac{a_3^n+a_4^n}{2}$, то в силу свойства транзитивности имеем

$$\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)^n\leqslant\frac{a_1^n+a_2^n+a_3^n+a_4^n}{4}.$$

Итак, мы доказали, что неравенство (1) верно при $p=2^1=2$ и при $p=4=2^2$. Таким же образом можно доказать, что (1) верно при $p=2^3$, 2^4, ... Вообще, применяя тот же метод доказательства, что в примерах 1 и 2, можно доказать, что (1) верно для любого $p=2^k$. Для доказательства неравенства (1) для любого p применим метод, впервые введенный французским математиком Коши. Этот метод отличается от метода, примененного нами при решении примеров 1 и 2, тем, что делается переход не от p к $p+1$ (индукция вверх), а производится переход от $p+1$ к p (индукция вниз). Итак, допустив, что неравенство (1) верно для натурального $p+1$, докажем, что (1) верно и для натурального p. Имеем тождество

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_p}{p}=\frac{\frac{p+1}{p}(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_p)}{p+1}=$$

$$=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_p+\frac{a_1+a_2+\ldots+a_p}{p}}{p+1},$$

следовательно,

$$\left(\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_p}{p}\right)^k=$$

$$=\left(\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_p+\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_p}{p}}{p+1}\right)^k. \qquad (2)$$

Но, по нашему допущению, неравенство (1) имеет место для натурального $p+1$, т. е.

$$\left(\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_p+\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_p}{p}}{p+1}\right)^k\leqslant$$

$$\leqslant\frac{a_1^k+a_2^k+a_3^k+\ldots+a_p^k+\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_p}{p}\right)^k}{p+1}.$$

Наконец, учитывая тождество (2), после преобразований получаем

$$\left(\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_p}{p}\right)^k\leqslant\frac{a_1^k+a_2^k+\ldots+a_p^k}{p}.$$

Равенство достигается лишь при $a_1=a_2=\ldots=a_p$ (если $p\neq 1$ и $k\neq 1$).

138. Доказать, что при натуральном $n\geqslant 3$ имеет место неравенство $2^n>2n+1$.

139. Доказать, что при любом натуральном n имеет место неравенство $(1-a)^n<\frac{1}{1+na}$, если $a>0$.

140. Доказать, что для любого натурального $n\geqslant 2$ имеет место неравенство $\frac{4^n}{n+1}<\frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

141. Доказать, что при любом натуральном $n\geqslant 2$ имеет место неравенство $2!\,4!\ldots(2n)!>[(n+1)!]^n$.

142. Доказать неравенство $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\ldots\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

143. Доказать, что при положительных x и при любом натуральном n имеет место неравенство

$$x^n + x^{n-2} + x^{n-4} + \ldots + \frac{1}{x^{n-4}} + \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{1}{x^n} \geqslant n + 1.$$

144. Доказать, что если $0 \leqslant \alpha_i \leqslant \pi$, где $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, то имеет место неравенство

$$\sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{n} \geqslant \frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \ldots + \sin \alpha_n}{n}.$$

145. Доказать, что модуль суммы нескольких величин не больше суммы их модулей, т. е.

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n| \leqslant |\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_n|.$$

§ 3. Средние величины. Классические неравенства

Определения:

1. Число $A = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}$ называется средним арифметическим чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.

2. Корень n-й степени из произведения n неотрицательных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, т. е. число $G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_n}$, называется средним геометрическим этих чисел.

3. Число $S_m = \left(\dfrac{a_1^m + a_2^m + a_3^m + \ldots + a_n^m}{n} \right)^{\frac{1}{m}}$ называется средним степенным чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ порядка m.

В частности, среднее степенное первого порядка $\dfrac{a_1^1 + a_2^1 + a_3^1 + \ldots + a_n^1}{n}$ есть среднее арифметическое чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, а среднее степенное второго порядка $Q = \left(\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2}{n} \right)^{1/2}$ называется средним квадратическим чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.

4. Число

$$H = \left(\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \ldots + a_n^{-1}}{n} \right)^{-1} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$$

называется средним гармоническим чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.

146. Доказать, что среднее арифметическое (A) чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ заключено между $\max(a)$ и $\min(a)$ *), где

*) Аналогичные символы применяются и в дальнейшем.

$\max(a)$ — наибольшее из чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, а $\min(a)$ — наименьшее из них, т. е.

$$\min(a) \leqslant \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n} \leqslant \max(a).$$

147. Доказать, что среднее геометрическое положительных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ заключено между $\min(a)$ и $\max(a)$, т. е.

$$\min(a) \leqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_n} \leqslant \max(a).$$

148. Доказать, что при натуральных значениях m среднее степенное n положительных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ заключено между $\min(a)$ и $\max(a)$, т. е.

$$\min(a) \leqslant \sqrt[m]{\frac{a_1^m+a_2^m+a_3^m+\ldots+a_n^m}{n}} \leqslant \max(a).$$

149. Доказать, что среднее гармоническое положительных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ удовлетворяет условию

$$\min(a) \leqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \leqslant \max(a).$$

150. Доказать, что число $D=\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n}$ заключено между $\min\left(\frac{a}{b}\right)$ и $\max\left(\frac{a}{b}\right)$, если $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ положительны.

151. Доказать, что величина $(a \cdot b \cdot c \ldots l)^{\frac{1}{p+q+r+\ldots+v}}$ заключена между наибольшей и наименьшей из величин $a^{\frac{1}{p}}, b^{\frac{1}{q}}, c^{\frac{1}{r}}, \ldots, l^{\frac{1}{v}}$, где $a, b, c, \ldots, l, p, q, r, \ldots, v$ положительны.

152. Доказать, что среднее арифметическое любых двух неотрицательных чисел a_1 и a_2 не меньше их среднего геометрического, т. е. $\frac{a_1+a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1 \cdot a_2}$.

153. Доказать, что среднее арифметическое любых трех неотрицательных чисел a_1, a_2, a_3 не меньше их среднего геометрического, т. е. $\frac{a_1+a_2+a_3}{3} \geqslant \sqrt[3]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3}$.

154. Доказать, что среднее арифметическое любых четырех неотрицательных чисел a_1, a_2, a_3, a_4 не меньше их среднего геометрического.

155. Используя задачу 154, доказать, что среднее арифметическое любых трех неотрицательных чисел b_1, b_2, b_3 не меньше их среднего геометрического.

156. Доказать, что среднее арифметическое любых восьми неотрицательных чисел $b_1, b_2, \ldots, b_7, b_8$ не меньше их среднего геометрического.

157. Доказать, что среднее арифметическое любых n неотрицательных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ не меньше их среднего геометрического, т. е. $\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_n}$ (неравенство Коши). Показать, что равенство достигается лишь при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

158. Доказать тождество Лагранжа *):

$$(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)^2 = (x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2) \times (y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2) - (x_1y_2-x_2y_1)^2 - (x_1y_3-x_3y_1)^2 - \ldots - (x_1y_n-x_ny_1)^2 - (x_2y_3-x_3y_2)^2 - (x_2y_4-x_4y_2)^2 - \ldots - (x_2y_n-x_ny_2)^2 - \ldots - (x_{n-1}y_n-x_ny_{n-1})^2.$$

159. Доказать неравенство Коши — Буняковского:

$$(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2) \geqslant (x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)^2.$$

160. Пользуясь неравенством Коши — Буняковского, доказать неравенство $(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2$, где $a_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

161. Пользуясь неравенством Коши — Буняковского, доказать, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то имеет место неравенство $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} \geqslant 1$.

162. Доказать неравенство Чебышева:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \cdot \frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n} \leqslant \frac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{n},$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — две неубывающие последовательности чисел (или две невозрастающие).

163. Пользуясь неравенством Чебышева, доказать, что при n натуральном имеет место неравенство

$$\frac{(n-1)^2 pq+(n-1)(p+q)+1}{n} \leqslant (n-1)pq+1, \text{ где } p \geqslant 1,\ q \geqslant 1$$

(или $p \leqslant 1$, $q \leqslant 1$).

---

*) Эта задача является вспомогательной, с ее помощью могут быть доказаны некоторые неравенства.

164. Доказать, что если $h \geqslant -1$, то при любом натуральном n имеет место неравенство $(1+h)^n \geqslant 1+nh$ (неравенство Бернулли).

165. Доказать, что при любом натуральном n имеет место неравенство $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

166. Доказать неравенство Гёльдера:

$$(x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (y_1^q + y_2^q + \ldots + y_n^q)^{\frac{1}{q}} \geqslant$$
$$\geqslant x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n,$$

где p и q положительные рациональные, а x_i и y_i — неотрицательные числа, причем $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

167. Общий вид неравенства Минковского такой:

$$(a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} + (b_1^p + b_2^p + \ldots + b_n^p)^{\frac{1}{p}} + \ldots +$$
$$+ (l_1^p + l_2^p + \ldots + l_n^p)^{\frac{1}{p}} \geqslant [(a_1 + b_1 + \ldots + l_1)^p +$$
$$+ (a_2 + b_2 + \ldots + l_2)^p + \ldots + (a_n + b_n + \ldots + l_n)^p]^{\frac{1}{p}},$$

где $p \geqslant 1$.

При $p < 1$ знак неравенства надо изменить на противоположный. Доказать два частных случая: один для $n = 2$, а другой для $p = 2$.

168. Доказать, что между средним арифметическим A, средним геометрическим G, средним гармоническим H и средним квадратическим Q положительных чисел имеют место неравенства $Q \geqslant A \geqslant G \geqslant H$.

§ 4. Неравенства, приводимые к сравнению средних

169. Доказать, что если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, то имеет место неравенство $a + b + c \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac}$.

170. Доказать, что если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, $d \geqslant 0$, то имеет место неравенство $\sqrt{(a+b)(c+d)} + \sqrt{(a+c)(b+d)} + \sqrt{(a+d)(b+c)} \geqslant 6\sqrt[4]{abcd}$.

171. Доказать, что если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то имеет место неравенство $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geqslant 2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}}$.

172. Доказать, что если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, то имеет место неравенство $a^3+b^3+c^3 \geqslant a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ca}+c^2\sqrt{ab}$.

173. Доказать неравенство $a^4+b^4+c^4 \geqslant abc(a+b+c)$.

174. Доказать, что при натуральном n имеет место неравенство $2^{n-1}\cdot n! \leqslant n^n$.

175. Доказать, что если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ неотрицательные числа, то имеет место неравенство

$$\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_1a_3}+\ldots+\sqrt{a_{n-1}a_n} \leqslant \frac{n-1}{2}(a_1+a_2+\ldots+a_n).$$

176. Доказать, что если $b \geqslant -1$ и $b \neq 0$, то имеет место неравенство $\frac{4b^2+b+1}{4|b|} \geqslant \sqrt{b+1}$.

177. Доказать неравенство $\sqrt{x_1^2+x_2^2}+\sqrt{y_1^2+y_2^2} \geqslant$ $\geqslant \sqrt{(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2}$.

178. Доказать, что если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то имеет место неравенство $\sqrt{x^2+a}+\sqrt{(c-x)^2+b} \geqslant \sqrt{c^2+(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$.

179. Доказать, что если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, то имеет место неравенство $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geqslant 9abc$.

180. Доказать, что если $a \geqslant 0$, то имеет место неравенство $\frac{a^3+b^6}{2} \geqslant 3ab^2-4$.

181. Доказать, что если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то имеет место неравенство

$$P=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,(ab+bc+ca+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2})}{abc} \geqslant 3(1+\sqrt{3}).$$

182. Доказать, что если $ab \geqslant 0$, $cd \geqslant 0$, то имеет место неравенство $2(a^2+b^2)+c^2+d^2 \geqslant 2\sqrt{ab}(\sqrt{ab}+2\sqrt{cd})$.

183. Доказать, что если числа a, b и c положительны, рациональны и сумма каждых двух из них больше третьего, то имеет место неравенство

$$\left(1+\frac{b-c}{a}\right)^a\left(1+\frac{c-a}{b}\right)^b\left(1+\frac{a-b}{c}\right)^c \leqslant 1.$$

184. Доказать, что для натуральных m и n имеет место неравенство $\sqrt[m+n]{m^n\cdot n^m} \leqslant \frac{m+n}{2}$.

185. Доказать, что если $S=a_1+a_2+\ldots+a_n$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — неотрицательные числа, среди которых имеются неравные, то имеет место неравенство

$$\frac{S}{S-a_1}+\frac{S}{S-a_2}+\ldots+\frac{S}{S-a_n}>\frac{n^2}{n-1}.$$

186. Доказать, что если $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$, то имеет место неравенство $a^3+b^3+c^3+15abc\leqslant 2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$.

187. Доказать, что если $a_1\geqslant 0$, $a_2\geqslant 0$, $a_3\geqslant 0$, $a_4\geqslant 0$, то имеет место неравенство

$$a_1\cdot a_2^2\cdot a_3^3\cdot a_4^4\leqslant\left(\frac{a_1+2a_2+3a_3+4a_4}{10}\right)^{10}.$$

188. Доказать, что $xy+yz+zx\geqslant\sqrt{3xyz(x+y+z)}$, где $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

189. Доказать, что при натуральном n имеет место неравенство $n!\leqslant\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

190. Доказать, что при натуральном n имеет место неравенство $(n+1)^n\geqslant(2n)!!$.

191. Доказать, что при натуральном n имеет место неравенство $n^n\geqslant(2n-1)!!$.

192. Доказать, что при натуральном n имеет место неравенство $(n!)^2\leqslant\left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\right]^n$.

193. Доказать, что при натуральном n имеет место неравенство $(n!)^3\leqslant\left[\frac{n(n+1)^2}{4}\right]^n$.

194. Доказать, что при натуральном n имеет место неравенство $3n(3n+1)^2>4\sqrt[n]{(3n)!}$.

195. Доказать, что если x, p, q и r — положительные рациональные числа, то имеет место неравенство $px^{q-r}+qx^{r-p}+rx^{p-q}\geqslant p+q+r$.

196. Доказать, что если $a>0$, $b>0$, $0<p<1$, то имеет место неравенство $(a+b)^p\cdot a^{1-p}<a+pb$.

197. Доказать, что если $x>0$ и n — целое неотрицательное число, то имеет место неравенство

$$\frac{x^n}{1+x+x^2+\ldots+x^{2n}}\leqslant\frac{1}{2n+1}.$$

198. Доказать, что для натуральных m и n имеет место неравенство $(m+1)(m+2)(m+3)\ldots[m+(2n-1)]<(m+n)^{2n-1}$.

199. Доказать неравенства

$$\left[\frac{n+1}{2}\right]^{\frac{n(n+1)}{2}} \leqslant 1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \ldots n^n \leqslant \left[\frac{2n+1}{3}\right]^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

200. Доказать, что если $a_1 \geqslant 0$, $a_2 \geqslant 0, \ldots, a_n \geqslant 0$ $(n > 1)$ и $S = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n-1}$, то имеет место неравенство $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_n \geqslant (n-1)^n (S - a_1)(S - a_2) \ldots (S - a_n)$.

201. Доказать, что для любого натурального n и $x \geqslant 1$ имеет место неравенство $x^n - 1 \geqslant n\left(x^{\frac{n+1}{2}} - x^{\frac{n-1}{2}}\right)$.

202. Доказать, что если m и n — положительные и рациональные, а $x > 0$, то имеет место неравенство $mx^n + \frac{n}{x^m} > m + n$.

203. Доказать, что если a и b — положительные и различные числа, то имеет место неравенство

$$a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + ab^{n-1} + b^n > (n+1)(ab)^{\frac{n}{2}}.$$

204. Доказать, что если a, b, c — натуральные числа, то имеет место неравенство

$$a^a b^b c^c \geqslant \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c} \geqslant \frac{(b+c)^a (c+a)^b (a+b)^c}{2^{a+b+c}}.$$

205. Доказать, что если $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \delta$ — рациональные положительные числа, $x, y, z, \ldots, u$ — положительные числа и среди отношений $\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta}, \frac{z}{\gamma}, \ldots, \frac{u}{\delta}$ имеются различные, то имеет место неравенство

$$\left(\frac{x+y+z+\ldots+u}{\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\delta}\right)^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\delta} > \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{y}{\beta}\right)^\beta \cdot \left(\frac{z}{\gamma}\right)^\gamma \ldots \left(\frac{u}{\delta}\right)^\delta.$$

206. Доказать, что при неотрицательном целом n имеет место неравенство $2^n \geqslant 1 + n \cdot 2^{\frac{n-1}{2}}$.

207. Доказать, что если в арифметической и геометрической прогрессиях, все члены которых положительны и неравны между собой, первые и последние члены соответственно равны, а также равно число членов, то любой из средних членов арифметической прогрессии больше соответствующего члена геометрической прогрессии.

§ 5. Неравенства, связанные с показательной и логарифмической функциями

208. Доказать, что если $a > b > 0$, то имеют место неравенства: 1) $a^a \cdot b^b > a^b \cdot b^a$ и 2) $\log_m \frac{b}{a} < \log_m \frac{1+b}{1+a}$, где $m > 1$.

209. Доказать, что $\frac{\lg 1 + \lg 2 + \ldots + \lg k}{k}$ возрастает вместе с k.

210. Установить зависимость между натуральными числами m и n, если известно, что $(n!)^m > (m!)^n$.

211. Доказать, что $\lg(n+1) > \frac{\lg 1 + \lg 2 + \ldots + \lg n}{n}$.

212. Доказать, что если $m > n > 0$, $a > 0$, то имеет место неравенство $\frac{1}{m} \lg(1 + a^m) < \frac{1}{n} \lg(1 + a^n)$.

213. Доказать, что

$$x^2(4 + \log_2^2 y) + 2x \log_2 y + \log_2^2 y + 1 \geqslant 0.$$

При каких значениях x и y достигается равенство?

214. Доказать, что

$$\log_2^2(x+y) + \log_2^2(xy) + 1 \geqslant 2\log_2(x+y).$$

215. Доказать, что $\log_3^2 x + 2\log_3 x \cdot \log_3 \frac{3}{x} \leqslant 1$.

216. Доказать, что $\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} + \frac{1}{\log_{10} \pi} > 4$.

217. Доказать, что $\log_a(bc)\left[1 + \frac{1}{\log_a b^{\log_a c}}\right] \geqslant 4$, где $a > 1$, $b > 1$, $c > 1$.

§ 6. Неравенства, связанные с тригонометрическими функциями

218. Доказать, что если A, B, C — углы треугольника, то косинус половины любого из этих углов меньше суммы косинусов половин двух других углов.

219. Доказать, что если A, B, C — углы треугольника, то $\cos A + \cos B + \cos C \leqslant 3/2$.

220. Доказать, что если A, B, C — углы треугольника, то $\sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8}$.

221. Доказать, что если $\frac{1}{\cos A\cdot\cos B}+\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B=\operatorname{tg}C$, то $\cos 2C\leqslant 0$.

222. Доказать, что если A, B, C — углы треугольника, то $\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\geqslant 6$.

223. Доказать, что если α и β — углы остроугольного треугольника, то $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta>1$.

224. Доказать, что если α, β, γ — углы неостроугольного треугольника, то $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma\leqslant 2$.

225. Доказать, что если A и B — острые углы тупоугольного треугольника, то $\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B<1$.

226. Доказать, что если углы A, B, C — углы тупоугольного треугольника, то $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C>1$.

227. Доказать, что если α, β, γ — углы треугольника, то $(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2>2\pi\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

228. Доказать, что если $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$, то $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\geqslant\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2}$.

229. Доказать, что если $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$ и $0\leqslant\beta\leqslant\pi$, то $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\geqslant\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}$.

230. Доказать, что если $0<\alpha<\pi/2$ и $0<\beta<\pi/2$, то $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\leqslant\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{2}$.

231. Доказать неравенство $\sin(\pi/2-\cos\alpha)>0$.

232. Доказать неравенство $\sin^8\alpha+\cos^8\alpha\geqslant 1/8$. При каких значениях α достигается равенство?

233. Доказать, что если $2k\pi<\alpha<(2k+1)\pi$ и $2m\pi<\beta<(2m+1)\pi$ (k и m — целые числа), то имеет место неравенство $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}\geqslant\frac{2}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

234. Доказать, что если $0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$, то имеет место неравенство $1+\operatorname{ctg}\alpha\leqslant\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

235. Доказать, что если $k\pi<\alpha<(2k+1)\frac{\pi}{2}$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то имеет место неравенство $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha>\sin\alpha+\cos\alpha$.

236. Доказать, что если $\alpha \neq \frac{\pi}{2}k$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то имеет место неравенство

$$\frac{3}{(1+\sin^2\alpha)(1+\cos^2\alpha)} < 2 + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha.$$

237. Доказать, что если $0 < x < \pi/4$, то имеет место неравенство $\frac{\cos x}{\sin^2 x(\cos x - \sin x)} > 8$.

238. Доказать неравенство $\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^6\frac{\alpha}{2} \leqslant \frac{27}{256}$.

239. Доказать, что если $0 \leqslant x \leqslant \pi$ и $0 \leqslant y \leqslant \pi$, то $z = \sin x + \sin y + \sin(x+y) \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

240. Доказать неравенство $\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha\cdot\sin 3\alpha < 3/4$.

241. Доказать, что если $k\pi < \alpha < (2k+1)\frac{\pi}{2}$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то $\sin^2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha + \cos^2\alpha\operatorname{ctg}\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha \geqslant 2$, а если $(2k+1)\frac{\pi}{2} < \alpha < (k+1)\pi$, то $\sin^2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha + \cos^2\alpha\operatorname{ctg}\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha \leqslant -2$.

242. Доказать, что при любом допустимом значении α имеет место неравенство $\frac{\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha + \operatorname{ctg}\alpha} > 0$.

243. Доказать, что $x^2(1+\sin^2 y) + 2x(\sin y + \cos y) + 1 + \cos^2 y \geqslant 0$. При каких значениях x и y достигается равенство?

244. Доказать неравенство $x^2 + 4x\cos(xy) + 4 \geqslant 0$. При каких действительных значениях x и y достигается равенство?

245. Доказать неравенство $\cos x + \cos y - \cos(x+y) \leqslant 3/2$. При каких значениях x и y достигается равенство?

246. Доказать неравенство

$$(x+y)(x+y+2\cos x) + 2 \geqslant 2\sin^2 x.$$

При каких значениях x и y достигается равенство?

247. Доказать, что если $\alpha \neq k\cdot\frac{\pi}{2}$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то имеет место неравенство

$$3(\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha) - 8(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha) + 10 \geqslant 0.$$

248. Доказать, что если $0 \leqslant \alpha < \pi/2$, $0 \leqslant \beta < \pi/2$, $0 \leqslant \gamma < \pi/2$ и $\alpha + \beta + \gamma = \pi/2$, то имеет место неравенство $\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta + 5} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\gamma + 5} + \sqrt{\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma + 5} \leqslant 4\sqrt{3}$.

249. Доказать, что если $0 \leqslant \alpha < \pi/2$, $0 \leqslant \beta < \pi/2$, $0 \leqslant \gamma < \pi/2$ и $\alpha + \beta + \gamma = \pi/2$, то имеет место неравенство $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^2\gamma - \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\beta \cdot \operatorname{tg}^2\gamma \geqslant \frac{26}{27}$.

250. Доказать, что

$$P = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \ \ldots \ \cos 2^n\alpha \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

251. Доказать, что при всех допустимых значениях α имеет место неравенство $|\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha| > |\sin\alpha + \cos\alpha|$.

252. Доказать, что если $0 \leqslant a \leqslant 1$ и $0 < x \leqslant \frac{\pi}{3}$, то имеют место неравенства $\sin^2 x \leqslant 1 - 2a\cos x + a^2 \leqslant 1$.

253. Доказать, что если $\alpha \neq (2k+1)\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то имеют место неравенства

$$-2 \leqslant \frac{3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 10\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + 3}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \leqslant 8.$$

254. Доказать неравенства

$$-\frac{1}{4} \leqslant \sin x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \leqslant \frac{1}{4}.$$

255. Доказать неравенства $\frac{1}{4} \leqslant \sin^6\alpha + \cos^6\alpha \leqslant 1$.

256. Доказать неравенства

$$0 \leqslant \cos^2\alpha + \cos^2(\alpha + \beta) - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha + \beta) \leqslant 1.$$

257. Доказать, что если α, β, γ — острые углы, то имеет место неравенство $\operatorname{tg}\alpha(\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma) + \operatorname{tg}\beta(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\gamma) + \operatorname{tg}\gamma(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta) \geqslant 6$.

258. Доказать неравенство

$$(\operatorname{ctg}^2\alpha - 1)(3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1)(\operatorname{ctg}3\alpha\operatorname{tg}2\alpha - 1) \leqslant -1.$$

259. Доказать, что если $0 < \alpha < \pi/2$, $0 < \beta < \pi/2$, $0 < \gamma < \pi/2$ и $0 < \alpha + \beta + \gamma < \pi/2$, то имеет место неравенство $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha < 1$.

260. Доказать неравенство $\sin^2\alpha + \sin^2\beta \geqslant \sin\alpha\sin\beta + \sin\alpha + \sin\beta - 1$. При каких значениях α и β достигается равенство?

261. Доказать неравенство $\sin(\cos\varphi) < \cos(\sin\varphi)$.

262. Доказать, что если $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$, то имеет место неравенство $\alpha-\sin\alpha<\beta-\sin\beta$.

263. Доказать, что если $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$, то имеет место неравенство $\operatorname{tg}\alpha-\alpha<\operatorname{tg}\beta-\beta$.

264. Доказать, что если $0<x<\frac{\pi}{2}$, то имеют место неравенства: $\sin x<x<\operatorname{tg}x$ и $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$.

265. Доказать, что если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то имеет место неравенство $\alpha-\frac{\alpha^3}{4}<\sin\alpha$.

266. Доказать, что при $x\geqslant 2$ имеет место неравенство $\sin\frac{1}{x-1}+\sin\frac{1}{x+1}-2\sin\frac{1}{x}>0$.

267. Доказать неравенство $\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx<n$.

268. Доказать, что если $\alpha\neq k\pi$, где $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$, то имеет место неравенство

$$\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\ldots+\sin(2n-1)\alpha}{\sin\alpha}>0.$$

269. Доказать, что если $\operatorname{tg}\alpha=n\operatorname{tg}\varphi$, где $n>0$, то имеет место неравенство $\operatorname{tg}^2(\alpha-\varphi)\leqslant\frac{(n-1)^2}{4n}$.

270. Доказать, что если $0<\alpha<\frac{\pi}{4(n-1)}$, то имеет место неравенство $\operatorname{tg}n\alpha>n\operatorname{tg}\alpha$, где n — натуральное число, большее 1.

271. Доказать, что

$$\operatorname{tg}\alpha_1<\frac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\ldots+\sin\alpha_n}{\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\ldots+\cos\alpha_n}<\operatorname{tg}\alpha_n,$$

если

$$0<\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n<\pi/2.$$

272. Доказать, что если $0<(n+1)x<\frac{\pi}{2}$, где n — натуральное, то имеет место неравенство $\frac{\cos(n+1)x}{\cos nx}<\cos^{2n+1}x$.

273. Доказать, что имеет место неравенство

$$-4\leqslant y\leqslant 2\frac{1}{8}, \text{ где } y=\cos 2x+3\sin x.$$

274. Доказать, что имеет место неравенство

$$\frac{a+c}{2}-\frac{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}{2}\leqslant y\leqslant\frac{a+c}{2}+\frac{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}{2},$$

где $y=a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x$.

275. Доказать неравенство $\frac{\sin x-1}{\sin x-2}+\frac{1}{2}\geqslant\frac{2-\sin x}{3-\sin x}$.

276. Доказать, что если A, B, C — углы треугольника ABC и произведение $\sin A\cdot\sin B>1/2$, то $\angle C<90°$.

277. Доказать, что если между острыми углами α и β существует зависимость $\sin(\alpha+\beta)=2\sin\alpha$, то $\alpha<\beta$.

278. Доказать, что если $\left|\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right|\leqslant 1$, то

$$k\pi\leqslant x\leqslant\pi/2+k\pi.$$

279. Доказать, что если $\operatorname{tg} x=3\operatorname{tg} y$, $0\leqslant x<\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant y<\frac{\pi}{2}$, то $x-y\leqslant\frac{\pi}{6}$.

280. Доказать, что если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\cdot\operatorname{tg}\alpha<1$, то имеют место неравенства $0<\alpha+\beta+\gamma<\frac{\pi}{2}$.

281. Доказать неравенство $(1-\sin x)^2+\sin^2(x-1)>0$.

282. Доказать, что $2|\sin x|\cdot\sin^2\frac{x}{5}\neq x^2+\frac{1}{x^2}$.

283. Доказать, что если $\alpha\neq\pi k$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то имеет место неравенство $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}<2$.

284. Доказать, что $-1\leqslant y\leqslant 1$, где

$$y=\frac{x^2\cos\alpha-2x+\cos\alpha}{x^2-2x\cos\alpha+1}\qquad(0<\alpha<\pi).$$

285. Доказать, что если $a>0$, $b>0$, $\alpha\neq k\pi$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то имеет место неравенство $a\sin^2\alpha+b\operatorname{cosec}^2\alpha\geqslant 2\sqrt{ab}$.

286. Доказать, что при любом $\alpha\neq\frac{\pi}{2}k$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, имеет место неравенство

$$(1+\sin^2\alpha)(\operatorname{tg}^2\alpha-2)+\operatorname{ctg}^2\alpha+\cos^2\alpha\geqslant 0.$$

287. Доказать, что если $\frac{\pi}{4}+2k\pi<\alpha<\frac{5\pi}{4}+2k\pi$, то имеют место неравенства

$$-\sqrt{2}<\frac{\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}+\frac{2}{\sec\alpha+\operatorname{cosec}\alpha}<\sqrt{2}.$$

288. Доказать, что при целом $n\geqslant 0$ имеет место неравенство $|\sin nx|\leqslant n|\sin x|$.

§ 7. Нахождение наибольших и наименьших значений функций

289. Доказать, что произведение нескольких положительных переменных сомножителей, сумма которых постоянна, имеет наибольшее значение при равенстве сомножителей.

290. Доказать, что сумма m положительных переменных, произведение которых постоянно, имеет наименьшее значение при равенстве переменных.

291. Даны n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Определить, при каком значении x функция

$$y=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\ldots+(x-a_n)^2$$

имеет наименьшее значение.

292. Найти наименьшее значение функции

$$\varphi(x)=|x-a|+|x-b|+|x-c|+|x-d|,$$

где $a<b<c<d$ — фиксированные вещественные числа, а x может принимать произвольные вещественные значения.

293. Найти наибольшее значение функции

$$y=(1-x)^5(1+x)(1+2x)^2,$$

где $-\frac{1}{2}<x<1$.

294. Известно, что $36x^2+16y^2=9$. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=y-2x$.

295. Найти наибольшее значение функции

$$z=(a-x)(b-y)(cx+dy),$$

где $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$, $a>x$, $b>y$, $cx+dy>0$.

296. Найти наименьшее значение функции

$$y=\sqrt{x+2(1+\sqrt{x+1})}+\sqrt{x+2(1-\sqrt{x+1})}.$$

297. Найти наименьшее значение функции $y=\frac{5-3x}{\sqrt{1-x^2}}$ и узнать, при каком значении x оно достигается.

298. Найти наименьшее значение функции

$$y=\sqrt{-x^2+4x+12}-\sqrt{-x^2+2x+3}.$$

299. Найти наибольшее значение функции $y=x^2\sqrt{a^2-x^2}$.

300. Найти наибольшее значение функции

$$y=3x+4\sqrt{1-x^2}$$

и определить, при каких значениях x оно достигается.

301. Найти наименьшее значение функции $y=\frac{x^3+16}{x}$, если $x>0$.

302. Найти наименьшее значение функции

$$y=\frac{2x^4-4x^3+9x^2-4x+2}{(x^2+1)^2}.$$

303. Найти наименьшее значение функции

$$y=am^{kx}+bm^{-kx},$$

где $a>0$, $b>0$, $m\neq 1$, $m>0$, $k>0$.

304. Найти наибольшее значение функции

$$y=\frac{(a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n)^2}{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}.$$

305. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$, если известно, что $x_1^2+y_1^2+z_1^2\leqslant 4$, $x_2^2+y_2^2+z_2^2\leqslant 9$.

306. Найти наименьшее значение функции $y=\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{1-x}$, где $a>0$, $b>0$, $0<x<1$.

307. Найти наименьшее значение функции

$$y=\frac{x^4+2x^3+3x^2+2x+2}{x^2+x+1}.$$

308. Доказать, что если m и n — рациональные положительные числа, x и y положительны, то имеет место неравенство $x^my^n\leqslant\left(\frac{x+y}{m+n}\right)^{m+n}m^mn^n$. Найти наименьшее значение $x+y$, если $x^my^n=c$.

309. Найти наименьшее значение функции

$$F(x,\ y,\ z)=\frac{(x+y+z)^6}{xy^2z^3},$$

если $x>0,\ y>0,\ z>0$.

310. Найти наименьшее значение функции $y=\frac{(a+x)(b+x)}{x}$, если $a\geqslant 0,\ b\geqslant 0,\ x>0$.

311. Найти наибольшее значение функции

$$y=\sin^3 x-\sin^6 x.$$

312. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=2\cos^2 x-3\sqrt{3}\cos x-\sin^2 x+5.$$

313. Найти максимум и минимум функции

$$y=\sin^2 x\cdot\operatorname{tg} x+\cos^2 x\cdot\operatorname{ctg} x+\sin 2x.$$

314. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=\frac{\sin^2 x-4\sin x+5}{3-2\sin x}.$$

315. Найти наибольшее значение функции

$$z=\sin^2(x+y)\cos(x-y)+\sin^2(x-y)\cos(x+y),$$

если $\sin^2 x+\sin^2 y=m$.

316. Найти наибольшее значение функции

$$y=\sin^8 x+\cos^{14} x.$$

ГЛАВА II

РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ

§ 1. Неравенства, связанные с рациональной функцией

Установить, при каких действительных значениях x выполняются неравенства:

317. $ax+b>0$.

318. $a(x-1)>x-2$.

319. $\frac{x}{2a}+\frac{1-x}{6}>\frac{x+1}{8a}$.

320. $|x-1|>2$.

321. $|2x-5|<1$.

322. $\frac{x-2}{3x+12}>0$.

323. $\frac{x-1}{2x+4}<0$.

324. $\frac{x^2-1}{x^2+x+1}<1$.

325. $1<\frac{3x-1}{2x+1}<2$.

326. $|x|>\frac{1}{x}$.

327. $|x|<\frac{1}{x-1}$.

328. $x^2-|x|<0$.

329. $x^2-3|x|+2>0$.

330. $x|x|-4x+3<0$.

331. $(1+x)^2<|1-x^2|$.

332. $\frac{x-1}{x}-\frac{x+1}{x-1}<2$.

333. $\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x+1}-\frac{8}{x^2-1}<0$.

334. $|x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots|<1$, где $|x|<1$.

335. $\left|x-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{27}x^4+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{3^{n-1}}x^n\right|<1$, где $|x|<3$.

336. При каких значениях a система неравенств

$$-3<\frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}<2$$

удовлетворяется при любых значениях x?

337. При каких действительных значениях a неравенство $(a^2-1)x^2+2(a-1)x+1>0$ имеет место при всех действительных x?

338. При каких значениях a система

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x \leqslant 1, \\ x-y+a=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение? Найти соответствующее решение.

339. Определить коэффициенты квадратного трехчлена $y=ax^2+bx+c$, если известно, что его наибольшее значение равно $\frac{1}{4}$ при $x=\frac{3}{2}$, а сумма кубов его корней равна 9.

340. Определить a так, чтобы сумма квадратов корней уравнения $x^2+(a-1)x-2a=0$ была наименьшей.

341. Найти коэффициенты трехчлена $y=ax^2+bx+c$, если известно, что при $x=3$ он обращается в нуль, а его наименьшее значение равно -1 при $x=2$.

342. Найти все пары целых чисел x и y, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} |x^2-2x| < y+0{,}5, \\ y+|x-1| < 2. \end{cases}$$

§ 2. Неравенства, связанные с иррациональностями

Решить неравенства:

343. $\sqrt{x+1} > \sqrt{x-1}$.

344. $\sqrt{1-x} \leqslant \sqrt[4]{5+x}$.

345. $\sqrt{-x^2+4x-3} < x-2$.

346. $\sqrt{x^2-3x-10} < 8-x$.

347. $\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3} > -\sqrt{x-5}$.

348. $\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1}+\sqrt{2x-4}$.

349. $\dfrac{1-\sqrt{1-9x^2}}{x} < 1$.

350. $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+2\sqrt{x^2+x} \leqslant 1-2x$.

351. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} \geqslant 2$.

352. $(x-2)\sqrt{x^2+1} > x^2+2$.

353. $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}} > \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}}$.

354. $\sqrt{x-1} > 1+\sqrt[3]{x-2}$.

355. $x^2 \geqslant x\sqrt{2+\sqrt{12-2x-x^2}}$.

356. $\sqrt{x^2} > 2\sqrt{x^2-2x+1}$.

357. $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} < \dfrac{3}{2}$.

358. $x-4<\left(\frac{x}{1+\sqrt{1+x}}\right)^2$.

359. $\frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}}+\frac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}>2$.

§ 3. Неравенства, связанные с показательной и логарифмической функциями

Решить неравенства:

360. $4^x-2\cdot 5^{2x}-10^x<0$.

361. $\frac{1}{2^x+3}>\frac{1}{2^{x+2}-1}$.

362. $\log_{x^2}(2+x)<1$.

363. $\lg\left|\frac{x-1}{2x+1}\right|<0$.

364. $\frac{1}{\log_2 x}\leqslant\frac{1}{\log_2\sqrt{x+2}}$.

365. $\log_{0,1}(x^2+1)<\log_{0,1}(2x-5)$.

366. $\log_a^2 x-\log_a x<0$ $(0<a<1)$.

367. $\frac{1+\log_a^2 x}{1+\log_a x}>1$ $(0<a<1)$.

368. $\log_2(2^x-1)\times\log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1}-2)>-2$.

369. $\log_{\sqrt{2}}(5^x-1)\times\log_{\sqrt{2}}\frac{2\sqrt{2}}{5^x-1}>2$.

370. $\sqrt{\log_2\frac{3-2x}{1-x}}<1$.

371. $\left[\log_{\frac{1}{7}}(x^2-5x+2)\right]^{\frac{1}{2}}<1$.

372. $\frac{1}{100}<\log_{0,1}^2 x<1$.

373. $\frac{1}{\log_a x}>1$ $(a>1)$.

374. $\log_{0,1}^2 x>7$.

375. $\log_{0,7}\frac{x^2-4x+6}{x}<0$.

376. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{9}}(x^2-3x+1)}<1$.

377. $(1,25)^{1-(\log_2 x)^2}<(0,64)^{2+\log_{\sqrt{2}} x}$.

378. $\log_x\sqrt{20-x}>1$.

379. $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{x+1}<\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{4-x^2}+1$.

380. $\log_x|x^2-1|>0$.

381. $\sin|\lg x|+\cos|\lg x|>\frac{\sqrt{2}}{2}$.

382. $\arcsin\lg x>0$.

383. $(\log_2 x)^4-\left(\log_{\frac{1}{2}}\frac{x^5}{4}\right)^2-20\log_2 x+148<0$.

384. $\log_{\frac{1}{2}}^2 x-|\log_2 x|-2<0$.

385. $\log_{kx} x+\log_x(kx^2)>0$ $(0<k<1)$.

386. $x^{2-\log_2^2 x-\log_2 x^2}-\frac{1}{x}>0$.

§ 4. Неравенства, связанные с тригонометрическими функциями

Решить неравенства:

387. $5\sin^2 x + \sin^2 2x > 4\cos 2x$.

388. $\sin^6 x + \cos^6 x > \frac{5}{8}$.

389. $4\sin^3 x < 2\sin x + \cos 2x$.

390. $\sin 3x > 4\sin x \cos 2x$.

391. $\sin 2x + \operatorname{tg} x \geqslant 2$.

392. $|\sin x| < |\cos x|$.

393. $|\sin x| > |\cos x|$.

394. $|\sin x| \cos x > \frac{1}{4}$.

395. $6\sin x \cos 2x - 2\sin 3x < 4$.

396. $|\sin x| + |\cos x| > 1$.

397. $4(\sin^2 x - |\cos x|) < 1$.

398. $|\sin x + \cos x| < 1$.

399. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\cos x}$.

400. $2^{\sin x} > 2^{\cos x}$.

401. $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} > \sqrt{3}$.

402. $\frac{5 - 4(\sin^2 x + \cos x)}{\cos x} \leqslant 0$.

403. $\operatorname{tg} x > \frac{\operatorname{tg} 2x - 2}{\operatorname{tg} 2x + 2}$.

404. $\left|\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right| \leqslant 1$.

405. $\sqrt{\frac{2(\sin x + \cos x) - \sqrt{2}}{2\sqrt{2} - (\sin x + \cos x)}} \geqslant 1$.

406. $\log_{\frac{\cos 2x}{\sqrt{2}}} \left(\frac{\cos^2 2x - \sin^2 x}{2}\right) \leqslant 2$.

407. $(\operatorname{arctg} x)^2 - 4\operatorname{arctg} x + 3 > 0$.

408. $\arcsin(x^2 - 2x - 2) > \frac{\pi}{4}$.

ГЛАВА III

ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С НЕРАВЕНСТВАМИ

§ 1. Нахождение области определения функций

Совокупность всех тех значений аргумента, которым соответствуют определенные значения функции, называется областью определения функции.

Найти области определения функций:

409. $y=\sqrt{1-x}$.

410. $y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

411. $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}$.

412. $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{-x}$.

413. $y=\frac{1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$.

414. $y=\frac{\sin x}{1-\cos x}$.

415. $y=\operatorname{ctg}\frac{1}{x^2}$.

416. $y=\sqrt{\sin\frac{1}{x}}$.

417. $y=\sqrt{\sin(\cos x)}$.

418. $y=\sqrt{\operatorname{tg}^2 x-(\sqrt{3}+1)\operatorname{tg} x+\sqrt{3}}$.

419. $y=\arccos\frac{2}{1-x}$.

420. $y=\arccos\frac{2x}{1+x^2}$.

421. $y=\sqrt{\arcsin(\log_2 x)}$.

422. $y=\arcsin(1+\operatorname{tg}^2\pi x)$.

423. $y=\arcsin(\operatorname{tg} x)$.

424. $y=\arcsin(2x^2+x)$.

425. $y=\frac{1}{x}+2^{\arcsin x}+\frac{1}{\sqrt{x-2}}$.

426. $y=\log_{\cos x}\sin x$.

427. $y=\log_2(\sin x-\cos x)$.

428. $y=\sqrt{\lg(\cos 2\pi x)}$.

429. $y=\frac{1}{x^3-3x^2+2x}$.

430. $y=\sqrt{-x}+\frac{1}{\sqrt{2+x}}$.

431. $y=\sqrt{3x-x^3}$.

432. $y=\lg\frac{x^2-3x+2}{x+1}$.

433. $y=\frac{\sqrt{x}}{\sin\pi x}$.

434. $y=(2x)!$.

435. $y=\operatorname{ctg}\pi x+\arccos(2^x)$.

436. $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$.

437. $y=\log_2\log_3\log_4 x$.

438. $y=\sqrt[4]{\lg \operatorname{tg} x}$.

439. $y=\lg[\cos(\lg x)]$.

440. $y=\arcsin\left(\lg\frac{x}{10}\right)$.

441. $|y|=1-x^2$ *).

442. $|y|=\lg(2-x)$ *).

443. $y=\lg|4-x^2|$.

444. $y=\lg(3^x-3^{-x})$.

445. $y=\lg(\sqrt{x-3}-2)$.

446. $y=\lg(1-\operatorname{tg} x)$.

447. $y=\frac{\sqrt{\lg\cos x}}{\sin x}$.

448. $y=\log_x \cos x$.

§ 2. Нахождение области значений функций

Областью значений функции $y=f(x)$ называется множество всех тех и только тех значений, которые принимает y в области определения этой функции.

Найти области значений функций:

449. $y=\arcsin x$.

450. $y=\sin x\cos x$.

451. $y=\frac{2x-1}{x+1}$.

452. $y=x+\frac{1}{x}$.

453. $y=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$.

454. $y=\frac{x}{1+x^2}$.

455. $y=\frac{x^2-5}{2x-4}$.

456. $y=\sqrt{-x^2+x+2}$.

457. $y=\frac{x^2+x+2}{x^2-x+2}$.

458. $y=\frac{1}{2^x-1}$.

459. $y=\sin x+\cos x$.

460. $y=\lg(1-2\cos x)$.

§ 3. Исследование функций на выпуклость и вогнутость

Функция $y=f(x)$ называется *выпуклой* в некотором промежутке, если для любой пары x_1 и x_2 различных значений аргумента из этого промежутка выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

Функция $y=f(x)$ называется *вогнутой* в некотором промежутке, если для любой пары x_1 и x_2 различных значений аргумента из этого промежутка выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

---

*) Эта функция многозначная.

Часто эти определения относят к графику функции и говорят «выпуклая, вогнутая кривая» вместо «график выпуклой, вогнутой

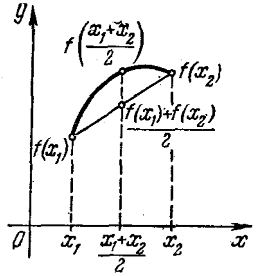

Рис. 1.

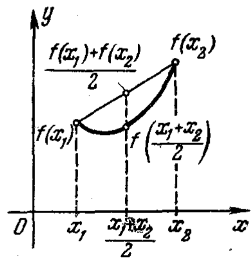

Рис. 2.

функции». Это имеет следующий геометрический смысл. Середина любой хорды графика выпуклой функции лежит ниже соответствующей точки дуги (рис. 1), а середина любой хорды графика вогнутой функции лежит выше соответствующей точки дуги (рис. 2).

Ясно, что одна и та же кривая $y=f(x)$ может оказаться выпуклой на одних промежутках и вогнутой на других. Точки, отделяющие выпуклые части кривой от ее вогнутых частей, называются *точками перегиба*. На рис. 3 точка A является точкой перегиба кривой.

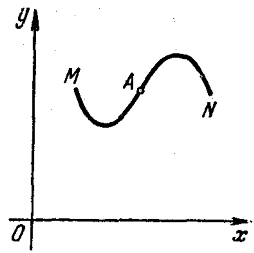

Рис. 3.

Исследовать функции на выпуклость и вогнутость:

461. $y=x^2$.

462. $y=x^3+2x$.

463. $y=x^3-4x$.

464. $y=\frac{1}{x}$.

465. $y=\frac{1}{x^2}$.

466. $y=a^x\ (a>0,\ a\neq 1)$.

467. $y=\log_a x\ (a>0, a\neq 1)$.

468. $y=\sin x\ (0<x<2\pi)$.

§ 4. Задачи на составление неравенств

469. Найти дробь, числитель и знаменатель которой натуральные числа, если известно, что ее знаменатель меньше квадрата числителя на единицу. Также известно, что если к числителю и знаменателю искомой дроби прибавить по 2, то значение дроби станет больше, чем $\frac{1}{3}$, а если от числителя и знаменателя искомой дроби отнять по 3, то дробь станет меньше $\frac{1}{10}$, но останется положительной.

470. Расстояние между городами A и B равно 100 *км*. Из города A в город B отправляются одновременно два автомобиля. Первый имеет скорость на 10 *км* в час бо́льшую, чем второй, но в пути делает остановку на 50 *мин*. В каких пределах может меняться скорость первого автомобиля при условии, что он прибывает в город B не позже второго автомобиля?

471. Если бы путешественник проезжал в день на 20 *км* больше, чем он проезжает, то он проехал бы за 8 дней расстояние, меньшее 1000 *км*. А если бы он проезжал в день на $15\frac{2}{3}$ *км* меньше, чем он проезжает, то за 12 дней он проехал бы более 1000 *км*. В каких границах изменяется его дневная скорость?

472. В каких пределах изменяется скорость точки, движущейся равномерно по прямой, если известно, что при увеличении скорости на 3 *м/сек* эта точка при прохождении расстояния в 630 *м* выигрывает время не меньшее, чем 1 *сек*, и не большее, чем 280 *сек*?

473. Два катера, имеющие одинаковую скорость в стоячей воде, проходят по двум рекам одинаковое расстояние по течению и возвращаются обратно в пункты, откуда они начали движение. В какой реке на это передвижение потребуется больше времени: в реке с быстрым течением или в реке с медленным течением?

474. Два тела начинают одновременно двигаться равномерно по прямым Ox и Oy, пересекающимся под прямым углом. Первое тело движется со скоростью v по прямой Ox от точки A к точке O, находящейся на расстоянии a от точки A. Второе тело движется со скоростью v_1 по прямой Oy от точки B к точке O, находящейся на расстоянии b от точки B. Найти наименьшее расстояние между этими телами во время движения.

475. Некто находится в поле на расстоянии d *км* от прямой дороги. В какую точку дороги он должен направиться по прямой, чтобы поскорее попасть в пункт D на этой дороге, если известно, что его скорость по полю v *км/час*, а по дороге u *км/час* $(u > v)$?

476. Лодка спускается по течению реки на расстояние a *км*, а затем поднимается на расстояние b *км*. Скорость течения реки равна v *км/час*. Какова должна быть собственная скорость лодки (скорость в стоячей воде), чтобы вся поездка продолжалась не более, чем t часов?

477. Велосипедист отправляется с некоторой скоростью из пункта A в B, отстоящий от A на расстоянии 60 *км*. Затем он выезжает обратно с той же скоростью, но через один час после выезда он делает остановку на 20 *мин*. После этого он продолжает движение, увеличив скорость на 4 *км/час*. В каких границах заключена скорость велосипедиста, если известно, что на обратный путь от B до A он потратил времени не более, чем от A до B?

478. У продавца были весы с различными по длине плечами. Один килограмм товара он взвешивал на левой чашке, а другой килограмм того же товара и тому же покупателю на правой чашке, и считал, что этим он компенсировал неточность весов. Как получалось в действительности?

479. Два туриста вышли из пункта A в пункт B. Первый первую половину времени шел со скоростью v_1 *км/час*, а вторую половину времени — со скоростью v_2 *км/час*. Второй же первую половину пути шел со скоростью v_1 *км/час*, а вторую половину пути — со скоростью v_2 *км/час*. Кто из них затратил меньше времени на прохождение пути от A до B?

480. Если скорость поезда, движущегося по узкоколейке, 20 *км/час*, то издержки по перевозке груза окупаются вполне, но прибыли нет. Если же скорость более 20 *км/час*, то приращение оплаты за перевозку груза пропорционально приращению скорости, а увеличение себестоимости перевозки пропорционально квадрату скорости. При скорости в 40 *км/час* издержки окупаются, но прибыли нет. Найти скорость, при которой прибыль наибольшая.

481. Когда пароходы были еще несовершенны, считалось, что расход топлива пропорционален кубу скорости парохода. Пусть при скорости 15 *км/час* тратится 1,5 тонны угля в час по цене 18 рублей за тонну и пусть другие расходы, кроме топлива, составляют 16 руб. в час. Найти наименьшую стоимость прохождения пути в 2000 *км*.

482. В бассейн может поступать вода через две трубы разной пропускной способности. Меньшая труба за 1 *сек* пропускает 1 $м^3$ воды. В бассейне также имеется кран, через который может вытекать в течение секунды 1 $м^3$ воды. Узнать, в каких пределах должна изменяться секундная пропускная способность большей трубы, если известно, что за время от трех до четырех секунд поступило в бассейн 16 $м^3$, причем 10 $м^3$ поступило при одновременном действии обеих труб и при закрытом кране, а 6 $м^3$ при действии только большей трубы и открытом кране.

483. В стране N продавался как местный, так и ввозимый уголь по p денежных единиц за тонну. После того как власти N начали налагать пошлину на ввозимый уголь по d денежных единиц на каждую тонну, уголь (как местный, так и иностранный) начал продаваться по $\left(p+\frac{d}{n}\right)$ денежных единиц за тонну, а потребление угля настолько уменьшилось, что выручка за проданный уголь сохранилась, причем местного угля продавалось за год столько же, сколько до введения пошлин на иностранный уголь. Найти такое значение d, чтобы доход N от пошлин был наибольшим (если угля продавалось столько же, сколько и до введения пошлин).

484. По прямой из точки A начали двигаться одновременно в одном направлении две точки: первая равномерно-ускоренно с начальной скоростью 3 *м/сек* и ускорением 2 *м/сек*^{2}, вторая равномерно. В каких пределах должна изменяться скорость второй точки, чтобы она сначала обогнала первую точку, но чтобы затем первая точка догнала вторую на расстоянии, не большем 10 *м* от A?

485. Пункты A и B расположены на прямолинейной магистрали, идущей с запада на восток. Пункт B находится восточнее A на 9 *км*. Из пункта A на восток выходит автомашина, движущаяся равномерно со скоростью 40 *км/час*. Одновременно из B в этом же направлении с постоянным ускорением 32 *км/час*^{2} выходит мотоцикл. Найти наибольшее расстояние между автомашиной и мотоциклом в течение первых двух часов движения.

486. Цена бриллианта пропорциональна квадрату его веса. Доказать, что если разделить бриллиант на несколько частей, то стоимость его уменьшается, причем понижение стоимости будет наибольшим, когда части будут равны.

487. В сосуд, содержащий A литров воды, сначала через одну трубу вливают a литров $p\,^0/_0$-го (по объему) раствора спирта, а затем, после перемешивания, через другую трубу выливают a литров образующейся смеси. Сколько раз нужно повторять эту операцию, чтобы в сосуде получился раствор спирта крепостью не менее $q\,^0/_0$ (по объему)?

488. Прямоугольная цветочная клумба должна занимать площадь в 216 квадратных метров. Вдоль длинных сторон клумбы должны быть дорожки шириною по 2 *м*, а вдоль широких — по 3 *м*. Каковы должны быть размеры прямоугольного участка (клумбы вместе с дорожками), чтобы площадь дорожек была наименьшей?

489. Окно из одного стекла состоит из прямоугольника, завершенного равносторонним треугольником. Определить отношение высоты прямоугольной части окна к стороне треугольной части так, чтобы при данном периметре окна оно пропускало бы наибольшее количество света.

490. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Какие должны быть размеры окна, чтобы оно пропускало наибольшее количество света при заданном периметре окна P?

ГЛАВА IV

НЕРАВЕНСТВА В ГЕОМЕТРИИ

§ 1. Неравенства в планиметрии

491. Доказать, что если D — середина основания BC равнобедренного треугольника ABC, а M — произвольная точка на AC, то $DB - DM < AB - AM$.

492. Доказать, что сумма боковых сторон треугольника превышает основание менее чем на удвоенный отрезок, соединяющий вершину с какой угодно точкой основания.

493. На катете AB прямоугольного треугольника ABC ($\angle A = 90°$) взята произвольная точка D. На DC взята точка E так, что $DE = AC$, и точка F, которая делит EC пополам. Доказать, что $DF + BF > AC + BC$.

494. Доказать, что периметр треугольника заключен между суммой отрезков, соединяющих произвольную точку, взятую внутри треугольника, с его вершинами и удвоенной суммой их.

495. Доказать, что если гипотенузы двух треугольников равны, то катеты одного треугольника не могут быть соответственно больше катетов другого треугольника.

496. Доказать, что сумма длин диагоналей выпуклого пятиугольника больше его периметра.

497. Дана прямая xy и две точки A и B по разные стороны от нее. Найти на прямой xy такую точку, чтобы разность расстояний от нее до точек A и B была наибольшей.

498. Дана прямая и две точки по одну сторону от нее. На этой прямой найти точку, чтобы сумма расстояний от нее до двух данных точек была бы наименьшей.

499. По одну сторону от прямой xy даны две точки, A и B. Расположить на прямой xy отрезок CD данной длины так, чтобы ломаная $ACDB$ была наименьшей длины.

500. Провести через вершину A треугольника ABC прямую xy так, чтобы сумма расстояний до нее от вершин B и C была наибольшей.

501. Внутри острого угла xOy дана точка A. Построить треугольник наименьшего периметра, чтобы одна его вершина совпала с данной точкой A, а две другие (B и C) лежали на разных сторонах угла xOy.

502. Даны две точки, A и B, внутри угла MON. Найти такие точки C и D на лучах OM и ON соответственно, чтобы ломаная $ACDB$ имела наименьшую длину.

503. Через данную точку F провести секущую данной окружности так, чтобы сумма расстояний от точек пересечения секущей с окружностью до данной точки F была наибольшей (наименьшей).

504. Доказать, что если площади квадрата и треугольника равны, то периметр треугольника больше периметра квадрата.

505. На внешней биссектрисе угла C треугольника ABC взята точка M. Доказать, что $MA+MB>AC+BC$.

506. Доказать, что расстояние между серединами диагоналей выпуклого четырехугольника не меньше модуля полуразности пары его противолежащих сторон.

507. AD—биссектриса угла A в треугольнике ABC. Через точку A проведена прямая KM, перпендикулярная к AD, и из вершины B опущен перпендикуляр BB_1 на эту прямую. Доказать, что периметр треугольника BB_1C больше периметра треугольника ABC.

508. Доказать, что из всех треугольников с двумя данными сторонами наибольшую площадь имеет тот, у которого эти стороны перпендикулярны.

509. Доказать, что площадь S четырехугольника не больше четверти суммы квадратов его сторон.

510. Доказать, что в любом треугольнике большей стороне соответствует меньшая высота.

511. Доказать, что в любом треугольнике большей стороне соответствует меньшая медиана.

512. Доказать, что в любом треугольнике большей стороне соответствует меньшая биссектриса.

513. Доказать, что медиана треугольника меньше полусуммы сторон, между которыми она заключается, и больше разности этой полусуммы и половины третьей стороны.

514. Доказать, что сумма медиан треугольника заключается между его полупериметром и периметром.

515. Доказать, что во всяком треугольнике между медианами m_a, m_b и стороной c существует зависимость: $m_a + m_b > \frac{3}{2} c$.

516. Доказать, что площадь S треугольника ABC не больше $\left(\frac{a+b}{2\sqrt{2}}\right)^2$.

517. Доказать, что площадь треугольника не больше $\frac{1}{2}(a^2 - ab + b^2)$, где a, b, c — стороны треугольника.

518. Доказать, что площадь треугольника ABC не больше $\frac{a^2+b^2}{4}$, где a и b — стороны треугольника.

519. Доказать, что площадь S треугольника меньше шестой части суммы квадратов его сторон.

520. Доказать, что из всех треугольников с данным основанием и данным углом при вершине равнобедренный имеет наибольшую биссектрису угла при вершине треугольника.

521. Доказать, что из всех треугольников с данным основанием и данным острым углом при вершине равнобедренный имеет наибольшую медиану.

522. Доказать, что из всех треугольников с данным основанием и данным тупым углом при вершине равнобедренный имеет наименьшую медиану, исходящую из вершины тупого угла.

523. Доказать, что из всех треугольников с данным основанием и данным углом при вершине равнобедренный имеет:

1) наибольшую площадь, 2) наибольший периметр.

524. Доказать, что из всех треугольников данной площади равносторонний имеет наименьший периметр.

525. Из всех треугольников, имеющих при вершине одинаковый угол φ и одинаковую сумму $2a$ сторон, заключающих данный угол, найти тот, который имеет наибольшую площадь.

526. Из треугольников, имеющих данный угол, заключенный между сторонами, сумма которых постоянна, найти такой, который имеет наименьший периметр.

527. Доказать, что из всех треугольников данного периметра $2p$ наибольшую площадь имеет равносторонний.

528. Доказать, что в прямоугольном треугольнике сумма катетов меньше суммы гипотенузы и высоты, опущенной на гипотенузу.

529. Доказать, что сумма расстояний от любой точки, взятой внутри (или на стороне) треугольника до трех сторон треугольника, заключена между наибольшей и наименьшей высотами.

530. На стороне треугольника найти такую точку, чтобы сумма расстояний от нее до двух других сторон была наименьшей.

531. Внутри треугольника найти такую точку, чтобы сумма расстояний от нее до сторон треугольника была наименьшей.

532. Найти внутри треугольника точку, произведение расстояний которой до сторон треугольника имело бы наибольшее значение.

533. Доказать, что для прямоугольного треугольника имеет место неравенство $R+r \geqslant \sqrt{2S}$, где R — радиус описанной окружности, r — вписанной, S — площадь треугольника.

534. Доказать, что в любом треугольнике имеет место неравенство $p^2 \geqslant 27r^2$, где p — полупериметр, r — радиус вписанного круга.

535. В треугольник ABC вписан круг, а в круг вписан правильный треугольник $A_1B_1C_1$. Доказать, что периметр треугольника ABC не меньше удвоенного периметра треугольника $A_1B_1C_1$.

536. Доказать, что между суммой катетов a и b и гипотенузой c прямоугольного треугольника имеет место зависимость $c < a+b \leqslant c\sqrt{2}$.

537. Доказать, что для любого прямоугольного треугольника имеет место неравенство $0{,}4 < \frac{r}{h} < 0{,}5$, где r — радиус вписанного круга, h — высота, опущенная на гипотенузу.

538. В треугольник вписан квадрат так, что одна из его сторон лежит на большей стороне треугольника. Доказать, что имеет место неравенство $r\sqrt{2} < x < 2r$, где x — длина стороны квадрата, r — радиус круга, вписанного в данный треугольник.

539. Доказать, что во всяком треугольнике ABC между его площадью S и радиусами описанной и вписанной окружностей существует соотношение $S > 2\sqrt{Rr^3}$.

540. Доказать неравенство $2\sqrt{(p-b)(p-c)} \leqslant a$, где a, b, c — стороны треугольника, а p — его полупериметр.

541. Найти наименьшую сумму трех сторон прямоугольника при заданной площади S.

542. Доказать, что если a, b, c — стороны треугольника, а S — его площадь, то имеет место неравенство $2(ab+bc+ca) \geqslant 4S\sqrt{3}+a^2+b^2+c^2$.

543. Доказать, что если a, b, c — стороны треугольника, p — полупериметр, то имеет место неравенство

$$p\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \geqslant \frac{9}{4}.$$

544. Внутри треугольника ABC взята точка M, через которую проведены прямые AM, BM, CM, пересекающие соответствующие стороны в точках A_1, B_1, C_1. Доказать, что имеет место неравенство $\frac{AM}{A_1M}+\frac{BM}{B_1M}+\frac{CM}{C_1M} \geqslant 6$.

545. Внутри треугольника ABC взята точка M, через которую проведены прямые AM, BM, CM, пересекающие соответствующие стороны треугольника в точках A_1, B_1, C_1. Доказать, что имеет место неравенство $\frac{AM}{A_1M}\cdot\frac{BM}{B_1M}\cdot\frac{CM}{C_1M} \geqslant 8$.

546. Доказать неравенство

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \geqslant 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),$$

где a, b, c — стороны треугольника, p — полупериметр.

547. Из всех треугольников, вписанных в данную окружность, найти тот, который имеет наибольшую сумму квадратов сторон.

548. Из всех треугольников с данным углом и с данной площадью найти тот, у которого сумма квадратов сторон, образующих данный угол, наименьшая.

549. На основании треугольника найти такую точку, сумма квадратов расстояний от которой до двух других сторон имела бы наименьшее значение.

550. Внутри треугольника некоторая точка расположена так, что сумма квадратов расстояний от нее до сторон треугольника наименьшая. Найти зависимость между этими расстояниями и длинами сторон треугольника.

551. На основании треугольника найти такую точку, чтобы сумма квадратов расстояний от нее до вершин треугольника была наименьшей.

552. Из всех треугольников, вписанных в данную окружность, найти тот, у которого сумма квадратов расстояний от центра окружности до сторон наименьшая.

553. Дан квадрат $ABCD$. От его вершин отложены по одному на каждой из сторон равные отрезки Aa, Bb, Cc, Dd, и точки a, b, c, d соединены отрезками. При каком значении Aa площадь квадрата $abcd$ будет наименьшей?

554. Доказать, что из всех равновеликих прямоугольников квадрат имеет наименьший периметр.

555. Доказать, что из всех прямоугольников данного периметра P наибольшую площадь имеет квадрат.

556. Из всех прямоугольников, описанных около прямоугольника со сторонами a и b, найти тот, который имеет наибольшую площадь. Вычислить эту площадь.

557. В данный треугольник вписан прямоугольник так, что одна его сторона находится на основании треугольника. Каким должен быть прямоугольник наибольшей площади?

558. Имеется материал для постройки забора длиной в 300 метров. Требуется огородить этим материалом прямоугольный загон наибольшей площади, используя для одной стороны загона стену амбара.

559. Доказать, что кратчайший отрезок, который делит равносторонний треугольник со стороной, равной a, на две равновеликие части, равен $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ и параллелен стороне треугольника.

560. На продолжении сторон AB и AC данного треугольника ABC отложим отрезки BD и CE, сумма которых равна третьей стороне. В каком случае отрезок DE будет наименьшим?

561. Доказать, что если углы A и B четырехугольника $ABCD$ равны, а угол D больше угла C, то $BC > AD$.

562. На окружности даны две точки A и B; найти на ней третью точку C такую, что произведение хорд $AC \cdot BC$ наибольшее.

563. Найти наименьшую хорду круга, которую можно провести через данную точку, взятую внутри этого круга.

564. В треугольник постоянного периметра $2p$ вписана окружность. К этой окружности проведена касательная параллельно стороне треугольника. Найти наибольшую возможную длину отрезка касательной, концы которого принадлежат сторонам треугольника.

565. В данном круге провести такую хорду, чтобы сумма хорды и расстояния ее от центра круга была максимальной.

566. В треугольнике ABC стороны AC и BC даны, причем $BC > AC$. При каком значении острого угла C радиус R окружности, описанной около треугольника ABC, будет наименьшим? Найти этот радиус.

567. Доказать, что из всех прямоугольников, вписанных в данный круг, наибольшую площадь имеет квадрат.

568. В полукруг вписан прямоугольник так, что две его вершины принадлежат диаметру, а две другие — полуокружности. При каком отношении сторон прямоугольник имеет наибольшую площадь?

569. В данный сегмент вписать прямоугольник наибольшей площади.

570. На диаметре данного круга взяты две точки P и P_1, равноудаленные от центра. Через эти точки проведены параллельные прямые PQ и P_1Q_1 до пересечения с окружностью в точках Q и Q_1. При каком условии прямоугольная трапеция PQP_1Q_1 имеет наибольшую площадь, если известно, что PQ и P_1Q_1 неперпендикулярны к диаметру окружности?

571. Найти круговой сектор максимальной площади при данном периметре $2p$.

572. На полуокружности данного диаметра $AB=2R$ построить точку C так, чтобы произведение хорды AC на длину перпендикуляра CD, опущенного из этой точки на диаметр, принимало наибольшее значение.

573. В треугольнике ABC на основании AB или на его продолжении взята точка D и около треугольников ACD и BCD описаны окружности. Доказать, что если CD — высота треугольника ABC, то окружности имеют наименьшие радиусы.

574. Из данного треугольника вырезать два равных круга наибольшего радиуса.

575. Доказать, что отношение радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, к периметру этого треугольника принимает наибольшее значение, когда этот треугольник равнобедренный.

576. Доказать, что $a_{2n} < \frac{2}{3} a_n$, где a_n — сторона правильного n-угольника, а a_{2n} — сторона правильного $2n$-угольника, вписанных в одну и ту же окружность.

577. По полуокружности ADB (AB — диаметр) перемещается точка D, а по диаметру — точка E. Определить наибольшее возможное расстояние между точками D и E в момент, когда $AD=AE$, если известно, что $AB=d$.

578. В данный прямоугольный треугольник вписать прямоугольник с вершиной в вершине прямого угла и с наименьшей диагональю.

579. Доказать, что из всех прямоугольников, имеющих заданную диагональ c, квадрат имеет наибольший периметр и наибольшую площадь.

580. Доказать, что площадь четырехугольника не больше четверти суммы квадратов его диагоналей.

581. Доказать, что отношение k периметра ромба к сумме его диагоналей меньше 2 и не меньше $\sqrt{2}$.

582. Между двумя параллельными прямыми взята точка A. Расстояния от этой точки до прямых равны a и b. Примем точку A за вершину прямого угла прямоугольного треугольника ABC (точка B принадлежит одной из параллельных прямых, а точка C — другой). Найти наименьшую из площадей всевозможных треугольников.

583. Через точку A, взятую внутри угла, провести прямую так, чтобы она отсекла треугольник наименьшей площади.

584. В данный равносторонний треугольник вписать наименьший другой равносторонний треугольник (вершины вписанного треугольника должны принадлежать сторонам данного треугольника).

585. Дана точка O внутри треугольника ABC. Доказать, что $\angle BOC$ больше $\angle BAC$.

586. Доказать, что между суммой расстояний a и b точки, взятой внутри острого угла α, и расстоянием c от этой точки до вершины угла существует зависимость

$$\sin\frac{\alpha}{2} \geqslant \frac{a+b}{2c}.$$

587. Доказать, что если α — острый угол, образованный медианами катетов прямоугольного треугольника, то $\operatorname{tg}\alpha \leqslant \frac{3}{4}$.

588. На одной стороне прямого угла задан отрезок AB. Найти на другой стороне точку, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом Θ.

589. Доказать, что если разделить хорду окружности на три равные части и соединить с центром окружности концы хорды и точки деления, то соответствующий центральный угол разделится на три части, одна из которых больше каждого из двух других.

590. В равнобедренной трапеции меньшее основание равно боковой стороне. Доказать, что трапеция имеет наибольшую площадь, когда ее острый угол равен 60°.

591. Доказать, что если стороны a, b и высота h_c треугольника ABC связаны зависимостью $\frac{1}{h_c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, то $\angle C \leqslant 120°$.

592. Доказать, что если стороны a, b и медиана m_c треугольника ABC связаны зависимостью $\frac{1}{m_c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, то $\angle C \geqslant 120°$.

593. В равнобедренном треугольнике ABC $(AB=BC)$ проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1. Доказать, что $\operatorname{tg} \angle B_1A_1C_1 < 2$.

594. Доказать, что если α — нетупой угол между диагоналями параллелограмма, а a и b его стороны, причем $a \geqslant b$, то имеет место неравенство $\cos\alpha \geqslant \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

595. На прямой AB взяты две произвольные точки M и N, из которых проведены по одну сторону AB лучи, пересекающиеся в некоторой точке O так, что

$$|\operatorname{ctg}\alpha_M - \operatorname{ctg}\alpha_N| < MN \quad (\text{где} \quad \angle OMB=\alpha_M, \ \angle ONB=\alpha_N).$$

Доказать, что точка пересечения лучей удалена от прямой AB больше, чем на 1.

596. Доказать, что если a, b, c — стороны треугольника и $ax+by+cz=0$, то $ayz+bzx+cxy<0$.

597. Известно, что все три корня x_1, x_2, x_3 уравнения $x^3+px^2+qx+r=0$ положительны. Доказать, что для того, чтобы из отрезков, длины которых равны x_1, x_2, x_3, можно было построить треугольник, необходимо и достаточно, чтобы имело место неравенство $p^3-4pq+8r>0$.

598. В треугольнике ABC стороны BC и AC соответственно равны a и b. Известно, что медианы, соответствующие этим сторонам, пересекаются под прямым углом. Доказать, что $\frac{1}{2}<\frac{a}{b}<2$.

§ 2. Неравенства в стереометрии

599. Доказать, что если из одной точки плоскости проведены перпендикуляр и наклонная к линии пересечения этой плоскости с другой плоскостью, то перпендикуляр образует со второй плоскостью бо́льший угол, чем наклонная.

600. В пространстве рассматриваются два отрезка AB и CD, не лежащие в одной плоскости. Пусть MN — отрезок, соединяющий их середины. Доказать, что

$$\frac{AD+BC}{2} > MN.$$

(Здесь AD, BC и MN — длины соответствующих отрезков).

601. Из квадратного листа жести со стороной $6a$ требуется сделать коробку без крышки, вырезая по углам квадраты и загибая затем получающиеся выступы так, чтобы коробка получилась наибольшего объема. Каковы должны быть длины сторон вырезанных квадратов?

602. Доказать, что максимальная полная поверхность прямоугольного параллелепипеда равна $\frac{L^2}{24}$, где L — сумма длин всех ребер параллелепипеда.

603. Доказать, что если полная поверхность прямоугольного параллелепипеда равна S, то минимальная сумма L всех ребер равна $2\sqrt{6S}$.

604. Доказать, что плоский угол четырехгранного угла меньше суммы трех других.

605. В данную пирамиду вписать призму наибольшего объема (одно основание призмы лежит в плоскости основания пирамиды, а другое — параллельное сечение пирамиды).

606. Доказать, что если цилиндр и конус имеют равные основания и равные высоты, то отношение боковой поверхности цилиндра к боковой поверхности конуса меньше двух.

607. Доказать, что если в данный конус вписать цилиндр наибольшего объема, то радиус основания цилиндра относится к радиусу основания конуса как 2:3.

608. Котел состоит из цилиндра, завершенного двумя полусферами. Определить размеры котла, чтобы при данном объеме V его поверхность была наименьшей.

609. На какой высоте над круглым столом надо поместить лампу, чтобы она проектировалась в центре стола и чтобы на краях стола была наибольшая освещенность.

610. Доказать, что из всех цилиндров, вписанных в данный шар, наибольшую боковую поверхность имеет тот, у которого осевое сечение есть квадрат.

611. Доказать, что если в данный шар радиуса R вписан цилиндр наибольшего объема, то отношение радиуса основания цилиндра к радиусу шара равно $\sqrt{2}:\sqrt{3}$.

612. Доказать, что если в данный шар вписан конус наибольшего объема, то радиус шара относится к высоте конуса как 3:4.

613. Доказать, что из всех цилиндров, вписанных в данный конус, наибольшую боковую поверхность имеет тот, у которого высота равна половине высоты данного конуса.

614. Найти наименьший из всех объемов конусов, описанных около шара радиуса r.

615. Доказать, что сумма углов, составленных ребрами трехгранного угла с противоположными гранями, заключается между суммой плоских углов и половиной этой суммы.

616. Из всех плоских сечений конуса, проведенных через его вершину, найти сечение, имеющее наибольшую площадь.

617. Даны две полупрямые OA и OB, выходящие из некоторой точки O данной плоскости и лежащие по одну сторону от этой плоскости. Провести в данной плоскости прямую, образующую с OA и OB углы, сумма которых была бы наименьшей.

618. Даны две точки A и B, лежащие по одну сторону от плоскости P. Найти на этой плоскости такую точку, чтобы сумма ее расстояний от точек A и B была наименьшей.

619. Даны две точки A и B, лежащие по разные стороны от плоскости P. Найти на этой плоскости такую точку, чтобы разность расстояний (по абсолютной величине) от нее до точек A и B была наибольшей.

620. Найти отрезок наименьшей (наибольшей) длины, одним концом которого служит данная точка, а другой конец лежит на данной окружности (точка и окружность расположены в пространстве произвольным образом).

621. Даны две полупрямые OA и OB, выходящие из некоторой точки O данной плоскости P и лежащие по разные стороны от этой плоскости. Провести в плоскости P прямую, образующую с OA и OB углы, разность которых была бы наибольшей.

622. Доказать, что модуль разности между углами, образованными произвольной прямой с двумя данными плоскостями, меньше угла между этими плоскостями или равен ему.

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ

ГЛАВА I

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВ

§ 1. Простейшие неравенства

1. Имеем очевидное неравенство $(a-b)^2 \geqslant 0$, или $a^2-2ab+b^2 \geqslant 0$, откуда $a^2+b^2 \geqslant 2ab$. Равенство достигается лишь при $a=b$.

2. Имеем очевидное неравенство $(a-b)^2 \geqslant 0$, или $a^2-2ab+b^2 \geqslant 0$, откуда $a^2-ab+b^2 \geqslant ab$. Равенство достигается лишь при $a=b$.

3. Перепишем доказываемое неравенство в виде

$$(a+b)^2 (a-b)^2 \geqslant 4ab (a-b)^2.$$

Если $a=b$, то имеет место равенство. Если же $a \neq b$, то $(a-b)^2 > 0$, а поэтому для доказательства данного неравенства достаточно установить, что $(a+b)^2 > 4ab$, или $a^2+b^2 > 2ab$, что очевидно.

4. Имеем (см. задачу 1)

$$a^2+b^2 \geqslant 2ab, \quad b^2+c^2 \geqslant 2bc, \quad a^2+c^2 \geqslant 2ac. \tag{1}$$

Сложив почленно неравенства (1), получим $2(a^2+b^2+c^2) \geqslant 2(ab+bc+ac)$, откуда $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac$. Равенство достигается лишь при $a=b=c$.

5. Имеем тождественные неравенства (см. задачу 4)

$$\left.\begin{array}{l} x^2+a_1^2+a_2^2 \geqslant xa_1+xa_2+a_1a_2, \\ x^2+a_2^2+a_3^2 \geqslant xa_2+xa_3+a_2a_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^2+a_n^2+a_1^2 \geqslant xa_n+xa_1+a_na_1. \end{array}\right\} \tag{1}$$

Сложив почленно неравенства (1), получим

$$nx^2+2(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2) \geqslant 2x(a_1+a_2+\ldots+a_n)+ \\ +a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_na_1. \tag{2}$$

Поскольку неравенства (1) имеют место при любом значении x, то пусть

$$x=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}. \qquad (3)$$

Из (2) и (3) следует

$$\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{n}+2(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)\geqslant$$
$$\geqslant 2\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{n}+a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_na_1,$$

откуда получаем

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2\leqslant n[2(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)-$$
$$-(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+\ldots+a_na_1)].$$

Равенство достигается лишь при $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

6. Доказываемое неравенство после умножения обеих частей на 2 принимает вид $2a^2+2b^2+2\geqslant 2ab+2a+2b$, или a^2-2ab+ $+b^2+a^2-2a+1+b^2-2b+1\geqslant 0$, или $(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\geqslant 0$, что очевидно. Знак равенства имеет место только при $a=b=1$.

7. Первое решение. Так как $a+b\geqslant 1$, то $a^2+2ab+b^2\geqslant 1$. Сложив это неравенство с очевидным неравенством $a^2-2ab+b^2\geqslant 0$, получим $2a^2+2b^2\geqslant 1$, или $a^2+b^2\geqslant 1/2$. Возведя обе части этого неравенства в квадрат, получим $a^4+2a^2b^2+b^4\geqslant 1/4$. Сложив последнее неравенство с очевидным неравенством $a^4-2a^2b^2+b^4\geqslant 0$, получим $2a^4+2b^4\geqslant 1/4$, или $a^4+b^4\geqslant 1/8$.

Второе решение. Пусть $a=1/2+x$, $b=1/2-y$, где $x-y\geqslant 0$. Тогда

$$a^4=\left(\frac{1}{2}+x\right)^4=\frac{1}{16}+\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}x^2+2x^3+x^4,$$
$$b^4=\left(\frac{1}{2}-y\right)^4=\frac{1}{16}-\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}y^2-2y^3+y^4$$

и

$$a^4+b^4=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}(x-y)+\frac{3}{2}(x^2+y^2)+2(x^3-y^3)+x^4+y^4\geqslant\frac{1}{8}.$$

Знак равенства имеет место только при $a=b=1/2$ $(x=y=0)$.

8. Первое решение. Из условия, что $a+b=1$, следует, что $a^2+2ab+b^2=1$; сложив это равенство с очевидным неравенством $a^2-2ab+b^2\geqslant 0$, получим $2a^2+2b^2\geqslant 1$. Возведем обе части последнего неравенства в квадрат: $4a^4+8a^2b^2+4b^4\geqslant 1$. Сложив это неравенство с очевидным неравенством $4a^4-8a^2b^2+4b^4\geqslant 0$, получим $8a^4+8b^4\geqslant 1$, откуда $64a^8+128a^4b^4+64b^8\geqslant 1$. Сложив это неравенство с очевидным неравенством $64a^8+64b^8-128a^4b^4\geqslant 0$, получим $128a^8+128b^8\geqslant 1$, или $a^8+b^8\geqslant 1/128$.

Второе решение. Пусть $a=1/2+x$; из условия $a+b=1$ следует, что $b=1/2-x$. Тогда $a^8+b^8=\left(\frac{1}{2}+x\right)^8+\left(\frac{1}{2}-x\right)^8=$

$$=2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^8+C_8^2\left(\frac{1}{2}\right)^6x^2+C_8^4\left(\frac{1}{2}\right)^4x^4+C_8^6\left(\frac{1}{2}\right)^2x^6+x^8\right]\geqslant 2\left(\frac{1}{2}\right)^8=$$
$$=\frac{1}{128}.$$

Если $a=b=1/2$, то $a^8+b^8=1/128$; если же $a \neq b$ $(x \neq 0)$, то $a^8+b^8 > 1/128$.

9. Имеем очевидное неравенство $2ab \leqslant a^2+b^2$, или $a^2+b^2+2ab \leqslant 2a^2+2b^2$, или $\frac{a^2+b^2+2ab}{4} \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$, или $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$, или $\left|\frac{a+b}{2}\right| \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, а поэтому и $\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Равенство достигается лишь при $a=b$.

10. Доказываемое неравенство перепишем в виде

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \leqslant \frac{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}{\sqrt{ab}}. \tag{1}$$

Так как $\sqrt{a}+\sqrt{b} > 0$, $\sqrt{ab} > 0$ и $\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b)$, то неравенство (1) примет вид $\sqrt{ab} \leqslant a-\sqrt{ab}+b$, или $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$, что очевидно. Равенство имеет место только при $a=b$.

11. Первое решение. Доказываемое неравенство перепишем последовательно так:

$$a^3-a^2 \geqslant 2\sqrt{a}-2,$$

$$a^2(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1) \geqslant 2(\sqrt{a}-1). \tag{1}$$

Если $a=1$, то имеет место равенство, если $a=0$, то достигается строгое неравенство. Если $a > 1$, то для доказательства неравенства (1) достаточно установить, что $a^2(\sqrt{a}+1) \geqslant 2$, что верно, так как $a^2 > 1$, $\sqrt{a}+1 > 2$. Наконец, если $0 < a < 1$, то неравенство (1) следует из неравенства $a^2(\sqrt{a}+1) \leqslant 2$, которое верно, так как $a^2 < 1$, $\sqrt{a}+1 < 2$. Итак, если $a \geqslant 0$, но $a \neq 1$, то имеет место строгое неравенство, и лишь при $a=1$ достигается равенство.

Второе решение. Так как $(a^3+2)-(a^2+2\sqrt{a}) = a^3-a^2-2\sqrt{a}+2 = a^3-a^2+a-2\sqrt{a}+1-a+1 =$
$= (\sqrt{a}-1)^2+(a-1)^2(a+1) = (\sqrt{a}-1)^2[1+(a+1)(\sqrt{a}+1)^2] \geqslant 0$,
то $a^3+2 \geqslant a^2+2\sqrt{a}$. Равенство достигается лишь при $a=1$.

12. Доказываемое неравенство верно, если верно неравенство $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2ab^2c+2a^2bc+2abc^2-3a^2bc-3ab^2c-3abc^2 \geqslant 0$, или $2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-2ab^2c-2a^2bc-2abc^2 \geqslant 0$, или $a^2(b^2-2bc+c^2)+b^2(a^2-2ac+c^2)+c^2(a^2-2ab+b^2) \geqslant 0$, что очевидно.

13. Имеем очевидное неравенство $x^2+y^2 > 2xy$, из которого умножением на ab $(ab > 0)$ получим

$$ab(x^2+y^2) > 2abxy. \tag{1}$$

Прибавив к обеим частям неравенства (1) выражение $(a^2+b^2)xy$, получим $(a^2+b^2)xy+ab(x^2+y^2) > (a^2+b^2)xy+2abxy$, или

$$(ax+by)(ay+bx) > (a+b)^2xy. \tag{2}$$

Так как $(a+b)(ay+bx)>0$, то, поделив обе части неравенства (2) на $(a+b)(ay+bx)$, получим $\frac{(a+b)xy}{ay+bx}<\frac{ax+by}{a+b}$, что и требовалось доказать.

14. Имеем очевидные неравенства:

$$\left.\begin{aligned} a^2+b^2c^2 &\geqslant 2abc, \\ b^2+c^2a^2 &\geqslant 2abc, \\ c^2+a^2b^2 &\geqslant 2abc. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Сложив почленно неравенства (1), получим

$$a^2+a^2b^2+b^2+b^2c^2+c^2+c^2a^2 \geqslant 6abc,$$

или

$$a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2) \geqslant 6abc.$$

Равенство достигается лишь при: 1) $a=b=c=0$; 2) $a=b=c=1$; 3) $a=1$, $b=c=-1$; 4) $b=1$, $a=c=-1$; 5) $c=1$, $a=b=-1$.

15. Имеем $a^2+b^2 \geqslant 2ab$, $c(a^2+b^2) \geqslant 2abc$. Аналогично, $a(b^2+c^2) \geqslant 2abc$ и $b(c^2+a^2) \geqslant 2abc$. Сложив почленно последние три неравенства, получим $c(a^2+b^2)+a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2) \geqslant 6abc$, или $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \geqslant 6abc$. Таким образом, левое неравенство доказано. Далее, имеем $2ab \leqslant a^2+b^2$, или $ab \leqslant a^2+b^2-ab$. Умножив последнее неравенство на $(a+b)$, получим

$$ab(a+b) \leqslant a^3+b^3. \qquad (1)$$

Аналогично

$$bc(b+c) \leqslant b^3+c^3 \qquad (2)$$

и

$$ca(c+a) \leqslant c^3+a^3. \qquad (3)$$

Сложив почленно неравенства (1), (2) и (3), получим

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \leqslant 2(a^3+b^3+c^3).$$

Итак, мы доказали и правое неравенство.

16. После тождественных преобразований доказываемое неравенство перепишется в виде $2a^3+2b^3+2c^3 \geqslant a^2b+a^2c+ab^2+b^2c+ac^2+bc^2$, или $2(a^3+b^3+c^3) \geqslant ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$. Последнее неравенство верное (см. задачу 15). Равенство достигается при $a=b=c$. Эту задачу можно решить, используя задачу 19. Пусть $b+c=2x$, $c+a=2y$, $a+b=2z$, тогда $a+b+c=x+y+z$, $a=y+z-x$, $b=x+z-y$, $c=x+y-z$. Таким образом,

$$\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b}=\frac{y+z-x}{x}+\frac{x+z-y}{y}+\frac{x+y-z}{z}=$$
$$=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)-3 \geqslant 2+2+2-3=3.$$

17. Так как по условию $ax>0$, то имеем очевидное неравенство $a^2+x^2<(a+x)^2$. Умножая обе части этого неравенства на $a-x$ ($a-x>0$ по условию), получим $(a-x)(a^2+x^2)<(a+x)^2(a-x)$, или $(a-x)(a^2+x^2)<(a^2-x^2)(a+x)$. Поделив обе части последнего неравенства на положительное произведение $(a^2+x^2)(a+x)$, получим $\frac{a-x}{a+x} < \frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$, что и требовалось доказать.

18. Первое решение. Так как $abc > 0$, то доказываемое неравенство верно, если верно неравенство

$$a^8+b^8+c^8 \geqslant a^2b^2c^2(ab+ac+bc), \tag{1}$$

или, поделив обе части (1) на $a^2b^2c^2$, получим

$$\frac{a^6}{b^2c^2}+\frac{b^6}{a^2c^2}+\frac{c^6}{a^2b^2} \geqslant ab+ac+bc. \tag{2}$$

Имеем очевидные неравенства:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{a^6}{b^2c^2}+\frac{b^6}{a^2c^2}=\left(\frac{a^3}{bc}\right)^2+\left(\frac{b^3}{ac}\right)^2 \geqslant 2\,\frac{a^3}{bc}\,\frac{b^3}{ac}=2\,\frac{a^2b^2}{c^2},\\
&\frac{a^6}{b^2c^2}+\frac{c^6}{a^2b^2}=\left(\frac{a^3}{bc}\right)^2+\left(\frac{c^3}{ab}\right)^2 \geqslant 2\,\frac{a^2c^2}{b^2},\\
&\frac{b^6}{a^2c^2}+\frac{c^6}{a^2b^2}=\left(\frac{b^3}{ac}\right)^2+\left(\frac{c^3}{ab}\right)^2 \geqslant 2\,\frac{b^2c^2}{a^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Сложив почленно (3) и сократив на 2, получим

$$\frac{a^6}{b^2c^2}+\frac{b^6}{a^2c^2}+\frac{c^6}{a^2b^2} \geqslant \frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{a^2c^2}{b^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}. \tag{4}$$

Далее, имеем

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{a^2c^2}{b^2} \geqslant 2\,\frac{a^2bc}{bc}=2a^2,\\
&\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{b^2c^2}{a^2} \geqslant 2b^2,\\
&\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{a^2c^2}{b^2} \geqslant 2c^2.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Сложив почленно (5) и сократив на 2, получим

$$\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{a^2c^2}{b^2}+\frac{b^2c^2}{a^2} \geqslant a^2+b^2+c^2. \tag{6}$$

Из (4) и (6) следует, что

$$\frac{a^6}{b^2c^2}+\frac{b^6}{a^2c^2}+\frac{c^6}{a^2b^2} \geqslant a^2+b^2+c^2. \tag{7}$$

Но так как (см. задачу 4) $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+ac+bc$, то

$$\frac{a^6}{b^2c^2}+\frac{b^6}{a^2c^2}+\frac{c^6}{a^2b^2} \geqslant ab+ac+bc.$$

Таким образом, мы доказали неравенство (2), а следовательно, и предложенное неравенство.

Второе решение. На основании неравенства (см. задачу 4) $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+xz+yz$ имеем

$$a^8+b^8+c^8=(a^4)^2+(b^4)^2+(c^4)^2 \geqslant a^4b^4+a^4c^4+b^4c^4=$$
$$=(a^2b^2)^2+(a^2c^2)^2+(b^2c^2)^2 \geqslant a^4b^2c^2+a^2b^4c^2+a^2b^2c^4=$$
$$=(a^2bc)^2+(ab^2c)^2+(abc^2)^2 \geqslant a^3b^3c^2+a^3b^2c^3+a^2b^3c^3.$$

Разделив обе части последнего неравенства на $a^3b^3c^3$, получим

$$\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3} \geqslant \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

19. Поскольку $ab>0$, то, умножив обе части доказываемого неравенства на ab, получим неравенство $a^2+b^2 \geqslant 2ab$, или $(a-b)^2 \geqslant 0$, что очевидно. Равенство достигается только при $a=b$.

20. Имеем $au+\frac{b}{u}=\left(\sqrt{au}-\sqrt{\frac{b}{u}}\right)^2+2\sqrt{ab} \geqslant 2\sqrt{ab}$. Если $a=b=0$, то достигается равенство; если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то знак равенства имеет место лишь при $u=\sqrt{\frac{b}{a}}$.

21. Имеем

$$\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{y}\sqrt{\frac{y}{x}}=\sqrt{x}\sqrt{\frac{x}{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{\frac{x}{y}}}.$$

Так как $au+\frac{b}{u} \geqslant 2\sqrt{ab}$ (см. задачу 20), то

$$\sqrt{x}\sqrt{\frac{x}{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{\frac{x}{y}}} \geqslant 2\sqrt{\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}}=2\sqrt[4]{xy}, \text{ т. е. } \frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{x}} \geqslant$$

$\geqslant 2\sqrt[4]{xy}$. Знак равенства имеет место лишь при $x=y$. Эту задачу и предыдущую можно решить, используя задачу 19.

22. Имеем $\frac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}}=\frac{(a^2+2)+1}{\sqrt{a^2+2}}=\sqrt{a^2+2}+\frac{1}{\sqrt{a^2+2}}>2$, так как сумма взаимно обратных неравных положительных величин всегда больше двух (задача 19).

23. Имеем очевидное неравенство $a^2+b^2 \geqslant 2ab$. Поскольку $ab<0$, то, поделив обе части этого неравенства на ab, получим $\frac{a^2+b^2}{ab} \leqslant -2$, или $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \leqslant -2$.

Равенство достигается лишь при $a=-b$.

24. Доказываемое неравенство верно, если верно $\frac{1+x^4}{x^2} \geqslant 2$, или $\frac{1}{x^2}+x^2 \geqslant 2$, что верно (задача 19). Знак равенства имеет место только при $x=\pm 1$.

25. Первое решение. Если $a=0$, то имеем верное неравенство: $1>0$. Доказываемое неравенство перепишем в виде

$$2a^3+a^2+a+a^2+1>2a. \qquad (1)$$

Если $a>0$, то, поделив обе части неравенства (1) на a, получим

$$2a^2+a+1+a+\frac{1}{a}>2. \qquad (2)$$

Трехчлен $2a^2+a+1$ положителен, так как его корни мнимые и коэффициент при a^2 положителен, а $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$. Следовательно, неравенство (2) верное, а потому верно и доказываемое неравенство.

Второе решение. Если $0\leqslant a<1$, то имеем $2a^3+2a^2>a-1$, что очевидно. Если же $a\geqslant 1$, то $2a^3+2a^2+1>2a^2>a^2\geqslant a$.

26. Первое решение. Если $x=0$, то имеем верное неравенство: $1>0$. Если $x>0$, то для удобства перепишем доказываемое неравенство в виде

$$x^2+1+x^3+x^2+x>2x. \qquad (1)$$

Поскольку $x>0$, то поделив обе части (1) на x получим неравенство

$$x+\frac{1}{x}+x^2+x+1>2. \qquad (2)$$

Так как $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$ (при $x>0$) и $x^2+x+1>0$, то левая часть есть сумма положительных чисел, из которых одно не меньше 2. Таким образом, мы доказали, что утвержденне задачи верно как при $x=0$, так и при $x>0$.

Второе решение. Если $x\geqslant 1$, то имеем

$$x^3+2x^2-x+1>2x^2-x>x^2-x\geqslant 0.$$

Если же $0\leqslant x<1$, то $x^3+2x^2-x+1\geqslant -x+1=1-x>0$.

27. Имеем $ab(a+b-2c)+bc(b+c-2a)+ac(a+c-2b)=$ $=abc\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}-2+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}-2+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}-2\right)=abc\left[\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)+\right.$ $\left.+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}-2\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-2\right)\right]\geqslant 0$, так как сумма двух положительных взаимно обратных чисел больше или равна 2.

28. Доказываемое неравенство перепишем в виде

$$\frac{a^2(1+b^4)+b^2(1+a^4)}{(1+a^4)(1+b^4)}\leqslant 1,$$

или $\frac{a^2}{1+a^4}+\frac{b^2}{1+b^4}\leqslant 1$, что верно (см. задачу 24).

Равенство достигается лишь при $|a|=|b|=1$.

29. Первое решение. Если $x=0$, то имеем верное неравенство: $1>0$. Если же x отлично от нуля, то, поделив обе части

доказываемого неравенства на x^4, получим

$$x^4+x^2-4+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\geqslant 0,$$

что очевидно, так как $x^4+\frac{1}{x^4}\geqslant 2$ и $x^2+\frac{1}{x^2}\geqslant 2$. Равенство имеет место лишь при $x=\pm 1$.

Второе решение. $x^8+x^6-4x^4+x^2+1=(x^8-2x^4+1)+$ $+(x^6-2x^4+x^2)=(x^4-1)^2+x^2(x^2-1)^2\geqslant 0$.

30. Первое решение. Из условия $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$ получаем

$$b=\frac{2ac}{a+c}. \tag{1}$$

Учитывая (1), имеем

$$\frac{a+b}{2a-b}=\frac{a+\frac{2ac}{a+c}}{2a-\frac{2ac}{a+c}}=\frac{a(a+c)+2ac}{2a(a+c)-2ac}=\frac{a+3c}{2a}.$$

Итак,

$$\frac{a+b}{2a-b}=\frac{a+3c}{2a}. \tag{2}$$

Аналогично легко убедиться, что

$$\frac{c+b}{2c-b}=\frac{3a+c}{2c}. \tag{3}$$

Сложив почленно равенства (2) и (3), получим

$$\frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b}=\frac{a+3c}{2a}+\frac{3a+c}{2c},$$

$$\frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b}=\frac{2ac+3(a^2+c^2)}{2ac},$$

$$\frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b}=1+\frac{3}{2}\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)\geqslant 4,$$

поскольку $ac>0$ (см. задачу 19).

Равенство достигается лишь при $a=c=b$.

Второе решение. $\frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b}=\frac{3a-(2a-b)}{2a-b}+$ $+\frac{3c-(2c-b)}{2c-b}=3\left(\frac{a}{2a-b}+\frac{c}{2c-b}\right)-2$. Подставляя значение $b=$ $=\frac{2ac}{a+c}$, получим

$$\frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b}=3\left(\frac{a}{2a-\frac{2ac}{a+c}}+\frac{c}{2c-\frac{2ac}{a+c}}\right)-2=$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{a+c}{a}+\frac{a+c}{c}\right)-2=\frac{3}{2}\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+1\geqslant\frac{3}{2}\cdot 2+1=4.$$

31. Наибольший член можно всегда поместить на первое место путем перестановок членов пропорции. Итак, пусть a — наибольший член. При этом последний член d будет наименьшим. Действительно, $d=b\frac{c}{a}=c\frac{b}{a}$, и так как дроби $\frac{c}{a}$ и $\frac{b}{a}$ меньше, чем 1, то $d<b$ и $d<c$. Составим производную пропорцию: $\frac{a-b}{c-d}=\frac{a}{c}>1$, так как $a>c$. Кроме того, $c-d>0$, поэтому имеем $a-b>c-d$ и, наконец, $a+d>b+c$, что и требовалось доказать.

32. Если $a=b$, то имеет место равенство. Если $a>b$, то $a-b>0$, и данное неравенство перепишется в виде $a>b$. Следовательно, в этом случае неравенство верно. Наконец, если $a<b$, то $a-b<0$ и данное неравенство перепишется в виде $a<b$. Таким образом, и в этом случае доказываемое неравенство верно. Впрочем, перенеся все члены неравенства в левую часть, перепишем доказываемое неравенство в виде $(a-b)^2 \geqslant 0$, что очевидно. Равенство достигается лишь при $a=b$.

33. Поскольку $c \geqslant b$, то $b+c \geqslant 2b$. Но так как $b+c<a+1$, то $a+1>2b$. Наконец, учитывая, что $a \geqslant 1$, имеем $a+a>2b$, или $2a>2b$, откуда $a>b$.

34. Имеем $\frac{a}{2}<\frac{b}{2}$, или $\frac{a}{2}+\frac{a}{2}<\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$, или $a<\frac{a+b}{2}$. Далее, $\frac{a}{2}<\frac{b}{2}$, или $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}<\frac{b}{2}+\frac{b}{2}$, или $\frac{a+b}{2}<b$. Следовательно, $a<\frac{a+b}{2}<b$.

35. Прибавив к обеим частям неравенства $\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d}$ по единице, получим $\frac{a}{b}+1 \leqslant \frac{c}{d}+1$, или $\frac{a+b}{b} \leqslant \frac{c+d}{d}$. Очевидно, что имеет место равенство лишь при $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

36. Прибавив к обеим частям данного неравенства $\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d}$ по k, получим $\frac{a}{b}+k \leqslant \frac{c}{d}+k$, или $\frac{a+bk}{b} \leqslant \frac{c+dk}{d}$. Равенство достигается только при $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

37. Имеем $\frac{a+c}{b+d}-\frac{a}{b}=\frac{bc-ad}{b(b+d)} \geqslant 0$, так как $bc \geqslant ad$, $b>0$, $d>0$. Далее, $\frac{c}{d}-\frac{a+c}{b+d}=\frac{bc-ad}{d(b+d)} \geqslant 0$. Знаки равенства достигаются лишь при $ad=bc$, т. е. при $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

38. Первое решение. Пусть $a=1+p$, $b=1-k$, где $p>0$ и $k>0$. Имеем: $ab+1=(1+p)(1-k)+1=2+p-k-pk$ и $a+b=$ $=(1+p)+(1-k)=2+p-k$. Так как $2+p-k-pk<2+p-k$, то $ab+1<a+b$.

Второе решение. Требуется доказать, что $ab+1-a-b<0$, или $b(a-1)-(a-1)<0$, или $(a-1)(b-1)<0$. Так как, по условию, $a>1$ и $b<1$, то $a-1>0$ и $b-1<0$. Следовательно, $(a-1)(b-1)<0$.

39. Пусть $a\geqslant b$. Умножив обе части неравенства $b\geqslant c+d$ на a, получаем

$$ab\geqslant ac+ad, \tag{1}$$

поскольку $a\geqslant c+d>0$. Так как $a\geqslant b$, то

$$ac+ad\geqslant bc+ad. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что $ab\geqslant bc+ad$. Для случая $b>a$ доказательство аналогичное.

40. Имеем $x^4+y^4\geqslant 2x^2y^2$, $x^2+z^2\geqslant 2xz$, $x^2+1\geqslant 2x$. Сложив почленно эти три неравенства, получим $x^4+y^4+2x^2+z^2+1\geqslant 2x(xy^2+z+1)$, или $x^4+y^4+z^2+1\geqslant 2x(xy^2-x+z+1)$. Равенство достигается только при: 1) $x=y=z=1$; 2) $x=z=1$, $y=-1$. Впрочем, рассматривая разность обеих частей неравенства, получим $x^4+y^4+z^2+1-2x^2y^2+2x^2-2xz-2x=(x^4-2x^2y^2+y^4)+(z^2-2xz+x^2)+(x^2-2x+1)=(x^2-y^2)^2+(z-x)^2+(x-1)^2\geqslant 0$. Следовательно, $x^4+y^4+z^2+1\geqslant 2x(xy^2-x+z+1)$.

41. Первое решение. Пусть $x=\frac{1}{3}+\alpha$, $y=\frac{1}{3}+\beta$, $z=\frac{1}{3}+\gamma$, тогда $x^2+y^2+z^2=\left(\frac{1}{3}+\alpha\right)^2+\left(\frac{1}{3}+\beta\right)^2+\left(\frac{1}{3}+\gamma\right)^2=3\cdot\frac{1}{9}+\frac{2}{3}(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$. Но так как $\alpha+\beta+\gamma=0$, то $x^2+y^2+z^2=\frac{1}{3}+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$, откуда $x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{1}{3}$. Равенство достигается лишь при $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Второе решение. Имеем (задача 4) $x^2+y^2+z^2\geqslant xy+xz+yz$, откуда $3(x^2+y^2+z^2)\geqslant x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)=(x+y+z)^2$. Но так как, по условию, $x+y+z=1$, то

$$3(x^2+y^2z^2)\geqslant 1, \quad \text{или} \quad x^2+y^2+z^2\geqslant 1/3.$$

42. Имеем $2(x^2+y^2+z^2)-2(xy+yz+zx)=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geqslant 0$. Так как $xy+yz+zx=1$, то $x^2+y^2+z^2\geqslant 1$.

43. Имеем $(a^3+b^3)-(a^2b+ab^2)=(a+b)(a-b)^2\geqslant 0$, откуда следует доказываемое соотношение. Знак равенства имеет место лишь при $a=\pm b$.

44. Имеем $(a^2b+b^2c+c^2a)-(a^2c+c^2b+b^2a)=(b-a)(c-b)(a-c)$. Если $a>b>c$, то $b-a<0$, $c-b<0$, $a-c>0$, а следовательно, произведение $(b-a)(c-b)(a-c)>0$. Такое же заключение будет при условии $c>a>b$ или при условии $b>c>a$. Если же $a<b<c$, то $b-a>0$, $c-b>0$, $a-c<0$, а следовательно, произведение $(b-a)(c-b)(a-c)<0$. К такому же выводу мы придем, если $c<a<b$ или если $b<c<a$.

45. Поскольку $a^2+1>0$ при любом a, то доказываемые неравенства перепишем так: $-a^2-1\leqslant a^2-1<a^2+1$. Прибавив ко всем

членам неравенств по единице, получим $-a^2 \leqslant a^2 < a^2+2$, что очевидно. Знак равенства имеет место лишь при $a=0$.

46. Перепишем доказываемые неравенства последовательно в виде

$$\frac{(a-b)(a-b)}{8a} < \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} < \frac{(a-b)(a-b)}{8b},$$

$$\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4a} < (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 <$$

$$< \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4b}.$$

Поскольку $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0$, то, поделив все члены неравенств на $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$, мы получим $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4a} < 1 < \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4b}$. Так как все члены этих неравенств положительны, то, извлекая из них квадратный корень, получаем $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{a}} < 1 < \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{b}}$, или

$$\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{b}{a}}\right) < 1 < \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{a}{b}}\right). \qquad (1)$$

Так как, по условию, $a>b>0$, то $\frac{b}{a}<1$, $\frac{a}{b}>1$ и, следовательно, $1+\sqrt{\frac{b}{a}}<2$ и $1+\sqrt{\frac{a}{b}}>2$. В силу последних соотношений неравенства (1) верны, поэтому верно и доказываемое неравенство.

47. Поскольку $0<x<1$, то $0<1-x<1$, а $1+x>1$. Имеем $0<1-x^2<1$, или $0<1-x<\frac{1}{1+x}$ и $0<\frac{1-x}{1+x}<1$. Учитывая два последних соотношения, получаем $(1+x)^{1-x}(1-x)^{1+x} <$ $<(1+x)^{1-x}(1-x)^x\frac{1}{1+x}=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^x<1$, что и требовалось доказать.

48. Доказываемое неравенство верно, если $(a^3+b^3+c^3)(ab+$ $+bc+ca)\geqslant abc(a+b+c)^2$, или $a(b^2-c^2)^2+b(c^2-a^2)^2+c(a^2-b^2)^2\geqslant 0$, что очевидно, так как $a>0$, $b>0$, $c>0$. Знак равенства имеет место лишь при $a=b=c$.

49. Доказываемое неравенство верно, если $\sqrt{2ab-b^2}\geqslant$ $\geqslant a-\sqrt{a^2-b^2}$. Поскольку $a-\sqrt{a^2-b^2}\geqslant 0$ и $\sqrt{2ab-b^2}\geqslant 0$, то, возведя обе части неравенства в квадрат, получим неравенство $2ab-b^2\geqslant 2a^2-b^2-2a\sqrt{a^2-b^2}$, или $\sqrt{a^2-b^2}\geqslant a-b$. Так как $\sqrt{a^2-b^2}>0$, $a-b>0$, то получаем $a^2-b^2\geqslant(a-b)^2$, или $a+b\geqslant$ $\geqslant a-b$, что очевидно. Равенство имеет место лишь при $b=0$.

50. Имеем

$$\sqrt{(a+c)(b+d)}=\sqrt{ab+bc+ad+cd+2\sqrt{abcd}-2\sqrt{abcd}}=$$
$$=\sqrt{(\sqrt{ab}+\sqrt{cd})^2+(\sqrt{bc}-\sqrt{ad})^2}\geqslant\sqrt{(\sqrt{ab}+\sqrt{cd})^2}=$$
$$=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}.$$

Равенство достигается лишь при $bc=ad$.

51. Имеем $2\sqrt{x+1}-2\sqrt{x}=\dfrac{2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=$

$=\dfrac{2(x+1-x)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\dfrac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}<\dfrac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\dfrac{2}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, откуда следует левое неравенство.

Далее, $2\sqrt{x}-2\sqrt{x-1}=\dfrac{2(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}=$

$=\dfrac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}>\dfrac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, откуда следует правое неравенство.

52. Придавая x в неравенствах предыдущей задачи последовательно значения 2, 3, 4, 5, ..., n, получим

$$\left.\begin{array}{l}
2\sqrt{3}-2\sqrt{2}<\dfrac{1}{\sqrt{2}}<2\sqrt{2}-2,\\
2\sqrt{4}-2\sqrt{3}<\dfrac{1}{\sqrt{3}}<2\sqrt{3}-2\sqrt{2},\\
2\sqrt{5}-2\sqrt{4}<\dfrac{1}{\sqrt{4}}<2\sqrt{4}-2\sqrt{3},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}.
\end{array}\right\} \quad (1)$$

Также имеем

$$1=\frac{1}{\sqrt{1}}=1. \quad (2)$$

Сложив почленно все неравенства (1) и равенство (2), получаем

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{2}+1<\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1.$$

53. Перепишем доказываемое неравенство в виде

$$(a-b)^2(a+b)^2\geqslant(a-b)^2(a-b)^2.$$

Если $a=b$, то имеет место равенство. Если же $a\neq b$, то $(a-b)^2>0$; остается доказать неравенство $(a+b)^2\geqslant(a-b)^2$, или $4ab\geqslant 0$. Последнее очевидно, так как $ab\geqslant 0$.

54. Перепишем доказываемое неравенство в виде $(a-b)^2(a+b)^2\leqslant(a-b)^2(a-b)^2$. Если $a=b$, то имеет место равен-

ство. Если же $a \neq b$, то $(a-b)^2>0$; остается доказать неравенство $(a+b)^2 \leqslant (a-b)^2$, или $4ab \leqslant 0$, что очевидно, так как $ab \leqslant 0$.

55. Перепишем доказываемое неравенство в виде

$$(a-b)^2(a+b)^2(a^2+b^2) \leqslant (a-b)^2(a^2+ab+b^2)^2.$$

Если $a=b$, то имеет место равенство. Если же $a \neq b$, то $(a-b)^2>0$; остается доказать неравенство $(a+b)^2(a^2+b^2) \leqslant (a^2+ab+b^2)^2$, или $(a^2+b^2)^2+2ab(a^2+b^2) \leqslant (a^2+b^2)^2+a^2b^2+2ab(a^2+b^2)$, т. е. $a^2b^2 \geqslant 0$, что очевидно.

56. Перепишем доказываемое неравенство в виде

$$a^6+b^6+a^2b^2(a^2+b^2) \geqslant a^6+b^6+2a^3b^3,$$

или $a^2b^2(a^2+b^2) \geqslant 2a^3b^3$. Если $ab \neq 0$, то $a^2+b^2 \geqslant 2ab$, что очевидно. Если же $ab=0$, то, очевидно, имеет место равенство. Итак, равенство достигается лишь при $a=b$ или при $ab=0$.

57. Имеем $2x^4+1-2x^3-x^2=1-x^2-2x^3(1-x)=(1-x)\times$ $\times(1+x-2x^3)=(1-x)(1-x^3+x-x^3)=(1-x)(1-x)(1+2x+2x^2)=$ $=(1-x)^2[(1+x)^2+x^2] \geqslant 0$. Равенство достигается лишь при $x=1$.

58. $2x^3-(x+1)=2(x^3-x)+(x-1)=(x-1)[2x(x+1)+1]=$ $=(x-1)[x^2+(x+1)^2]$. Поскольку выражение, заключенное в квадратные скобки, положительно при любых значениях x, то знак рассматриваемой разности определяется знаком двучлена $x-1$. Теперь ясно, что если $x>1$, то рассматриваемая разность положительна и $2x^3>x+1$; если же $x<1$, то $2x^3<x+1$.

59. Рассмотрим два случая:

1) Если $x<1$, то, представив левую часть доказываемого неравенства в виде $(1-x)+(x^4-x^9)+x^{12}$, заметим, что в этом случае $1-x>0$, $x^4-x^9>0$; следовательно, $x^{12}-x^9+x^4-x+1>0$.

2) Если $x \geqslant 1$, то, представив левую часть доказываемого неравенства в виде $(x^8+1)(x^4-x)+1$, замечаем, что в этом случае $x^4 \geqslant x$, а потому $x^{12}-x^9+x^4-x+1>0$.

Итак, при любом значении x доказываемое неравенство верно.

60. Имеем

$$(x-c)^2+y^2=x^2+y^2+c^2-2cx \leqslant x^2+y^2+c^2+2c\,|\,x\,|. \qquad (1)$$

Поскольку $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, то $\dfrac{x^2}{a^2} \leqslant 1$ и $\dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1$, т. е.

$$x^2 \leqslant a^2, \; y^2 \leqslant b^2. \qquad (2)$$

Так как $c=\sqrt{a^2-b^2}$, то

$$c \leqslant |\,a\,|, \; c^2 \leqslant a^2. \qquad (3)$$

Из (1), (2) и (3) заключаем, что

$$(x-c)^2+y^2 \leqslant a^2+b^2+c^2+2a^2=4a^2.$$

61. Первое решение. Перепишем доказываемое неравенство в виде $y=|\,x-1\,|+|\,x-3\,|+|\,x-5\,| \geqslant 4$. Разобьем числовую ось на промежутки: $(-\infty, 1]$, $[1, 3]$, $[3, 5]$, $[5, \infty)$. а) В промежутке $(-\infty, 1]$ $y=(1-x)+(3-x)+(5-x)=-3x+9$. В этом промежутке наименьшее значение $y=6$ (при $x=1$). б) В промежутке $[1, 3]$ $y=(x-1)+(3-x)+(5-x)=-x+7$. В этом промежутке наименьшее значение $y=4$ (при $x=3$). в) В промежутке $[3, 5]$ $y=(x-1)+(x-3)+(5-x)=x+1$. В этом промежутке наименьшее значение $y=4$ (при $x=3$). г) В промежутке $[5, +\infty)$ $y=(x-1)+(x-3)+(x-5)=3x-9$. В этом промежутке наименьшее значение $y=6$ (при $x=5$). Из а), б), в) и г) заключаем, что $y\geqslant 4$. Равенство имеет место только при $x=3$.

Второе решение. Надо доказать, что $\rho(x, 1)+\rho(x, 3)+\rho(x, 5)\geqslant 4$, где через $\rho(a, b)$ обозначено расстояние на числовой оси от точки a до точки b. Но уже сумма $\rho(x, 1)+\rho(x, 5)$ всегда не меньше 4 (если точка x заключена между 1 и 5, то эта сумма равна 4, если нет, то больше). Итак, всегда $\rho(x, 1)+\rho(x, 3)+\rho(x, 5)\geqslant\rho(x, 1)+\rho(x, 5)\geqslant 4$. Равенство может достигаться лишь при $\rho(x, 3)=0$, т. е. при $x=3$, и, действительно, достигается в этом случае.

62. 1) Если $x<0$, то $\frac{|x|}{x}+\frac{|x-1|}{x-1}+\frac{|x-2|}{x-2}=-1-1-1=-3$.

2) Если $0<x<1$, то $\frac{|x|}{x}+\frac{|x-1|}{x-1}+\frac{|x-2|}{x-2}=1-1-1=-1$.

3) Если $1<x<2$, то $\frac{|x|}{x}+\frac{|x-1|}{x-1}+\frac{|x-2|}{x-2}=1+1-1=1$.

4) Если $x>2$, то $\frac{|x|}{x}+\frac{|x-1|}{x-1}+\frac{|x-2|}{x-2}=1+1+1=3$.

Из 1)—4) следует утверждение задачи.

63. Пусть $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}=a$, $\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}=b$, откуда

$$a^3+b^3=3+\sqrt[3]{3}+3-\sqrt[3]{3}=6. \qquad (1)$$

Очевидно, что $ab^2+a^2b<a^3+b^3$ (здесь строгое неравенство, так как $a\neq b$), или $ab(a+b)<a^3+b^3=6$, или

$$3ab(a+b)<18. \qquad (2)$$

Сложив почленно (1) и (2), получим $(a+b)^3<24=8\cdot 3$, откуда $a+b<2\sqrt[3]{3}$.

64. Так как $x>\sqrt{ab}$, то $x>0$, $x+a>0$, $x+b>0$. Неравенство $\frac{x+a}{\sqrt{x^2+a^2}}>\frac{x+b}{\sqrt{x^2+b^2}}$ верно, если

$$\frac{(x+a)^2}{x^2+a^2}>\frac{(x+b)^2}{x^2+b^2},\quad \frac{(x^2+a^2)+2ax}{x^2+a^2}>\frac{(x^2+b^2)+2xb}{x^2+b^2},$$

$$1+\frac{2ax}{x^2+a^2}>1+\frac{2bx}{x^2+b^2},\quad \frac{a}{x^2+a^2}>\frac{b}{x^2+b^2},$$

$$a(x^2+b^2)>b(x^2+a^2),$$

или $(a-b)x^2>ab(a-b)$. Но так как $a>b$, то последнее неравенство верно, если $x^2>ab$, или $x>\sqrt{ab}$. Таким образом, первая часть задачи доказана. Решая аналогично вторую часть, мы получим $x^2<ab$, или $x<\sqrt{ab}$.

65. Складывая очевидные неравенства $-|\alpha| \leqslant \alpha \leqslant |\alpha|$ и $-|\beta| \leqslant \beta \leqslant |\beta|$, получим $-(|\alpha|+|\beta|) \leqslant \alpha+\beta \leqslant |\alpha|+|\beta|$, т. е. $|\alpha+\beta| \leqslant |\alpha|+|\beta|$. Это неравенство является частным случаем такого неравенства:

$$|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n| \leqslant |\alpha_1|+|\alpha_2|+|\alpha_3|+\ldots+|\alpha_n|.$$

66. Если в задаче 65 заменить β на $-\beta$, то получим $|\alpha-\beta| \leqslant |\alpha|+|\beta|$, поскольку $|-\beta|=|\beta|$. Так как $\alpha=(\alpha+\beta)-\beta$, то $|\alpha| \leqslant |\alpha+\beta|+|\beta|$, или $|\alpha+\beta| \geqslant |\alpha|-|\beta|$.

67. Если в задаче 66 заменим β на $-\beta$, то получим $|\alpha-\beta| \geqslant |\alpha|-|\beta|$.

68. Первое решение. Рассмотрим неравенство $(a+c)^2+(b-d)^2 \geqslant 0$, или $a^2+b^2+c^2+d^2+2(ac-bd) \geqslant 0$. Так как $a^2+b^2+c^2+d^2=2$, то из последнего неравенства следует, что

$$ac-bd \geqslant -1. \qquad (1)$$

Точно так же, исходя из неравенства $(a-c)^2+(b+d)^2 \geqslant 0$, получим $bd-ac \geqslant -1$, или

$$ac-bd \leqslant +1. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) заключаем, что $|ac-bd| \leqslant 1$.

Второе решение. Перемножив почленно данные равенства, получим $a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2=1$, или $a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+2abcd-2abcd=1$, откуда $(ac-bd)^2+(bc+ad)^2=1$. Так как $(bc+ad)^2 \geqslant 0$, то $(ac-bd)^2 \leqslant 1$, т. е. $|ac-bd| \leqslant 1$.

Третье решение. Исходя из условия задачи, можно подобрать углы α и β, чтобы $\sin\alpha=a$, $\cos\alpha=b$, $\sin\beta=c$ и $\cos\beta=d$. Итак, требуется доказать, что $|\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta| \leqslant 1$, что очевидно, так как $|-\cos(\alpha+\beta)| \leqslant 1$.

69. Рассмотрим два очевидных неравенства:

1) $(m-a)^2+(n-b)^2+(p-c)^2 \geqslant 0$ и 2) $(m+a)^2+(n+b)^2+(p+c)^2 \geqslant 0$.

Так как $a^2+b^2+c^2=1$ и $m^2+n^2+p^2=1$, то из 1) имеем: $ma+nb+pc \leqslant 1$, а из 2) вытекает: $ma+nb+pc \geqslant -1$. Следовательно, $|ma+nb+pc| \leqslant 1$.

70. Первое решение. Рассмотрим n очевидных неравенств:

$$\begin{gathered}(a_1x-b_1)^2 \geqslant 0,\\ (a_2x-b_2)^2 \geqslant 0,\\ (a_3x-b_3)^2 \geqslant 0,\\ \ldots\ldots\\ (a_nx-b_n)^2 \geqslant 0,\end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered}a_1^2x^2-2a_1b_1x+b_1^2 \geqslant 0,\\ a_2^2x^2-2a_2b_2x+b_2^2 \geqslant 0,\\ a_3^2x^2-2a_3b_3x+b_3^2 \geqslant 0,\\ \ldots\ldots\ldots\\ a_n^2x^2-2a_nb_nx+b_n^2 \geqslant 0.\end{gathered}$$

Складывая почленно эти неравенства и учитывая, что $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2=1$ и $b_1^2+b_2^2+b_3^2+\ldots+b_n^2=1$, получим неравенство

$$x^2-2(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_nb_n)x+1\geqslant 0, \qquad (1)$$

справедливое при любом значении x. Но для того, чтобы неравенство (1) было справедливо при любом значении x, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант левой части неравенства был неположителен, т. е. должно быть

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_nb_n)^2\leqslant 1,$$

или $|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_nb_n|\leqslant 1$, т. е. $-1\leqslant a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_nb_n\leqslant 1$, что и требовалось доказать.

Второе решение. Как известно, для любых вещественных a и b имеет место неравенство $|ab|\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$.

Пользуясь далее тем, что абсолютная величина суммы не превосходит суммы абсолютных величин соответствующих слагаемых (задача 65), имеем:

$$|a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n|\leqslant|a_1b_1|+|a_2b_2|+\ldots+|a_nb_n|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{a_1^2+b_1^2}{2}+\frac{a_2^2+b_2^2}{2}+\ldots+\frac{a_n^2+b_n^2}{2}=$$
$$=\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}{2}=\frac{1+1}{2}=1,$$

что и требовалось доказать.

Третье решение. Имеем

$$(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\ldots+(a_n-b_n)^2\geqslant 0, \qquad (1)$$
$$(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+\ldots+(a_n+b_n)^2\geqslant 0. \qquad (2)$$

Введем обозначение $x=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_nb_n$. Тогда, учитывая условия задачи, перепишем (1) и (2) соответственно в виде

$$2-2x\geqslant 0, \qquad (3)$$
$$2+2x\geqslant 0. \qquad (4)$$

Из (3) и (4) получаем $-1\leqslant x\leqslant 1$ или

$$-1\leqslant a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_nb_n\leqslant 1.$$

71. Первое решение. Очевидно, что если $a=b=c=0$, то имеет место равенство. Если же хотя бы одно из чисел a, b, c не равно нулю, то $\sqrt{a^2+b^2+c^2}>0$, поэтому можно произвести следующие преобразования

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|a|^2+|b|^2+|c|^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=$$
$$=|a|\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}+|b|\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}+|c|\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Таким образом, когда a, b и c одновременно не равны нулю, то доказываемое неравенство верно, если

$$|a|\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}+|b|\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}+|c|\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\leqslant$$
$$\leqslant|a|+|b|+|c|. \qquad (1)$$

Поскольку $\sqrt{a^2+b^2+c^2}\geqslant\sqrt{a^2}=|a|$, $\sqrt{a^2+b^2+c^2}\geqslant\sqrt{b^2}=|b|$, $\sqrt{a^2+b^2+c^2}\geqslant\sqrt{c^2}=|c|$, то

$$\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\leqslant 1,\quad \frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\leqslant 1,\quad \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\geqslant 1,$$

а поэтому слагаемые левой части неравенства (1) соответственно меньше $|a|$, $|b|$ и $|c|$. Итак, неравенство (1) верно, а вместе с ним верно и доказываемое.

Второе решение. Имеем $a^2+b^2+c^2\leqslant(|a|+|b|+|c|)^2$, т. е. $a^2+b^2+c^2\leqslant a^2+b^2+c^2+2|a|\cdot|b|+2|a|\cdot|c|+2|b|\cdot|c|$, что очевидно.

Поэтому $\sqrt{a^2+b^2+c^2}\leqslant|a|+|b|+|c|$. Равенство имеет место, если по крайней мере два из чисел a, b, c равны нулю.

72. Первое решение. Имеем $0\leqslant(x-y)^2=x^2+y^2-2xy\leqslant$ $\leqslant 2-2xy$, откуда $2xy\leqslant 2$, т. е.

$$xy\leqslant 1. \qquad (1)$$

Далее,

$$|x+y|=\sqrt{(x+y)^2}=\sqrt{x^2+y^2+2xy}. \qquad (2)$$

Так как, по условию, $x^2+y^2\leqslant 2$, то из (2) вытекает, что

$$|x+y|\leqslant\sqrt{2+2xy}. \qquad (3)$$

Из (1) и (3) следует, что $|x+y|\leqslant\sqrt{2+2}=2$.

Второе решение. Так как $4\geqslant 2(x^2+y^2)=(x+y)^2+$ $+(x-y)^2\geqslant(x+y)^2$, то $|x+y|\leqslant 2$.

73. Доказываемое неравенство верно, если $(y^2+1)^2x^2-$ $-4y(y^2-1)x+4y^2\geqslant 0$, или $x^2(y^2-1)^2-4xy(y^2-1)+4y^2+4x^2y^2\geqslant$ $\geqslant 0$, или $[(y^2-1)x-2y]^2+(2xy)^2\geqslant 0$, что очевидно. Равенство достигается лишь при $x=y=0$.

74. Имеем $mx+\dfrac{n}{x}-m-n=\left(m-\dfrac{n}{x}\right)(x-1)=\dfrac{m}{x}\left(x-\dfrac{n}{m}\right)(x-1)$.

Отсюда видно, что при $x<0$ рассматриваемое выражение отрицательно, т. е. $mx+\dfrac{n}{x}<m+n$. При $x>0$ оно будет отрицательно, когда x заключен между числами $\dfrac{n}{m}$ и 1, и положительно в противном случае (по свойству квадратного трехчлена). Итак,

$mx+n/x< m+n$, если x отрицателен или заключен между числами n/m и 1 и $mx+n/x> m+n$ в противном случае.

75. Имеем очевидные неравенства:

$$\frac{1}{(n+k+1)(n+k)}<\frac{1}{(n+k)^2}<\frac{1}{(n+k-1)(n+k)}. \qquad (1)$$

Но так как $\frac{1}{(n+k+1)(n+k)}=\frac{1}{n+k}-\frac{1}{n+k+1}$ и $\frac{1}{(n+k-1)(n+k)}=$ $=\frac{1}{n+k-1}-\frac{1}{n+k}$, то неравенства (1) можно переписать в виде

$$\frac{1}{n+k}-\frac{1}{n+k+1}<\frac{1}{(n+k)^2}<\frac{1}{n+k-1}-\frac{1}{n+k}.$$

Придавая k значения 1, 2, 3, ... , p, получаем:

$$\left.\begin{array}{c}\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}<\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},\\ \frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}<\frac{1}{(n+2)^2}<\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{1}{n+p}-\frac{1}{n+p+1}<\frac{1}{(n+p)^2}<\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}.\end{array}\right\} \qquad (2)$$

Складывая почленно все p неравенств (2), окончательно получаем

$$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p+1}<\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+p)^2}<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}.$$

76. Имеем очевидные неравенства

$$\frac{1}{a+b+c}<\frac{1}{a+b},\ \frac{1}{a+b+c}<\frac{1}{a+c},\ \frac{1}{a+b+c}<\frac{1}{b+c}. \qquad (1)$$

Сложив почленно неравенства (1), получим доказываемое.

77. Доказываемое неравенство верно, если верно неравенство

$$\frac{2}{1+a+b}\leqslant\frac{2+a+b}{1+a+b+ab},\quad \frac{2}{1+a+b}\leqslant\frac{(1+a)+(1+b)}{(1+a)(1+b)},$$

$$\frac{2}{1+a+b}\leqslant\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+a},\quad \frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+a+b}\leqslant\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+a},$$

что очевидно. Равенство выполняется лишь при $a=b=0$.

78. Имеем

$$a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)=a^2(c-b)+b^2a-b^2c+c^2b-c^2a=$$
$$=a^2(c-b)-a(c^2-b^2)+bc(c-b)=(c-b)(a^2-ac-ab+bc)=$$
$$=(c-b)[a(a-c)-b(a-c)]=(c-b)(a-c)(a-b).$$

Так как по условию $c\neq b$, $a\neq c$, $a\neq b$, то $(c-b)(a-c)(a-b)\neq 0$, что и требовалось доказать.

79. Пусть x и y — произвольные действительные числа. Имеем $x=[x]+\alpha$, $y=[y]+\beta$, где $0\leqslant\alpha<1$, $0\leqslant\beta<1$. Таким образом, $x+y=[x]+[y]+\alpha+\beta$. Поскольку $\alpha+\beta\geqslant 0$, то ясно, что $[x]+[y]$ есть целое число, не превосходящее числа $x+y$. Но так как $[x+y]$ — наибольшее из целых чисел, не превосходящих $x+y$, то заключаем, что $[x+y]\geqslant[x]+[y]$.

80. Если из a, b, c хотя бы два равны 0, то, очевидно, имеет место равенство. Пусть из чисел a, b, c хотя бы два отличны от нуля. Для определенности пусть $a\neq 0$ и b или c отлично от нуля. Доказываемое неравенство верно, если a^2b^2+ $+b^2c^2+c^2a^2-a^2bc-ab^2c-abc^2\geqslant 0$, или

$$(b^2-bc+c^2)\,a^2-bc\,(b+c)\,a+b^2c^2\geqslant 0. \tag{1}$$

Левая часть неравенства (1) представляет собой квадратный трехчлен относительно a. Его дискриминант $b^2c^2\,(b+c)^2-4b^2c^2\,(b^2-bc+$ $+c^2)=b^2c^2\quad(b^2+c^2+2bc-4b^2+4bc-4c^2)=b^2c^2\quad(6bc-3b^2-3c^2)=$ $=-3b^2c^2\,(b-c)^2\leqslant 0$. Учитывая, что коэффициент b^2-bc+c^2 при a^2 положителен, заключаем, что неравенство (1) имеет место при любых a. Следовательно, и доказываемое неравенство верно.

Равенство достигается при $a=b=c$ или в случае равенства нулю хотя бы двух из чисел a, b, c.

81. Имеем $pa^2+(1-p)\,(b^2-pc^2)=c^2p^2+\,(a^2-b^2-c^2)\,p+b^2$. Найдем условия, при которых неравенство

$$c^2p^2+(a^2-b^2-c^2)\,p+b^2>0 \tag{1}$$

должно выполняться при любом p. Поскольку $c^2>0$, то для этого, как известно, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант квадратного трехчлена относительно p был отрицателен. Преобразуем дискриминант: $D=(a^2-b^2-c^2)^2-4b^2c^2=(a^2-b^2-c^2-2bc)\,(a^2-$ $-b^2-c^2+2bc)=[a^2-(b+c)^2]\,[a^2-(b-c)^2]=(a+b+c)\,(a-b-c)\times$ $\times(a+b-c)\,(a-b+c)=-(a+b+c)\,(a+b-c)\,(b+c-a)\,(c+a-b)$. Если

$$a+b-c>0,\quad b+c-a>0,\quad c+a-b>0, \tag{2}$$

то $D<0$. Таким образом, из неравенств (2) следует неравенство (1). Остается доказать, что из неравенства (1) следуют неравенства (2), т. е. надо доказать, что $D<0$ только при одновременном существовании неравенств (2). Действительно, выше мы убедились, что $D<0$, если

$$(a+b-c)\,(b+c-a)\,(c+a-b)>0. \tag{3}$$

Неравенство (3) может иметь место только в двух случаях: 1) если все три сомножителя положительны, 2) когда один сомножитель положителен, а два отрицательны. Убедимся, что случай 2) невозможен. Действительно, пусть, напрнмер, $a+b-c<0$ и $b+c-a<0$. Сложив эти два неравенства почленно, получим, что $2b<0$, что невозможно, так как $b>0$. Итак, из неравенства (1) следуют неравенства (2).

82. Доказываемое неравенство представим в виде

$$a^{p+q}+a^pb^q-a^qb^p-b^{p+q}>a^{p+q}+a^qb^p-a^pb^q-b^{p+q},$$

$$a^pb^q-a^qb^p>a^qb^p-a^pb^q,\quad a^pb^q>a^qb^p,$$

$$\frac{a^pb^q}{b^{p+q}}>\frac{a^qb^p}{b^{p+q}},\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^p>\left(\frac{a}{b}\right)^q.$$

Последнее неравенство верно, так как $\frac{a}{b}>1$ и $p>q$, а потому верно и доказываемое неравенство.

83. Доказываемое неравенство верно, если

$$1+r^{n-1}-r^m-r^{n-m-1}\geqslant 0,\ (1-r^m)-r^{n-m-1}(1-r^m)\geqslant 0,$$

$$(1-r^m)(1-r^{n-m-1})\geqslant 0.$$

Если $0<r<1$, то оба сомножителя левой части последнего неравенства положительны, следовательно, это неравенство верно. Если же $r>1$, то оба сомножителя отрицательны, а их произведение положительно. Если $r=1$, то получается равенство. Таким образом, при любом положительном r имеет место неравенство.

84. Перепишем доказываемое неравенство в виде

$$a^{c+d}-a^cb^d\geqslant a^db^c-b^{c+d},\ \text{или}\ a^c(a^d-b^d)-b^c(a^d-b^d)\geqslant 0,\quad \text{или}$$

$$(a^d-b^d)(a^c-b^c)\geqslant 0. \qquad (1)$$

Если $a\geqslant b$, то $a^c\geqslant b^c$ и $a^d\geqslant b^d$, а поэтому оба сомножителя неотрицательны. Следовательно, неравенство (1) верно. Если же $a<b$, то $a^c<b^c$ и $a^d<b^d$, а потому оба сомножителя левой части неравенства (1) отрицательны, а их произведение положительно.

85. Рассмотрим разность $a^k+\frac{1}{a^k}-\left(a^{k-i}+\frac{1}{a^{k-i}}\right)=(a^k-a^{k-i})+\left(\frac{1}{a^k}-\frac{1}{a^{k-i}}\right)=a^{k-i}(a^i-1)-\frac{1}{a^k}(a^i-1)=\frac{(a^i-1)(a^{2k-i}-1)}{a^k}$. Если $a\geqslant 1$, то $a^i-1\geqslant 0$ и $a^{2k-i}-1\geqslant 0$, а если $a<1$, то $a^i-1\leqslant 0$, $a^{2k-i}-1\leqslant 0$. Таким образом, при любом положительном a произведение $(a^i-1)(a^{2k-i}-1)\geqslant 0$, а следовательно, и рассматриваемая разность неотрицательна. Поэтому доказываемое неравенство справедливо.

86. Поскольку $a^k>0$, то, поделив обе части доказываемого неравенства на a^k, получим неравенство $k\left(a^k+\frac{1}{a^k}\right)-1\geqslant a^{k-1}+a^{k-2}+\ldots+\frac{1}{a^{k-2}}+\frac{1}{a^{k-1}}$, или $k\left(a^k+\frac{1}{a^k}\right)-1\geqslant\left(a^{k-1}+\frac{1}{a^{k-1}}\right)+\left(a^{k-2}+\frac{1}{a^{k-2}}\right)+\ldots+\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)+\left(a+\frac{1}{a}\right)+1$, или

$$k\left(a^k+\frac{1}{a^k}\right)\geqslant\left(a^{k-1}+\frac{1}{a^{k-1}}\right)+\left(a^{k-2}+\frac{1}{a^{k-2}}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)+\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(a^0+\frac{1}{a^0}\right). \qquad (1)$$

В задаче 85 мы доказали, что $a^k+\frac{1}{a^k}\geqslant a^{k-i}+\frac{1}{a^{k-i}}$. Следовательно, каждое выражение, заключенное в скобках правой части (1), не больше $a^k+\frac{1}{a^k}$, и так как в правой части k скобок, то (1) верно, а потому верно и утверждение задачи.

87. Пусть $x=\frac{a}{2}+z$, тогда $y=\frac{a}{2}-z$. Имеем $x^n+y^n=$ $=\left(\frac{a}{2}+z\right)^n+\left(\frac{a}{2}-z\right)^n=2\left[\left(\frac{a}{2}\right)^n+M\right]$, где $M\geqslant 0$. Следовательно, $x^n+y^n\geqslant 2\frac{a^n}{2^n}=\frac{a^n}{2^{n-1}}$. Равенство достигается лишь в двух случаях: 1) когда $n=1$; 2) когда n — любое натуральное число и $x=y=\frac{a}{2}$.

88. Поскольку, по условию, $a>b$, то $a-b>0$. Пусть $a-b=$ $=c>0$, откуда $a=b+c$. Таким образом, доказываемое неравенство можно переписать в виде

$$\sqrt[n]{b+c}<\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}. \qquad (1)$$

Так как обе части неравенства (1) положительны, то неравенство (1) верно, если $\left(\sqrt[n]{b+c}\right)^n<\left(\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}\right)^n$, или $b+c<b+c+M$, что очевидно, так как $M>0$. Следовательно, неравенство (1) верно, а потому верно и утверждение задачи.

89. Имеем $\left(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}\right)^n=a+b+\ldots>c=\left(\sqrt[n]{c}\right)^n$, откуда $\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}>\sqrt[n]{c}$.

90. Первое решение. Возведя $(1+x)^n$ и $(1-x)^n$ в n-ю степень по биному Ньютона, получим

$$(1+x)^n+(1-x)^n=2\left(1+C_n^2x^2+C_n^4x^4+\ldots\right)<$$
$$<2\left(1+C_n^2+C_n^4+\ldots\right). \qquad (1)$$

Поскольку сумма коэффициентов, стоящих на четных местах в разложении бинома, равна сумме коэффициентов, стоящих на нечетных местах, а сумма всех коэффициентов равна 2^n, то $1+C_n^2+$ $+C_n^2+C_n^4+\ldots=\frac{2^n}{2}$.

Отсюда следует, что $(1+x)^n+(1-x)^n<2\cdot\frac{2^n}{2}=2^n$. Это доказательство проведено для $n\geqslant 2$. Если же $n=1$, то имеет место равенство.

Второе решение. Имеем $0<\frac{1+x}{2}<1$, $0<\frac{1-x}{2}<1$, и поэтому

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)^n\leqslant\frac{1+x}{2}, \qquad (1)$$

$$\left(\frac{1-x}{2}\right)^n\leqslant\frac{1-x}{2}. \qquad (2)$$

Сложив неравенства (1) и (2), получим $\left(\frac{1+x}{2}\right)^n+\left(\frac{1-x}{2}\right)\leqslant 1$, или $(1+x)^n+(1-x)^n\leqslant 2^n$. Равенство достигается лишь при $n=1$.

91. Разделим почленно доказываемые неравенства на $k!$ Получим

$$(k+1)^{n-k}\leqslant\frac{n!}{k!}\leqslant n^{n-k}. \qquad (1)$$

Если $n=k$, то все три члена неравенства (1) равны. Точно так же, если $n=k+1$, все три члена неравенства (1) равны.

Если же $n\neq k$ и $n\neq k+1$, то докажем, что

$$(k+1)^{n-k}<\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(k-1)\,k\,(k+1)\ldots(n-1)\,n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}<n^{n-k}, \text{ или}$$

$$\underbrace{(k+1)(k+1)\ldots(k+1)}_{(n-k)\text{ раз}}<\underbrace{(k+1)(k+2)\ldots(n-1)\,n}_{(n-k)\text{ раз}}<\underbrace{n\cdot n\ldots n}_{(n-k)\text{ раз}}. \qquad (2)$$

Поскольку все сомножители произведения $(k+1)(k+2)\ldots(n-1)\,n$, кроме первого, больше $k+1$, и каждый из этих сомножителей, кроме последнего, меньше n, то неравенства (2) верны при условии, что $n\neq k$ и $n\neq k+1$.

92. Имеем $\left(\sqrt[3]{b}-a\right)^2>0$, или $\sqrt[3]{b^2}+a^2>2a\sqrt[3]{b}$. Из условия следует, что $\sqrt[3]{b^2}-a^2>0$. Поэтому $\sqrt[3]{b^4}-a^4>$ $>2a\sqrt[3]{b}\left(\sqrt[3]{b^2}-a^2\right)$. Отсюда $\sqrt[3]{b}\,(b+2a^3)>a\,(a^3+2b)$, или

$$\sqrt[3]{b}>\frac{a\,(a^3+2b)}{2a^3+b}. \qquad (1)$$

Аналогично, $\left[\sqrt[3]{b}-(a+1)\right]^2>0$, $\sqrt[3]{b^2}+(a+1)^2>2\,(a+1)\sqrt[3]{b}$, $\sqrt[3]{b^2}-(a+1)^2<0$. Следовательно, $b\sqrt[3]{b}-(a+1)^4<2\,(a+1)b-$ $-2\,(a+1)^3\sqrt[3]{b}$. Отсюда

$$\sqrt[3]{b}<\frac{(a+1)\,[(a+1)^3+2b]}{2\,(a+1)^3+b}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует утверждение задачи.

93. Первое решение. Доказываемое неравенство верно, если $\frac{n!}{2^n}\geqslant\frac{1}{2}$, или $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{3}{2}\ldots\frac{n}{2}\geqslant\frac{1}{2}$, но $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{3}{2}\ldots\frac{n}{2}>$ $>\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 1\ldots 1=\frac{1}{2}$. Равенство достигается лишь при $n=1$ и при $n=2$.

Второе решение. Перепишем доказываемое неравенство в виде $\underbrace{2\cdot 3\cdot 4\ldots(n-1)\,n}_{(n-1)\text{ раз}}\geqslant\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\ldots 2\cdot 2}_{(n-1)\text{ раз}}$, что очевидно, так как все сомножители левой части неравенства, кроме первого, больше 2.

94. Обозначим $\sqrt[n]{n}=1+z$, где $z>0$. Из этого равенства следует $n=(1+z)^n=1+nz+\frac{n\,(n-1)}{2}z^2+\ldots+z^n$,

$$n>1+\frac{n\,(n-1)}{2}z^2, \text{ или } z^2<\frac{2}{n}.$$

Отсюда

$$z^2 < \frac{2}{n-1}. \qquad (1)$$

Поскольку, по условию, $n > 2$, то

$$\frac{2}{n-1} < \frac{4}{n}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что $z^2 < \frac{2}{n-1} < \frac{4}{n}$, т. е. $0 < z < \frac{2}{\sqrt{n}}$. Но так как $z = \sqrt[n]{n} - 1$, то $\sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n}}$, или $\sqrt[n]{n} < \frac{2}{\sqrt{n}} + 1$.

95. Имеем $\frac{1-x^{n+1}}{1-x^n} = 1 + \frac{x^n(1-x)}{1-x^n} = 1 + \frac{x^n}{1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\ldots+\frac{1}{x^n}}$. Так как $0 < x < 1$, то каждая из дробей $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \ldots, \frac{1}{x^n}$ больше 1. Следовательно, сумма этих дробей больше n, а потому $\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\ldots+\frac{1}{x^n}} < \frac{1}{n}$. Итак, $\frac{1-x^{n+1}}{1-x^n} < 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$, откуда $\frac{1-x^{n+1}}{n+1} < \frac{1-x^n}{n}$.

96. Имеем $\left(x+\frac{1}{nx}\right) - \left(1+\frac{1}{n}\right) = (x-1) + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x}-1\right) = \frac{1}{x}(x-1)\left(x-\frac{1}{n}\right)$. Если $n > 1$ и $x > 1$, то $x-1 > 0$ и $x-\frac{1}{n} > 0$, а следовательно, рассматриваемая разность положительна. Также, если $x < \frac{1}{n}$ и $n > 1$, то $x-1 < 0$ и $x-\frac{1}{n} < 0$, а следовательно, рассматриваемая разность и в этом случае положительна. Таким образом, в обоих случаях $x+\frac{1}{nx} > 1+\frac{1}{n}$, что и требовалось доказать.

97. Если $a=b$, то достигается равенство. Если же $a > b$, то доказываемое неравенство верно, если $nb^{n-1} \leqslant \frac{a^n-b^n}{a-b} \leqslant na^{n-1}$, или $nb^{n-1} \leqslant a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1} \leqslant na^{n-1}$, или

$$\underbrace{b^{n-1}+b^{n-1}+\ldots+b^{n-1}}_{n \text{ раз}} \leqslant \underbrace{a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}}_{n \text{ раз}} \leqslant$$

$$\leqslant \underbrace{a^{n-1}+a^{n-1}+\ldots+a^{n-1}}_{n \text{ раз}}.$$

Так как, по условию, $a > b$, то последнее соотношение очевидно, причем имеет место лишь строгое неравенство (случай $a=b$ уже рассмотрен).

98. Имеем очевидное неравенство:

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{n!}\leqslant 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n},$$

или

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{n!}\leqslant 1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right),$$

т. е. $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{n!}\leqslant 2-\frac{1}{n}=\frac{2n-1}{n}$, что и требовалось доказать. Равенство достигается лишь при $n=1$, $n=2$ и при $n=3$.

99. Поскольку $\frac{x^n-1}{x-1}>0$, то, умножив обе части доказываемого неравенства на $\frac{(x^n-1)x^n}{x-1}$, получим неравенство $\frac{(x^{n+1}+1)(x^n-1)}{x-1}>$ $>2nx^n$. Преобразуем левую часть последнего неравенства так:

$$(x^{n+1}+1)\frac{x^n-1}{x-1}=(x^{n+1}+1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)=$$
$$=x^{2n}+x^{2n-1}+\ldots+x^{n+2}+x^{n+1}+x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1=$$
$$=x^n\left[\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)+\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)+\ldots+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)\right].$$

Поскольку $x^m+\frac{1}{x^m}>2$, то выражение, заключенное в квадратных скобках, больше $2n$, следовательно, $\frac{(x^{n+1}+1)(x^n-1)}{x-1}>2n\cdot x^n$, что и требовалось доказать.

100. Если $a=1$, то достигается равенство. Если же $a>1$, то доказываемое неравенство можно переписать в виде

$$n(a^{2n+1}+1)\geqslant\frac{a(a^{2n}-1)}{a-1},\ \text{или}$$
$$n(a^{2n+1}+1)\geqslant a(a^{2n-1}+a^{2n-2}+\ldots+a+1). \qquad (*)$$

Поскольку $a>1$, то $(a^{2n}-1)(a-1)>0$, откуда

$$a^{2n+1}+1>a^{2n}+a. \qquad (1)$$

Так как $(a^{2n-1}-1)(a^2-1)>0$, то

$$a^{2n+1}+1>a^{2n-1}+a^2. \qquad (2)$$

Далее, так как $(a^{2n-2}-1)(a^3-1)>0$, то

$$a^{2n+1}+1>a^{2n-2}+a^3. \qquad (3)$$

Рассуждая аналогично, получаем

$$a^{2n+1}+1>a^{2n-3}+a^4, \qquad (4)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a^{2n+1}+1>a+a^{2n}. \qquad (2n)$$

Сложив почленно неравенства (1), (2), ..., ($2n$), получим

$$2n\,(a^{2n+1}+1) > 2\,(a^{2n}+a^{2n-1}+\ldots+a^2+a),$$

или

$$n\,(a^{2n+1}+1) > a\,(a^{2n-1}+a^{2n-2}+\ldots+a+1).$$

Таким образом, мы доказали неравенство (*), а следовательно, и данное. Равенство достигается лишь при $a=1$.

101. Первое решение. Имеем $x^\alpha-(y^\alpha+z^\alpha)=x^2x^{\alpha-2}-$ $-(y^\alpha+z^\alpha)$. Так как $x^2=y^2+z^2$, то последнее равенство принимает вид: $x^\alpha-(y^\alpha+z^\alpha)=(y^2+z^2)\,x^{\alpha-2}-(y^\alpha+z^\alpha)=y^2x^{\alpha-2}+z^2x^{\alpha-2}-$ $-y^{\alpha-2}y^2-z^{\alpha-2}z^2=y^2\,(x^{\alpha-2}-y^{\alpha-2})+z^2\,(x^{\alpha-2}-z^{\alpha-2})$. Так как $x^2=$ $=y^2+z^2$ и x, y, z положительны, то $x>y$ и $x>z$, следовательно, при $\alpha-2>0$ имеем: $x^{\alpha-2}-y^{\alpha-2}>0$ и $x^{\alpha-2}-z^{\alpha-2}>0$, а поэтому $x^\alpha-(y^\alpha+z^\alpha)>0$, или $x^\alpha>y^\alpha+z^\alpha$. Аналогичным образом при $\alpha<2$ имеем $x^{\alpha-2}-y^{\alpha-2}<0$ и $x^{\alpha-2}-z^{\alpha-}\;<0$, откуда $x^\alpha-(y^\alpha+z^\alpha)<0$, или $x^\alpha<y^\alpha+z^\alpha$.

Второе решение. Имеем $\left(\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{z}{x}\right)^2=1$. Отсюда видно, что $\frac{y}{x}<1$ и $\frac{z}{x}<1$. Поэтому при $\alpha>2$ имеем $\left(\frac{y}{x}\right)^\alpha+\left(\frac{z}{x}\right)^\alpha<$ $<\left(\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{z}{x}\right)^2=1$, т. е. $y^\alpha+z^\alpha<x^\alpha$, а при $\alpha<2$ имеем

$$\left(\frac{y}{x}\right)^\alpha+\left(\frac{z}{x}\right)^\alpha>\left(\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{z}{x}\right)^2=1,\ \text{т. е. }\ y^\alpha+z^\alpha>x^\alpha.$$

102. Первое решение. Доказываемое неравенство можно переписать в виде $1-\frac{2b^p}{a^p+b^p}>1-\frac{2b^n}{a^n+b^n}$, $\frac{b^p}{a^p+b^p}<\frac{b^n}{a^n+b^n}$, $\frac{1}{1+\left(\frac{a}{b}\right)^p}<\frac{1}{1+\left(\frac{a}{b}\right)^n}$, $1+\left(\frac{a}{b}\right)^p>1+\left(\frac{a}{b}\right)^n$ или, наконец, в виде $\left(\frac{a}{b}\right)^p>\left(\frac{a}{b}\right)^n$, что верно, так как $\frac{a}{b}>1$ и $p>n$.

Второе решение. Очевидно, что $\frac{a^p-b^p}{a^p+b^p}=\frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^p}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^p}$ и $\frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}=\frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^n}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}$.

Поэтому подлежащее доказательству неравенство можно переписать в виде

$$\frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^p}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^p}>\frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^n}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}. \tag{1}$$

По условию, $a > b > 0$, поэтому $0 < b/a < 1$, и так как $p > n$, то $\left(\frac{b}{a}\right)^p < \left(\frac{b}{a}\right)^n$. Отсюда

$$1-\left(\frac{b}{a}\right)^p > 1-\left(\frac{b}{a}\right)^n \text{ и } 1+\left(\frac{b}{a}\right)^p < 1+\left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

Из последних двух неравенств следует, что $\dfrac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^p}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^p} > \dfrac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^n}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}$.

103. Очевидно, что

$$\left.\begin{aligned} 4x+1 &\leqslant 4x^2+4x+1, \quad \text{или} \quad \sqrt{4x+1} \leqslant |2x+1|; \\ 4y+1 &\leqslant 4y^2+4y+1, \quad \text{или} \quad \sqrt{4y+1} \leqslant |2y+1|; \\ 4z+1 &\leqslant 4z^2+4z+1, \quad \text{или} \quad \sqrt{4z+1} \leqslant |2z+1|. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Так как, по условию, $x \geqslant 1/4$, то $2x+1 > 0$. Аналогично, $2y+1 > 0$ и $2z+1 > 0$, поэтому в (1) знак модуля можно опустить. Из неравенств (1) следует, что $\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}+\sqrt{4z+1} \leqslant 2(x+y+z)+3$, но так как, по условию, $x+y+z=1$, то $\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}+\sqrt{4z+1} \leqslant 5$.

104. Так как $x-y > z-t > 0$, то неравенство, подлежащее доказательству, следует из неравенства

$$(x-y)(z+t) > (z-t)(x+y). \quad (1)$$

Последнее неравенство имеет место, если

$$tx > yz. \quad (2)$$

Таким образом, достаточно доказать неравенство (2). Поскольку $xy=zt$, то $\frac{x}{t}=\frac{z}{y}$. Пусть $x=kt$, тогда $z=ky$. Подставляя эти значения x и z в неравенство $x-y > z-t$, получим $kt-y > ky-t$, или $kt+t > ky+y$, откуда (учитывая, что $k > 0$) получим $t > y$. Но так как $xy=zt$, то $x > z$. Перемножив $x > z$ и $t > y$, получим неравенство (2), а следовательно, и неравенство (1).

105. Первое решение. Если

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=a, \quad (1)$$

то

$$a_1=\frac{a}{n}+m_1, \; a_2=\frac{a}{n}+m_2, \; a_3=\frac{a}{n}+m_3, \; \ldots, \; a_n=\frac{a}{n}+m_n. \quad (2)$$

Сложим почленно равенства (2):

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=a+(m_1+m_2+m_3+\ldots+m_n). \quad (3)$$

Из (1) и (3) следует, что

$$m_1+m_2+m_3+\ldots+m_n=0. \quad (4)$$

Из (2) получаем равенства:

$$\left.\begin{aligned}
a_1^2&=\frac{a^2}{n^2}+2\frac{am_1}{n}+m_1^2,\\
a_2^2&=\frac{a^2}{n^2}+2\frac{am_2}{n}+m_2^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
a_n^2&=\frac{a^2}{n^2}+2\frac{am_n}{n}+m_n^2.
\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

Складывая почленно равенства (5), получаем

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2=\frac{a^2}{n}+\frac{2a}{n}(m_1+m_2+m_3+\ldots+m_n)+$$
$$+(m_1^2+m_2^2+\ldots+m_n^2).\qquad(6)$$

Из (4) и (6) следует, что

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2=\frac{a^2}{n}+m_1^2+m_2^2+m_3^2+\cdots+m_n^2,$$

откуда $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2\geqslant\frac{a^2}{n}$, или, учитывая (1), имеем окончательно

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2\geqslant\frac{(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)^2}{n}.$$

Второе решение. При $a_1=a_2=\ldots=a_n$ имеет место равенство. Допустим, что среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ имеются отличные от нуля. Положим $M=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}$,

$$\alpha_1=\frac{a_1}{M},\ \alpha_2=\frac{a_2}{M},\ \ldots,\ \alpha_n=\frac{a_n}{M},\quad \beta_1=\beta_2=\ldots=\beta_n=\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Очевидно, что $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2=1$ и $\beta_1^2+\beta_2^2+\ldots+\beta_n^2=1$. Поэтому (см. задачу 70) имеем $|\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_n\beta_n|\leqslant 1$, т. е.

$$\left|(a_1+a_2+\ldots+a_n)\,\frac{1}{M\sqrt{n}}\right|\leqslant 1,$$

или $(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2\leqslant M^2n=n(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)$, откуда

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\geqslant\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{n}.$$

Третье решение. Имеем:

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2,\qquad(1)$$

$$\left.\begin{aligned}
a_1^2+a_2^2&\geqslant 2a_1a_2,\\
a_1^2+a_3^2&\geqslant 2a_1a_3,\\
&\ldots\ldots,\\
a_{n-1}^2+a_n^2&\geqslant 2a_{n-1}a_n.
\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

Сложив почленно равенство (1) с неравенствами (2), получим $n(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)\geqslant(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2$ или $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\geqslant$ $\geqslant\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{n}$.

106. Левая часть доказываемого неравенства есть квадратный трехчлен относительно x с положительным коэффициентом при x^2. Его дискриминант

$$D=(a_1+a_2+\ldots+a_n-n^2)^2 - n(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)+ \\ +2n^2(a_1+a_2+\ldots+a_n)-n^4,$$

или $D=(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2-n(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)$. Из задачи 105 следует, что $D\leqslant 0$, следовательно, корни левой части доказываемого неравенства мнимые или действительные равные, а поэтому утверждение задачи верно при любом x.

107. Имеем $(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})^2=n+1+2\sqrt{n^2-1}+n-1=$ $=2n+2\sqrt{n^2-1}<2n+2\sqrt{n^2}=4n$, откуда следует неравенство $\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}<2\sqrt{n}$, или $\frac{1}{2\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=$

$$=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{2}.$$

Умножая обе части последнего неравенства на 2, получим $\frac{1}{\sqrt{n}}<\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$, что и требовалось доказать.

108. Доказываемое неравенство перепишем в виде $kn-k^2+k\geqslant n$, $k(n-k)-(n-k)\geqslant 0$, $(k-1)(n-k)\geqslant 0$. Так как, по условию, $k\geqslant 1$ и $n\geqslant k$, то последнее неравенство верно, а следовательно, верно и доказываемое. Равенство достигается лишь при $k=1$ и при $k=n$.

109. Если в неравенстве $k(n-k+1)\geqslant n$ (задача 108) положить $k=1, 2, 3, \ldots, (n-1), n$, то получим n неравенств:

$$\left.\begin{aligned} 1\cdot n &\geqslant n, \\ 2(n-1) &\geqslant n, \\ 3(n-2) &\geqslant n, \\ &\ldots\ldots, \\ (n-1)\,2 &\geqslant n, \\ n\cdot 1 &\geqslant n. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Перемножив почленно все неравенства (1), получим $(1\cdot 2\cdot 3\ldots n)^2\geqslant n^n$, т. е. $(n!)^2\geqslant n^n$. Равенство достигается лишь при $n=1$, $n=2$.

110. Пусть в неравенстве задачи 109 $n=2m$, тогда его можно переписать в виде

$$1\cdot 2\cdot 3\ldots(2m)\geqslant(2m)^m, \text{ или } 1\cdot 2\cdot 3\ldots m(m+1)\ldots(2m)\geqslant(2m)^m.$$

Умножая обе части последнего неравенства на 2^m и замечая, что $(m+1)\ldots(2m)=1\cdot 3\cdot 5\ldots(2m-3)(2m-1)$, получаем

$$2^m\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots m(2m-1)(2m-3)\ldots 5\cdot 3\cdot 1\geqslant 2^m m^m. \qquad (1)$$

Поделив обе части неравенства (1) на $2^m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m$, получим

$$(2m-1)(2m-3)\ldots 5\cdot 3\cdot 1 \geqslant \frac{m^m}{m!}. \tag{2}$$

Перепишем (2) в виде

$$(2m-1)(2m-3)\ldots[2m-(2m-3)][2m-(2m-1)] \geqslant \frac{m^m}{m!}. \tag{3}$$

Наконец, поделив обе части неравенства (3) на m^m, получим

$$\frac{2m-1}{m}\cdot\frac{2m-3}{m}\cdots\frac{2m-(2m-5)}{m}\cdot\frac{2m-(2m-3)}{m}\cdot\frac{2m-(2m-1)}{m} \geqslant \frac{1}{m!},$$

или

$$\left(2-\frac{1}{m}\right)\left(2-\frac{3}{m}\right)\cdots\left(2-\frac{2m-5}{m}\right)\left(2-\frac{2m-3}{m}\right)\left(2-\frac{2m-1}{m}\right) \geqslant \frac{1}{m!}.$$

Равенство достигается лишь при $m=1$ (см. предыдущую задачу).

111. Придавая n в задаче 107 значения 2, 3, ..., n, получим:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \sqrt{3}-1,$$
$$\frac{1}{\sqrt{3}} < \sqrt{4}-\sqrt{2},$$
$$\frac{1}{\sqrt{4}} < \sqrt{5}-\sqrt{3},$$
$$\cdots\cdots\cdots,$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}.$$

Сложив почленно все эти неравенства, получим

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1}+\sqrt{n}-\sqrt{2}-1.$$

Сложив последнее неравенство с равенством $\frac{1}{\sqrt{1}}=1$, получим доказываемое неравенство:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1}+\sqrt{n}-\sqrt{2}.$$

112. Имеем очевидные неравенства:

$$\left.\begin{aligned}
\left(m+\frac{3}{2}\right)^2 &= m^2+3m+\frac{9}{4} > (m+1)(m+2),\\
\left(m+\frac{7}{2}\right)^2 &= m^2+7m+\frac{49}{4} > (m+3)(m+4),\\
\left(m+\frac{11}{2}\right)^2 &= m^2+11m+\frac{121}{4} > (m+5)(m+6),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\left(m+\frac{4n-1}{2}\right)^2 &= m^2+(4n-1)m+\left(\frac{4n-1}{2}\right)^2 >\\
&> [m+(2n-1)](m+2n).
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Перемножив почленно все неравенства (1), получим:

$$\left(m+\frac{3}{2}\right)^2\left(m+\frac{7}{2}\right)^2\left(m+\frac{11}{2}\right)^2\cdots\left(m+\frac{4n-1}{2}\right)^2>$$
$$>(m+1)(m+2)\ldots[m+(2n-1)](m+2n),$$

или

$$\left(m+\frac{3}{2}\right)^2\left(m+\frac{7}{2}\right)^2\left(m+\frac{11}{2}\right)^2\cdots\left(m+\frac{4n-1}{2}\right)^2>$$
$$>\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots m(m+1)(m+2)\ldots[m+(2n-1)](m+2n)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m},$$

или

$$\left(m+\frac{3}{2}\right)^2\left(m+\frac{7}{2}\right)^2\left(m+\frac{11}{2}\right)^2\cdots\left(m+\frac{4n-1}{2}\right)^2>\frac{(m+2n)!}{m!}. \quad (2)$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей неравенства, получим

$$\left(m+\frac{3}{2}\right)\left(m+\frac{7}{2}\right)\left(m+\frac{11}{2}\right)\cdots\left(m+\frac{4n-1}{2}\right)>\sqrt{\frac{(m+2n)!}{m!}},$$

что и требовалось доказать.

113. Имеем очевидные неравенства:

$$\left.\begin{aligned}\frac{3}{5}&<\frac{5}{7},\\ \frac{7}{9}&<\frac{9}{11},\\ \frac{11}{13}&<\frac{13}{15},\\ &\cdots\\ \frac{4n-1}{4n+1}&<\frac{4n+1}{4n+3}.\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Перемножив почленно неравенства (1), получим:

$$P<\frac{5\cdot 9\cdot 13\ldots(4n+1)}{7\cdot 11\cdot 15\ldots(4n+3)},$$

откуда

$$P<\frac{3}{\dfrac{3\cdot 7\cdot 11\cdot 15\ldots(4n+3)}{5\cdot 9\cdot 13\ldots(4n+1)}}=\frac{3}{P(4n+3)},$$

$$P^2<\frac{3}{4n+3}<\frac{3+1}{4n+3+1}=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}.$$

Следовательно, $P<\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

114. Если $n=1$, то доказываемые неравенства принимают вид

$$\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad (1)$$

(1) — верные неравенства.

В дальнейшем будем считать, что $n \geqslant 2$. Имеем

$$\frac{3}{4} > \frac{2}{3}, \quad \frac{5}{6} > \frac{4}{5}, \quad \frac{7}{8} > \frac{6}{7}, \quad \ldots, \quad \frac{2n-1}{2n} > \frac{2n-2}{2n-1}. \tag{2}$$

Перемножив почленно неравенства, получим

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{2n-1}{2n} > \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n-2}{2n-1}. \tag{3}$$

Умножив обе части (3) на произведение $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{2n-1}{2n}$, получим

$$\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{2n-1}{2n}\right)^2 > \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-1}{2n} = \frac{2}{2n} = \frac{1}{n},$$

откуда следует, что $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{2n-1}{2n} > \frac{1}{\sqrt{n}}$, или

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{2n-1}{2n} > \frac{1}{2\sqrt{n}}. \tag{4}$$

Далее, имеем

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4} < \frac{4}{5}, \quad \frac{5}{6} < \frac{6}{7}, \quad \ldots, \quad \frac{2n-3}{2n-2} < \frac{2n-2}{2n-1}, \quad \frac{2n-1}{2n} < 1. \tag{5}$$

Перемножив почленно неравенства (5), получим

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n-2}{2n-1}. \tag{6}$$

Умножив обе части (6) на произведение $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}$, получим

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}\right)^2 < \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-1}{2n} = \frac{1}{2n}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n}}. \tag{7}$$

Из (1), (4) и (7) следует утверждение задачи.

115. Будем исходить из следующего очевидного неравенства:

$$(2k)!! < (2k+1)!!\ ^{*)}.$$

Перепишем это неравенство (1) так:

$$(2k+2)!! = (2k)!!\,(2k+2) <$$
$$< (2k+1)!!\,(2k+3-1) = (2k+3)!! - (2k+1)!!. \tag{1}$$

*) $(2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2k-2)(2k)$; $(2k+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k-1)(2k+1)$.

Придавая в (1) k значения 1, 2, ..., $n-1$, получим неравенства:

$$\left.\begin{aligned} &4!! < 5!!-3!!,\\ &6!! < 7!!-5!!,\\ &\dots\dots\dots\\ &(2n)!! < (2n+1)!!-(2n-1)!!. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Сложив почленно все неравенства (2) и прибавив к обеим частям полученного неравенства $2!!=3-1$, получим

$$2!!+4!!+\dots+(2n)!! < (2n+1)!!-1.$$

116. Воспользуемся очевидным неравенством $(2k-1)!! < (2k)!!$. Это неравенство можно переписать так: $(2k-1)!!=(2k-3)!!\,(2k-1)< < (2k-2)!!\,(2k-1)=(2k)!!-(2k-2)!!$. Придавая в последнем неравенстве k значения 2, 3, ..., n, получим:

$$\left.\begin{aligned} &3!! < 4!!-2!!,\\ &5!! < 6!!-4!!,\\ &\dots\dots\dots\\ &(2n-1)!! < (2n)!!-(2n-2)!!. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Сложив почленно все неравенства (1) и прибавив к обеим частям полученного неравенства $1!!=1$, будем иметь $1!!+3!!+\dots+(2n-1)!!< < 1-2!!+(2n)!!=(2n)!!-1$, что и требовалось доказать.

117. Имеем:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2^2} < 1-\frac{1}{2},\\ &\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2}-\frac{1}{3},\\ &\frac{1}{4^2} < \frac{1}{3}-\frac{1}{4},\\ &\dots\dots\dots\\ &\frac{1}{(n-1)^2} < \frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1},\\ &\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Складывая эти $n-1$ неравенств, получим $S_n < 1-\frac{1}{n}$. Следовательно, $S_n < 1$.

118. Имеем $\frac{k}{(7+k)^2+(7+k)^3} < \frac{k}{(7+k)^3} < \frac{1}{(7+k)^2} < \frac{7+k-6-k}{(7+k)(6+k)}= =\frac{1}{6+k}-\frac{1}{7+k}$.

119. Имеем:

$$\frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n},$$

$$\frac{1}{n+2} > \frac{1}{2n},$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n},$$

$$\frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}.$$

Сложив эти соотношения, получим

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

120. Придавая в неравенстве задачи 118 k значения 1, 2, ..., n, получим неравенства:

$$\frac{1}{8^2+8^3} < \frac{1}{7}-\frac{1}{8},$$

$$\frac{2}{9^2+9^3} < \frac{1}{8}-\frac{1}{9},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{n}{(7+n)^2+(7+n)^3} < \frac{1}{6+n}-\frac{1}{7+n}.$$

Сложив все эти неравенства, получим $S < \frac{1}{7}-\frac{1}{7+n} < \frac{1}{7}$.

121. Обозначим слагаемые левой части доказываемого неравенства соответственно a_1, a_2, a_3, ..., a_n.

Имеем

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(2k+1)!!\,3^k \cdot k!}{3^{k+1}(k+1)!\,(2k-1)!!} = \frac{2k+1}{3(k+1)} < \frac{2k+2}{3(k+1)} = \frac{2}{3}.$$

Поэтому

$$\frac{a_2}{a_1} < \frac{2}{3},$$

$$\frac{a_3}{a_2} < \frac{2}{3},$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} < \frac{2}{3}.$$

Перемножая почленно все эти неравенства, получим $\frac{a_{m+1}}{a_1} < \left(\frac{2}{3}\right)^m$, или $\frac{(2m+1)!!}{3^{m+1}(m+1)!} < \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^m$. Придавая в последнем неравенстве m значения 1, 2, 3, ..., $(n-1)$, получим

$$\frac{3!!}{3^2\,2!} < \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^1,$$

$$\frac{5!!}{3^3\,3!} < \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2,$$

. . . .

$$\frac{(2n-1)!!}{3^n\cdot n!} < \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

Сложив все эти неравенства почленно и прибавив к обеим частям полученного неравенства по $\frac{1}{3\cdot 1!}=\frac{1}{3}$, получим

$$S < \frac{1}{3}\left[1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\dots+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\,\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} < 1.$$

122. Рассмотрим отношение двух соседних слагаемых левой части доказываемого неравенства:

$$\frac{\frac{k+1}{2^{k+1}}}{\frac{k}{2^k}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{k}\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right),\ \text{где}\ k=n+1,\ \ n+2,\ \ \dots, m-1.$$

Образуя серию таких неравенств для $k=n+1,\ n+2,\ \dots,\ j$ и перемножая их, получим $\frac{j+1}{(n+1)\,2^{j-n}}\leqslant\frac{1}{2^{j-n}}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{j-n}$, откуда $\frac{j+1}{2^{j+1}}\leqslant\frac{1}{2^{j-n}}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{j-n}\frac{n+1}{2^{n+1}}$. Далее, придавая в последнем неравенстве j значения $n+1,\ n+2,\ \dots,\ m-1$, получим серию неравенств. Сложив все полученные неравенства и прибавив к обеим частям полученного неравенства $\frac{n+1}{2^{n+1}}$, находим

$$S=\frac{n+1}{2^{n+1}}\left[1+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)+\dots+\frac{1}{2^{m-n-1}}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{m-n-1}\right]=$$

$$=\frac{n+1}{2^{n+1}}\,\frac{1-\frac{1}{2^{m-n}}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{m-n}}{1-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} < \frac{(n+1)^2}{n\cdot 2^n}.$$

123. Так как $x > 0$, по условию, $2^x > 0$ при любом x, то доказываемое неравенство можно последовательно переписать в виде

$$\frac{x(4^x - 4\cdot 2^x + 1) + 2^x(x^2+1)}{x\cdot 2^x} > 0,$$

$$2^x - 4 + \frac{1}{2^x} + x + \frac{1}{x} > 0, \quad 2^x + \frac{1}{2^x} + x + \frac{1}{x} > 4.$$

Известно, что $2^x + \frac{1}{2^x} > 2$, а если $x > 0$, то и $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$, поэтому последнее неравенство верно, а следовательно, верно исходное.

124. Пусть $a_1 = b_1 = a$; тогда в силу условия $a_2 = b_2$ имеем

$$a + d = aq. \qquad (1)$$

Здесь d и q — разность и знаменатель соответствующих прогрессий. Заметим, что в силу условия $a_n > 0$ для всех n разность d должна быть неотрицательной. Так как, кроме того, $a_1 \neq a_2$, то $d > 0$. Из формулы (1) ввиду этого следует $q = 1 + \frac{d}{a} > 1$. Нам нужно доказать, что при $n > 2$

$$a + (n-1)d < aq^{n-1}. \qquad (2)$$

Так как в силу равенства (1) $d = a(q-1)$, то (2) имеет место, если $a(n-1)(q-1) < a(q^{n-1} - 1)$. Деля обе части последнего наравенства на положительную величину $a(q-1)$, получаем $n - 1 < 1 + q + \ldots + q^{n-2}$. Так как $q > 1$, то это неравенство справедливо.

125. Пусть a и aq^{n-1} — первые и последние члены прогрессий, где n — число членов прогрессий. Таким образом, надо доказать неравенство

$$\frac{(a + aq^{n-1})n}{2} > a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}, \qquad (1)$$

или

$$(1 + q^{n-1})n > 2(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}). \qquad (2)$$

Вначале убедимся, что при натуральном $m < n-1$ имеет место неравенство $1 + q^{n-1} > q^m + q^{n-m-1}$, или $(1 - q^m)(1 - q^{n-m-1}) > 0$. Последнее верно, так как при $q < 1$ оба сомножителя левой части неравенства положительны, а при $q > 1$ оба сомножителя отрицательны. Итак, имеем:

$$\left.\begin{array}{l}
1 + q^{n-1} = 1 + q^{n-1}, \\
1 + q^{n-1} > q + q^{n-2}, \\
1 + q^{n-1} > q^2 + q^{n-3}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
1 + q^{n-1} > q^m + q^{n-(m+1)}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
1 + q^{n-1} = q^{n-1} + 1 \quad (\text{при } m = n-1).
\end{array}\right\} \qquad (3)$$

Сложив почленно все соотношения (3), получим

$$(1 + q)^{n-1} n > 2(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}).$$

Итак, неравенство (1) доказано.

126. Пусть

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2=b. \qquad (1)$$

Следовательно, надо доказать, что $b \geqslant \frac{1}{n}$ при условии

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=1. \qquad (2)$$

Имеем

$$\left(\frac{a_1}{b}-1\right)^2+\left(\frac{a_2}{b}-1\right)^2+\left(\frac{a_3}{b}-1\right)^2+\ldots+\left(\frac{a_n}{b}-1\right)^2 \geqslant 0,$$

или

$$\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2}{b^2}-2\,\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{b}+n \geqslant 0,$$

или, учитывая (1) и (2), имеем $\frac{b}{b^2}-2\,\frac{1}{b}+n \geqslant 0$, откуда $n \geqslant \frac{2}{b}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}$, а поэтому $b \geqslant \frac{1}{n}$.

127. Очевидно, что $a_i^p-a_j^p$ и $a_i^q-a_j^q$ имеют одинаковые знаки, поэтому $(a_i^p-a_j^p)(a_i^q-a_j^q)>0$ или

$$a_i^{p+q}+a_j^{p+q}>a_i^p a_j^q+a_i^q a_j^p. \qquad (1)$$

Ясно, что число неравенств (1) равно $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$. Сложив их почленно, получим

$$2(n-1)(a_1^{p+q}+a_2^{p+q}+\ldots+a_n^{p+q})>2\sum a_i^p a_j^q,$$

откуда

$$n(a_1^{p+q}+a_2^{p+q}+\ldots+a_n^{p+q})>\sum a_i^{p+q}+\sum a_i^p a_j^q,$$

т. е.

$$n(a_1^{p+q}+a_2^{p+q}+\ldots+a_n^{p+q})>$$
$$>(a_1^p+a_2^p+\ldots+a_n^p)(a_1^q+a_2^q+\ldots+a_n^q).$$

128. Для определенности пусть $a>b>c$, тогда имеем

$$a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+b^{n-1}>b^{n-1}+b^{n-2}c+\ldots+c^{n-1}. \qquad (1)$$

Поскольку a, b и c — члены арифметической прогрессии, то

$$a-b=b-c>0. \qquad (2)$$

В силу (1) и (2) получаем

$$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+b^{n-1})>(b-c)(b^{n-1}+b^{n-2}c+\ldots+c^{n-1}),$$

или $a^n-b^n>b^n-c^n$, откуда $a^n+c^n>2b^n$, что и требовалось доказать.

129. Из условия следует, что

$$2ac=ba+bc, \qquad (1)$$

т. е. числа ab, ac, bc являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии. Так как a, b, c различны, то ab, ac, bc также различны, поэтому разность прогрессии отлична от нуля. Для таких чисел в задаче 128 мы доказали, что при $n \neq 1$

$$(ab)^n+(bc)^n > 2(ac)^n. \qquad (2)$$

Из равенства (1) получаем

$$ac=b\,\frac{a+c}{2}. \qquad (3)$$

Известно, что $\frac{a+c}{2} > \sqrt{ac}$ (если $a \neq c$), поэтому из (3) получаем $ac > b\sqrt{ac}$ или $ac > b^2$, $(ac)^n > b^{2n}$,

$$2(ac)^n > 2b^{2n}. \qquad (4)$$

Из (2) и (4) при $n \neq 1$ или из (1) и (4) при $n=1$ следует $(ab)^n+(bc)^n > 2b^{2n}$, или $a^n+c^n > 2b^n$, что и требовалось доказать.

130. Пусть для определенности $a > b > c$. Поскольку a, b, c — последовательные члены геометрической прогрессии, то

$$b^2=ac. \qquad (1)$$

Имеем $(a^n-c^n)^2 > 0$, или

$$a^{2n}-2a^nc^n+c^{2n} > 0. \qquad (2)$$

Прибавив к обеим частям неравенства (2) по $4a^nc^n$, получим $(a^n+c^n)^2 > 4a^nc^n$, откуда $a^n+c^n > 2\sqrt{(ac)^n}$, или, учитывая равенство (1), получаем $a^n+c^n > 2b^n$, что и требовалось доказать.

131. Из условия $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$ следует, что

$$a=\frac{bc}{2c-b}, \qquad (1)$$

а из условия $\frac{1}{b}+\frac{1}{d}=\frac{2}{c}$ находим, что

$$d=\frac{bc}{2b-c}. \qquad (2)$$

Учитывая (1) и (2), получаем

$$(a+d)-(b+c)=\frac{bc}{2c-b}+\frac{bc}{2b-c}-(b+c)=\frac{2(b+c)(b-c)^2}{(2c-b)(2b-c)}.$$

Из условия следует, что $b+c > 0$ $\left(\text{так как } b > 0 \text{ и } \frac{b}{2} < c < 2b\right)$, $(b-c)^2 > 0$, $2c-b > 0$, $2b-c > 0$, поэтому рассматриваемая разность положительна, а следовательно, $a+d > b+c$.

132. Числители обеих частей данного неравенства суть суммы арифметических прогрессий с разностью 1. Поэтому данное неравенство можно переписать так:

$$\frac{(1+m)\,m}{2m} > \frac{(1+n)\,n}{2n}, \text{ откуда } m > n.$$

133. Пусть члены геометрической прогрессии $a, aq, aq^2, \ldots, aq^{n-1}$ ($a>0$ потому, что все члены положительны; $n>2$). Согласно условию задачи требуется доказать неравенство:

$$\frac{a(1+q^{n-1})}{2} > \frac{a(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1})}{n}, \qquad (1)$$

или

$$n(1+q^{n-1}) > 2(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}),$$

или

$$\underbrace{(1+q^{n-1})+(1+q^{n-1})+\ldots+(1+q^{n-1})}_{n \text{ раз}} >$$
$$> \underbrace{(1+q^{n-1})+(q+q^{n-2})+\ldots+(q^{n-2}+q)+(q^{n-1}+1)}_{n \text{ раз}},$$

или

$$[(1+q^{n-1})-(1+q^{n-1})]+[(1+q^{n-1})-(q+q^{n-2})]+\ldots$$
$$\ldots+[(1+q^{n-1})-(q^{n-2}+q)]+[(1+q^{n-1})-(q^{n-1}+1)] > 0. \qquad (2)$$

Докажем, что выражения в каждой из квадратных скобок положительны. Действительно, $(1+q^{n-1})-(q^{m-1}+q^{n-m})=(1-q^{m-1})\times\times(1-q^{n-m})>0$ $(m<n)$, так как оба множителя положительны при $0<q<1$ и оба отрицательны при $q>1$. Таким образом, мы доказали неравенство (2), а следовательно, и неравенство (1).

134. 1) Пусть p и q — целые числа. Требуется доказать, что $q(a^p-1)>p(a^q-1)$, или

$$(a-1)[q(a^{p-1}+a^{p-2}+\ldots+1)-p(a^{q-1}+a^{q-2}+\ldots+1)]>0,$$

или

$$(a-1)[q(a^{p-1}+a^{p-2}+\ldots+a^q)-$$
$$-(p-q)(a^{q-1}+a^{q-2}+\ldots+1)]>0. \qquad (1)$$

Если $0<a<1$, то

$$a^{p-1}+a^{p-2}+\ldots+a^q<(p-q)a^q, \qquad (2)$$

а

$$a^{q-1}+a^{q-2}+\ldots+1>qa^{q-1}. \qquad (3)$$

Учитывая (2) и (3), заключаем, что при $0<a<1$ имеет место неравенство $(a-1)[q(p-q)a^q-(p-q)qa^{q-1}]>0$. Следовательно, неравенство (1) тем более верно.

Если же $a>0$, то, рассуждая, как и в случае $0<a<1$, убеждаемся. что $(1-a)[(p-q)qa^{q-1}-q(p-q)a^q]>0$. Следовательно, неравенство (1) подавно имеет место.

2) Теперь пусть p и q (или хотя бы одно из них) — дробные числа. Пусть $p=\frac{m}{r}$, $q=\frac{n}{r}$ (дроби всегда можно привести к общему знаменателю), где m, n, r — целые числа и $m>n$. Таким образом, надо доказать, что $n\left(a^{\frac{m}{r}}-1\right)>m\left(a^{\frac{n}{r}}-1\right)$ или $n(b^m-1)>>m(b^n-1)$, где $b^r=a$. Но в случае 1) мы доказали, что это неравенство верно.

135. Первое решение. Имеем $x^2+xy+my^2-m=$ $=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+(m-1)(y^2-1)+\left(\frac{3y^2}{4}-1\right)$. Так как y — целое число, отличное от нуля, а m — целое положительное число, то $m-1\geqslant 0$, $y^2-1\geqslant 0$. Поэтому и произведение $(m-1)(y^2-1)\geqslant 0$. Кроме того, и $\left(x+\frac{y}{2}\right)^2\geqslant 0$.

Рассмотрим теперь два случая. Пусть сначала $|y|\geqslant 2$, тогда $\frac{3y^2}{4}\geqslant 3$, $\frac{3y^2}{4}-1\geqslant 2>0$. Таким образом, $\left(x+\frac{y}{2}\right)^2\geqslant 0$, $(m-1)(y^2-1)^2\geqslant 0$ и $\frac{3y^2}{4}-1>0$, следовательно, в этом случае $x^2+xy+my^2-m>0$. Пусть теперь $|y|<2$. Это значит, что $y=\pm 1$ (ведь $y\neq 0$). Тогда $x^2+xy+my^2-m=x^2\pm x=x(x\pm 1)$. Но так как x — целое, то $x\pm 1$ тоже целое, а если два целых числа отличаются на единицу, то либо они имеют одинаковый знак, либо одно из них равно нулю. Поэтому их произведение неотрицательно. Итак, и в этом случае ($|y|<2$) имеем $x^2+xy+my^2-m\geqslant 0$.

Второе решение. Перепишем доказываемое неравенство в виде $\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\left(m-\frac{1}{4}\right)y^2-m\geqslant 0$. При $y=\pm 1$ оно принимает вид

$$\left(x\pm\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\geqslant 0,$$

что действительно справедливо, ибо x — целое, и значит, $\left|x\pm\frac{1}{2}\right|\geqslant\frac{1}{2}$. Если же y отличен от значений ± 1, т. е. $|y|\geqslant 2$, то $y^2\geqslant 4$, и потому

$$\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\left(m-\frac{1}{4}\right)y^2-m\geqslant\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\left(m-\frac{1}{4}\right)4-m=$$

$$=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+3m-1>0.$$

Таким образом, утверждение задачи доказано.

136. Пусть $\frac{(x+m)^2-4mn}{2(x-n)}=y$, тогда $x^2+2(m-y)x+m^2-$ $-4mn+2ny=0$. Если x — вещественное число, то дискриминант этого уравнения неотрицателен, т. е. $(m-y)^2-m^2+4mn-2ny\geqslant 0$, или $(y-2m)(y-2n)\geqslant 0$. Поэтому y принимает те и только те значения, которые не лежат в промежутке между числами $2m$ и $2n$, т. е. $y\leqslant 2m$ и $y\geqslant 2n$, если $m<n$, или $y\leqslant 2n$ и $y\geqslant 2m$, если $n<m$.

137. Пусть $y=\frac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5}$; тогда имеем

$$(y-2)x^2+2(2y-3)x+5y-6=0. \tag{1}$$

Решая (1) относительно x (при $y\neq 2$), получаем

$$x=\frac{3-2y\pm\sqrt{(3-2y)^2-(y-2)(5y-6)}}{y-2}. \tag{2}$$

Для того чтобы x было действительным числом, необходимо и достаточно, чтобы либо $y=2$ (и тогда $x=-2$, как видно из (1)), либо $(3-2y)^2-(y-2)(5y-6)\geqslant 0$, или $y^2-4y+3\leqslant 0$, или $(y-1)(y-3)\leqslant 0$, откуда $1\leqslant y\leqslant 3$, что и требовалось доказать.

Равенство $y=1$ достигается лишь при $x=-1$; равенство $y=3$ достигается лишь при $x=-3$.

§ 2. Доказательство неравенств методом математической индукции

138. При $n=3$ имеем $2^3>7$, что верно. Докажем, что если выполняется неравенство

$$2^n > 2n+1, \tag{1}$$

то имеет место и неравенство $2^{n+1} > 2(n+1)+1=2n+3$, или

$$2^n\cdot 2 > 2n+3. \tag{2}$$

Учитывая (1), заключаем, что если верно неравенство

$$(2n+1)\cdot 2 > 2n+3, \tag{3}$$

то верно и неравенство (2). Неравенство (3) переписывается в виде $2n>1$, что очевидно. Таким образом, мы доказали, что неравенство (3) верно, а следовательно, и подавно выполняется неравенство (2). Итак, на основании принципа математической индукции заключаем, что утверждение задачи имеет место при натуральном $n\geqslant 3$.

139. При $n=1$ имеем $1-a<\frac{1}{1+a}$, что очевидно, так как $a>0$. Далее, пусть доказываемое неравенство имеет место при $n=k$, т. е.

$$(1-a)^k < \frac{1}{1+ka}. \tag{1}$$

Докажем, что если выполняется (1), то верно и

$$(1-a)^{k+1} < \frac{1}{1+(k+1)a},$$

или

$$(1-a)^k(1-a) < \frac{1}{1+(k+1)a}. \tag{2}$$

Если мы докажем, что верно неравенство

$$\frac{1}{1+ka}(1-a) < \frac{1}{1+(k+1)a}, \tag{3}$$

то тем самым мы докажем и неравенство (2), так как $\frac{1}{1+ka}>(1-a)^k$. Неравенство (3) перепишем в виде $(1-a)[1+(k+1)a]<1+ka$, т. е. $-a^2(k+1)<0$, что очевидно.

Итак, доказано, что утверждение задачи верно при любом натуральном n.

140. Если $n=2$, то имеем $\frac{16}{3} < \frac{4!}{(2!)^2}$, что очевидно. Допустим, что доказываемое неравенство выполняется для $n=k$, т. е.

$$\frac{4^k}{k+1} < \frac{(2k)!}{(k!)^2}, \tag{1}$$

и докажем, что тогда оно имеет место и при $n=k+1$, т. е.

$$\frac{4^{k+1}}{k+2} < \frac{[2(k+1)]!}{[(k+1)!]^2}. \tag{2}$$

Имеем

$$\frac{4^{k+1}}{k+2} = \frac{4^k \cdot 4(k+1)}{(k+2)(k+1)}. \tag{3}$$

Из (1) и (3) следует, что $\frac{4^{k+1}}{k+2} < \frac{(2k+2)!\,2}{(k!)^2(2k^2+5k+2)} < \frac{(2k+2)!\,2}{(k!)^2(k+1)^2\,2} =$ $= \frac{[2(k+1)]!}{[(k+1)!]^2}$.

Таким образом, мы доказали, что если верно (1), то верно и (2), а также мы убедились, что утверждение задачи верно при $n=2$. В силу изложенного на основании принципа математической индукции заключаем, что доказываемое неравенство справедливо для любого натурального $n \geqslant 2$.

141. При $n=2$ доказываемое неравенство имеет вид $2!4! > (3!)^2$, что верно. Предположим, что подлежащее доказательству неравенство справедливо при $n=k-1$, т. е.

$$2!4! \ldots (2k-2)! > (k!)^{k-1}. \tag{1}$$

Докажем, что тогда утверждение задачи верно и при $n=k$, т. е.

$$2!4! \ldots (2k)! > [(k+1)!]^k. \tag{2}$$

Умножив обе части неравенства (1) на $(2k)!$, получим

$$2!4! \ldots (2k-2)!\,(2k)! > (2k)!\,(k!)^{k-1},$$

или

$$2!4! \ldots (2k-2)!\,(2k)! > \frac{(2k)!\,(k!)^k}{k!},$$

т. е.

$$2!4! \ldots (2k-2)!\,(2k)! > (2k)(2k-1) \ldots (k+1)\,(k!)^k. \tag{3}$$

Имеем

$$(2k)(2k-1) \ldots (k+1)\,(k!)^k > (k+1)^k\,(k!)^k = [(k+1)!]^k. \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует $2!4! \ldots (2k-2)!\,(2k)! > [(k+1)!]^k$. Итак, мы установили, что доказываемое неравенство верно при $n=2$, а также убедились, что верен переход от $n=k-1$ к $n=k$. Отсюда на основании принципа математической индукции следует, что утверждение задачи верно при любом натуральном $n \geqslant 2$.

142. При $n=1$ доказываемое неравенство имеет вид $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3\cdot 1+1}}$, что верно (имеет место равенство). Далее, предполагая, что утверждение задачи верно при $n=k$, т. е.

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2k-1}{2k}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3k+1}},\tag{1}$$

докажем, что оно верно и при $n=k+1$, т. е.

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3k+4}}.\tag{2}$$

Умножив обе части неравенства (1) на положительную дробь $\frac{2k+1}{2k+2}$, получим

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}.$$

Таким образом, остается доказать, что

$$\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3k+4}}.\tag{3}$$

Умножив обе части (3) на $(2k+2)\sqrt{3k+1}\cdot\sqrt{3k+4}$ и возведя обе части полученного неравенства в квадрат, получим $(2k+1)^2\times\times(3k+4)\leqslant(2k+2)^2(3k+1)$, или

$$12k^3+28k^2+19k+4\leqslant 12k^3+28k^2+20k+4.\tag{4}$$

Неравенство (4) верно, так как $k>0$. Итак, неравенство (3) доказано, следовательно, верно и неравенство (2). В силу изложенного заключаем, что подлежащее доказательству неравенство верно при любом натуральном n. Неравенство (3) можно доказать и так:

$$\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}=\frac{2k+1}{\sqrt{(3k+1)(2k+2)^2}}=$$
$$=\frac{2k+1}{\sqrt{(3k+4)(2k+1)^2+k}}<\frac{2k+1}{\sqrt{(3k+4)(2k+1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3k+4}}.$$

143. При $n=1$ доказываемое неравенство верно, так как $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$ при любом положительном x. При $n=2$ утверждение задачи принимает вид $x^2+1+1+\frac{1}{x^2}\geqslant 3$, что верно, так как $x^2+\frac{1}{x^2}\geqslant 2$. Далее, предположим, что доказываемое неравенство справедливо при $n=k$, где k—некоторое натуральное число, т. е.

$$x^k+x^{k-2}+x^{k-4}+\ldots+\frac{1}{x^{k-4}}+\frac{1}{x^{k-2}}+\frac{1}{x^k}\geqslant k+1.\tag{1}$$

Докажем, что подлежащее доказательству неравенство справедливо и при $n=k+2$, т. е.

$$x^{k+2}+x^k+x^{k-2}+\ldots+\frac{1}{x^{k-2}}+\frac{1}{x^k}+\frac{1}{x^{k+2}}\geqslant k+3.\tag{2}$$

Действительно, сложив почленно неравенство (1) с известным неравенством $x^{k+2}+\frac{1}{x^{k+2}}\geqslant 2$, получим неравенство (2). Итак, мы убедились, что доказываемое неравенство верно при $n=1$ и $n=2$. Мы доказали также, что из справедливости неравенства при $n=k$ следует его справедливость и при $n=k+2$, т. е. верен переход от $n=k$ к $n=k+2$.

Таким образом, 1) из того, что доказываемое неравенство справедливо при $n=1$ и что верен переход от k к $k+2$, заключаем, что наше неравенство верно для любого нечетного n; 2) в силу того, что неравенство имеет место при $n=2$ и что верен переход от $n=k$ к $n=k+2$, заключаем, что подлежащее доказательству неравенство верно для любого четного n. Следовательно, на основании 1) и 2) утверждение задачи справедливо при любом натуральном n.

Эту задачу можно решить и не пользуясь методом математической индукции, например, так. Пусть S — левая часть доказываемого неравенства. При четном n имеем

$$S=\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)+\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right)+\ldots+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x^0+\frac{1}{x^0}\right)\geqslant$$
$$\geqslant\underbrace{2+2+2+\ldots+2}_{\frac{n}{2}\text{ раз}}+1=n+1.$$

При нечетном n имеем

$$S=\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)+\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right)+\ldots+\left(x+\frac{1}{x}\right)\geqslant$$
$$\geqslant\underbrace{2+2+2+\ldots+2}_{\frac{n+1}{2}\text{ раз}}=n+1.$$

144. Если $n=2$, то, учитывая, что $\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\geqslant 0$ и $\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\leqslant 1$, имеем

$$\frac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2}{2}=\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\leqslant\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}. \qquad (1)$$

Предположим, что доказываемое неравенство верно для числа $n=2^k$, и докажем, что оно тогда верно для числа $2n=2^{k+1}$. Имеем

$$A=\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{2^k}+\alpha_{2^k+1}+\ldots+\alpha_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}=$$
$$=\sin\frac{\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{2^k}}{2^k}+\frac{\alpha_{2^k+1}+\ldots+\alpha_{2^{k+1}}}{2^k}}{2}.$$

В силу неравенства (1) заключаем, что

$$A\geqslant\frac{\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{2^k}}{2^k}+\sin\frac{\alpha_{2^k+1}+\ldots+\alpha_{2^{k+1}}}{2^k}}{2}=B.$$

Далее, так как предполагается, что доказываемое неравенство имеет место для $n=2^k$, то

$$B \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\alpha_1+\ldots+\sin\alpha_{2^k}}{2^k}+\frac{\sin\alpha_{2^k+1}+\ldots+\sin\alpha_{2^{k+1}}}{2^k}\right)=$$

$$=\frac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\ldots+\sin\alpha_{2^k}+\sin\alpha_{2^k+1}+\ldots+\sin\alpha_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}.$$

Отсюда на основании принципа индукции заключаем, что доказываемое неравенство верно для чисел вида 2^k, т. е. для $n=2, 4, 8, \ldots$ Для того чтобы доказать, что подлежащее доказательству неравенство верно для любого n, применим метод обратной индукции (индукция вниз). Предположим, что утверждение задачи верно для некоторого n, и докажем, что тогда оно верно и для $n-1$. Пусть $\alpha_n=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}}{n-1}$. Так как $0\leqslant\alpha_i\leqslant\pi$, то $0\leqslant\alpha_n=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}}{n-1}\leqslant\pi$. Из неравенства, предполагаемого верным, следует

$$\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}+\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}}{n-1}}{n}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\ldots+\sin\alpha_{n-1}+\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}}{n-1}}{n},$$

или

$$\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}}{n-1}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\ldots+\sin\alpha_{n-1}+\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}}{n-1}}{n},$$

откуда последовательно получаем

$$n\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}}{n-1}\geqslant$$

$$\geqslant\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\ldots+\sin\alpha_{n-1}+\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}}{n-1},$$

$$(n-1)\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}}{n-1}\geqslant\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\ldots+\sin\alpha_{n-1};$$

$$\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}}{n-1}\geqslant\frac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\ldots+\sin\alpha_{n-1}}{n-1}.$$

Таким образом, исходя из предположения, что утверждение задачи верно для числа n, мы доказали, что оно верно и для числа $n-1$. Итак, доказываемое неравенство имеет место для любого n.

неравенство имеет вид

$$|\alpha_1+\alpha_2|\leqslant|\alpha_1|+|\alpha_2|, \tag{1}$$

что верно (см. задачу 65).

Предположим, что утверждение задачи выполняется при $n=k$, т. е.

$$|\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k|\leqslant|\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_k|. \tag{2}$$

Докажем, что оно имеет место и при $n=k+1$, т. е.

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k+\alpha_{k+1}|\leqslant|\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_k|+|\alpha_{k+1}|. \tag{3}$$

Обозначив $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k$ через A, неравенство (3) перепишем в виде

$$|A+\alpha_{k+1}|\leqslant|\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_k|+|\alpha_{k+1}|, \tag{4}$$

а неравенство (2) — в виде

$$|A|\leqslant|\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_k|. \tag{5}$$

Так как $|A+\alpha_{k+1}|\leqslant|A|+|\alpha_{k+1}|$, то в силу (5) верно неравенство (4).

§ 3. Средние величины. Классические неравенства

146. Если в правой части равенства

$$A=\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n} \tag{1}$$

заменим каждое из чисел a_1, a_2, a_3, ..., a_n числом $\min(a)$, то получим

$$A\geqslant\frac{n\cdot\min(a)}{n}=\min(a). \tag{2}$$

Если же в правой части равенства (1) заменим каждое из чисел a_1, a_2, a_3, ..., a_n числом $\max(a)$, то получим

$$A\leqslant\frac{n\cdot\max(a)}{n}=\max(a). \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что $\min(a)\leqslant A\leqslant\max(a)$, т. е.

$$\min(a)\leqslant\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}\leqslant\max(a).$$

147. Первое решение. Если в правой части равенства

$$G=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\ \ldots\ a_n} \tag{1}$$

заменим каждое из чисел a_1, a_2, a_3, ..., a_n числом $\min(a)$, то получим

$$G\geqslant\sqrt[n]{[\min(a)]^n}=\min(a). \tag{2}$$

Если же в правой части равенства (1) заменим каждое из чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ числом $\max(a)$, то получим

$$G \leqslant \sqrt[n]{[\max(a)]^n} = \max(a). \qquad (3)$$

Из (2) и (3) следует, что $\min(a) \leqslant G \leqslant \max(a)$, т. е.

$$\min(a) \leqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_n} \leqslant \max(a).$$

Второе решение. Поскольку с возрастанием числа b возрастает и $\lg b$, то на основании задачи 146 имеем

$$\lg \min(a) \leqslant \frac{\lg a_1 + \lg a_2 + \lg a_3 + \ldots + \lg a_n}{n} \leqslant \lg \max(a),$$

или

$$\lg \min(a) \leqslant \frac{\lg(a_1 a_2 a_3 \ldots a_n)}{n} \leqslant \lg \max(a),$$

или

$$\lg \min(a) \leqslant \lg \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n} \leqslant \lg \max(a).$$

Так как с возрастанием $\lg b$ возрастает и b, то из последнего равенства следует:

$$\min(a) \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n} \leqslant \max(a),$$

что и требовалось доказать.

148. Первое решение. Очевидно, что имеют место неравенства

$$a_1^m + a_2^m + a_3^m + \ldots + a_n^m \geqslant n[\min(a)]^m, \qquad (1)$$

$$a_1^m + a_2^m + a_3^m + \ldots + a_n^m \leqslant n[\max(a)]^m. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует

$$[\min(a)]^m \leqslant \frac{a_1^m + a_2^m + a_3^m + \ldots + a_n^m}{n} \leqslant [\max(a)]^m,$$

или

$$\min(a) \leqslant \sqrt[m]{\frac{a_1^m + a_2^m + a_3^m + \ldots + a_n^m}{n}} \leqslant \max(a).$$

Второе решение. На основании задачи 146 имеем

$$\min(a^m) \leqslant \frac{a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m}{n} \leqslant \max(a^m). \qquad (1)$$

Так как a^m возрастает вместе с a, то $\max(a^m) = [\max(a)]^m$, а $\min(a^m) = [\min(a)]^m$, поэтому (1) можно написать в виде

$$[\min(a)]^m \leqslant \frac{a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m}{n} \leqslant [\max(a)]^m. \qquad (2)$$

Поскольку $\sqrt[n]{b}$ возрастает вместе с b, то из (2) следует

$$\min(a) \leqslant \sqrt[m]{\frac{a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m}{n}} \leqslant \max(a),$$

что и требовалось доказать.

В частности, 1) при $m=1$

$$\min(a) \leqslant \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n} \leqslant \max(a),$$

что было доказано непосредственно в задаче 146;

2) при $m=2$

$$\min(a) \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \leqslant \max(a).$$

149. Первое решение. Если в правой части равенства

$$H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \qquad (1)$$

заменим каждое из чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ числом $\min(a)$, то получим

$$H \geqslant \frac{n}{n \cdot \frac{1}{\min(a)}} = \min(a). \qquad (2)$$

Если же в правой части равенства (1) заменим каждое из чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ числом $\max(a)$, то получим

$$H \leqslant \frac{n}{n \cdot \frac{1}{\max(a)}} = \max(a). \qquad (3)$$

Из (2) и (3) следует, что $\min(a) \leqslant H \leqslant \max(a)$, т. е.

$$\min(a) \leqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \leqslant \max(a).$$

Второе решение. На основании задачи 146 имеем

$$\min\left(\frac{1}{a}\right) \leqslant \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}}{n} \leqslant \max\left(\frac{1}{a}\right). \qquad (1)$$

Поскольку наименьшее из чисел $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ обратно по величине наибольшему из чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, а наибольшее из чисел $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ обратно по величине наименьшему из чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, т. е. $\min\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{\max(a)}$ и $\max(a)=$ $=\frac{1}{\min(a)}$, то (1) можно переписать в виде

$$\frac{1}{\max(a)} \leqslant \frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}}{n} \leqslant \frac{1}{\min(a)}. \qquad (2)$$

Так как из $\frac{p}{q}>\frac{r}{s}$, где $p>0$, $q>0$, $r>0$, $s>0$, следует, что $\frac{q}{p}<\frac{s}{r}$, то из (2) следует, что

$$\min(a) \leqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \leqslant \max(a),$$

что и требовалось доказать.

150. Имеем

$$\min\left(\frac{a}{b}\right) \leqslant \frac{a_1}{b_1} \leqslant \max\left(\frac{a}{b}\right),$$

откуда

$$b_1 \min\left(\frac{a}{b}\right) \leqslant a_1 \leqslant b_1 \max\left(\frac{a}{b}\right).$$

Аналогично,

$$b_2 \min\left(\frac{a}{b}\right) \leqslant a_2 \leqslant b_2 \max\left(\frac{a}{b}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b_n \min\left(\frac{a}{b}\right) \leqslant a_n \leqslant b_n \max\left(\frac{a}{b}\right).$$

Сложив последние n неравенств, получим

$$(b_1+b_2+\ldots+b_n)\min\left(\frac{a}{b}\right) \leqslant$$

$$\leqslant a_1+a_2+\ldots+a_n \leqslant (b_1+b_2+\ldots+b_n)\max\left(\frac{a}{b}\right). \qquad (1)$$

Поскольку $b_1, b_2, \ldots, b_n$ положительны, то, разделив все члены неравенства (1) на $b_1+b_2+\ldots+b_n$, получим

$$\min\left(\frac{a}{b}\right) \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n} \leqslant \max\left(\frac{a}{b}\right), \qquad (2)$$

что и требовалось доказать.

Если $b_1=b_2=\ldots=b_n=1$, то из (2) имеем

$$\min(a) \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \leqslant \max(a),$$

т. е. задача 146 есть частный случай этой задачи. Если взять вместо a_i число $a_i k_i$ $(k_i > 0)$, а вместо b_i взять число k_i, где $i = 1, 2, \ldots, n$, то из (2) следует еще одно интересное неравенство:

$$\min(a) \leqslant \frac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_n a_n}{k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_n} \leqslant \max(a),$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — положительны.

151. Пусть M самая большая, а m самая малая из величин $a^{\frac{1}{p}}, b^{\frac{1}{q}}, c^{\frac{1}{r}}, \ldots, l^{\frac{1}{v}}$; тогда

$$m^p \cdot m^q \cdot m^r \ldots m^v < a \cdot b \cdot c \ldots l < M^p \cdot M^q \cdot M^r \ldots M^v,$$

или

$$m^{p+q+r+\ldots+v} < a \cdot b \cdot c \ldots l < M^{p+q+r+\ldots+v}. \qquad (1)$$

Возведя все три члена (1) в степень $\frac{1}{p+q+r+\ldots+v}$, получим

$$m < (a \cdot b \cdot c \ldots l)^{\frac{1}{p+q+r+\ldots+v}} < M,$$

что и требовалось доказать.

152. П е р в о е р е ш е н и е. На сторонах прямого угла CAD отложим отрезки $AC = \sqrt{a_2}$, $AD = \sqrt{a_1}$, и проведем биссектрису AB угла CAD (рис. 4). Далее, через точку D проводим прямую DFE параллельно AC (точка F на AB, а точка E на перпендикуляре CB к AC). Фигура $ADFBC$ состоит из двух равнобедренных прямоугольных треугольников ADF и ACB. Их площади: $T = \frac{1}{2} a_1$ и $S = \frac{1}{2} a_2$, а площадь прямоугольника $ADEC$ равна $\sqrt{a_1 a_2}$. Из рисунка легко увидеть, что площадь фигуры $ADFBC$ не меньше площади прямоугольника $ADEC$, т. е.

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1 \cdot a_2}.$$

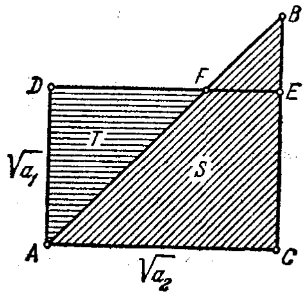

Рис. 4.

Из рисунка также видим, что равенство имеет место лишь тогда, когда точки B и E совпадают, т. е. лишь тогда, когда $a_1 = a_2$.

В т о р о е р е ш е н и е. Построим на отрезке $AB = a_1 + a_2$ как на диаметре полуокружность с центром O (рис. 5). Пусть $AC = a_1$, $CB = a_2$. Из точки C проведем перпендикуляр к AB до пересечения с полуокружностью в точке D. Из геометрии известно, что

$$DC = \sqrt{AC \cdot CB} = \sqrt{a_1 \cdot a_2}. \qquad (1)$$

Так как диаметр $AB=a_1+a_2$, то радиус $OD=\frac{a_1+a_2}{2}$. Из прямоугольного треугольника OCD имеем

$$DC < OD=\frac{a_1+a_2}{2}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что

$$\frac{a_1+a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1 \cdot a_2}.$$

Из рисунка видим, что равенство имеет место лишь в случае, когда $DC=OD$, т. е. когда точки C и O совпадают, иначе говоря, когда $a_1=a_2$.

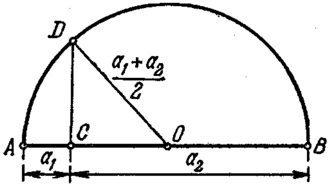

Рис. 5.

Третье решение. Имеем очевидное тождество: $(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2 \geqslant 0$, или $a_1+a_2-2\sqrt{a_1a_2} \geqslant 0$, или $a_1+a_2 \geqslant 2\sqrt{a_1a_2}$, или $\frac{a_1+a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1 \cdot a_2}$. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a_1=a_2$.

153. Для удобства введем такие обозначения: $a_1=x^3$, $a_2=y^3$, $a_3=z^3$; тогда доказываемое неравенство принимает вид $\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geqslant xyz$, или

$$x^3+y^3+z^3 \geqslant 3xyz.$$

Имеем $(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3xy(x+y+z)+$
$$+3xz(x+y+z)+3yz(x+y+z)-3xyz.$$

Следовательно,

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+xz+yz)=$$
$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)=$$
$$=\frac{1}{2}(x+y+z)(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz)=$$
$$=\frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2] \geqslant 0,$$

т. е. мы доказали, что $x^3+y^3+z^3-3xyz \geqslant 0$, или $x^3+y^3+z^3 \geqslant 3xyz$, а следовательно, верно и неравенство $\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geqslant xyz$. Учитывая, что $x=\sqrt[3]{a_1}$, $y=\sqrt[3]{a_2}$, $z=\sqrt[3]{a^3}$, получаем $\frac{a_1+a_2+a_3}{3} \geqslant \sqrt[3]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3}$. Равенство достигается только при $a_1=a_2=a_3$.

154. Известно, что (см. задачу 152)

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}. \qquad (1)$$

Пусть $a=\frac{a_1+a_2}{2}$, $b=\frac{a_3+a_4}{2}$, где a_1, a_2, a_3, a_4 — любые неотрицательные числа. Подставляя эти значения a и b в (1), получаем неравенство

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}\right)\geqslant\sqrt{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)},$$

или

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\geqslant\sqrt{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)}. \qquad (2)$$

Далее,

$$\frac{a_1+a_2}{2}\geqslant\sqrt{a_1a_2},\quad \frac{a_3+a_4}{2}\geqslant\sqrt{a_3a_4}. \qquad (3)$$

Подставляя в правую часть неравенства (2) вместо $\frac{a_1+a_2}{2}$ и $\frac{a_3+a_4}{2}$ не превышающие их значения $\sqrt{a_1a_2}$ и $\sqrt{a_3a_4}$, мы получим неравенство

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\geqslant\sqrt{\sqrt{a_1a_2}\cdot\sqrt{a_3a_4}}=\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}. \qquad (4)$$

Неравенство (2) обращается в равенство тогда и только тогда, когда $\frac{a_1+a_2}{2}=\frac{a_3+a_4}{2}$, а неравенства (3) достигают равенства лишь при $a_1=a_2$ и $a_3=a_4$; следовательно, неравенство (4) становится равенством тогда и только тогда, когда $a_1=a_2=a_3=a_4$.

155. Имеем

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\geqslant\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}. \qquad (1)$$

Пусть

$$a_1=b_1,\quad a_2=b_2,\quad a_3=b_3; \qquad (2)$$

определим a_4 из такого равенства:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}=\frac{b_1+b_2+b_3}{3}. \qquad (3)$$

Учитывая (2), перепишем (3) в виде $\frac{b_1+b_2+b_3+a_4}{4}=\frac{b_1+b_2+b_3}{3}$.

Отсюда находим

$$a_4=\frac{4}{3}(b_1+b_2+b_3)-(b_1+b_2+b_3)=\frac{b_1+b_2+b_3}{3}. \qquad (4)$$

В силу (2), (3) и (4) известное неравенство (1) принимает вид

$$\frac{b_1+b_2+b_3}{3}\geqslant\sqrt[4]{b_1b_2b_3\cdot\frac{b_1+b_2+b_3}{3}}. \qquad (5)$$

Возведя обе части неравенства (5) в четвертую степень, получаем

$$\left(\frac{b_1+b_2+b_3}{3}\right)^4\geqslant b_1b_2b_3\cdot\frac{b_1+b_2+b_3}{3}. \qquad (6)$$

Разделив обе части неравенства (6) на $\frac{b_1+b_2+b_3}{3}$, получим $\left(\frac{b_1+b_2+b_3}{3}\right)^3 \geqslant b_1b_2b_3$, откуда

$$\frac{b_1+b_2+b_3}{3} \geqslant \sqrt[3]{b_1b_2b_3}, \tag{7}$$

что и требовалось доказать.

Поскольку в соотношении (1) имеет место равенство только при $a_1=a_2=a_3=a_4$, то в неравенстве (7) имеет место равенство лишь при $b_1=b_2=b_3$.

156. Имеем (задача 154)

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \geqslant \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}. \tag{1}$$

Пусть

$$a_1=\frac{b_1+b_2}{2}, \quad a_2=\frac{b_3+b_4}{2}, \quad a_3=\frac{b_5+b_6}{2}, \quad a_4=\frac{b_7+b_8}{2}. \tag{2}$$

Подставляя значения a_1, a_2, a_3, a_4 из (2) в (1), получаем

$$\frac{b_1+b_2+\ldots+b_7+b_8}{8} \geqslant \sqrt[4]{\left(\frac{b_1+b_2}{2}\right)\left(\frac{b_3+b_4}{2}\right)\left(\frac{b_5+b_6}{2}\right)\left(\frac{b_7+b_8}{2}\right)}. \tag{3}$$

Учитывая, что $\frac{b_1+b_2}{2} \geqslant \sqrt{b_1b_2}$, $\frac{b_3+b_4}{2} \geqslant \sqrt{b_3b_4}$, $\frac{b_5+b_6}{2} \geqslant \sqrt{b_5b_6}$, $\frac{b_7+b_8}{2} \geqslant \sqrt{b_7b_8}$, получим

$$\sqrt[4]{\left(\frac{b_1+b_2}{2}\right)\left(\frac{b_3+b_4}{2}\right)\left(\frac{b_5+b_6}{2}\right)\left(\frac{b_7+b_8}{2}\right)} \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt[4]{\sqrt{b_1b_2}\,\sqrt{b_3b_4}\,\sqrt{b_5b_6}\,\sqrt{b_7b_8}}. \tag{4}$$

В силу транзитивности из (3) и (4) получаем

$$\frac{b_1+b_2+\ldots+b_7+b_8}{8} \geqslant \sqrt[4]{\sqrt{b_1b_2}\,\sqrt{b_3b_4}\,\sqrt{b_5b_6}\,\sqrt{b_7b_8}},$$

или, окончательно,

$$\frac{b_1+b_2+\ldots+b_7+b_8}{8} \geqslant \sqrt[8]{b_1b_2\ldots b_7b_8}.$$

Рассуждая, как и в задаче 154, легко убедиться, что равенство достигается лишь при $b_1=b_2=\ldots=b_8$.

157. Первое решение (это доказательство принадлежит Коши). Вначале мы докажем эту теорему при помощи прямой математической индукции (индукция вверх) для всех чисел n вида 2^k. После этого методом обратной индукции (индукция вниз) мы докажем, что если теорема имеет место для $n=2^k$, то она имеет место для любого целого положительного n (см. стр. 17). В задаче 152 мы доказали, что теорема верна при $n=2=2^1$, т. е. при $k=1$;

в задаче 154 было доказано, что теорема имеет место для $n=4=2^2$, т. е. при $k=2$, а в задаче 156 мы убедились, что доказываемая теорема справедлива для $n=8=2^3$, т. е. при $k=3$.

Предположим, что теорема верна для некоторого целого положительного числа n вида 2^k, т. е.

$$A_n=\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2a_3\ldots a_n},\text{ где } n=2^k. \tag{1}$$

Теперь докажем, что из (1) следует

$$A_{2n}=\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}+a_n+a_{n+1}+\ldots+a_{2n}}{2n}\geqslant$$
$$\geqslant\sqrt[2n]{a_1a_2a_3\ldots a_{n-1}a_na_{n+1}\ldots a_{2n}}. \tag{2}$$

В силу (1) имеем

$$A_{2n}=\frac{\dfrac{a_1+a_2}{2}+\dfrac{a_3+a_4}{2}+\ldots+\dfrac{a_{2n-1}+a_{2n}}{2}}{n}\geqslant$$
$$\geqslant\sqrt[n]{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)\ldots\left(\frac{a_{2n-1}+a_{2n}}{2}\right)}. \tag{3}$$

Так как $\frac{a_1+a_2}{2}\geqslant\sqrt{a_1a_2}$, $\frac{a_3+a_4}{2}\geqslant\sqrt{a_3a_4}$, ..., $\frac{a_{2n-1}+a_{2n}}{2}\geqslant$ $\geqslant\sqrt{a_{2n-1}a_{2n}}$, то

$$\sqrt[n]{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)\ldots\left(\frac{a_{2n-1}+a_{2n}}{2}\right)}\geqslant$$
$$\geqslant\sqrt[n]{\sqrt{a_1a_2}\cdot\sqrt{a_3a_4}\ldots\sqrt{a_{2n-1}a_{2n}}}. \tag{4}$$

Из (3) и (4) на основании закона транзитивности неравенств имеем

$$\frac{\dfrac{a_1+a_2}{2}+\dfrac{a_3+a_4}{2}+\ldots+\dfrac{a_{2n-1}+a_{2n}}{2}}{n}\geqslant$$
$$\geqslant\sqrt[n]{\sqrt{a_1a_2}\cdot\sqrt{a_3a_4}\ldots\sqrt{a_{2n-1}a_{2n}}},$$

или

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_{2n-1}+a_{2n}}{2n}\geqslant\sqrt[2n]{a_1a_2a_3\ldots a_{2n-1}a_{2n}},$$

т. е. мы пришли к неравенству (2). Остается доказать теорему для остальных натуральных n, т. е. для n, которые нельзя представить в виде 2^k.

Докажем, что из неравенства

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2a_3\ldots a_n} \tag{5}$$

следует, что

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}}{n-1}\geqslant\sqrt[n-1]{a_1a_2a_3\ldots a_{n-1}}. \qquad (6)$$

Пусть

$$a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ a_3=b_3,\ \ldots,\ a_{n-1}=b_{n-1}. \qquad (7)$$

Определим a_n из равенства

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}=\frac{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_{n-1}}{n-1}. \qquad (8)$$

Учитывая (7) и решая уравнение (8) относительно a_n, находим

$$a_n=\frac{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_{n-1}}{n-1}. \qquad (9)$$

В силу (7), (8) и (9) неравенство (5) принимает вид

$$\frac{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_{n-1}}{n-1}\geqslant$$
$$\geqslant\sqrt[n]{b_1b_2b_3\ldots b_{n-1}\frac{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_{n-1}}{n-1}}. \qquad (10)$$

Возведя обе части неравенства (10) в n-ю степень, получим

$$\left(\frac{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_{n-1}}{n-1}\right)^n\geqslant$$
$$\geqslant b_1b_2b_3\ldots b_{n-1}\frac{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_{n-1}}{n-1}. \qquad (11)$$

Поделив обе части неравенства (11) на $\frac{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_{n-1}}{n-1}$, имеем

$$\left(\frac{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1}\geqslant b_1b_2b_3\ldots b_{n-1},$$

откуда следует неравенство

$$\frac{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_{n-1}}{n-1}\geqslant\sqrt[n-1]{b_1b_2b_3\ldots b_{n-1}},$$

т. е. мы доказали, что из (5) следует (6). Равенство достигается лишь при $b_1=b_2=b_3=\ldots=b_{n-1}$. Этим доказательство теоремы завершается. У неискушенного читателя может возникнуть вопрос: как это мы переходим от любого n, в том числе, когда $n\neq 2^k$, к $n-1$? Ведь в начале мы доказали теорему только для чисел вида 2^k? Дело в том, что теорема нами была доказана прямой индукцией для любых чисел вида 2^k, в том числе для сколь угодно больших 2^k. Естественно, что мы можем для каждого n подобрать такое число $2^k>n$, а затем последовательно, переходя от каждого числа чисел к предыдущему (что законно в силу доказанного выше), дойти до требуемого значения n. Впрочем, обобщение теоремы для случая, когда число n не есть степень двойки, может быть сделано иным путем. Пусть q — целое число, которое надо прибавить к n, чтобы получить степень двух, и пусть $\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}=b$. Поскольку $n+q$ есть степень двух, то имеем доказанное неравенство

$$\frac{\overbrace{(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)}^{n}+\overbrace{(b+b+b+\ldots+b)}^{q}}{n+q}\geqslant$$

$$\geqslant\sqrt[n+q]{a_1a_2a_3\ldots a_n\cdot b^q}. \qquad (12)$$

Но поскольку $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=nb$ и $b+b+\ldots+b=qb$, то (12) можно переписать в виде $\frac{nb+qb}{n+q}\geqslant\sqrt[n+q]{a_1a_2\ldots a_nb^q}$, или $b\geqslant\sqrt[n+q]{a_1a_2a_3\ldots a_nb^q}$, откуда $b^{n+q}\geqslant a_1a_2a_3\ldots a_nb^q$, а после сокращения на b^q получим

$$b^n\geqslant a_1a_2a_3\ldots a_n. \qquad (13)$$

Но так как $b=\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}$, то (13) представляется в виде $\left(\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}\right)^n\geqslant a_1a_2a_3\ldots a_n$, откуда

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2a_3\ldots a_n}.$$

Второе решение (только методом прямой индукции). Для $n=2$ неравенство доказано. Предположим, что доказываемое неравенство имеет место для любых n неотрицательных натуральных чисел. Докажем, что это неравенство верно и для $n+1$ любых неотрицательных чисел. Обозначим эти числа через $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}$. Переставляя числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ (что не изменит их арифметического и геометрического среднего), можно добиться того, что a_{n+1} будет наибольшим числом (или одним из наибольших), т. е. $a_{n+1}\geqslant a_1$, $a_{n+1}\geqslant a_2$, $\ldots$, $a_{n+1}\geqslant a_n$, а потому $a_{n+1}\geqslant\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}$. Введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned}A_n&=\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n},\\A_{n+1}&=\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n+1}}{n+1}.\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Из равенств (1) находим

$$A_{n+1}=\frac{nA_n+a_{n+1}}{n+1}. \qquad (2)$$

Но поскольку $a_{n+1}\geqslant A_n$, то $a_{n+1}=A_n+\alpha$, где $\alpha\geqslant 0$. Учитывая последнее и (2), получаем

$$A_{n+1}=\frac{nA_n+A_n+\alpha}{n+1}=A_n+\frac{\alpha}{n+1}. \qquad (3)$$

Возведя обе части равенства (3) в $(n+1)$-ю степень, имеем

$$(A_{n+1})^{n+1}=\left(A_n+\frac{\alpha}{n+1}\right)^{n+1}=(A_n)^{n+1}+C_{n+1}^1(A_n)^n\frac{\alpha}{n+1}+\ldots\geqslant$$
$$\geqslant(A_n)^{n+1}+(A_n)^n\alpha=(A_n)^n(A_n+\alpha)=(A_n)^n\cdot a_{n+1}. \qquad (4)$$

Но так как, по предположению, $(A_n)^n\geqslant a_1\cdot a_2\cdot a_3\ldots a_n$, то, учитывая (4), имеем $(A_{n+1})^{n+1}\geqslant(A_n)^n\cdot a_{n+1}\geqslant a_1a_2a_3\ldots a_na_{n+1}$, откуда $A_{n+1}\geqslant$ $\geqslant\sqrt[n+1]{a_1a_2a_3\ldots a_{n+1}}$.

Итак, мы доказали, что $\dfrac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2a_3\ldots a_n}$ для любого числа неотрицательных чисел. Знак равенства имеет место лишь при $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

Третье решение. Предварительно докажем следующее.

Лемма. *Если произведение n положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равно 1, то их сумма не меньше n, т. е. надо доказать, что из равенства $a_1a_2a_3\ldots a_n=1$ следует, что $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n\geqslant n$. (Если не все числа a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_n равны между собой, то имеет место строгое неравенство $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n>n$; в противном случае имеет место равенство $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=n$.)*

Для доказательства леммы воспользуемся методом математической индукции. Пусть $n=2$. Тогда дано, что $a_1\cdot a_2=1$. Поэтому $a_1+a_2=a_1+\dfrac{1}{a_1}-2+2=\dfrac{(a_1-1)^2}{a_1}+2\geqslant 2$, что и требовалось доказать.

Равенство достигается лишь при $a_1=a_2=1$.

Далее, предположим, что лемма верна для $n=k\geqslant 2$, т. е. предполагая, что неравенство $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_k\geqslant k$ имеет место, если $a_1a_2a_3\ldots a_k=1$, докажем лемму для $n=k+1$, т. е. докажем, что имеет место неравенство $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_k+a_{k+1}\geqslant k+1$, если произведение $a_1a_2a_3\ldots a_ka_{k+1}=1$, причем все числа a_1, a_2, $a_3, \ldots$ $\ldots$, a_{k+1} положительны.

Ясно, что если имеет место равенство $a_1\cdot a_2\cdot a_3\ldots a_{k+1}=1$, то могут быть два случая: 1) все сомножители равны между собой и 2) среди сомножителей имеются неравные между собой числа. В случае 1) каждый сомножитель равен 1, а их сумма $a_1+a_2+a_3+\ldots$ $\ldots+a_k+a_{k+1}=k+1$. В случае 2) среди сомножителей произведения $a_1a_2a_3\ldots a_ka_{k+1}$, очевидно, имеются числа как бо́льшие 1, так и меньшие 1, так как, если все числа были бы меньше 1, то произведение было бы меньше 1, а если все числа были бы больше 1, то и произведение было бы больше 1. Для определенности, пусть, например, $a_1<1$, а $a_{k+1}>1$. Перепишем произведение $a_1a_2a_3\ldots a_{k+1}$ в таком виде: $(a_1\cdot a_{k+1})\cdot a_2a_3\ldots a_k=1$. Пусть произведение $a_1a_{k+1}=x$; тогда последнее соотношение примет вид $x\cdot a_2a_3\ldots a_k=1$. Поскольку в левой части этого равенства содержится k сомножителей, то в силу нашего предположения имеем $x+a_2+a_3+\ldots+a_k\geqslant k$. Но

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_k+a_{k+1}=$$
$$=(x+a_2+a_3+\ldots+a_k)+a_{k+1}-x+a_1\geqslant$$
$$\geqslant k+a_{k+1}-x+a_1=(k+1)+a_{k+1}-x+a_1-1.$$

Подставив в последнее соотношение вместо x его значение, т. е. $a_1 \cdot a_{k+1}$, получим

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_k+a_{k+1} \geqslant (k+1)+a_{k+1}-a_1a_{k+1}+a_1-1=$$
$$=(k+1)+(a_{k+1}-1)(1-a_1).$$

Далее, поскольку по нашему предположению $a_1<1$, а $a_{k+1}>1$, то произведение $(a_{k+1}-1)(1-a_1)>0$, а потому

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_k+a_{k+1} \geqslant (k+1)+(a_{k+1}-1)(1-a_1)>k+1.$$

Этим доказательство леммы завершается. Зная только что доказанную лемму, мы легко сможем доказать нашу теорему. Действительно, поделив обе части равенства $G=\sqrt[n]{a_1a_2a_3\ldots a_n}$ на G, получаем $1=\sqrt[n]{\frac{a_1}{G}\cdot\frac{a_2}{G}\cdot\frac{a_3}{G}\ldots\frac{a_n}{G}}$, или $\frac{a_1}{G}\cdot\frac{a_2}{G}\cdot\frac{a_3}{G}\ldots\frac{a_n}{G}=1$.

Итак, имеем n положительных чисел $\frac{a_1}{G}, \frac{a_2}{G}, \frac{a_3}{G}, \ldots, \frac{a_n}{G}$, произведение которых равно 1. Согласно доказанной лемме, их сумма не меньше n, т. е. $\frac{a_1}{G}+\frac{a_2}{G}+\frac{a_3}{G}+\ldots+\frac{a_n}{G} \geqslant n$, или $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n \geqslant nG$, или $\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n} \geqslant G$. Но так как $G=\sqrt[n]{a_1a_2a_3\ldots a_k}$, то последнее неравенство перепишем так:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2a_3\ldots a_n},$$

что и требовалось доказать.

Четвертое решение. Предварительно докажем лемму, которая имеет и большое самостоятельное значение.

Лемма. *Произведение n положительных переменных сомножителей, сумма которых постоянна, достигает наибольшей величины при равенстве сомножителей (конечно, если эти сомножители можно сделать равными).*

Пусть даны переменные сомножители $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, сумма которых равна nc, т. е.

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=nc.$$

Теперь пусть $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ — другая система n сомножителей, сумма которых тоже равна nc, причем таких, что $y_1=y_2=y_3=\ldots=y_n=c$, т. е. все они равны между собой. Тогда их произведение

$$P=y_1\cdot y_2\cdot y_3\ldots y_n=c^n.$$

Далее, пусть $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ — еще одна система n сомножителей, сумма которых также равна nc, причем среди этих сомножителей имеются неравные. Докажем, что произведение $P_1=z_1\cdot z_2\cdot z_3\ldots z_n$ меньше, чем произведение $P=y_1\cdot y_2\cdot y_3\ldots y_n$. Поскольку среди сомножителей произведения P_1 имеются различные, то ясно, что среди них имеется хотя бы один больше, чем c и один меньше, чем c. Для определенности, пусть

$$z_1=c+\alpha,\quad z_2=c-\beta,\quad \text{где } \alpha>0,\quad \beta>0,$$

тогда

$$P_1=(c+\alpha)(c-\beta)z_3z_4\ldots z_n=[c^2+c(\alpha-\beta)-\alpha\beta]z_3z_4\ldots z_n.$$

Если заменим $c+\alpha$ на c, а $c-\beta$ на $c+\alpha-\beta$, то сумма этих двух сомножителей не изменится, а их произведение увеличится, тогда и произведение

$$P_2=c(c+\alpha-\beta)z_3z_4\ldots z_n=[c^2+c(\alpha-\beta)]z_3z_4\ldots z_n$$

больше, чем произведение P_1. Итак, $P_2>P_1$; это неравенство получилось в результате того, что мы сделали один сомножитель равным c. Если мы таким же образом сделаем, чтобы еще один множитель стал равным c, то получим произведение $P_3>P_2$, таким образом, мы будем иметь $P_3>P_2>P_1$. Продолжая эту операцию дальше, мы каждый раз получим еще по одному сомножителю, равному c, а произведение с каждым разом будет увеличиваться. Когда все сомножители станут равными, то получим наибольшее возможное произведение $P=c^n$. Теперь приступим к доказательству теоремы. Пусть сумма n чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ равна nc, т. е.

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=nc, \tag{1}$$

тогда на основании леммы имеем

$$a_1a_2a_3\ldots a_n\leqslant c^n. \tag{2}$$

Учитывая (1), перепишем (2) в виде

$$a_1a_2a_3\ldots a_n\leqslant\left(\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}\right)^n,$$

откуда, после извлечения корня n-й степени из обеих частей, получим

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2a_3\ldots a_n}.$$

Из леммы также следует, что знак равенства имеет место лишь при $a_1=a_2=a_3=\ldots=a_n$. Итак теорема доказана.

Пятое решение. Введем обозначения:

$$A_n=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n},\qquad A_{n+1}=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n+1}}{n+1}; \tag{1}$$

$$G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n},\quad G_{n+1}=\sqrt[n+1]{a_1a_2\ldots a_{n+1}}. \tag{2}$$

Из (1) следует, что $(n+1)A_{n+1}=a_1+a_2+\ldots+a_{n+1}=nA_n+a_{n+1}$. Итак,

$$(n+1)A_{n+1}=nA_n+a_{n+1}. \tag{3}$$

Из (2) вытекает $(G_{n+1})^{n+1}=a_1\cdot a_2\ldots a_n\cdot a_{n+1}=(G_n)^n\cdot a_{n+1}$.

Итак,

$$(G_{n+1})^{n+1}=(G_n)^n\cdot a_{n+1}. \tag{4}$$

Рассмотрим разность

$$R=(n+1)[A_{n+1}-G_{n+1}]-n(A_n-G_n). \tag{5}$$

Имеем $R=(n+1)A_{n+1}-nA_n+nG_n-(n+1)G_{n+1}$, или, учитывая (3) и (4), получаем

$$R=a_{n+1}+nG_n-(n+1)\sqrt[n+1]{(G_n)^n a_{n+1}}. \tag{6}$$

Далее, пусть

$$a_{n+1}=x^{n+1}, \quad G_n=y^{n+1}. \tag{7}$$

Учитывая (7), равенство (6) перепишем последовательно так:

$$R=x^{n+1}+ny^{n+1}-(n+1)y^n\cdot x,$$
$$R=ny^n(y-x)-x(y^n-x^n),$$
$$R=(y-x)[ny^n-x(y^{n-1}+y^{n-2}x+y^{n-3}x^2+\ldots+x^{n-1})],$$
$$R=(y-x)[(y^n-xy^{n-1})+(y^n-x^2y^{n-2})+\ldots+(y^n-x^n)],$$
$$R=(y-x)^2[y^{n-1}+y^{n-2}(y+x)+\ldots+y^{n-1}+y^{n-2}x+\ldots+x^{n-1}].$$

Поскольку $(y-x)^2\geqslant 0$ и $[y^{n-1}+y^{n-2}(y+x)+\ldots+x^{n-1}]\geqslant 0$, то

$$R\geqslant 0. \tag{8}$$

Таким образом, из (5) и (8) следует, что

$$(n+1)[A_{n+1}-G_{n+1}]-n[A_n-G_n]\geqslant 0,$$

откуда

$$n(A_n-G_n)\leqslant(n+1)(A_{n+1}-G_{n+1}). \tag{9}$$

Поскольку неравенство (9) доказано для любого натурального n и так как известно, что $A_2-G_2\geqslant 0$, то неравенство $A_n\geqslant G_n$ верно при любом натуральном n *).

Доказанная нами теорема связывает среднее арифметическое n неотрицательных чисел с их средним геометрическим. Это одна из основных теорем теории неравенств, имеющая много различных доказательств. Неравенство Коши служит прекрасным аппаратом для доказательства многих неравенств и для нахождения экстремальных значений функций.

Наконец, приведем классическое доказательство того, что знак равенства в неравенстве Коши имеет место тогда и только тогда, когда все числа равны между собой. Имеем

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2a_3\ldots a_n}. \tag{1}$$

Если $a_1=a_2=\ldots=a_n$, то имеет место равенство. В этом легко убедиться, если в (1) подставить вместо $a_2, a_3, \ldots, a_n$ число a_1. Этим доказывается достаточность условия. Далее, пусть хотя бы

---

*) Это замечательное доказательство неравенства Коши сообщил автору В. И. Левин. Само доказательство принадлежит Р. Радо.

два числа, например, a_1 и a_2, не равны между собой. Тогда имеем

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}=\frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_1+a_2}{2}+a_3+\ldots+a_n}{n}\geqslant$$
$$\geqslant\sqrt[n]{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 a_3\ldots a_n}. \qquad (2)$$

Заменив в правой части неравенства (2) выражение $\frac{a_1+a_2}{2}$ выражением $\sqrt{a_1a_2}$, мы строго усилим неравенство (2), поскольку при $a_1\neq a_2$ имеем $\frac{a_1+a_2}{2}>\sqrt{a_1a_2}$. Таким образом, имеем строгое неравенство

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}>\sqrt[n]{(\sqrt{a_1a_2})^2a_3a_4\ldots a_n},$$

или

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}>\sqrt[n]{a_1a_2a_3\ldots a_n}.$$

Итак, допустив, что среди чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ имеются неодинаковые, мы пришли к строгому неравенству. Этим мы доказали необходимость условия.

158. Частный случай тождества Лагранжа имеет вид

$$(x_1y_1+x_2y_2)^2=(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)-(x_1y_2-x_2y_1)^2. \qquad (1)$$

В справедливости тождества (1) можно легко убедиться, если в правой части раскрыть скобки и привести подобные члены. В общем случае тождество Лагранжа имеет следующий вид:

$$(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)^2=(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2)-$$
$$-(x_1y_2-x_2y_1)^2-(x_1y_3-x_3y_1)^2-\ldots-(x_1y_n-x_ny_1)^2-$$
$$-(x_2y_3-x_3y_2)^2-(x_2y_4-x_4y_2)^2-\ldots-(x_2y_n-x_ny_2)^2-\ldots-$$
$$-(x_{n-1}y_n-x_ny_{n-1})^2. \qquad (2)$$

Для доказательства (2) воспользуемся методом математической индукции. Если $n=2$, то (2) имеет вид (1). Предположим, что тождество (2) справедливо при некотором натуральном n. Докажем, что тогда оно имеет место и для $n+1$, т. е. докажем, что справедливо тождество

$$(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n+x_{n+1}y_{n+1})^2=$$
$$=(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2+x_{n+1}^2)(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2+y_{n+1}^2)-(x_1y_2-x_2y_1)^2-$$
$$-\ldots-(x_1y_n-x_ny_1)^2-(x_1y_{n+1}-x_{n+1}y_1)^2-(x_2y_3-x_3y_2)^2-\ldots-$$
$$-(x_2y_{n+1}-x_{n+1}y_n)^2-\ldots-(x_ny_{n+1}-x_{n+1}y_n)^2. \qquad (3)$$

Если вычесть из левой части равенства (3) левую часть равенства (2), то получим

$$x_{n+1}^2y_{n+1}^2+2x_{n+1}y_{n+1}(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n). \qquad (4)$$

Далее, вычтя из правой части равенства (3) правую часть равенства (2), получаем

$$x_{n+1}^2(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2)+y_{n+1}^2(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)+$$
$$+x_{n+1}^2y_{n+1}^2-(x_1y_{n+1}-x_{n+1}y_1)^2-$$
$$-(x_2y_{n+1}-x_{n+1}y_2)^2-\ldots-(x_ny_{n+1}-x_{n+1}y_n)^2. \qquad (5)$$

Теперь ясно, что остается только доказать, что выражения (4) и (5) тождественно равны, в чем легко убедиться.

159. Первое решение. Доказываемое неравенство (Коши—Буняковского) непосредственно вытекает из тождества Лагранжа (задача 158). Действительно, если в правой части тождества Лагранжа отбросить все слагаемые вида $-(x_iy_j-x_jy_i)^2$, то получим неравенство Коши—Буняковского.

Второе решение. Если $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$, то, очевидно, имеет место равенство. Если среди $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеется хотя бы одно, отличное от нуля, то имеем:

$$(zx_1+y_1)^2+(zx_2+y_2)^2+\ldots+(zx_n+y_n)^2=$$
$$=(z^2x_1^2+2zx_1y_1+y_1^2)+(z^2x_2^2+2zx_2y_2+y_2^2)+\ldots+$$
$$+(z^2x_n^2+2zx_ny_n+y_n^2)=Az^2+2Bz+C, \qquad (1)$$

где

$$A=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2, \quad B=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n,$$
$$C=y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2. \qquad (2)$$

Поскольку левая часть равенства (1) представляет собой сумму квадратов, она неотрицательна. Следовательно, и правая часть $Az^2+2Bz+C$ также неотрицательна, т. е.

$$Az^2+2Bz+C\geqslant 0 \qquad (3)$$

при любом значении z. Пусть $z=-\frac{B}{A}$, тогда (3) примет вид $A\cdot\frac{B^2}{A^2}-2B\frac{B}{A}+C\geqslant 0$, или $\frac{A\cdot C-B^2}{A}\geqslant 0$, откуда $A\cdot C-B^2\geqslant 0$, или

$$A\cdot C\geqslant B^2. \qquad (4)$$

Подставляя в (4) вместо A, B и C их значения из (2), получим неравенство Коши—Буняковского.

Третье решение (методом математической индукции). При $n=1$ обе части доказываемого неравенства равны $x_1^2y_1^2$, т. е. при $n=1$ имеет место равенство. При $n=2$ доказываемое неравенство имеет вид $(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)\geqslant(x_1y_1+x_2y_2)^2$, или $x_1^2y_1^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2+x_2^2y_2^2\geqslant x_1^2y_1^2+2x_1y_1x_2y_2+x_2^2y_2^2$, или $(x_1y_2)^2+(x_2y_1)^2\geqslant 2x_1y_1x_2y_2$, или $(x_1y_2-x_2y_1)^2\geqslant 0$, что очевидно. Таким образом, и при $n=2$ неравенство верно. Предположим, что неравенство верно при $n=k$, т. е. имеет место неравенство

$$(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2)(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_k^2)\geqslant$$
$$\geqslant(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ky_k)^2. \qquad (1)$$

Докажем, что справедливо неравенство

$$(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2+x_{k+1}^2)(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_k^2+y_{k+1}^2)\geqslant$$
$$\geqslant(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ky_k+x_{k+1}y_{k+1})^2. \quad (2)$$

Введем обозначения: $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2=A$, $y_1^2+y_2^2+\ldots+y_k^2=B$, $x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ky_k=C$. В этих обозначениях неравенство (1) принимает вид

$$AB\geqslant C^2, \quad (3)$$

а неравенство (2) принимает вид $(A+x_{k+1}^2)(B+y_{k+1}^2)\geqslant$ $\geqslant(C+x_{k+1}y_{k+1})^2$. После раскрытия скобок получим

$$AB+Ay_{k+1}^2+Bx_{k+1}^2+x_{k+1}^2\,y_{k+1}^2\geqslant C^2+2Cx_{k+1}y_{k+1}+x_{k+1}^2\,y_{k+1}^2. \quad (4)$$

Так как, по предположению, $AB\geqslant C^2$, из (4) следует, что достаточно доказать неравенство

$$Ay_{k+1}^2+Bx_{k+1}^2\geqslant 2Cx_{k+1}y_{k+1}. \quad (5)$$

Поскольку $(|y_{k+1}|\sqrt{A}-|x_{k+1}|\sqrt{B})^2\geqslant 0$, то

$$Ay_{k+1}^2+Bx_{k+1}^2\geqslant 2|x_{k+1}|\cdot|y_{k+1}|\sqrt{AB}. \quad (6)$$

Но так как из неравенства (3) следует, что $\sqrt{AB}>C$, то

$$2|x_{k+1}|\cdot|y_{k+1}|\sqrt{AB}\geqslant 2C|x_{k+1}|\cdot|y_{k+1}|\geqslant 2Cx_{k+1}y_{k+1}. \quad (7)$$

В силу свойства транзитивности неравенств, из (6) и (7) следует, что $Ay_{k+1}^2+Bx_{k+1}^2\geqslant 2Cx_{k+1}y_{k+1}$. Таким образом, мы доказали неравенство (5), а вместе с ним и неравенство Коши — Буняковского. Можно убедиться, что в неравенстве Коши — Буняковского имеет место знак равенства лишь тогда, когда $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\ldots=\frac{x_n}{y_n}$.

160. Доказываемое неравенство перепишем в виде

$$[(\sqrt{a_1})^2+(\sqrt{a_2})^2+\ldots+(\sqrt{a_n})^2]\left[\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{a_2}}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\ldots+\left(\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)^2\right]\geqslant n^2. \quad (1)$$

Согласно неравенству Коши — Буняковского имеем

$$[(\sqrt{a_1})^2+(\sqrt{a_2})^2+\ldots+(\sqrt{a_n})^2]\left[\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{a_2}}\right)^2+\ldots+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)^2\right]\geqslant\left(\sqrt{a_1}\,\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\sqrt{a_2}\,\frac{1}{\sqrt{a_2}}+\ldots+\sqrt{a_n}\,\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)^2=n^2.$$

Впрочем, эту задачу можно решить, пользуясь неравенством Коши. Действительно,

$$a_1+a_2+\ldots+a_n \geqslant n\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}, \qquad (2)$$

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n} \geqslant n\sqrt[n]{\frac{1}{a_1a_2\ldots a_n}}. \qquad (3)$$

Перемножив почленно неравенства (2) и (3), получим доказываемое. Знак равенства достигается лишь при $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

161. Известно, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то имеет место равенство $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=1$. В силу неравенства Коши — Буняковского имеем

$$\left(\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\right)\left(\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)\geqslant$$
$$\geqslant\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2,$$

или $\left(\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\right)^2\geqslant 1$, откуда $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+$ $+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\geqslant 1$. Равенство имеет место лишь при $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$.

162. Неравенство Чебышева можно переписать в виде

$$n(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)\geqslant(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n).$$

Рассмотрим разность

$$n(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)-(a_1+a_2+\ldots+a_n)\cdot(b_1+b_2+\ldots+b_n)=$$
$$=[(a_1-a_2)(b_1-b_2)+(a_1-a_3)(b_1-b_3)+\ldots+$$
$$+(a_{n-1}-a_n)(b_{n-1}-b_n)]\geqslant 0. \qquad (1)$$

Знак в (1) объясняется тем, что каждое произведение $(a_{k-1}-a_k)\times$ $\times(b_{k-1}-b_k)\geqslant 0$, так как $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ — две неубывающие (или невозрастающие) последовательности. Из неравенства (1) следует доказываемое. Равенство имеет место в том и только в том случае, если $a_1=a_2=\ldots=a_n$ или $b_1=b_2=\ldots=b_n$.

163. Перепишем доказываемое неравенство в следующем виде:

$$\frac{(n-1)p+1}{n}\cdot\frac{(n-1)q+1}{n}\leqslant\frac{(n-1)pq+1}{n},$$

или

$$\frac{\overbrace{p+p+\ldots+p}^{(n-1)\text{ раз}}+1}{n}\cdot\frac{\overbrace{q+q+\ldots+q}^{(n-1)\text{ раз}}+1}{n}\leqslant\frac{\overbrace{pq+pq+\ldots+pq}^{(n-1)\text{ раз}}+1}{n}. \qquad (1)$$

Если в неравенстве Чебышева положить, что $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ равны p, а $a_n=1$ и $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ равны q, а $b_n=1$, то получим неравенство (1), а следовательно, и доказываемое неравенство.

164. Если $n=1$, то обе части неравенства (1) равны $1+h$, т. е. при $n=1$ имеет место неравенство. Если $n=2$, то $(1+h)^2=1+2h+h^2\geqslant 1+2h$, что очевидно.

Предположим, что неравенство (1) имеет место при $n=k$, т. е.

$$(1+h)^k\geqslant 1+kh. \qquad (2)$$

Теперь докажем, что неравенство (1) верно и при $n=k+1$, т. е. $(1+h)^{k+1}\geqslant 1+(k+1)h$. Умножив обе части неравенства (2) на положительную величину $1+h$, получим $(1+h)^{k+1}\geqslant(1+kh)(1+h)$, или $(1+h)^{k+1}\geqslant 1+(k+1)h+kh^2$. Поэтому $(1+h)^{k+1}\geqslant 1+(k+1)h$. Итак, теорема доказана. Равенство имеет место лишь при $n=1$ и при любом n, если $h=0$.

165. Доказываемое неравенство верно, если

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}>1,\quad \frac{(n+2)^{n+1}\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot(n+1)^n}>1,$$

$$\frac{n+2}{n+1}\cdot\left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]^n>1,\quad \frac{n+2}{n+1}\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^n>1. \qquad (1)$$

На основании неравенства Бернулли имеем

$$\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^n\geqslant 1-\frac{n}{(n+1)^2}.$$

Следовательно, $\frac{n+2}{n+1}\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^n\geqslant\frac{n+2}{n+1}\left[1-\frac{n}{(n+1)^2}\right]$,

или $\frac{n+2}{n+1}\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^n\geqslant\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n^2+n+1}{(n+1)^2}$, или

$$\frac{n+2}{n+1}\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^n\geqslant\frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1}>1.$$

Таким образом, мы доказали неравенство (1), а следовательно, и доказываемое *).

166. Вначале докажем неравенство

$$xy\leqslant\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q},$$

где $p>0$, $q>0$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$; p, q — рациональные числа и $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Доказательство. Поскольку p и q — рациональные положительные числа, то можно подобрать целое положительное число k так, чтобы число $l=k\cdot\frac{p}{q}$ было целым. Пусть имеются числа z и u такие, что

$$z=x^{\frac{l+k}{k}},\qquad u=y^{\frac{l+k}{l}}. \qquad (1)$$

*) Это доказательство сообщил автору В. И. Левин.

Имеем (задача 157)

$$\sqrt[k+l]{\underbrace{zz\ldots z}_{k\text{ раз}}\cdot\underbrace{uu\ldots u}_{l\text{ раз}}}\leqslant\frac{1}{k+l}(\underbrace{z+z+\ldots+z}_{k\text{ раз}}+\underbrace{u+u+\ldots+u}_{l\text{ раз}}),$$

или $\sqrt[k+l]{z^k u^l}\leqslant\frac{1}{k+l}(kz+lu)$, т. е.

$$z^{\frac{k}{l+k}}\cdot u^{\frac{l}{l+k}}\leqslant\frac{1}{l+k}(kz+lu). \tag{2}$$

Поскольку $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, то $p+q=pq$; также имеем $l=k\cdot\frac{p}{q}$. Учитывая последние два равенства, находим

$$k+l=k+k\,\frac{p}{q}=k\cdot\frac{p+q}{q}=\frac{kpq}{q}=kp. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует

$$z^{\frac{k}{kp}}\cdot u^{\frac{l}{kp}}\leqslant\frac{1}{kp}(kz+lu). \tag{4}$$

Из (1) и (3) получаем

$$z=x^{\frac{kp}{k}},\qquad u=y^{\frac{kp}{l}}. \tag{5}$$

Подставляя значения z и u из (5) в (4), получим

$$xy\leqslant\frac{1}{kp}\left(kx^p+ly^{\frac{kp}{l}}\right),$$

или

$$xy\leqslant\frac{x^p}{p}+\frac{ly^{\frac{kp}{l}}}{kp}. \tag{6}$$

Учитывая, что $l=\frac{kp}{q}$, получаем

$$xy\leqslant\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}. \tag{7}$$

Теперь приступим непосредственно к доказательству неравенства Гёльдера. Пусть

$$\left(x_1^p+x_2^p+\ldots+x_n^p\right)^{\frac{1}{p}}=x,\qquad\left(y_1^q+y_2^q+\ldots+y_n^q\right)^{\frac{1}{q}}=y. \tag{8}$$

Тогда

$$\left[\left(\frac{x_1}{x}\right)^p+\ldots+\left(\frac{x_n}{x}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\left(\frac{y_1}{y}\right)^q+\ldots+\left(\frac{y_n}{y}\right)^q\right]^{\frac{1}{q}}=1.$$

Используя неравенство (7), получим

$$\frac{x_1}{x}\cdot\frac{y_1}{y}\leqslant\frac{\left(\frac{x_1}{x}\right)^p}{p}+\frac{\left(\frac{y_1}{y}\right)^q}{q},$$

$$\frac{x_2}{x}\cdot\frac{y_2}{y}\leqslant\frac{\left(\frac{x_2}{x}\right)^p}{p}+\frac{\left(\frac{y_2}{y}\right)^q}{q},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{x_n}{x}\cdot\frac{y_n}{y}\leqslant\frac{\left(\frac{x_n}{x}\right)^p}{p}+\frac{\left(\frac{y_n}{y}\right)^q}{q}.$$

Сложив эти неравенства, получим

$$\frac{x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n}{xy}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{x_1^p+x_2^p+\ldots+x_n^p}{x^p\cdot p}+\frac{y_1^q+y_2^q+\ldots+y_n^q}{y^q\cdot q}$$

или, учитывая (8) и то, что $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\frac{x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n}{xy}\leqslant$ $\leqslant\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, следовательно,

$$x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n\leqslant$$

$$\leqslant\left(x_1^p+x_2^p+\ldots+x_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(y_1^q+y_2^q+\ldots+y_n^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Равенство имеет место лишь при $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\ldots=\frac{x_n}{y_n}$.

167. Первый частный случай ($n=2$). Требуется доказать, что имеет место неравенство

$$\left(x_1^p+y_1^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(x_2^p+y_2^p\right)^{\frac{1}{p}}\geqslant[(x_1+x_2)^p+(y_1+y_2)^p]^{\frac{1}{p}},\quad\text{где}\quad p\geqslant 1.$$

Легко заметить, что имеет место тождество

$$(x_1+x_2)^p+(y_1+y_2)^p=[x_1(x_1+x_2)^{p-1}+y_1(y_1+y_2)^{p-1}]+$$
$$+[x_2(x_1+x_2)^{p-1}+y_2(y_1+y_2)^{p-1}].$$

На основании неравенства Гёльдера при $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ имеем:

$$\left.\begin{aligned}&\left(x_1^p+y_1^p\right)^{\frac{1}{p}}\left\{[(x_1+x_2)^{p-1}]^q+[(y_1+y_2)^{p-1}]^q\right\}^{\frac{1}{q}}\geqslant\\&\qquad\geqslant x_1(x_1+x_2)^{p-1}+y_1(y_1+y_2)^{p-1},\\&\left(x_2^p+y_2^p\right)^{\frac{1}{p}}\left\{[(x_1+x_2)^{p-1}]^q+[(y_1+y_2)^{p-1}]^q\right\}^{\frac{1}{q}}\geqslant\\&\qquad\geqslant x_2(x_1+x_2)^{p-1}+y_2(y_1+y_2)^{p-1}.\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Сложив неравенства (1), получим

$$\left[\left(x_1^p+y_1^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(x_2^p+y_2^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left\{[(x_1+x_2)^{p-1}]^q+[(y_1+y_2)^{p-1}]^q\right\}^{\frac{1}{q}}\geqslant$$
$$\geqslant(x_1+x_2)^p+(y_1+y_2)^p. \qquad (2)$$

Поскольку $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, то

$$(p-1)\,q=p,\quad \frac{1}{q}=\frac{p-1}{p}. \qquad (3)$$

Учитывая (3), перепишем (2) в виде

$$\left[\left(x_1^p+y_1^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(x_2^p+y_2^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]\cdot\left[(x_1+x_2)^p+(y_1+y_2)\right]^{\frac{p-1}{p}}\geqslant$$
$$\geqslant(x_1+x_2)^p+(y_1+y_2)^p. \qquad (4)$$

Поделив обе части неравенства (4) на $\left[(x_1+x_2)^p+(y_1+y_2)^p\right]^{\frac{p-1}{p}}$, получим $\left(x_1^p+y_1^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(x_2^p+y_2^p\right)^{\frac{1}{p}}\geqslant\left[(x_1+x_2)^p+(y_1+y_2)^p\right]^{\frac{1}{p}}$, что и требовалось доказать.

Второй частный случай ($p=2$). Требуется доказать, что имеет место неравенство

$$\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2\right)^{\frac{1}{2}}+\ldots+$$
$$+\left(l_1^2+l_2^2+\ldots+l_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant\left[(a_1+b_1+\ldots+l_1)^2+(a_2+b_2+\ldots+l_2)^2+\right.$$
$$\left.+\ldots+(a_n+b_n+\ldots+l_n)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (1)$$

Квадрат правой части доказываемого неравенства (1):

$$K^2=(a_1+b_1+\ldots+l_1)^2+(a_2+b_2+\ldots+l_2)^2+\ldots+$$
$$+(a_n+b_n+\ldots+l_n)^2=[a_1\,(a_1+b_1+\ldots+l_1)+a_2\,(a_2+b_2+\ldots+l_2)+$$
$$+\ldots+a_n(a_n+b_n+\ldots+l_n)]+[b_1\,(a_1+b_1+\ldots+l_1)+b_2\,(a_2+b_2+\ldots+$$
$$+l_2)+\ldots+b_n\,(a_n+b_n+\ldots+l_n)]+\ldots+[l_1\,(a_1+b_1+\ldots+l_1)+$$
$$+l_2\,(a_2+b_2+\ldots+l_2)+\ldots+l_n\,(a_n+b_n+\ldots+l_n)].$$

Применяя неравенство Гёльдера к каждому выражению, заключенному в квадратных скобках, при условии, что $p=q=2$, получим

$$K^2\leqslant K\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}+K\left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2\right)^{\frac{1}{2}}+\ldots+$$
$$+K\left(l_1^2+l_2^2+\ldots+l_n^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

откуда следует неравенство (1). Поскольку доказательство проведено на основе неравенства Гёльдера, то знак равенства имеет место, как и в неравенстве Гёльдера, лишь при

$$a_1:b_1:\ldots:l_1 = a_2:b_2:\ldots:l_2 = \ldots = a_n:b_n:\ldots:l_n.$$

При $p=2$ эта задача решена без ссылки на неравенство Гёльдера в задаче 177.

168. В задаче 157 мы установили, что между средним арифметическим A и средним геометрическим G неотрицательных чисел имеет место зависимость, а именно:

$$A \geqslant G \text{ (неравенство Коши).} \qquad (1)$$

Теперь докажем, что между средним геометрическим G и средним гармоническим H имеет место зависимость

$$G \geqslant H. \qquad (2)$$

На основании неравенства Коши имеем

$$\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}{n} \geqslant \sqrt[n]{\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n}},$$

откуда

$$G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} = H.$$

Итак, мы доказали зависимость (2). Наконец, докажем, что между средним арифметическим A и средним квадратическим Q существует зависимость: $Q \geqslant A$. Мы должны доказать, что $\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$. В задаче 105 доказано, что $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2 \geqslant \frac{(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)^2}{n}$. Отсюда следует:

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}, \text{ т. е.}$$

$$Q \geqslant A. \qquad (3)$$

Из (1), (2) и (3) следует цепочка неравенств:

$$Q \geqslant A \geqslant G \geqslant H.$$

§ 4. Неравенства, приводимые к сравнению средних

169. Сложив почленно три очевидных неравенства $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$, $b+c \geqslant 2\sqrt{bc}$, $a+c \geqslant 2\sqrt{ac}$, получим $2(a+b+c) \geqslant 2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac})$, или $a+b+c \geqslant \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$. Знак равенства имеет место лишь при $a=b=c$.

170. Имеем:

$$\sqrt{(a+b)(c+d)}=2\sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}}\geqslant 2\sqrt[4]{ab\cdot cd}, \quad (1)$$

$$\sqrt{(a+c)(b+d)}=2\sqrt{\frac{a+c}{2}\cdot\frac{b+d}{2}}\geqslant 2\sqrt[4]{ac\cdot bd}, \quad (2)$$

$$\sqrt{(a+d)(b+c)}=2\sqrt{\frac{a+d}{2}\cdot\frac{b+c}{2}}\geqslant 2\sqrt[4]{ad\cdot bc}. \quad (3)$$

Сложив почленно (1), (2) и (3), получим

$$\sqrt{(a+b)(c+d)}+\sqrt{(a+c)(b+d)}+\sqrt{(a+d)(b+c)}\geqslant 6\sqrt[4]{abcd}.$$

171. Имеем

$$x+y\geqslant 2\sqrt{xy}, \quad (1)$$

если $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$. Пусть $x=a+b$, $y=2\sqrt{ab}$, тогда (1) примет вид $a+b+2\sqrt{ab}\geqslant 2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}}$, или $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\geqslant 2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}}$. Знак равенства имеет место лишь при $a=b$.

172. Имеем очевидные неравенства:

$$a^2-ab+b^2\geqslant ab,$$
$$b^2-bc+c^2\geqslant bc,$$
$$a^2-ca+a^2\geqslant ca.$$

Умножив обе части этих неравенств соответственно на $a+b$, $b+c$, $c+a$, получим

$$\left.\begin{aligned} a^3+b^3&\geqslant ab(a+b),\\ b^3+c^3&\geqslant bc(b+c),\\ a^3+c^3&\geqslant ca(c+a). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Сложив почленно неравенства (1), получаем:

$$2(a^3+b^3+c^3)\geqslant ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a),$$
$$2(a^3+b^3+c^3)\geqslant a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b,$$
$$2(a^3+b^3+c^3)\geqslant a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b),$$
$$a^3+b^3+c^3\geqslant a^2\frac{b+c}{2}+b^2\frac{c+a}{2}+c^2\frac{a+b}{2}. \quad (2)$$

Но так как $\frac{b+c}{2}\geqslant\sqrt{bc}$, $\frac{c+a}{2}\geqslant\sqrt{ca}$, $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$, то, подставив в правую часть неравенства (2) вместо $\frac{b+c}{2}$ выражение $\sqrt{bc}$, вместо $\frac{c+a}{2}$ выражение $\sqrt{ca}$ и вместо $\frac{a+b}{2}$ выражение $\sqrt{ab}$, получим верное неравенство: $a^3+b^3+c^3\geqslant a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ca}+c^2\sqrt{ab}$, что и требовалось доказать.

Знак равенства имеет место лишь при $a=b=c$.

173. Сложив три очевидных неравенства

$$\frac{a^4+b^4}{2} \geqslant a^2b^2, \quad \frac{b^4+c^4}{2} \geqslant b^2c^2, \quad \frac{a^4+c^4}{2} \geqslant a^2c^2,$$

получим

$$a^4+b^4+c^4 \geqslant a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2. \tag{1}$$

Далее,

$$\left.\begin{aligned} \frac{a^2b^2+b^2c^2}{2} &\geqslant \sqrt{a^2b^2\cdot b^2c^2} = b^2\,|ac| \geqslant ab^2c, \\ \frac{a^2b^2+a^2c^2}{2} &\geqslant \sqrt{a^2b^2\cdot a^2c^2} = a^2\,|bc| \geqslant a^2bc, \\ \frac{b^2c^2+a^2c^2}{2} &\geqslant \sqrt{b^2c^2\cdot a^2c^2} = |ab|\,c^2 \geqslant abc^2. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Сложив почленно неравенства (2), получаем

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2 \geqslant ab^2c+a^2bc+abc^2,$$

или

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2 \geqslant abc\,(a+b+c). \tag{3}$$

Из (1) и (3) следует, что $a^4+b^4+c^4 \geqslant abc\,(a+b+c)$.

Знак равенства имеет место только при $a=b=c$.

174. Имеем

$$\begin{aligned}(n-1)! &= \sqrt{(n-1)!}\,\sqrt{(n-1)!} = \\ &= \sqrt{1\cdot 2\cdot 3\,\ldots\,(n-1)}\,\sqrt{(n-1)(n-2)\,\ldots\,3\cdot 2\cdot 1} = \\ &= \sqrt{1\cdot(n-1)}\cdot\sqrt{2\cdot(n-2)}\,\ldots\,\sqrt{(n-2)\,2}\cdot\sqrt{(n-1)\cdot 1} \leqslant \\ &\leqslant \frac{1+(n-1)}{2}\cdot\frac{2+(n-2)}{2}\,\ldots\,\frac{(n-2)+2}{2}\cdot\frac{(n-1)+1}{2} = \\ &= \underbrace{\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{2}\,\ldots\,\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{2}}_{(n-1)\ \text{раз}} = \frac{n^{n-1}}{2^{n-1}}.\end{aligned}$$

Итак, $(n-1)! \leqslant \frac{n^{n-1}}{2^{n-1}}$. Умножив обе части этого неравенства на n, получим $n! \leqslant \frac{n^n}{2^{n-1}}$, или $2^{n-1}\cdot n! \leqslant n^n$. Равенство достигается лишь при $n=1$ и при $n=2$.

175. Число парных произведений из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равно $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$. Возьмем $\frac{n(n-1)}{2}$ очевидных неравенств,

$$\sqrt{a_1a_2} \leqslant \frac{a_1+a_2}{2}, \quad \sqrt{a_1a_3} \leqslant \frac{a_1+a_3}{2}, \quad \ldots, \quad \sqrt{a_{n-1}a_n} \leqslant \frac{a_{n-1}+a_n}{2};$$

сложив их почленно с учетом того, что в правой части каждое a_i повторяется $n-1$ раз, получим

$$\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_1a_3}+\ldots+\sqrt{a_{n-1}a_n} \leqslant \frac{n-1}{2}\,(a_1+a_2+\ldots+a_n),$$

что и требовалось доказать.

Равенство достигается лишь при $a_1=a_2=\ldots=a_n$. Если поделить обе части полученного неравенства на $\frac{n(n-1)}{2}$, то получим

$$\frac{\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_1a_3}+\ldots+\sqrt{a_{n-1}a_n}}{\frac{n(n-1)}{2}}\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n},$$

т. е. среднее арифметическое суммы квадратных корней из всевозможных парных произведений чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ не больше среднего арифметического этих чисел.

176. Известно, что если $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, то

$$x+y\geqslant 2\sqrt{xy}. \qquad (1)$$

Пусть $x=4b^2$, $y=b+1$; тогда (1) примет вид $4b^2+b+1\geqslant$ $\geqslant 2\sqrt{4b^2(b+1)}$, или $4b^2+b+1\geqslant 4|b|\sqrt{b+1}$, или $\frac{4b^2+b+1}{4|b|}\geqslant\sqrt{b+1}$.

Знак равенства имеет место, если $4b^2=b+1$, т. е. при $b=\frac{1\mp\sqrt{17}}{8}$.

177. Имеем:

$$x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2\geqslant 2\sqrt{x_1^2y_1^2x_2^2y_2^2},$$

$$x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2\geqslant 2\,|x_1y_1x_2y_2|\geqslant 2x_1y_1x_2y_2,$$

$$x_1^2y_1^2+x_2^2y_2^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2\geqslant x_1^2y_1^2+x_2^2y_2^2+2x_1y_1x_2y_2,$$

$$(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)\geqslant(x_1y_1+x_2y_2)^2,$$

$$\sqrt{(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)}\geqslant|x_1y_1+x_2y_2|\geqslant x_1y_1+x_2y_2,$$

$$2\sqrt{(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)}\geqslant 2(x_1y_1+x_2y_2),$$

$$x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2+2\sqrt{(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)}\geqslant$$
$$\geqslant x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2+2x_1y_1+2x_2y_2,$$

$$\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}+\sqrt{y_1^2+y_2^2}\right)^2\geqslant(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2,$$

$$\sqrt{x_1^2+x_2^2}+\sqrt{y_1^2+y_2^2}\geqslant\sqrt{(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2}.$$

Равенство, очевидно, достигается в том случае, когда $x_1y_2=x_2y_1$.

178. Известно (см. задачу 177), что

$$\sqrt{x_1^2+x_2^2}+\sqrt{y_1^2+y_2^2}\geqslant\sqrt{(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2}. \qquad (1)$$

Пусть $x_1=x$, $x_2=\sqrt{a}$, $y_1=c-x$, $y_2=\sqrt{b}$. Тогда (1) перепишется так: $\sqrt{x^2+a}+\sqrt{(c-x)^2+b}\geqslant\sqrt{(x+c-x)^2+(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$, или $\sqrt{x^2+a}+\sqrt{(c-x)^2+b}\geqslant\sqrt{c^2+(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$.

Равенство достигается, очевидно, только в том случае, когда $x\sqrt{b}=(c-x)\sqrt{a}$.

179. Первое решение. Имеем

$$a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}, \qquad (1)$$

$$a^2+b^2+c^2\geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}. \qquad (2)$$

Перемножив почленно (1) и (2), получим

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\geqslant 9\sqrt[3]{a^3b^3c^3}=9abc.$$

Второе решение. Имеем

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\geqslant 6abc \quad \text{(задача 15)},$$

$$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc \quad \text{(задача 153)}.$$

Сложив почленно эти два неравенства, получим

$$(a^3+a^2b+a^2c)+(b^3+ab^2+b^2c)+(c^3+bc^2+ac^2)\geqslant 9abc,$$

$$a^2(a+b+c)+b^2(a+b+c)+c^2(a+b+c)\geqslant 9abc,$$

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\geqslant 9abc.$$

180. Доказываемое неравенство перепишем в виде $a^3+b^6\geqslant \geqslant 6ab^2-8$, $a^3+b^6+8\geqslant 6ab^2$, $a^3+b^6+8\geqslant 3\sqrt[3]{(2ab^2)^3}$, $a^3+b^6+8\geqslant \geqslant 3\sqrt[3]{8a^3b^6}$, что очевидно. Равенство имеет место только при $a^3=b^6=8$, т. е.только при $a=2$, $b=\pm\sqrt{2}$.

181. Имеем $a^2+b^2+c^2\geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$. Извлекая арифметический квадратный корень из обеих частей этого неравенства, получаем

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}\geqslant \sqrt{3}\sqrt[3]{abc}. \qquad (1)$$

Далее, имеем

$$ab+bc+ca\geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}. \qquad (2)$$

Также имеем и $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geqslant 3\sqrt[3]{a^4b^4c^4}$, откуда

$$\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\geqslant \sqrt{3}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}. \qquad (3)$$

Из соотношений (1), (2), (3) получаем

$$P\geqslant \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{abc}\left(3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}+\sqrt{3}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\right)}{abc}=$$

$$=\sqrt{3}(3+\sqrt{3})=3(1+\sqrt{3}).$$

Равенство достигается лишь при $a=b=c$.

182. Сложив два очевидных неравенства $a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant \geqslant 4\sqrt[4]{a^2b^2c^2d^2}=4\sqrt{abcd}$ и $a^2+b^2\geqslant 2ab$, получим $2a^2+2b^2+c^2+d^2\geqslant \geqslant 2ab+4\sqrt{abcd}$, или $2(a^2+b^2)+c^2+d^2\geqslant 2\sqrt{ab}(\sqrt{ab}+2\sqrt{cd})$. Равенство достигается лишь при $a=b=c=d$.

183. Если a, b и c — целые положительные числа, то левая часть доказываемого неравенства есть произведение $a+b+c$ положительных сомножителей. Среднее арифметическое этих сомножителей

$$\frac{(a+b-c)+(b+c-a)+(c+a-b)}{a+b+c}=1.$$

Следовательно, рассматриваемое произведение не больше 1^{a+b+c}, т. е. не больше 1.

Если же хотя бы одно из чисел a, b, c не целое, то поскольку они рациональные, их можно привести к общему знаменателю $a=\frac{p}{m}$, $b=\frac{q}{m}$, $c=\frac{r}{m}$, т. е. $p=am$, $q=bm$, $r=cm$. Теперь, заменив в условии a, b, c соответственно на p, q, r, мы придем к тому, что рассматриваемое произведение не больше $1^{ma+mb+mc}$, т. е. не больше единицы.

184. Имеем
$$\frac{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n\text{ раз}}+\overbrace{(n+n+\ldots+n)}^{m\text{ раз}}}{m+n}\geqslant$$
$$\geqslant\sqrt[m+n]{\underbrace{mm\ldots m}_{n\text{ раз}}\cdot\underbrace{nn\ldots n}_{m\text{ раз}}},\text{ или}$$
$$\frac{2mn}{m+n}\geqslant\sqrt[m+n]{m^n\cdot n^m}. \qquad (1)$$

Далее, очевидно, что $(m+n)^2\geqslant 4mn$, или
$$\frac{m+n}{2}\geqslant\frac{2mn}{m+n}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что $\frac{m+n}{2}\geqslant\sqrt[m+n]{m^n\cdot n^m}$. Равенство имеет место лишь при $m=n$.

185. На основании зависимости между средним арифметическим и средним геометрическим имеем
$$\frac{(S-a_1)+(S-a_2)+(S-a_3)+\ldots+(S-a_n)}{n}>$$
$$>\sqrt[n]{(S-a_1)(S-a_2)\ldots(S-a_n)},$$
или
$$\frac{(n-1)S}{n}>\sqrt[n]{(S-a_1)(S-a_2)\ldots(S-a_n)}. \qquad (1)$$

Также имеем
$$\frac{\frac{1}{S-a_1}+\frac{1}{S-a_2}+\ldots+\frac{1}{S-a_n}}{n}>\sqrt[n]{\frac{1}{(S-a_1)(S-a_2)\ldots(S-a_n)}}. \qquad (2)$$

Перемножив почленно неравенства (1) и (2), получим
$$\frac{n-1}{n^2}\left(\frac{S}{S-a_1}+\frac{S}{S-a_2}+\ldots+\frac{S}{S-a_n}\right)>1,$$
откуда
$$\frac{S}{S-a_1}+\frac{S}{S-a_2}+\ldots+\frac{S}{S-a_n}>\frac{n^2}{n-1}.$$

186. Доказываемое неравенство перепишем в виде

$$a^3+b^3+c^3+15abc \leqslant$$
$$\leqslant 2(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)+2(a^3+b^3+c^3),$$

или

$$a^3+b^3+c^3+2(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b) \geqslant 15abc. \qquad (1)$$

Заметив, что в левой части неравенства (1) 15 слагаемых, имеем

$$a^3+b^3+c^3+2(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b) \geqslant$$
$$\geqslant 15\sqrt[15]{a^3b^3c^3a^4b^2a^4c^2b^4a^2b^4c^2c^4a^2c^4b^2} = 15abc.$$

Очевидно, что знак равенства имеет место лишь при $a=b=c$.

187. Поскольку среднее арифметическое неотрицательных чисел не меньше среднего геометрического их, то, учитывая, что левая часть доказываемого неравенства состоит из произведения 10 сомножителей, имеем

$$a_1a_2^2a_3^3a_4^4 = a_1a_2a_2a_3a_3a_3a_4a_4a_4a_4 \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{a_1+a_2+a_2+a_3+a_3+a_3+a_4+a_4+a_4+a_4}{10}\right)^{10} =$$
$$= \left(\frac{a_1+2a_2+3a_3+4a^4}{10}\right)^{10}.$$

Равенство достигается лишь при $a_1=a_2=a_3=a_4$.

188. Так как обе части доказываемого неравенства положительны, то его можно переписать в виде

$$(xy+yz+zx)^2 \geqslant 3xyz(x+y+z),$$

или

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \geqslant xyz(x+y+z). \qquad (1)$$

Имеем

$$\frac{x^2y^2+x^2z^2}{2} \geqslant \sqrt{x^4y^2z^2} = |x^2yz| = x^2yz,$$
$$\frac{y^2z^2+x^2y^2}{2} \geqslant \sqrt{x^2y^4z^2} = |xy^2z| = xy^2z,$$
$$\frac{z^2x^2+z^2y^2}{2} \geqslant \sqrt{x^2y^2z^4} = |xyz^2| = xyz^2.$$

Сложив почленно последние три неравенства, получим неравенство (1). Равенство достигается лишь при $x=y=z$.

189. Доказываемое неравенство перепишем в виде

$$\sqrt[n]{n!} \leqslant \frac{n+1}{2}. \qquad (1)$$

На основании зависимости между средним арифметическим и средним геометрическим неравных положительных чисел имеем

$$\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ n} < \frac{1}{n}(1+2+3+\ldots+n) = \frac{1}{n}\,\frac{(n+1)\,n}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

Таким образом, мы доказали неравенство (1), а следовательно, и неравенство $n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ при $n \geqslant 2$.

Равенство достигается лишь при $n=1$.

190. Требуется доказать неравенство $2\cdot4\cdot6\ \ldots\ (2n) \leqslant (n+1)^n$. На основании зависимости между средним арифметическим и средним геометрическим положительных чисел имеем (при $n \geqslant 2$)

$$\sqrt[n]{2\cdot4\cdot6\ \ldots\ (2n)} < \frac{2+4+6+\ldots+(2n)}{n},$$

или

$$\sqrt[n]{2\cdot4\cdot6\ \ldots\ (2n)} < \frac{(2+2n)\,n}{2\cdot n} = n+1.$$

Возведя обе части последнего неравенства в n-ю степень, получим $(n+1)^n > (2n)!!$

Равенство достигается только при $n=1$.

191. Первое решение. Требуется доказать неравенство

$$n^n \geqslant 1\cdot3\cdot5\ \ldots\ (2n-3)(2n-1),$$

или

$$n^n \geqslant \frac{1\cdot2\cdot3\ \ldots\ (2n-2)(2n-1)(2n)}{2\cdot4\cdot6\ \ldots\ (2n-2)(2n)},$$

т. е.

$$n^n \geqslant \frac{(2n!)}{2^n\cdot n!}. \tag{1}$$

Умножив обе части неравенства (1) на 2^n и сократив правую часть на $n!$, получим

$$(2n)^n \geqslant (n+1)(n+2)\ \ldots\ (2n-1)(2n).$$

Итак, доказываемое неравенство верно, если

$$\underbrace{(2n)\cdot(2n)(2n)\ \ldots\ (2n)}_{n\ \text{раз}} \geqslant \underbrace{(n+1)(n+2)\ \ldots\ (2n-1)(2n)}_{n\ \text{раз}}. \tag{2}$$

Поскольку все сомножители правой части неравенства (2), кроме последнего, меньше $2n$, то неравенство (2) верно, а следовательно, верно и доказываемое.

Равенство достигается лишь при $n=1$.

Второе решение. На основании зависимости между средним арифметическим и средним геометрическим неравных положительных чисел имеем (при $n \geqslant 2$)

$$\sqrt[n]{1\cdot3\cdot5\ \ldots\ (2n-1)} < \frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n},$$

или

$$\sqrt[n]{1\cdot3\cdot5\ \ldots\ (2n-1)} < \frac{1+(2n-1)}{2n}\cdot n = n. \tag{3}$$

Возведя обе части неравенства (3) в n-ю степень, получаем $n^n \geqslant (2n-1)!!$

Равенство достигается лишь при $n=1$.

192. Доказываемое неравенство перепишем в виде

$$\sqrt[n]{(n!)^2} \leqslant \frac{(n+1)(2n+1)}{6},$$

или

$$\sqrt[n]{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \ldots n^2} \leqslant \frac{(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad (1)$$

На основании зависимости между средним геометрическим и средним арифметическим неравных положительных чисел имеем

$$\sqrt[n]{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \ldots n^2} < \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n}. \qquad (2)$$

Известно, что $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, поэтому неравенство (2) можно переписать в виде

$$\sqrt[n]{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \ldots n^2} < \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Таким образом, неравенство (1) верно, а следовательно, верно и доказываемое (при $n \geqslant 2$).

Равенство имеет место только при $n=1$.

193. Доказываемое неравенство перепишем в виде

$$\sqrt[n]{(n!)^3} \leqslant \frac{n(n+1)^2}{4},$$

или

$$\sqrt[n]{1^3 \cdot 2^3 \cdot 3^3 \ldots n^3} \leqslant \frac{n(n+1)^2}{4}. \qquad (1)$$

На основании зависимости между средним геометрическим и средним арифметическим неравных положительных чисел имеем

$$\sqrt[n]{1^3 \cdot 2^3 \cdot 3^3 \ldots n^3} < \frac{1}{n}(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3). \qquad (2)$$

Известно, что $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$, поэтому (2) можно переписать в виде

$$\sqrt[n]{1^3 \cdot 2^3 \cdot 3^3 \ldots n^3} < \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n(n+1)^2}{4}.$$

Таким образом, неравенство (1) верно, а следовательно, верно и доказываемое (при $n \geqslant 2$).

Равенство достигается лишь при $n=1$.

194. Имеем

$$\frac{1^3+2^3+\ldots+(3n)^3}{3n} > \sqrt[3n]{1^3 \cdot 2^3 \ldots (3n)^3}. \qquad (1)$$

Но так как $1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$, то (1) можно переписать в виде $\frac{1}{3n}\frac{(3n)^2(3n+1)^2}{4}>\sqrt[n]{1\cdot 2\ \ldots\ (3n)}$, или $3n(3n+1)^2>$ $>4\sqrt[n]{(3n)!}$, что и требовалось доказать.

195. Если p, q и r — целые числа, то в левой части доказываемого неравенства содержится $p+q+r$ слагаемых, из которых p равны x^{q-r}, q равны x^{r-p} и r равны x^{p-q}. Их среднее арифметическое равно $\frac{px^{q-r}+qx^{r-p}+rx^{p-q}}{p+q+r}$, а среднее геометрическое равно $\sqrt[p+q+r]{x^{p(q-r)}\cdot x^{q(r-p)}\cdot x^{r(p-q)}}=\sqrt[p+q+r]{x^0}=1$. Но так как среднее арифметическое положительных чисел не меньше их среднего геометрического, то $\frac{px^{q-r}+qx^{r-p}+rx^{p-q}}{p+q+r}\geqslant 1$, или

$$px^{q-r}+qx^{r-p}+rx^{p-q}\geqslant p+q+r.$$

Если же среди чисел p, q и r имеются нецелые, то можно подобрать такое положительное число k, чтобы числа kp, kq и kr были целыми. Тогда, рассуждая, как выше, получим

$$kpx^{q-r}+kqx^{r-p}+krx^{p-q}\geqslant kp+kq+kr.$$

Поделив обе части последнего неравенства на k, получим

$$px^{q-r}+qx^{r-p}+rx^{p-q}\geqslant p+q+r.$$

Равенство достигается лишь при $p=q=r$ или при $x=1$.

196. Доказываемое неравенство можно переписать в виде $\left(1+\frac{b}{a}\right)^p<1+p\cdot\frac{b}{a}$ или $(1+h)^p<1+ph$ $\left(\text{где } h=\frac{b}{a},\ 0<p<1\right)$.

1. Пусть p — рациональное число. Тогда можно записать, что $p=\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа $(1\leqslant m<n)$. В этом случае

$$(1+h)^p=(1+h)^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{(1+h)^m\cdot 1^{n-m}}=$$

$$=\sqrt[n]{\underbrace{(1+h)(1+h)\ldots(1+h)}_{m\text{ раз}}\underbrace{1\cdot 1\ldots 1}_{(n-m)\text{ раз}}}<\frac{m(1+h)+n-m}{n}=$$

$$=1+\frac{m}{n}h=1+ph,$$

т. е. $(1+h)^p<1+ph$.

2. Пусть p — иррациональное число. Рассмотрим последовательность рациональных чисел $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$, имеющую пределом число p, причем $0<r_k<1$, где $k=1, 2, \ldots, n, \ldots$ На основании доказанного выше имеет место неравенство $(1+h)^{r_k}<1+r_kh$. Поэтому

$$(1+h)^p=\lim_{r_n\to p}(1+h)^{r_n}\leqslant\lim_{r_n\to p}(1+r_n\cdot h)=1+ph.$$

Остается доказать, что имеет место именно строгое неравенство

$(1+h)^p < 1+ph$. Для этого возьмем рациональное число r такое, что $p < r < 1$. Тогда имеет место неравенство $(1+h)^{\frac{p}{r}} \leqslant 1+\frac{p}{r}h$, так как $0 < \frac{p}{r} < 1$. Поэтому $(1+h)^p = \left[(1+h)^{\frac{p}{r}}\right]^r \leqslant \left(1+\frac{p}{r}h\right)^r < 1+r\frac{p}{r}\cdot h = 1+ph$, т. е. $(1+h)^p < 1+ph$.

197. Первое решение. Доказываемое неравенство перепишем так:

$$\frac{1+x+x^2+\ldots+x^{2n}}{x^n} \geqslant 2n+1, \qquad (1)$$

или $\dfrac{1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{2n}}{2n+1} \geqslant x^n$. Имеем

$$\frac{1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{2n}}{2n+1} \geqslant \sqrt[2n+1]{1\cdot x\cdot x^2\cdot x^3\ldots x^{2n}} =$$

$$= \sqrt[2n+1]{x^{1+2+3+\ldots+2n}} = \sqrt[2n+1]{x^{\frac{(2n+1)\,2n}{2}}} = x^n.$$

Равенство достигается лишь при $x=1$.

Второе решение. Неравенство (1) можно переписать так:

$$\left(\frac{1}{x^n}+x^n\right)+\left(\frac{1}{x^{n-1}}+x^{n-1}\right)+\ldots+1+\ldots+\left(\frac{1}{x^2}+x^2\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{x}+x\right) \geqslant 2n+1,$$

что действительно имеет место, так как $\frac{1}{x^k}+x^k \geqslant 2$.

198. Имеем

$$\sqrt[2n-1]{(m+1)(m+2)\ldots[m+(2n-1)]} <$$

$$< \frac{(m+1)+(m+2)+\ldots+[m+(2n-1)]}{2n-1},$$

или

$$\sqrt[2n-1]{(m+1)(m+2)\ldots[m+(2n-1)]} <$$

$$< \frac{(m+1)+[m+(2n-1)]}{2\cdot(2n-1)}\cdot(2n-1) = m+n. \qquad (1)$$

Возведя обе части неравенства (1) в $(2n-1)$-ю степень, получим $(m+1)(m+2)\ldots[m+(2n-1)] < (m+n)^{2n-1}$, что и требовалось доказать.

199. Произведение $1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot 4^4\ldots n^n$ состоит из сомножителя 1, двух сомножителей 2, трех сомножителей 3 и т. д., наконец, n сомножителей n. Таким образом, число сомножителей в этом произведении равно $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Среднее арифметическое этих сомножителей равно

$$\frac{1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 3+\ldots+n\cdot n}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{\frac{n(n+1)}{2}}=$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)\,2}{6n(n+1)}=\frac{2n+1}{3}.$$

Но так как среднее арифметическое неравных положительных чисел больше их среднего геометрического, то

$$\sqrt[\frac{n(n+1)}{2}]{1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot 4^4\ldots n^n}<\frac{2n+1}{3},$$

откуда

$$1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot 4^4\ldots n^n<\left(\frac{2n+1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Итак, мы доказали правое неравенство (для $n\geqslant 2$). Левое неравенство верно, если

$$\frac{1}{1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot 4^4\ldots n^n}\leqslant\left[\frac{2}{n+1}\right]^{\frac{n(n+1)}{2}}. \tag{1}$$

Среднее арифметическое сомножителей левой части неравенства (1) равно

$$\frac{1\cdot 1+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{3}+\ldots+n\cdot\frac{1}{n}}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{n}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n+1}.$$

Следовательно,

$$\sqrt[\frac{n(n+1)}{2}]{\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{3^3}\cdots\frac{1}{n^n}}<\frac{2}{n+1},$$

откуда

$$\frac{1}{1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot 4^4\ldots n^n}<\left[\frac{2}{n+1}\right]^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Итак, мы доказали неравенство (1) для $n\geqslant 2$, а следовательно, и предложенное левое неравенство (для $n\geqslant 2$).

Равенства достигаются лишь при $n=1$.

200. Так как среднее арифметическое неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического, то

$$\frac{(S-a_2)+(S-a_3)+\ldots+(S-a_n)}{n-1}\geqslant\sqrt[n-1]{(S-a_2)(S-a_3)\ldots(S-a_n)},$$

или

$$\frac{a_1}{n-1}\geqslant\sqrt[n-1]{(S-a_2)(S-a_3)\ldots(S-a_n)}.$$

Рассуждая аналогично, получим

$$\frac{a_2}{n-1} \geqslant \sqrt[n-1]{(S-a_1)(S-a_3)(S-a_4)\ldots(S-a_n)},$$

$$\frac{a_3}{n-1} \geqslant \sqrt[n-1]{(S-a_1)(S-a_2)(S-a_4)\ldots(S-a_n)},$$

. . . .

$$\frac{a_n}{n-1} \geqslant \sqrt[n-1]{(S-a_1)(S-a_2)\ldots(S-a_{n-1})}.$$

Перемножив последние n неравенств, получим

$$\frac{a_1a_2\ldots a_n}{(n-1)^n} \geqslant (S-a_1)(S-a_2)\ldots(S-a_n),$$

или $a_1a_2\ldots a_n \geqslant (n-1)^n(S-a_1)(S-a_2)\ldots(S-a_n)$, что и требовалось доказать.

Равенство достигается лишь при $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

201. Доказываемое неравенство перепишем в виде

$$x^n-1 \geqslant n(x-1)x^{\frac{n-1}{2}}. \qquad (1)$$

Если $x=1$ или $n=1$, то достигается равенство. Если же $x>1$, то, поделив обе части неравенства (1) на $x-1$, получим $\frac{x^n-1}{x-1} \geqslant n\cdot x^{\frac{n-1}{2}}$, или

$$\frac{x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1}{n} \geqslant x^{\frac{n-1}{2}}.$$

На основании результата задачи 157 для неравных n положительных чисел имеем

$$\frac{x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1}{n} > \sqrt[n]{x^{n-1}\cdot x^{n-2}\ldots x\cdot 1} =$$

$$= \sqrt[n]{x^{\frac{n(n-1)}{2}}} = x^{\frac{n-1}{2}},$$

что и требовалось доказать.

202. Пусть m и n — целые числа, $a_1, a_2, \ldots, a_{m+n}$ — неотрицательные числа. Имеем

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{m+n}}{m+n} \geqslant \sqrt[m+n]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\ldots a_{m+n}}. \qquad (1)$$

Положим

$$a_1=a_2=a_3=\ldots=a_m=x^n; \quad a_{m+1}=a_{m+2}=\ldots=a_{m+n}=\frac{1}{x^m}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует

$$mx^n+\frac{n}{x^m} \geqslant (m+n)\sqrt[m+n]{x^{mn}\cdot\frac{1}{x^{mn}}}, \text{ или } mx^n+\frac{n}{x^m} \geqslant m+n.$$

Теперь пусть m и n — дробные числа: $m=\frac{p}{q}$, $n=\frac{r}{s}$, где p, q, r и s — целые положительные числа. Таким образом, надо доказать, что

$$\frac{p}{q}\cdot x^{\frac{r}{s}}+\frac{r}{s}\cdot\frac{1}{x^{\frac{p}{q}}}\geqslant\frac{p}{q}+\frac{r}{s},$$

или

$$psx^{\frac{qr}{qs}}+qr\frac{1}{x^{\frac{ps}{qs}}}\geqslant ps+qr. \tag{3}$$

Если обозначить $x^{\frac{1}{qs}}$ через y, то (3) перепишется в виде $psy^{qr}+qr\frac{1}{y^{ps}}\geqslant ps+qr$, т. е. мы пришли к первому случаю (ps и qr — целые), а потому и в случае, когда m и n — дробные, доказываемое верно.

Равенство достигается лишь при $x=1$.

203. На основании зависимости между средним арифметическим и средним геометрическим положительных чисел имеем

$$a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\ldots+ab^{n-1}+b^n>$$
$$>(n+1)\sqrt[n+1]{(ab)^{1+2+3+\ldots+n}}=(n+1)(ab)^{\frac{n}{2}}.$$

204. Взяв a чисел, каждое из которых равно $\frac{1}{a}$, b чисел, каждое из которых равно $\frac{1}{b}$ и c чисел, каждое из которых равно $\frac{1}{c}$, получим

$$\left[\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\ldots+\frac{1}{a}\right)+\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\ldots+\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{c}+\ldots+\frac{1}{c}\right)}{a+b+c}\right]^{a+b+c}\geqslant$$
$$\geqslant\left(\frac{1}{a}\right)^a\left(\frac{1}{b}\right)^b\left(\frac{1}{c}\right)^c,$$

т. е.

$$\left(\frac{3}{a+b+c}\right)^{a+b+c}\geqslant\frac{1}{a^ab^bc^c},$$

откуда

$$a^ab^bc^c\geqslant\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}. \tag{1}$$

Далее, взяв a чисел, равных $b+c$, b чисел, равных $c+a$, и c чисел, равных $a+b$, имеем

$$\left[\frac{(b+c)a+(c+a)b+(a+b)c}{a+b+c}\right]^{a+b+c}\geqslant(b+c)^a(c+a)^b(a+b)^c,$$

или

$$\left[\frac{2(ab+ac+bc)}{a+b+c}\right]^{a+b+c} \geqslant (b+c)^a (c+a)^b (a+b)^c,$$

или

$$\left(\frac{ab+ac+bc}{a+b+c}\right)^{a+b+c} \geqslant \frac{(b+c)^a (c+a)^b (a+b)^c}{2^{a+b+c}}. \tag{2}$$

Известно, что $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+ac+bc$ (задача 4), или $(a+b+c)^2 \geqslant$ $\geqslant 3(ab+ac+bc)$, или

$$\frac{ab+ac+bc}{a+b+c} \leqslant \frac{a+b+c}{3}. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c} \geqslant \frac{(b+c)^a (c+a)^b (a+b)^c}{2^{a+b+c}}. \tag{4}$$

Из (1) и (4) следует утверждение задачи.

Равенство достигается лишь при $a=b=c$.

205. Так как числа $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \delta$ рациональны, то их можно представить в виде дробей с общим знаменателем. Пусть $\alpha=\frac{p}{m}$, $\beta=\frac{q}{m}$, $\gamma=\frac{r}{m}$, $\ldots$, $\delta=\frac{s}{m}$, где $m, p, q, r, \ldots, s$ — целые числа. Имеем очевидное неравенство

$$\frac{\frac{px}{\alpha}+\frac{qy}{\beta}+\frac{rz}{\gamma}+\ldots+\frac{su}{\delta}}{p+q+r+\ldots+s} > \\ > \sqrt[p+q+r+\ldots+s]{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p\left(\frac{y}{\beta}\right)^q\left(\frac{z}{\gamma}\right)^r\ldots\left(\frac{u}{\delta}\right)^s}. \tag{1}$$

Поскольку $p=m\alpha$, $q=m\beta$, $r=m\gamma$, $\ldots$, $s=m\delta$, то (1) можно переписать в виде

$$\frac{\frac{m\alpha x}{\alpha}+\frac{m\beta y}{\beta}+\frac{m\gamma z}{\gamma}+\ldots+\frac{m\delta u}{\delta}}{m(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\delta)} > \\ > \sqrt[m(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\delta)]{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{m\alpha}\left(\frac{y}{\beta}\right)^{m\beta}\left(\frac{z}{\gamma}\right)^{m\gamma}\ldots\left(\frac{u}{\delta}\right)^{m\delta}},$$

или

$$\frac{x+y+z+\ldots+u}{\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\delta} > \sqrt[\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\delta]{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{y}{\beta}\right)^{\beta}\left(\frac{z}{\gamma}\right)^{\gamma}\ldots\left(\frac{u}{\delta}\right)^{\delta}},$$

наконец,

$$\left(\frac{x+y+z+\ldots+u}{\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\delta}\right)^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\delta} > \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{y}{\beta}\right)^{\beta}\left(\frac{z}{\gamma}\right)^{\gamma}\ldots\left(\frac{u}{\delta}\right)^{\delta}.$$

206. Если $n=0$ и $n=1$, то имеет место равенство. Если же $n\geqslant 2$, то так как среднее арифметическое неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического, имеем

$$\frac{1}{n}(2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+2+1)>\sqrt[n]{2^{n-1}\cdot 2^{n-2}\ldots 2\cdot 1},$$

или, учитывая, что в скобках заключена сумма членов геометрической прогрессии, получаем $\frac{1}{n}(2^n-1)>\sqrt[n]{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}$, или $2^n-1>n\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}$, откуда $2^n>1+n\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}$.

Равенство достигается лишь при $n=0$ и $n=1$.

207. Пусть a и b — первый и последний члены обеих прогрессий и пусть между ними заключены по n членов в каждой из прогрессий. Ясно, что k-й член арифметической прогрессии равен

$$a+\frac{(k-1)(b-a)}{n+1}=\frac{(n-k+2)a+(k-1)b}{n+1}, \tag{1}$$

а k-й член геометрической прогрессии равен

$$a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k-1}{n+1}}=\sqrt[n+1]{a^{n-k+2}\cdot b^{k-1}}. \tag{2}$$

Легко заметить, что выражение (1) есть среднее арифметическое $n+1$ чисел, из которых $n-k+2$ равны a, а $k-1$ равны b. Также очевидно, что выражение (2) есть среднее геометрическое этих чисел. Следовательно,

$$\frac{(n-k+2)a+(k-1)b}{n+1}>\sqrt[n+1]{a^{n-k+2}\cdot b^{k-1}},$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что из доказанного следует утверждение задачи 125.

§ 5. Неравенства, связанные с показательной и логарифмической функциями

208. 1) Так как $a>b$, то $a-b>0$. Из этих двух неравенств следует, что $a^{a-b}>b^{a-b}$, или $\frac{a^a}{a^b}>\frac{b^a}{b^b}$, откуда $a^a\cdot b^b>a^b\cdot b^a$.

2) Поскольку $b<a$, то $b+ab<a+ab$, или $b(a+1)<a(b+1)$, или $\frac{b}{a}<\frac{1+b}{1+a}$. Логарифмируя обе части последнего неравенства по основанию $m>1$, получим $\log_m\left(\frac{b}{a}\right)<\log_m\frac{1+b}{1+a}$.

209. Требуется доказать, что

$$\frac{\lg 1+\lg 2+\ldots+\lg k+\lg(k+1)}{k+1}>\frac{\lg 1+\lg 2+\ldots+\lg k}{k}. \tag{1}$$

Неравенство (1) можно переписать в виде

$$\frac{\lg(k+1)!}{k+1} > \frac{\lg k!}{k}, \quad \lg[(k+1)!]^{\frac{1}{k+1}} > \lg(k!)^{\frac{1}{k}},$$

$$[(k+1)!]^{\frac{1}{k+1}} > (k!)^{\frac{1}{k}}.$$

Возведя обе части последнего неравенства в степень $k(k+1)$, получим $[(k+1)!]^k > (k!)^{k+1}$, $[k!(k+1)]^k > (k!)^k k!$, $(k!)^k (k+1)^k > (k!)^k k!$,

$$(k+1)^k > k! \tag{2}$$

Таким образом, достаточно доказать неравенство (2). Имеем

$$\left.\begin{array}{l} k+1 > 1, \\ k+1 > 2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ k+1 > k. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Перемножив почленно неравенства (3), получим неравенство (2). Следовательно, утверждение задачи верно.

210. Имеем $(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n)^m > (1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m)^n$, откуда

$$m(\lg 1 + \lg 2 + \lg 3 + \ldots + \lg n) > n(\lg 1 + \lg 2 + \lg 3 + \ldots + \lg m),$$

или

$$\frac{\lg 1 + \lg 2 + \lg 3 + \ldots + \lg n}{n} > \frac{\lg 1 + \lg 2 + \lg 3 + \ldots + \lg m}{m}. \tag{1}$$

Левая часть (1) есть среднее арифметическое n чисел, а правая часть — среднее арифметическое m чисел. В предыдущей задаче мы доказали, что среднее арифметическое $\frac{\lg 1 + \lg 2 + \lg 3 + \ldots + \lg k}{k}$ возрастает вместе с k, поэтому из (1) следует, что $n > m$.

211. Докажем методом математической индукции. При $n=1$ имеем $\lg 2 > \frac{\lg 1}{1}$ — верное неравенство. Предположим, что при $n=k$ имеет место неравенство

$$\lg(k+1) > \frac{\lg 1 + \lg 2 + \lg 3 + \ldots + \lg k}{k}. \tag{1}$$

Остается доказать, что если верно (1), то верно и

$$\lg(k+2) > \frac{\lg 1 + \lg 2 + \lg 3 + \ldots + \lg k + \lg(k+1)}{k+1}. \tag{2}$$

Из (1) имеем: $\lg 1 + \lg 2 + \lg 3 + \ldots + \lg k < k \lg(k+1)$. Если в (2) вместо $\lg 1 + \lg 2 + \lg 3 + \ldots + \lg k$ подставим $k \lg(k+1)$, то этим мы увеличим правую часть. Следовательно, если мы докажем, что имеет место неравенство

$$\lg(k+2) > \frac{(k+1)\lg(k+1)}{k+1}, \tag{3}$$

то неравенство (2) тем более верно. Но неравенство (3) очевидно, так как $\lg(k+2) > \lg(k+1)$.

212. Имеем:

1) если $a<1$, то $a^n > a^m$, следовательно, $1+a^n > 1+a^m$, а потому и подавно $(1+a^n)^m > (1+a^m)^n$. Логарифмируя обе части последнего неравенства, получаем $m\lg(1+a^n) > n\lg(1+a^m)$, откуда $\frac{1}{m}\lg(1+a^m) < \frac{1}{n}\lg(1+a^n)$.

2) Если $a \geqslant 1$, то $a^n \leqslant a^m$, следовательно, $\frac{1}{a^n} \geqslant \frac{1}{a^m}$ и $1+\frac{1}{a^n} \geqslant 1+\frac{1}{a^m}$, а поэтому $\left(1+\frac{1}{a^n}\right)^m > \left(1+\frac{1}{a^m}\right)^n$, или $\frac{(1+a^n)^m}{a^{mn}} > \frac{(1+a^m)^n}{a^{mn}}$, откуда $(1+a^n)^m > (1+a^m)^n$, или $m\lg(1+a^n) > n\lg(1+a^m)$. Наконец, $\frac{1}{m}\lg(1+a^m) < \frac{1}{n}\lg(1+a^n)$.

Таким образом, при любом положительном a утверждение задачи верно.

213. Перепишем доказываемое неравенство в виде

$$1-2x\log_2 y+x^2\log_2^2 y+4x^2+4x\log_2 y+\log_2^2 y \geqslant 0,$$

или

$$(1-x\log_2 y)^2+(2x+\log_2 y)^2 \geqslant 0,$$

что очевидно.

Равенство достигается, если выполнены соотношения $x\log_2 y=1$, $\log_2 y=-2x$, откуда $-2x^2=1$, что невозможно. Таким образом, при всех допустимых значениях x и y имеет место строгое неравенство.

214. Доказываемое неравенство преобразуем к виду $\log_2^2(xy)+[\log_2(x+y)-1]^2 \geqslant 0$, что очевидно. Поскольку сумма двух неотрицательных чисел может быть равной нулю тогда и только тогда, когда оба слагаемых равны нулю, то равенство достигается, если выполнены соотношения $\log_2(xy)=0$, $\log_2(x+y)=1$, или $xy=1$, $x+y=2$, откуда $x=y=1$.

215. Левая часть доказываемого неравенства $\log_3^2 x+2\log_3 x \times \log_3\frac{3}{x} = \log_3^2 x+2\log_3 x\,(1-\log_3 x) = -\log_3^2 x+2\log_3 x = 1-(\log_3^2 x-2\log_3 x+1) = 1-(\log_3 x-1)^2 \leqslant 1$.

Знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $\log_3 x=1$, т. е. если $x=3$.

216. Учитывая, что $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$, перепишем доказываемое неравенство в виде $\log_\pi 2+\log_\pi 5+\log_\pi 10 > 4$ или $\log_\pi 100 > 4$, или $100 > \pi^4$, или $\pi^2 < 10$. Так как $\pi < 3{,}15$, то $\pi^2 < (3{,}15)^2 = 9{,}9225 < 10$.

217. Имеем $\log_a(bc)\left[1+\frac{1}{\log_a b^{\log_a c}}\right] = \log_a(bc)+\frac{\log_a(bc)}{\log_a b^{\log_a c}} = \log_a b+\log_a c+\frac{\log_a b+\log_a c}{\log_a c\cdot\log_a b} = \left(\log_a b+\frac{1}{\log_a b}\right)+\left(\log_a c+\frac{1}{\log_a c}\right) \geqslant 4$, так как $m+\frac{1}{m} \geqslant 2$, если $m>0$.

§ 6. Неравенства, связанные с тригонометрическими функциями

218. Имеем $\cos\frac{A}{2}=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)\right]=\sin\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=$ $=\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$. Поскольку $\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}<\cos\frac{C}{2}$ и $\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}<\cos\frac{B}{2}$, то $\cos\frac{A}{2}<\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}$.

219. Имеем

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}. \tag{1}$$

Поскольку $A+B+C=180°$, то $\frac{A+B}{2}=90°-\frac{C}{2}$, а следовательно,

$$\cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}. \tag{2}$$

Так как $\cos\frac{A-B}{2}\leqslant 1$, из (1) и (2) следует, что $\cos A+\cos B\leqslant$ $\leqslant 2\sin\frac{C}{2}$. Таким образом, $\cos A+\cos B+\cos C\leqslant 2\sin\frac{C}{2}+1-$ $-2\sin^2\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\left(3-1+4\sin\frac{C}{2}-4\sin^2\frac{C}{2}\right)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(1-2\sin\frac{C}{2}\right)^2\leqslant$ $\leqslant\frac{3}{2}$. Знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $A=B$ и $2\sin\frac{C}{2}=1$, т. е. когда треугольник равносторонний.

220. Первое решение. Известно, что

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\\ \sin\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}},\\ \sin\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}},\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где a, b, c — стороны треугольника, а $p=\frac{a+b+c}{2}$. Из (1) следует: $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$.

Итак, надо доказать, что $\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}\leqslant\frac{1}{8}$. Имеем: $\sqrt{(p-a)(p-b)}\leqslant\frac{1}{2}[(p-a)+(p-b)]$ (знак равенства имеет место лишь при $a=b$). или $\sqrt{(p-a)(p-b)} \leqslant \frac{1}{2}(2p-a-b)$, $\sqrt{(p-a)(p-b)} \leqslant \frac{c}{2}$, или

$$\frac{\sqrt{(p-a)(p-b)}}{c} \leqslant \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Аналогично,

$$\frac{\sqrt{(p-b)(p-c)}}{a} \leqslant \frac{1}{2}, \tag{3}$$

$$\frac{\sqrt{(p-c)(p-a)}}{b} \leqslant \frac{1}{2}. \tag{4}$$

Перемножив почленно (2), (3) и (4), получим $\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} \leqslant \frac{1}{8}$, что и требовалось доказать.

Второе решение. Известно, что $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, или $\cos A = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) - \frac{a^2}{2bc}$. Так как $\frac{b}{c}+\frac{c}{b} \geqslant 2$, то $\cos A \geqslant 1 - \frac{a^2}{2bc}$, или

$$1-\cos A \leqslant \frac{a^2}{2bc}, \qquad 2\sin^2\frac{A}{2} \leqslant \frac{a^2}{2bc},$$

$$\sin\frac{A}{2} \leqslant \frac{a}{2\sqrt{bc}}. \tag{5}$$

Аналогично,

$$\sin\frac{B}{2} \leqslant \frac{b}{2\sqrt{ac}}, \tag{6}$$

$$\sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{c}{2\sqrt{ab}}. \tag{7}$$

Перемножив (5), (6) и (7), получим $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8}$, что и требовалось доказать.

Равенство достигается лишь при $A=B=C$.

Третье решение. Известно, что

$$2\sqrt{ab} \leqslant a+b,$$
$$2\sqrt{bc} \leqslant b+c,$$
$$2\sqrt{ac} \leqslant a+c.$$

После почленного перемножения этих неравенств получаем

$$8abc \leqslant (a+b)(b+c)(a+c). \tag{8}$$

Известно, что

$$a=2R\sin A, \quad b=2R\sin B, \quad c=2R\sin C, \tag{9}$$

где R — радиус описанной окружности.

Из (8) и (9) следует

$$8\sin A\sin B\sin C\leqslant(\sin A+\sin B)(\sin B+\sin C)(\sin A+\sin C). \qquad (10)$$

или

$$64\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\leqslant$$
$$\leqslant 8\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}.$$

Так как

$$\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2};\quad \sin\frac{B+C}{2}=\cos\frac{A}{2};\quad \sin\frac{A+C}{2}=\cos\frac{B}{2},$$

то $\quad 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{A-C}{2}.$ Но

$$\cos\frac{A-B}{2}\leqslant 1;\quad \cos\frac{B-C}{2}\leqslant 1;\quad \cos\frac{A-C}{2}\leqslant 1,\quad \text{поэтому}$$

$$8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant 1,\quad \text{или}\quad \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8}.$$

Четвертое решение. Имеем:

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=$$
$$=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\left[\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2}\right]=\frac{\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}}{2}\cos\frac{A+B}{2}=$$
$$=-\frac{1}{2}\left[\cos^2\frac{A+B}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}\right]=$$
$$=-\frac{1}{2}\left[\cos^2\frac{A+B}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}+\frac{\cos^2\frac{A-B}{2}}{4}-\frac{\cos^2\frac{A-B}{2}}{4}\right]=$$
$$=-\frac{1}{2}\left\{\left[\cos\frac{A+B}{2}-\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{2}\right]^2-\frac{\cos^2\frac{A-B}{2}}{4}\right\}=$$
$$=\frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2}-\frac{1}{2}\left[\cos\frac{A+B}{2}-\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{2}\right]^2\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2}\leqslant\frac{1}{8}\cdot 1=\frac{1}{8}.$$

221. Известно, что $\cos 2C=\frac{1-\operatorname{tg}^2 C}{1+\operatorname{tg}^2 C}$. Поскольку $1+\operatorname{tg}^2 C>0$, то для того, чтобы доказать, что $\cos 2C\leqslant 0$, достаточно убедиться, что $1-\operatorname{tg}^2 C\leqslant 0$. Из условия следует, что $1-\operatorname{tg}^2 C=$ $=\frac{\cos^2 A\cdot\cos^2 B-(1+\sin A\sin B)^2}{\cos^2 A\cdot\cos^2 B}$. Следовательно, остается доказать, что $\cos^2 A\cdot\cos^2 B-(1+\sin A\cdot\sin B)^2\leqslant 0$. Действительно,

$$\cos^2 A\cdot\cos^2 B-(1+\sin A\cdot\sin B)^2=(1-\sin^2 A)(1-\sin^2 B)-$$
$$-(1+\sin A\cdot\sin B)^2=-(\sin A+\sin B)^2\leqslant 0.$$

222. Поскольку $x+y+z\geqslant 3\sqrt[3]{xyz}$, где $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$, то

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\geqslant\frac{3}{\sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}}}. \qquad (1)$$

Известно (задача 220), что $\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8}$, поэтому из (1) следует неравенство $\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\geqslant\frac{3}{\sqrt[3]{\frac{1}{8}}}=6$, что и требовалось доказать.

223. Первое решение. Из формулы $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ получаем

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=1-\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}. \qquad (1)$$

Поскольку α и β — углы остроугольного треугольника, то $90°<\alpha+\beta<180°$, а поэтому $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)<0$. Учитывая, что $\operatorname{tg}\alpha>0$, $\operatorname{tg}\beta>0$, имеем

$$-\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}>0. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta>1$.

Второе решение. Доказываемое неравенство можно переписать в виде

$$\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}>1. \qquad (1)$$

Поскольку $\cos\alpha>0$ и $\cos\beta>0$, то (1) примет вид $\sin\alpha\sin\beta>\cos\alpha\cos\beta$, $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta<0$, $\cos(\alpha+\beta)<0$, что верно, так как $90°<\alpha+\beta<180°$.

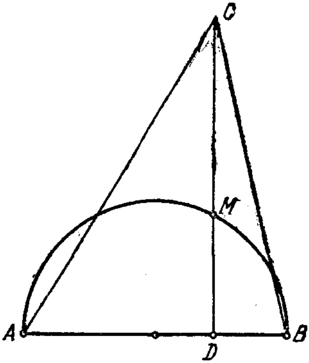

Рис. 6.

Третье решение. На стороне AB треугольника ABC строим полуокружность, которая пересекает высоту CD в точке M (рис. 6). Имеем $\frac{MD}{AD}=\frac{DB}{MD}$, откуда $\frac{MD}{AD}\cdot\frac{MD}{DB}=1$. Поскольку $CD>MD$, то $\frac{CD}{AD}\cdot\frac{CD}{DB}>1$. Так как $\operatorname{tg}A=\frac{CD}{AD}$, $\operatorname{tg}B=\frac{CD}{DB}$, то $\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B>1$.

224. Имеем $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}+\frac{1-\cos 2\beta}{2}+1-$ $-\cos^2\gamma=2-\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)-\cos^2[\pi-(\alpha+\beta)]=2-\cos(\alpha+\beta)\times$ $\times\cos(\alpha-\beta)-\cos^2(\alpha+\beta)=2-\cos(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]=$ $=2-\cos(\pi-\gamma)\cdot 2\cos\alpha\cos\beta=2+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$. Поскольку в рассматриваемом треугольнике один из углов, например, α, неострый, т. е. прямой или тупой, то $\cos\alpha\leqslant 0$, а $\cos\beta>0$, $\cos\gamma>0$. Следовательно, произведение $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\leqslant 0$. Таким образом, $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma\leqslant 2$. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда треугольник прямоугольный.

225. Первое решение. Так как $0<A+B<\frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg}(A+B)>0$, следовательно, $\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B}{1-\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B}>0$. Поскольку A и B — острые углы, то $\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B>0$, поэтому $1-\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B>0$, или $\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B<1$, что и требовалось доказать.

Второе решение. Доказываемое неравенство можно переписать в виде $\frac{\sin A\cdot\sin B}{\cos A\cdot\cos B}<1$, $\sin A\cdot\sin B<\cos A\cdot\cos B$, $\cos A\cos B-$ $-\sin A\cdot\sin B>0$, $\cos(A+B)>0$. Последнее неравенство очевидно, так как $0<A+B<\frac{\pi}{2}$.

226. Имеем $\left(\text{при } C>\frac{\pi}{2}\right)$: $B=\pi-A-C<\pi-A-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-A$, и потому $\cos^2 A+\cos^2 B>\cos^2 A+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\cos^2 A+\sin^2 A=1$, а значит, и подавно $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C>1$.

227. Первое решение. Обозначим стороны треугольника через a, b, c, противолежащие им углы — α, β, γ, радиус описанной окружности — R, радиус вписанной окружности — r, периметр — $2p$. Очевидно, что $2p>2\pi r$, или $p>\pi r$. Умножив члены последнего неравенства на p, получим $p^2>\pi rp$. Так как площадь треугольника $S=pr$, то $p^2>\pi S$, а так как $S=\frac{abc}{4R}$, то $p^2>\pi\frac{abc}{4R}$, или $\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2>\pi\frac{abc}{4R}$. Разделив обе части последнего неравенства на R^2, получим $\left(\frac{a+b+c}{2R}\right)^2>\pi\frac{a\cdot b\cdot c}{4R^3}$. Поскольку $a=2R\sin\alpha$, $b=2R\sin\beta$, $c=2R\sin\gamma$, то имеем

$$\left[\frac{2R(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)}{2R}\right]^2>\frac{\pi 8R^3\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{4R^3},$$

или

$$(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2>2\pi\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$

что и требовалось доказать.

Второе решение. Имеем очевидное неравенство:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\geqslant 3\sqrt[3]{\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}.$$

Возведем обе части этого неравенства в квадрат

$$(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2 \geqslant 9\sqrt[3]{(\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma)^2}. \qquad (1)$$

Так как $\sin\alpha\leqslant 1$, $\sin\beta\leqslant 1$, $\sin\gamma\leqslant 1$ (знак равенства может быть только в одном соотношении), то

$$(\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma)^2 > (\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma)^3. \qquad (2)$$

В силу неравенств (1) и (2) заключаем, что имеет место неравенство $(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2 > 9\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$. Поскольку $9 > 2\pi$, то и подавно

$$(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2 > 2\pi\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma.$$

228. Доказываемое неравенство перепишем в виде

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \geqslant \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (1)$$

Так как $-\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha+\beta}{2} < \frac{\pi}{2}$, то $\cos\frac{\alpha+\beta}{2} > 0$, а поэтому неравенство (1) можно переписать в виде $1 \geqslant \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, что очевидно, а потому утверждение задачи верно.

229. Имеем: $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2} = \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \leqslant \sin\frac{\alpha+\beta}{2}$, что очевидно, так как $0 \leqslant \frac{\alpha+\beta}{2} \leqslant \pi$.

230. Очевидно, что при $\alpha=\beta$ имеет место равенство. При $\alpha\neq\beta$ мы докажем, что имеет место строгое неравенство

$$2\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} - \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta < 0. \qquad (1)$$

Так как неравенство (1) симметрично относительно α и β, то для определенности пусть $\beta > \alpha$. Неравенство (1) перепишем в виде

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} - \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} - \operatorname{tg}\beta < 0,$$

$$\frac{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\alpha} + \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\beta} < 0,$$

$$\frac{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}{\cos\alpha} - \frac{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}{\cos\beta} < 0,$$

$$\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{1}{\cos\beta} < 0,$$

$$\cos\beta - \cos\alpha < 0,$$

что очевидно, так как $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$.

231. Имеем $-\frac{\pi}{2} < -\cos\alpha < \frac{\pi}{2}$. Прибавив ко всем трем частям этого неравенства по $\frac{\pi}{2}$, получим $0 < \frac{\pi}{2} - \cos\alpha < \pi$, откуда $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \cos\alpha\right) > 0$.

232. Первое решение. Имеем $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = \sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1$, но так как $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha \geqslant 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$, то $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha \geqslant 1/2$. Далее,

$$(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha)^2 = \sin^8\alpha + \cos^8\alpha + 2\sin^4\alpha\cos^4\alpha \geqslant \frac{1}{4}.$$

Так как $\sin^8\alpha + \cos^8\alpha \geqslant 2\sin^4\alpha\cos^4\alpha$, то $\sin^8\alpha + \cos^8\alpha \geqslant \frac{1}{8}$.

Равенство достигается лишь при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$, где k — целое число.

Второе решение. Положим $\sin^2\alpha = u$, $\cos^2\alpha = v$, тогда доказываемое неравенство примет вид $u^4 + v^4 \geqslant \frac{1}{8}$ при $u + v = 1$, что верно (см. задачу 7). Равенство достигается в том и только в том случае, когда $u = v = \frac{1}{2}$, т. е. когда $\sin^2\alpha = \cos^2\alpha$ или $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$.

233. Так как $\sin\alpha > 0$, $\sin\beta > 0$, то имеем $\sin\alpha + \sin\beta \geqslant 2\sqrt{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$, или

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta} \geqslant \frac{2\sqrt{\sin\alpha\cdot\sin\beta}}{\sin\alpha\cdot\sin\beta} = \frac{2}{\sqrt{\sin\alpha\cdot\sin\beta}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2}}} \geqslant \frac{2}{\sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha+\beta)}{2}}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{2}}} = \frac{2}{\left|\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right|} \geqslant \frac{2}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}},$$

что и требовалось доказать.

234. Первое решение. Рассмотрим разность: $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sin\left(\alpha - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} \geqslant 1$, так как $0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. Итак, $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg}\alpha \geqslant 1$, или $1 + \operatorname{ctg}\alpha \leqslant \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

Второе решение. Поскольку $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}-1}{2\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}$, то

$$1+\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=1+\frac{\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}-1}{2\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=-\frac{\left(1-\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\right)^2}{2\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}\leqslant 0.$$

235. Учитывая ограничения для α, имеем $\operatorname{tg}\alpha>\sin\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha>\cos\alpha$. Сложив эти неравенства, получим доказываемое.

236. Перепишем доказываемое неравенство в виде

$$\frac{1}{1+\sin^2\alpha}+\frac{1}{1+\cos^2\alpha}<1+\operatorname{tg}^2\alpha+1+\operatorname{ctg}^2\alpha,$$
$$\frac{1}{1+\sin^2\alpha}+\frac{1}{1+\cos^2\alpha}<\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha},$$

что очевидно.

237. Так как $\cos x\neq 0$, то, разделив числитель и знаменатель левой части неравенства на $\cos^3 x$, получим:

$$\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\left(\dfrac{\cos x}{\cos x}-\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)}=\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x(1-\operatorname{tg}x)}=\frac{1-2\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}^2 x(1-\operatorname{tg}x)}=$$
$$=\frac{(1-\operatorname{tg}x)^2+2\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}^2 x(1-\operatorname{tg}x)}=\frac{(1-\operatorname{tg}x)^2}{\operatorname{tg}^2 x(1-\operatorname{tg}x)}+\frac{2\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}^2 x(1-\operatorname{tg}x)}=$$
$$=\frac{1-\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}^2 x}+\frac{2}{\operatorname{tg}x(1-\operatorname{tg}x)}.$$

Поскольку $\operatorname{tg}x+(1-\operatorname{tg}x)=1$ (постоянная величина), то при $\operatorname{tg}x=\dfrac{1}{2}$ выражение $\operatorname{tg}x(1-\operatorname{tg}x)$ принимает наибольшее значение (см. задачу 289). Следовательно, наименьшее значение выражения $\dfrac{2}{\operatorname{tg}x(1-\operatorname{tg}x)}$ равно 8. Но так как при $0<x<\dfrac{\pi}{4}$ выражение $\dfrac{1-\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}^2 x}>0$, то $\dfrac{1-\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}^2 x}+\dfrac{2}{\operatorname{tg}x(1-\operatorname{tg}x)}>8$.

238. Имеем

$$y=\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^6\frac{\alpha}{2}=27\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{3}\cdot\frac{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{3}\cdot\frac{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{3}.$$

Так как

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}+\frac{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{3}+\frac{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{3}+\frac{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{3}=\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}=1$$

(сумма переменных сомножителей постоянная величина), то произведение достигает максимума, когда сомножители равны, т. е. $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{3}$, или $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$ (см. задачу 289). Отсюда $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\alpha}{2}=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, где k — целое число. Итак, $y_{\max}=\sin^2\left(\pm\frac{\pi}{6}+\pi k\right)\cos^6\left(\pm\frac{\pi}{6}+\pi k\right)=\left(\pm\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6=$ $=\frac{1}{4}\cdot\frac{27}{64}=\frac{27}{256}$.

239. Имеем: $z=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}+2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$, или $z=2\sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2}+\cos\frac{x+y}{2}\right)$.

В правой части последнего равенства заменим $\cos\frac{x-y}{2}$ единицей, получим: $z\leqslant 2\sin\frac{x+y}{2}\left(1+\cos\frac{x+y}{2}\right)$, или $z\leqslant 2\cdot 2\sin\frac{x+y}{4}\cos\frac{x+y}{4}\cdot 2\cos^2\frac{x+y}{4}$, или

$$z\leqslant 8\sin\frac{x+y}{4}\cos^3\frac{x+y}{4}. \qquad (1)$$

Так как $0\leqslant x\leqslant\pi$ и $0\leqslant y\leqslant\pi$, то $0\leqslant\frac{x+y}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}$, а следовательно,

$$\sin\frac{x+y}{4}>0; \qquad \cos\frac{x+y}{4}>0. \qquad (2)$$

На основании (1) и (2) имеем: $z^2\leqslant 64\sin^2\frac{x+y}{4}\cos^6\frac{x+y}{4}$. Но $\sin^2\frac{x+y}{2}\cos^6\frac{x+y}{4}\leqslant\frac{27}{256}$ (задача 238). Следовательно, $z^2\leqslant 64\cdot\frac{27}{256}=$ $=\frac{27}{4}$, откуда $z\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$, что и требовалось доказать.

240. Имеем $\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha=\sin 2\alpha\,\frac{\cos 2\alpha-\cos 4\alpha}{2}=$ $=\frac{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha-2\sin 2\alpha\cos 4\alpha}{4}=\frac{\sin 4\alpha+\sin 2\alpha-\sin 6\alpha}{4}<\frac{3}{4}$.

Равенство могло бы быть лишь тогда, когда $\sin 4\alpha=\sin 2\alpha=$ $=-\sin 6\alpha=1$, так как $|\sin\beta|\leqslant 1$.

Покажем, что этого не может быть. Для этого достаточно доказать, что одновременно $\sin 4\alpha$ и $\sin 2\alpha$ не равны 1. Действительно, пусть $\sin 2\alpha=1$, тогда $\cos 2\alpha=0$, поэтому $\sin 4\alpha=2\sin 2\alpha\cos 2\alpha=$ $=2\cdot 0=0\neq 1$.

241. Имеем

$$\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha+\cos^2\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=$$
$$=\frac{\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\,\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha}=$$
$$=\frac{\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\,\alpha+\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha}=\frac{\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\,\alpha+\sin^2\alpha+1}{\mathrm{tg}\,\alpha}=$$
$$=\frac{\sin^2\alpha(1+\mathrm{tg}^2\alpha)+1}{\mathrm{tg}\,\alpha}=\frac{\mathrm{tg}^2\,\alpha+1}{\mathrm{tg}\,\alpha}=\mathrm{tg}\,\alpha+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

Таким образом, доказываемые неравенства можно переписать в виде

$$\mathrm{tg}\,\alpha+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}\geqslant 2, \tag{1}$$

если $k\pi<\alpha<\frac{\pi}{2}(2k+1)$, и

$$\mathrm{tg}\,\alpha+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}\leqslant -2, \tag{2}$$

если $\frac{\pi}{2}(2k+1)<\alpha<\pi(k+1)$.

Неравенства (1) и (2) верные, так как известно, что $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$, если $a>0$, и $a+\frac{1}{a}\leqslant -2$, если $a<0$.

В формуле (1) достигается равенство, если $\mathrm{tg}\,\alpha=1$, т. е. при $\alpha=\frac{\pi}{4}+\pi k$, а в (2) — при $\alpha=-\frac{\pi}{4}+\pi k$.

242. Первое решение. Функция $\mathrm{tg}\,\alpha$ определена при $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, а функция $\mathrm{ctg}\,\alpha$ определена при $\alpha\neq\pi k$; для того чтобы знаменатель был отличен от нуля, т. е. чтобы $\cos\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha=$ $=\cos\alpha\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\neq 0$, надо, чтобы $\cos\alpha\neq 0$, или $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi m$ и $\sin\alpha\neq -1$, т. е. $\alpha\neq-\frac{\pi}{2}+2\pi l$. Итак, необходимо, чтобы

$$\alpha\neq\frac{\pi}{2}\cdot s,\qquad \text{где } s=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots \tag{1}$$

При соблюдении условия (1) решаемое неравенство можно переписать в виде

$$\frac{\sin^2\alpha(1+\cos\alpha)}{\cos^2\alpha(1+\sin\alpha)}>0. \tag{2}$$

Из (1) следует, что $|\cos\alpha|<1$, $|\sin\alpha|<1$, $\sin\alpha\neq 0$, $\cos\alpha\neq 0$. Поэтому $1+\cos\alpha>0$, $1+\sin\alpha>0$, $\sin^2\alpha>0$, $\cos^2\alpha>0$. Следовательно, при условии $\alpha\neq\frac{\pi}{2}s$ неравенство (2) верно, а вместе с ним верно и доказываемое.

Второе решение. Так как $\alpha \neq \frac{\pi}{2}k$, то из формул $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha\cos\alpha$ и $\cos\alpha = \operatorname{ctg}\alpha\cdot\sin\alpha$ следует, что $|\operatorname{tg}\alpha| > |\sin\alpha|$, $|\operatorname{ctg}\alpha| > |\cos\alpha|$. Поэтому знак выражения $(\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha)$ совпадает со знаком $\operatorname{tg}\alpha$, а знак $(\cos\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)$ совпадает со знаком $\operatorname{ctg}\alpha$. Но $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ имеют одинаковые знаки, поэтому $\frac{\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha + \operatorname{ctg}\alpha} > 0$.

243. Первое решение. Перепишем доказываемое неравенство в виде $x^2 + 2x\cos y + \cos^2 y + x^2\sin^2 y + 2x\sin y + 1 \geqslant 0$ или $(x+\cos y)^2 + (x\sin y + 1)^2 \geqslant 0$, что очевидно, так как левая часть есть сумма двух неотрицательных величин. Для того чтобы имело место равенство, надо, чтобы одновременно выполнялись равенства

$$x + \cos y = 0, \tag{1}$$

$$x\sin y + 1 = 0. \tag{2}$$

Из (1) следует, что

$$x = -\cos y, \tag{3}$$

а из (2) находим

$$x = -\frac{1}{\sin y}. \tag{4}$$

Из (3) и (4) получаем $\cos y = \frac{1}{\sin y}$, или $\sin y\cos y = 1$, или $\sin 2y = 2$, что невозможно. Таким образом, ни при каких значениях x и y не имеет места равенство.

Второе решение. Левая часть доказываемого неравенства представляет собой квадратный трехчлен относительно x. Его корни

$$x_{1,2} = \frac{-(\sin y + \cos y) \pm \sqrt{(\sin y + \cos y)^2 - (1+\sin^2 y)(1+\cos^2 y)}}{1+\sin^2 y} =$$

$$= \frac{-(\sin y + \cos y) \pm \sqrt{-\frac{\sin^2 2y - 4\sin 2y + 4}{4}}}{1+\sin^2 y} =$$

$$= \frac{-(\sin y + \cos y) \pm 0{,}5\sqrt{-(\sin 2y - 2)^2}}{1+\sin^2 y}.$$

Поскольку $(\sin 2y - 2)^2 > 0$ (значения x_1 и x_2 мнимые), левая часть доказываемого неравенства положительна при любых значениях x и y.

Итак, при любых x и y имеет место строгое неравенство.

244. Перепишем доказываемое неравенство в виде

$$x^2 + 4x\cos(xy) + 4\cos^2(xy) + 4 - 4\cos^2(xy) \geqslant 0,$$

или

$$[x + 2\cos(xy)]^2 + 4[1 - \cos^2(xy)] \geqslant 0,$$

что очевидно, так как оба слагаемых левой части неравенства неотрицательны. Поскольку сумма двух неотрицательных величин равна нулю только тогда, когда оба слагаемых одновременно равны нулю, то условие равенства в рассматриваемой задаче определяется системой уравнений

$$\begin{cases} x+2\cos(xy)=0, \\ 1-\cos^2(xy)=0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x+2\cos(xy)=0, \\ \sin^2(xy)=0. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы находим: $xy=\pi k$. Рассмотрим два случая:

1) $k=2n$ — четное число. В этом случае имеем систему

$$\begin{cases} x+2\cos(2\pi n)=0, \\ xy=2\pi n, \end{cases}$$

откуда $x=-2,\ y=-\dfrac{2\pi n}{2}=-\pi n.$

2) $k=2n+1$ — нечетное число. В этом случае имеем систему

$$\begin{cases} x+2\cos[(2n+1)\pi]=0, \\ xy=\pi(2n+1). \end{cases}$$

Отсюда $x=2,\ y=\dfrac{\pi}{2}(2n+1).$

Итак, равенство достигается только в двух случаях: когда $x=-2,\ y=-\pi n$ или когда $x=2,\ y=\dfrac{\pi}{2}(2n+1)$, где $n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$

При других значениях x и y имеет место строгое неравенство.

245. Доказываемое неравенство можно переписать в виде

$$2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}-2\cos^2\frac{x+y}{2}+1-\frac{3}{2}\leqslant 0, \text{ или}$$

$$4\cos^2\frac{x+y}{2}-4\cos\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}+1\geqslant 0. \qquad (1)$$

Левая часть неравенства (1) представляет собой квадратный трехчлен относительно $\cos\dfrac{x+y}{2}$. Решим уравнение

$$4\cos^2\frac{x+y}{2}-4\cos\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}+1=0$$

относительно $\cos\dfrac{x+y}{2}$. Имеем

$$\cos\frac{x+y}{2}=\frac{2\cos\frac{x-y}{2}\pm\sqrt{4\cos^2\frac{x-y}{2}-4}}{4}=$$

$$=\frac{\cos\frac{x-y}{2}\pm\sqrt{-\sin^2\frac{x-y}{2}}}{2}. \qquad (2)$$

Таким образом, если $\sin\frac{x-y}{2}\neq 0$, т. е. если $x-y\neq 2\pi k$, то корни левой части неравенства (1) мнимые. Следовательно, в этом случае левая часть неравенства (1) положительна. Если же

$$x-y=2\pi k, \tag{3}$$

то левая часть неравенства (1) становится точным квадратом, т. е. корни левой части неравенства (1) одинаковы.

Остается установить, для каких пар чисел x и y имеет место равенство. Из (2) и (3) следует, что $\cos\frac{x+y}{2}=\frac{\cos\pi k}{2}=\pm\frac{1}{2}$, откуда $\frac{x+y}{2}=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, или

$$x+y=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n. \tag{4}$$

Решая совместно (3) и (4), получаем $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi(n+k)$, $y=\pm\frac{\pi}{3}+\pi(n-k)$. Итак, при $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi(n+k)$, $y=\pm\frac{\pi}{3}+\pi(n-k)$, где n и k — любые целые числа (комбинируется $+$ с $+$, $-$ с $-$), имеет место равенство, а при всех остальных значениях x и y — строгое неравенство.

246. Перепишем доказываемое неравенство в таком виде:

$$(x+y)^2+2(x+y)\cos x+2(1-\sin^2 x)\geqslant 0,$$
$$(x+y)^2+2(x+y)\cos x+\cos^2 x+\cos^2 x\geqslant 0,$$
$$[(x+y)+\cos x]^2+\cos^2 x\geqslant 0,$$

что очевидно, так как оба слагаемых неотрицательны.

Для того чтобы было равенство, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases} x+y+\cos x=0, \\ \cos^2 x=0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x+y=0, \\ \cos x=0. \end{cases}$$

Отсюда $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $y=-\frac{\pi}{2}(2k+1)$.

Итак, равенство имеет место, если $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $y=-\frac{\pi}{2}(2k+1)$. При любых других значениях x и y — строгое неравенство.

247. Пусть $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=x$, тогда $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2=x^2$, или $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha=x^2-2$. Таким образом, доказываемое неравенство при $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=x$ имеет вид $3(x^2-2)-8x+10\geqslant 0$, или

$$3x^2-8x+4\geqslant 0. \tag{1}$$

Корни левой части (1) равны 2 и $\frac{2}{3}$. Следовательно, (1) имеет место при $x \geqslant 2$ или $x \leqslant \frac{2}{3}$, т. е. при $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha \geqslant 2$ или при $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha \leqslant \frac{2}{3}$. Если $\operatorname{tg}\alpha > 0$, а следовательно, и $\operatorname{ctg}\alpha > 0$, то их сумма не меньше двух, так как $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ взаимно обратные величины. Поэтому доказываемое неравенство справедливо при $\operatorname{tg}\alpha > 0$ ($\operatorname{ctg}\alpha > 0$). Если же $\operatorname{tg}\alpha < 0$ ($\operatorname{ctg}\alpha < 0$), то $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha < 0$, а левая часть доказываемого неравенства положительна. Следовательно, и в этом случае неравенство верно.

Равенство имеет место при $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 2$, т. е. при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

248. Предварительно докажем, что если $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma = 1$. Так как $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} - \gamma$, то $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{ctg}\gamma = \frac{1}{\operatorname{tg}\gamma}$, или $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = \frac{1}{\operatorname{tg}\gamma}$. Отсюда $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma = 1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma = 1$.

Напишем четыре очевидных соотношения:

$$2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + 5} \cdot \sqrt{\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + 5} \leqslant \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + 10,$$
$$2\sqrt{\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + 5} \cdot \sqrt{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma + 5} \leqslant \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma + 10,$$
$$2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma + 5} \cdot \sqrt{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + 5} \leqslant \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + 10,$$
$$(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + 5})^2 + (\sqrt{\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + 5})^2 + (\sqrt{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma + 5})^2 = \\ = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma + 15.$$

Сложив почленно эти соотношения, получим

$$(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + 5} + \sqrt{\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + 5} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma + 5})^2 \leqslant \\ \leqslant 3(\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma) + 45 = 48.$$

Следовательно, $\sqrt{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + 5} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma + 5} + \sqrt{\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + 5} \leqslant 4\sqrt{3}$, что и требовалось доказать.

249. Имеем:
$$\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta \geqslant 2\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta,$$
$$\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\gamma \geqslant 2\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma,$$
$$\operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^2\gamma \geqslant 2\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma.$$

Сложив почленно эти три неравенства, получим

$$\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^2\gamma \geqslant \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma = 1$$

(см. задачу 248). Поскольку сумма $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma$, $\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$ равна 1, т. е. постоянна, то произведение $(\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta)(\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma) \times (\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma)$ принимает наибольшее значение тогда, когда $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta =$

$=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$, или когда $\alpha=\beta=\gamma$. Так как $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$, то $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{6}$. Итак, $\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta\operatorname{tg}^2\gamma\leqslant\operatorname{tg}^6\frac{\pi}{6}=\frac{1}{27}$ и

$$\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\gamma-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta\operatorname{tg}^2\gamma\geqslant 1-\frac{1}{27}=\frac{26}{27},$$

что и требовалось доказать.

250. Имеем $P=\frac{1}{2}(\sin 4\alpha\cos 4\alpha)\ \ldots\ \cos 2^n\alpha=\ \ldots\ =$ $=\frac{1}{2^{n-1}}\sin 2^n\alpha\cos 2^n\alpha=\frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^n}$. Поскольку $\sin 2^{n+1}\alpha\leqslant 1$, то $P\leqslant\frac{1}{2^n}$.

251. Первое решение. Доказываемое неравенство верно, если верно

$$\left|\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\right|>|\sin\alpha+\cos\alpha|. \qquad (1)$$

Умножив обе части неравенства (1) на $\frac{\sqrt{2}}{2}$, получим

$$\left|\frac{\sqrt{2}}{\sin 2\alpha}\right|>\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right|. \qquad (2)$$

Поскольку $|\sin A|\leqslant 1$, то

$$\left|\frac{\sqrt{2}}{\sin 2\alpha}\right|\geqslant\sqrt{2},\quad \left|\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right|\leqslant 1. \qquad (3)$$

Очевидно, что из неравенств (3) следует неравенство (2), а следовательно, и доказываемое.

Второе решение. Очевидно, что $\alpha\neq\frac{\pi}{2}k$. Имеем известные неравенства $|\operatorname{tg}\alpha|>|\sin\alpha|$, $|\operatorname{ctg}\alpha|>|\cos\alpha|$. Сложив почленно эти неравенства, получим

$$|\operatorname{tg}\alpha|+|\operatorname{ctg}\alpha|>|\sin\alpha|+|\cos\alpha|. \qquad (1)$$

Так как $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ имеют одинаковые знаки, то

$$|\operatorname{tg}\alpha|+|\operatorname{ctg}\alpha|=|\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha|,$$

а поэтому (1) можно переписать так:

$$|\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha|>|\sin\alpha|+|\cos\alpha|. \qquad (2)$$

Далее имеем

$$|\sin\alpha|+|\cos\alpha|\geqslant|\sin\alpha+\cos\alpha|. \qquad (3)$$

Из (2) и (3) следует, что $|\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha|>|\sin\alpha+\cos\alpha|$.

252. Левое неравенство перепишем так: $1-\sin^2 x-2a\cos x+$ $+a^2\geqslant 0$, или $\cos^2 x-2a\cos x+a^2\geqslant 0$, или $(a-\cos x)^2\geqslant 0$, что имеет место при любых действительных a и x.

Правое неравенство перепишем в виде $a^2-2a\cos x\leqslant 0$, или $a(a-2\cos x)\leqslant 0$. Так как $a\geqslant 0$, то достаточно доказать, что $a-2\cos x\leqslant 0$. Но это очевидно, поскольку $a\leqslant 1$, а $\cos x\geqslant\frac{1}{2}$ $\left(\text{так как } 0<x\leqslant\frac{\pi}{3}\right)$, т. е. $a\leqslant 1$, а $2\cos x\geqslant 1$.

253. Имеем

$$\frac{3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+10\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+3}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{3\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{10\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=3+5\sin\alpha.$$

Таким образом, доказываемое неравенство верно, если верно неравенство

$$-2\leqslant 3+5\sin\alpha\leqslant 8,$$

что очевидно, так как $|\sin\alpha|\leqslant 1$.

254. Имеем $\sin x\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\sin x\,\frac{\cos 2x-\cos\frac{2\pi}{3}}{2}=$ $=\frac{\sin x}{2}\left(\cos 2x+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sin x\cos 2x}{2}+\frac{\sin x}{4}=\frac{\sin 3x-\sin x}{4}+\frac{\sin x}{4}=$ $=\frac{\sin 3x}{4}$. Следовательно, доказываемое неравенство верно, если верно $-\frac{1}{4}\leqslant\frac{\sin 3x}{4}\leqslant\frac{1}{4}$, или $-1\leqslant\sin 3x\leqslant 1$, что верно при любом значении x.

255. Имеем: $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=(\sin^2\alpha)^3+(\cos^2\alpha)^3=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\times$ $\times(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)=\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha-$ $-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$. Таким образом, доказываемое неравенство верно, если верно неравенство $\frac{1}{4}\leqslant 1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha\leqslant 1$, или $0\leqslant\cos^2 2\alpha\leqslant 1$, что верно при любом α.

256. Имеем: $\cos^2\alpha+\cos^2(\alpha+\beta)-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)=$ $=\cos^2\alpha+\cos^2(\alpha+\beta)-[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]\cos(\alpha+\beta)=$ $=\cos^2\alpha-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}-\frac{\cos 2\alpha+\cos 2\beta}{2}=$ $=\frac{1-\cos 2\beta}{2}=\sin^2\beta$.

Таким образом, доказываемое неравенство верно, если верно неравенство $0\leqslant\sin^2\beta\leqslant 1$, что верно при любом β. В левом соотношении имеет место равенство при $\beta=\pi k$, а в правом—при $\beta=\frac{\pi}{2}+\pi n$.

257. Так как $\operatorname{tg}\alpha>0$, $\operatorname{tg}\beta>0$, $\operatorname{tg}\gamma>0$, то имеем

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}+\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}\geqslant 2,\qquad \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\gamma}+\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\beta}\geqslant 2,\qquad \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha}+\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\gamma}\geqslant 2. \qquad (1)$$

Сложив почленно все три неравенства (1), получим

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}+\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\gamma}+\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}+\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\gamma}+\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha}+\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\beta}\geqslant 6,$$

$$\operatorname{tg}\alpha(\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)+\operatorname{tg}\beta(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\gamma)+\operatorname{tg}\gamma(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta)\geqslant 6,$$

что и требовалось доказать.

258. Имеем: $\operatorname{ctg}^2\alpha-1=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}-1=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}$,

$$3\operatorname{ctg}^2\alpha-1=\frac{3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{3-4\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{3\sin\alpha-4\sin^3\alpha}{\sin^3\alpha}=$$

$$=\frac{\sin 3\alpha}{\sin^3\alpha},\quad \operatorname{ctg}3\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha-1=\frac{\cos 3\alpha\sin 2\alpha-\sin 3\alpha\cos 2\alpha}{\sin 3\alpha\cos 2\alpha}=$$

$$=-\frac{\sin\alpha}{\sin 3\alpha\cos 2\alpha}.$$

Итак, доказываемое неравенство принимает вид

$$-\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}\cdot\frac{\sin 3\alpha}{\sin^3\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin 3\alpha\cdot\cos 2\alpha}\leqslant -1,$$

или $\frac{1}{\sin^4\alpha}\geqslant 1$, или $\sin^4\alpha\leqslant 1$, что очевидно.

Заметим, что доказанное неравенство имеет место при $\alpha\neq\pi k$, $3\alpha\neq\pi k$ и $2\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, т. е. $\alpha\neq\frac{\pi}{3}k$ и $\alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$.

259. Имеем $0<\gamma<\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)<\frac{\pi}{2}$. Отсюда

$$\operatorname{tg}\gamma<\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}.$$

Умножим обе части неравенства $\operatorname{tg}\gamma<\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}$ на выражение $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta$, которое при данных ограничениях α и β положительно. Имеем $\operatorname{tg}\gamma(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)<1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$, или $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha<1$, что и требовалось доказать.

260. Доказываемое неравенство перепишем в виде $2\sin^2\alpha+2\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta-2\sin\alpha-2\sin\beta+2\geqslant 0$, или $(\sin^2\alpha-2\sin\alpha+1)+(\sin^2\beta-2\sin\beta+1)+(\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta)\geqslant 0$, или $(\sin\alpha-1)^2+(\sin\beta-1)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2\geqslant 0$, которое очевидно. Знак равенства имеет место, когда $\sin\alpha=\sin\beta=1$, т. е. при $\alpha=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ и $\beta=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, где k и n — любые целые числа.

261. Рассмотрим разность $d=\cos(\sin\varphi)-\sin(\cos\varphi)=\cos(\sin\varphi)-$

$$-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\cos\varphi\right)=2\sin\frac{\frac{\pi}{2}+\sin\varphi-\cos\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\frac{\pi}{2}-\cos\varphi-\sin\varphi}{2}.$$

Так как $|\sin\varphi\pm\cos\varphi|\leqslant\sqrt{2}<\frac{\pi}{2}$, то $0<\frac{\frac{\pi}{2}-\cos\varphi\pm\sin\varphi}{2}<\frac{\pi}{2}$, а поэтому $\sin\dfrac{\frac{\pi}{2}+\sin\varphi-\cos\varphi}{2}>0$ и $\sin\dfrac{\frac{\pi}{2}-\cos\varphi-\sin\varphi}{2}>0$.

Следовательно, $d>0$, откуда и следует доказываемое неравенство при любом φ.

262. Имеем

$$\sin\beta-\sin\alpha=2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\beta+\alpha}{2}. \qquad (1)$$

Так как $0<\frac{\beta+\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$, то

$$\cos\frac{\beta+\alpha}{2}<1. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что

$$\sin\beta-\sin\alpha<2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cdot 1. \qquad (3)$$

Поскольку $0<\frac{\beta-\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$, то $\sin\frac{\beta-\alpha}{2}<\frac{\beta-\alpha}{2}$ (см. задачу 264). Учитывая последнее неравенство и (3), имеем

$$\sin\beta-\sin\alpha<2\,\frac{\beta-\alpha}{2}\cdot 1=\beta-\alpha, \quad \text{или} \quad \alpha-\sin\alpha<\beta-\sin\beta.$$

263. Известно, что $\beta-\alpha<\operatorname{tg}(\beta-\alpha)$, если $0<\beta-\alpha<\frac{\pi}{2}$. Имеем

$$\beta-\alpha<\operatorname{tg}(\beta-\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}<\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha,$$

или

$$\operatorname{tg}\alpha-\alpha<\operatorname{tg}\beta-\beta.$$

264. Из рис. 7 видим, что площадь треугольника AOC меньше площади сектора AOC, а площадь сектора AOC меньше площади треугольника AOB. Площадь треугольника AOC равна $\frac{R^2}{2}\sin x$, где R — радиус круга; площадь сектора AOC равна $\frac{R^2x}{2}$, площадь треугольника AOB равна $\frac{R^2}{2}\cdot\operatorname{tg}x$. Итак, имеем:

$$\frac{R^2}{2}\sin x<\frac{R^2}{2}\cdot x<\frac{R^2}{2}\operatorname{tg}x,$$

или

$$\sin x<x<\operatorname{tg}x. \qquad (1)$$

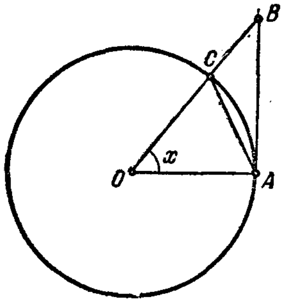

Рис. 7

Теперь докажем второе неравенство.

Поделив члены неравенства (1) на $\sin x>0$, получим

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{\operatorname{tg}x}{\sin x}, \quad \text{или} \quad 1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}, \quad \text{или} \quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

265. Так как $\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$ (задача 264), то

$$\frac{\alpha}{2} < \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}. \qquad (1)$$

Умножим обе части неравенства (1) на положительное число $2\cos^2\frac{\alpha}{2}$, получим $\alpha\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2} < 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha$, или

$$\alpha\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) < \sin\alpha. \qquad (2)$$

Поскольку $\sin\frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha}{2}$, то, заменив в левой части неравенства (2) $\sin\frac{\alpha}{2}$ на $\frac{\alpha}{2}$, получим $\alpha\left(1-\frac{\alpha^2}{4}\right) < \sin\alpha$, т. е. $\alpha-\frac{\alpha^3}{4} < \sin\alpha$.

266. Известно, что $x-\frac{x^4}{4} < \sin x < x$ (задачи 264, 265). Имеем:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\frac{1}{n-1} &> \frac{1}{n-1}-\frac{1}{4(n-1)^3},\\
\sin\frac{1}{n+1} &> \frac{1}{n+1}-\frac{1}{4(n+1)^3},\\
-2\sin\frac{1}{n} &> -\frac{2}{n}.
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Сложив почленно неравенства (1), получим

$$\sin\frac{1}{n-1}+\sin\frac{1}{n+1}-2\sin\frac{1}{n} > \left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n}\right)-$$
$$-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(n-1)^3}+\frac{1}{(n+1)^3}\right] = \frac{3n^2(n^2-4)+n^2+4}{2n(n^2-1)^3} > 0,$$

что и требовалось доказать.

267. Левая часть доказываемого неравенства есть сумма n слагаемых, каждое из которых не больше единицы. Следовательно, левая часть меньше или равна n, причем равенство может быть лишь в том случае, если все слагаемые равны по единице. Покажем, что равенства не может быть. Для этого достаточно доказать, что хотя бы два слагаемых одновременно не могут быть равны 1. Действительно, предположим, что $\sin x=1$, тогда $\cos x=0$, поэтому $\sin 2x = 2\sin x\cos x = 2\cdot 1\cdot 0 = 0 \neq 1$. Следовательно, имеет место строгое неравенство.

268. Имеем:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\alpha\sin\alpha &= \frac{\cos 0-\cos 2\alpha}{2},\\
\sin 3\alpha\sin\alpha &= \frac{\cos 2\alpha-\cos 4\alpha}{2},\\
\sin 5\alpha\sin\alpha &= \frac{\cos 4\alpha-\cos 6\alpha}{2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\sin(2n-1)\alpha\sin\alpha &= \frac{\cos(2n-2)\alpha-\cos 2n\alpha}{2},
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Сложив почленно все равенства (1), получим

$$\sin\alpha\,[\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\ldots+\sin(2n-1)\alpha]=$$
$$=\frac{1-\cos 2n\alpha}{2}=\sin^2 n\alpha. \qquad (2)$$

Поделив обе части равенства (2) на $\sin^2\alpha$, находим

$$\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\ldots+\sin(2n-1)\alpha}{\sin\alpha}=\left(\frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}\right)^2>0,$$

что и требовалось доказать.

269. Имеем:

$$\operatorname{tg}^2(\alpha-\varphi)=\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varphi}\right)^2=\left(\frac{n\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}\varphi}{1+n\operatorname{tg}^2\varphi}\right)^2=$$
$$=\frac{(n-1)^2\operatorname{tg}^2\varphi}{1+2n\operatorname{tg}^2\varphi+n^2\operatorname{tg}^4\varphi}=\frac{(n-1)^2}{\operatorname{ctg}^2\varphi+2n+n^2\operatorname{tg}^2\varphi}=$$
$$=\frac{(n-1)^2}{(\operatorname{ctg}\varphi-n\operatorname{tg}\varphi)^2+4n}\leqslant\frac{(n-1)^2}{4n},$$

что и требовалось доказать.

270. Применим метод математической индукции. Если $n=2$, то $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$. В этом частном случае имеем

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}>2\operatorname{tg}\alpha,$$

что очевидно, так как $0<\operatorname{tg}^2\alpha<1$.

Далее, пусть при $n=k$ имеет место неравенство

$$\operatorname{tg}k\alpha>k\operatorname{tg}\alpha \qquad (1)$$

при условии

$$0<\alpha<\frac{\pi}{4(k-1)}. \qquad (2)$$

Докажем, что если имеет место неравенство (1) при условии (2), то имеет место неравенство $\operatorname{tg}(k+1)\alpha>(k+1)\operatorname{tg}\alpha$ при условии $0<\alpha<\frac{\pi}{4k}$.

Применим формулу

$$\operatorname{tg}(k+1)\alpha=\frac{\operatorname{tg}k\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}k\alpha}. \qquad (3)$$

Так как неравенство (1) выполняется при условии (2), то оно тем более будет иметь место при $0<\alpha<\frac{\pi}{4k}$. Но

$$0<\operatorname{tg}\alpha<1, \qquad (4)$$

и так как $0<k\alpha<\frac{\pi}{4}$, то

$$0<\operatorname{tg}k\alpha<\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}. \qquad (5)$$

Из (4) и (5) получим

$$0 < 1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg} k\alpha < 1. \qquad (6)$$

Из соотношений (1), (3) и (6) следует $\operatorname{tg}(k+1)\alpha > (k+1)\operatorname{tg}\alpha$, что и требовалось доказать.

271. Поскольку большему углу первой четверти соответствует большее значение тангенса, то имеем

$$\operatorname{tg}\alpha_1 \leqslant \operatorname{tg}\alpha_i \leqslant \operatorname{tg}\alpha_n, \qquad (1)$$

где $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Умножив обе части (1) на $\cos\alpha_i > 0$, получим

$$\operatorname{tg}\alpha_1 \cos\alpha_i \leqslant \sin\alpha_i \leqslant \operatorname{tg}\alpha_n \cos\alpha_i. \qquad (2)$$

Придавая i всевозможные значения $(1, 2, 3, \ldots, n)$, получим n соотношений:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha_1 \cos\alpha_1 = \sin\alpha_1 < \operatorname{tg}\alpha_n \cos\alpha_1, \\ \operatorname{tg}\alpha_1 \cos\alpha_2 \leqslant \sin\alpha_2 < \operatorname{tg}\alpha_n \cos\alpha_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \operatorname{tg}\alpha_1 \cos\alpha_n \leqslant \sin\alpha_n = \operatorname{tg}\alpha_n \cos\alpha_n. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Сложив почленно все n соотношений (3), получим

$$\operatorname{tg}\alpha_1(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \ldots + \cos\alpha_n) \leqslant \sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_n \leqslant$$
$$\leqslant \operatorname{tg}\alpha_n(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \ldots + \cos\alpha_n). \qquad (4)$$

Разделив все три части неравенства (4) на выражение $\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \ldots + \cos\alpha_n$, которое положительно, получим

$$\operatorname{tg}\alpha_1 \leqslant \frac{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_n}{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \ldots + \cos\alpha_n} \leqslant \operatorname{tg}\alpha_n.$$

272. Пусть $0 < (k+1)x < \frac{\pi}{2}$, где k принимает значения 1, 2, 3 ... Докажем, что

$$\frac{\cos(k+1)x}{\cos kx} < \frac{\cos kx}{\cos(k-1)x} \cdot \cos^2 x. \qquad (1)$$

Действительно,

$$\frac{\cos(k+1)x}{\cos kx} = \frac{\cos(k+1)x \cdot \cos(k-1)x}{\cos kx \cdot \cos(k-1)x} =$$
$$= \frac{(\cos kx \cos x + \sin kx \sin x)(\cos kx \cos x - \sin kx \sin x)}{\cos kx \cos(k-1)x} =$$
$$= \frac{\cos^2 kx \cos^2 x - \sin^2 kx \sin^2 x}{\cos kx \cos(k-1)x} < \frac{\cos^2 kx \cos^2 x}{\cos kx \cos(k-1)x} =$$
$$= \frac{\cos kx}{\cos(k-1)x}\cos^2 x.$$

Придавая в неравенстве (1) параметру k значения 1, 2, 3, ..., $(n-1)$, n, получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{\cos 2x}{\cos x} &< \frac{\cos x}{1}\cdot\cos^2 x,\\ \frac{\cos 3x}{\cos 2x} &< \frac{\cos 2x}{\cos x}\cdot\cos^2 x,\\ \frac{\cos 4x}{\cos 3x} &< \frac{\cos 3x}{\cos 2x}\cdot\cos^2 x,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{\cos (n+1)x}{\cos nx} &< \frac{\cos nx}{\cos (n-1)x}\cdot\cos^2 x. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Перемножив почленно все неравенства (2) (это можно сделать, так как все члены неравенства положительны), получим $\frac{\cos (n+1)x}{\cos x} < \cos nx\cdot\cos^{2n} x$, откуда и следует доказываемое.

273. Первое решение. Имеем $y=-2\sin^2 x+3\sin x+1$, или $y=-2\left[\left(\sin x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{17}{16}\right]$. Очевидно, что y принимает наименьшее значение, когда $\left(\sin x-\frac{3}{4}\right)^2$ принимает наибольшее значение и y достигает наибольшего значения, когда $\left(\sin x-\frac{3}{4}\right)^2$ принимает наименьшее значение. Выражение $\left(\sin x-\frac{3}{4}\right)^2$ имеет наименьшее значение (нуль), когда $\sin x=\frac{3}{4}$, а наибольшее $\left(\frac{49}{16}\right)$ при $\sin x=-1$, т. е. $0\leqslant\left(\sin x-\frac{3}{4}\right)^2\leqslant\frac{49}{16}$. Итак, $y_{\min}=-2\left[\frac{49}{16}-\frac{17}{16}\right]=-4$ и $y_{\max}=-2\left[0-\frac{17}{16}\right]=\frac{17}{8}$, или $-4\leqslant y\leqslant 2\frac{1}{8}$, что и требовалось доказать.

Второе решение. Имеем $y=\cos 2x+3\sin x=-2\sin^2 x+3\sin x+1$. Пусть $\sin x=z$, где $-1\leqslant z\leqslant 1$, тогда $y=-2z^2+3z+1$. Если $z=\frac{-3}{2(-2)}=\frac{3}{4}$, то получаем

$$y_{\max}=-2\cdot\frac{9}{16}+3\cdot\frac{3}{4}+1=2\frac{1}{8}. \qquad (1)$$

По свойству квадратной функции $y=-2z^2+3z+1$ возрастает в интервале $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$ и убывает в интервале $\left(\frac{3}{4}, \infty\right)$. Но так как $-1\leqslant z\leqslant 1$, то:

1) для значения $z\leqslant\frac{3}{4}$ наименьшее значение y получается при $z=-1$, т. е.

$$y_{\min}=-2-3+1=-4; \qquad (2)$$

2) для значений $z > \frac{3}{4}$ наименьшее значение y принимает при $z=1$, т. е.

$$y_{\min} = -2+3+1=2. \tag{3}$$

Из соотношений (1), (2) и (3) заключаем, что $-4 \leqslant y \leqslant 2\frac{1}{8}$.

274. Имеем

$$y = \frac{a(1-\cos 2x)}{2} + \frac{b\sin 2x}{2} + \frac{c(1+\cos 2x)}{2},$$

$$y = \frac{a+c}{2} + \frac{b\sin 2x}{2} + \frac{(c-a)\cos 2x}{2},$$

$$y = \frac{a+c}{2} + \frac{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}{2}\left(\frac{b}{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}\sin 2x + \right.$$

$$\left. + \frac{c-a}{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}\cos 2x\right).$$

Легко найти такой вспомогательный угол φ, что

$$\frac{b}{\sqrt{b^2+(c-a)^2}} = \cos\varphi \text{ и } \frac{c-a}{\sqrt{b^2+(c-a)^2}} = \sin\varphi.$$

Итак,

$$y = \frac{a+c}{2} + \frac{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}{2}[\sin 2x\cos\varphi + \cos 2x\sin\varphi],$$

или

$$y = \frac{a+c}{2} + \frac{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}{2}\cdot\sin(2x+\varphi).$$

Так как $-1 \leqslant \sin(2x+\varphi) \leqslant 1$, то $y_{\max} = \frac{a+c}{2} + \frac{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}{2}$, а

$y_{\min} = \frac{a+c}{2} - \frac{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}{2}$, т. е.

$$\frac{a+c}{2} - \frac{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}{2} \leqslant y \leqslant \frac{a+c}{2} + \frac{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}{2},$$

что и требовалось доказать.

275. Перепишем доказываемое неравенство в виде

$$\frac{1}{2} + \frac{1-\sin x}{2-\sin x} - \frac{2-\sin x}{3-\sin x} \geqslant 0. \tag{1}$$

Так как $2(2-\sin x)(3-\sin x) > 0$, то неравенство (1) верно, если верно неравенство $\sin^2 x - 5\sin x + 4 \geqslant 0$, или

$$(4-\sin x)(1-\sin x) \geqslant 0. \tag{2}$$

Неравенство (2) имеет место при любом значении x, так как $4-\sin x > 0$, $1-\sin x \geqslant 0$.

Равенство достигается лишь при $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

276. Так как $\sin A \cdot \sin B=\frac{\cos(A-B)-\cos(A+B)}{2}$, то условие задачи можно переписать так: $\cos(A-B)-\cos(A+B)>1$. Отсюда $\cos(A+B)<\cos(A-B)-1\leqslant 0$. Следовательно, $A+B>90°$, а потому $C<90°$.

277. Первое решение. Имеем $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=2\sin\alpha$, или $\cos\alpha\sin\beta=\sin\alpha(2-\cos\beta)$. Поскольку $\cos\alpha\sin\beta<\sin\beta$, то и

$$\sin\alpha(2-\cos\beta)<\sin\beta. \tag{1}$$

Далее, так как $2-\cos\beta>1$, то

$$\sin\alpha<\sin\alpha(2-\cos\beta). \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что

$$\sin\alpha<\sin\beta. \tag{3}$$

Поскольку α и β — острые углы, то из (3) заключаем, что $\alpha<\beta$.

Второе решение. Имеем $\sin(\alpha+\beta)=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$; так как $\left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right|<\frac{\alpha+\beta}{2}$ (для острых углов α и β), то $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}>\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, т. е. $\sin(\alpha+\beta)<\sin\alpha+\sin\beta$. Из равенства $\sin(\alpha+\beta)=2\sin\alpha$ получим теперь $\sin\alpha<\sin\beta$, откуда $\alpha<\beta$.

278. $$\left|\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right|=\left|\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x}{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x}\right|=\left|\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|\leqslant 1,$$

откуда $-\frac{\pi}{4}\leqslant x-\frac{\pi}{4}-\pi k\leqslant\frac{\pi}{4}$ или $\pi k\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}+\pi k$, что и требовалось доказать.

279. Первое решение. Так как $\operatorname{tg} x=3\operatorname{tg} y$, то $x\geqslant y$ (учитывая ограничения на x и y). Пусть $x=a+y$, где $a\geqslant 0$.

Имеем $\operatorname{tg}(a+y)=3\operatorname{tg} y$, или $\frac{\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} a\operatorname{tg} y}=3\operatorname{tg} y$. Отсюда $3\operatorname{tg} a\cdot\operatorname{tg}^2 y-2\operatorname{tg} y+\operatorname{tg} a=0$ и $\operatorname{tg} y=\frac{1\pm\sqrt{1-3\operatorname{tg}^2 a}}{3\operatorname{tg} a}$.

Для того чтобы $\operatorname{tg} y$ было действительным, необходимо, чтобы $1-3\operatorname{tg}^2 a\geqslant 0$. Отсюда $\operatorname{tg}^2 a\leqslant\frac{1}{3}$. Поскольку $0\leqslant a<\frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg} a\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $a\leqslant\frac{\pi}{6}$, следовательно, имеем $a=x-y\leqslant\frac{\pi}{6}$, что и требовалось доказать.

Второе решение. Имеем $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 2\operatorname{tg} y$, или $\frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y} = \frac{2\sin y}{\cos y}$, или $\sin(x-y) = 2\cos x \sin y$, или $\sin(x-y) = \sin(x+y) - \sin(x-y)$, или $2\sin(x-y) = \sin(x+y) \leqslant 1$, откуда

$$\sin(x-y) \leqslant \frac{1}{2}.$$

Учитывая ограничения x и y, получаем $x - y \leqslant \frac{\pi}{6}$.

280. Данное неравенство можно представить так:

$$\operatorname{tg}\gamma(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) < 1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta. \qquad (1)$$

Так как левая часть этого неравенства положительна, то

$$1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta > 0. \qquad (2)$$

Разделив обе части неравенства (1) на $\operatorname{tg}\gamma(1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)$, получим: $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} < \frac{1}{\operatorname{tg}\gamma} = \operatorname{ctg}\gamma = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$, или

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) < \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right). \qquad (3)$$

Учитывая, что $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$, $0 < \alpha < \pi/2$, $0 < \beta < \pi/2$, а также неравенство (2), заключаем, что $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) > 0$. Поэтому из (3) следует, что $\alpha + \beta < \pi/2 - \gamma$, т. е.

$$0 < \alpha + \beta + \gamma < \frac{\pi}{2}.$$

281. Ясно, что $(1 - \sin x)^2 + \sin^2(x-1) \geqslant 0$. Докажем, что равенство невозможно. Если бы $(1 - \sin x)^2 + \sin^2(x-1) = 0$, то это могло выполняться только тогда, когда одновременно $1 - \sin x = 0$ и $\sin(x-1) = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ и $x = 1 + \pi n$. Из этого следует, что $\frac{\pi}{2} + 2\pi k = 1 + \pi n$, или $\pi = \frac{2}{1 + 4k + 2n}$. Последнее равенство невозможно, так как иррациональное число не может быть равно рациональному. Следовательно, наше допущение привело к противоречию.

282. Имеем $|\sin x| \leqslant 1$, $\sin^2\frac{x}{5} \leqslant 1$. Перемножив эти два неравенства, получим $|\sin x| \sin^2\frac{x}{5} \leqslant 1$. Таким образом, левая часть доказываемого неравенства

$$2|\sin x| \sin^2\frac{x}{5} \leqslant 2. \qquad (1)$$

Далее, известно, что сумма взаимно обратных положительных чисел не меньше 2. Следовательно, правая часть доказываемого неравенства

$$x^2+\frac{1}{x^2}\geqslant 2. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что правая часть равна левой лишь при значениях неизвестного, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} x^2+\dfrac{1}{x^2}=2, \\ 2\,|\sin x\,|\sin^2\dfrac{x}{2}=2. \end{cases}$$

Первое равенство системы имеет решения $x=\pm 1$. Но значения $x=\pm 1$ не являются решениями второго уравнения. Следовательно, $2\,|\sin x\,|\sin^2\dfrac{x}{5}\neq x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

283. Доказываемое неравенство перепишем в виде

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}<2,\quad \frac{\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}<2,$$

$$\frac{\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\alpha-\frac{\alpha}{2}\right)}<2,\quad 2\cos^2\frac{\alpha}{2}<2,$$

что очевидно.

284. Неравенство $-1\leqslant y\leqslant 1$ равносильно неравенству $y^2-1\leqslant 0$. Имеем:

$$y^2-1=\left(\frac{x^2\cos\alpha-2x+\cos\alpha}{x^2-2x\cos\alpha+1}\right)^2-1=$$

$$=\frac{x^4\cos^2\alpha+4x^2+\cos^2\alpha-4x^3\cos\alpha+2x^2\cos^2\alpha-4x\cos\alpha}{(x^2-2x\cos\alpha+1)^2}+$$

$$+\frac{-x^4-4x^2\cos^2\alpha-1+4x^3\cos\alpha-2x^2+4x\cos\alpha}{(x^2-2x\cos\alpha+1)^2}=$$

$$=\frac{x^4(\cos^2\alpha-1)+2x^2(1-\cos^2\alpha)+(\cos^2\alpha-1)}{(x^2-2x\cos\alpha+1)^2}=$$

$$=-\frac{(x^2-1)^2\sin^2\alpha}{(x^2-2x\cos\alpha+1)^2}\leqslant 0,$$

что очевидно. Равенство достигается лишь при $x=\pm 1$.

285. Имеем $a\sin^2\alpha+b\operatorname{cosec}^2\alpha=(\sqrt{a}\cdot\sin\alpha-\sqrt{b}\operatorname{cosec}\alpha)^2+2\sqrt{ab}\geqslant 2\sqrt{ab}$. Знак равенства имеет место лишь при $\sin^2\alpha=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$.

286. Доказываемое неравенство перепишем в виде

$$(1+\sin^2\alpha)(\mathrm{tg}^2\alpha-2)+(\mathrm{ctg}^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha\sin^2\alpha)\geqslant 0,$$
$$(1+\sin^2\alpha)(\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha-2)\geqslant 0,$$
$$(1+\sin^2\alpha)(\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{ctg}\,\alpha)^2\geqslant 0,$$

что очевидно. Следовательно, утверждение задачи верно.

Знак равенства имеет место только в том случае, когда $\mathrm{tg}^2\alpha=\mathrm{ctg}^2\alpha$, т. е. лишь при $\alpha=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, где $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots$

287. Имеем:

$$\frac{\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}+\frac{2}{\sec\alpha+\mathrm{cosec}\,\alpha}=\frac{\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}+$$
$$+\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{|\sin\alpha-\cos\alpha|}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}+\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=$$
$$=\frac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha}\left[\frac{|\sin\alpha-\cos\alpha|}{\sin\alpha-\cos\alpha}+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}\left[\frac{|\sin\alpha-\cos\alpha|}{\sin\alpha-\cos\alpha}+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)\right].$$

Таким образом, доказываемое неравенство можно переписать в виде

$$-\sqrt{2}<\frac{1}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}\left[\frac{|\sin\alpha-\cos\alpha|}{\sin\alpha-\cos\alpha}+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)\right]<\sqrt{2}. \tag{1}$$

Из условия следует, что $\sin\alpha>\cos\alpha$, поэтому (1) имеет вид

$$-\sqrt{2}<\frac{1}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)\right]<\sqrt{2},$$
$$-\sqrt{2}<\frac{1}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)<\sqrt{2},$$
$$-\sqrt{2}<\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)<\sqrt{2},$$

что очевидно.

288. Имеем

$$|\sin nx|=|\sin[(n-1)x+x]|=$$
$$=|\sin(n-1)x\cos x+\cos(n-1)x\sin x|. \tag{1}$$

Но так как $|a+b|\leqslant|a|+|b|$, то

$$|\sin(n-1)x\cos x+\cos(n-1)x\sin x|\leqslant$$
$$\leqslant|\sin(n-1)x\cos x|+|\cos(n-1)x\sin x|. \tag{2}$$

Далее,

$$|\sin (n-1)\, x \cos x| \leqslant |\sin (n-1)\, x|, \tag{3}$$
$$|\cos (n-1)\, x \sin x| \leqslant |\sin x|. \tag{4}$$

Сложив почленно неравенства (3) и (4), получим

$$|\sin (n-1)\, x \cos x| + |\cos (n-1)\, x \sin x| \leqslant |\sin (n-1)\, x| + |\sin x|. \tag{5}$$

На основании свойства транзитивности неравенств из (2) и (5) следует, что

$$|\sin (n-1)\, x \cos x + \cos (n-1)\, x \sin x| \leqslant |\sin (n-1)\, x| + |\sin x|. \tag{6}$$

В силу соотношений (1) и (6) получаем

$$\left.\begin{aligned} |\sin nx| &\leqslant |\sin (n-1)\, x| + |\sin x|, \\ |\sin (n-1)\, x| &\leqslant |\sin (n-2)\, x| + |\sin x|, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ |\sin 2x| &\leqslant |\sin x| + |\sin x|. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Сложив почленно неравенства (7), получаем $|\sin nx| \leqslant n\,|\sin x|$, что и требовалось доказать. Равенство имеет место лишь при $n=0$ или при $x=\pi k$, где $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \dots$

§ 7. Нахождение наибольших и наименьших значений функций

289. Пусть дано m переменных $a, b, c, d, \dots, l$, сумма которых постоянна (равна mr). Пусть $a_0, b_0, c_0, d_0, \dots, l_0$ — такие значения переменных, что $a_0=b_0=c_0=d_0=\dots=l_0=r$.

Тогда произведение $P_0=a_0b_0c_0d_0\dots l_0=r^m$. Если $a_1, b_1, c_1, d_1, \dots$ $\dots, l_1$ такие значения переменных, среди которых имеются числа, неравные r, то в этом случае среди этих значений имеются числа, большие r, и числа, меньшие r. Положим, что $a_1 > r$, $b_1 < r$. Тогда $a_1=r+h$, $b_1=r-k$, где $h>0$, $k>0$. Пусть $P_1=a_1b_1c_1d_1\dots l_1$ или $P_1=(r+h)(r-k)\,c_1d_1\dots l_1$. Если заменить $a_1=r+h$ числом r, $b_1=r-k$ — числом $r+h-k$, оставляя $c_1, d_1, \dots, l_1$ без изменения, то получим произведение $P_2=r\,(r+h-k)\,c_1d_1\dots l_1$ (сумма сомножителей при этом не изменяется). Докажем, что $P_2 > P_1$. Так как $r\,(r+h-k)=r^2+r\,(h-k)$, а $(r+h)(r-k)=r^2+r\,(h-k)-hk < r^2+r\,(h-k)$, то $r\,(r+h-k)\,c_1d_1\dots l_1 > (r+h)(r-k)\,c_1d_1\dots l_1$ или $P_2 > P_1$. Воспользуемся методом математической индукции. Допустим, что проделав k раз аналогичную операцию с k парами сомножителей, мы получали произведения $P_2, P_3, \dots, P_{k+1}$, где $P_1 < P_2 < P_3 < \dots < P_k < P_{k+1}$. Произведение P_{k+1} содержит не менее k сомножителей, каждый из которых равен r. (Число таких сомножителей может быть больше k, если в произведении P_1 имеются сомножители, равные r.) Тогда $P_{k+1}=r^kP$, где P — произведение тех $(m-k)$ сомножителей, входящих в P_1, которые в процессе указанных операций не участвовали или были заменены числами вида $(r+h-k)$. Если в произведении P имеются сомножители $f=r+h_1$ и $i=r-k_1$, то, заменив f числом r, а i числом $r+h_1-k_1$, получим (так же как при переходе от P_1 к P_2) произведение $P' > P$.

Поэтому $P_{k+2}=r^kP'>P_{k+1}$. Если указанные выше операции проводить до тех пор (этих операций будет не больше m), пока все множители станут равными r, то получим $P_0=r^m$, причем $P_1<P_2<P_3<\ldots<P_0$, т. е. произведение m положительных переменных сомножителей, сумма которых постоянна (mr), имеет наибольшее значение r^m при равенстве всех сомножителей.

Заметим, что неравенство Коши (см. задачу 157) является следствием доказанного предложения. Действительно, пусть

$$\left.\begin{array}{l} a_1>0,\ a_2>0,\ a_3>0,\ \ldots,\ a_m>0 \\ a_1+a_2+a_3+\ldots+a_m=ma, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

и

где ma — постоянная величина.

Согласно доказанному предложению

$$a_1a_2a_3\ldots a_m\leqslant a^m, \qquad (2)$$

причем знак равенства имеет место лишь при $a_1=a_2=\ldots=a_m=a$. Из (1) и (2) вытекает, что $a_1a_2a_3\ldots a_m\leqslant\left(\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_m}{m}\right)^m$, или $\sqrt[m]{a_1a_2a_3\ldots a_m}\leqslant\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_m}{m}$.

290. Пусть $a_1>0, a_2>0, a_3>0, \ldots, a_m>0$ и $a_1\cdot a_2\ldots a_m=b^m$, где b^m — постоянная величина; b — действительное положительное число (рациональное или иррациональное). На основании неравенства Коши (см. задачу 157) имеем

$$\sqrt[m]{b^m}\leqslant\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_m}{m},$$

или

$$b\leqslant\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_m}{m}. \qquad (1)$$

Знак равенства имеет место лишь при $a_1=a_2=a_3=\ldots=a_m$. Из (1) имеем $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_m\geqslant mb$, т. е. сумма $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_m$ имеет наименьшее значение, равное mb, при $a_1=a_2=a_3=\ldots=a_m$.

291. После преобразований данная функция принимает вид

$$y=nx^2-2(a_1+a_2+\ldots+a_n)x+(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2).$$

Известно, что функция ax^2+bx+c в случае $a>0$ имеет наименьшее значение при $x=-\frac{b}{2a}$. Таким образом, в рассматриваемой задаче y имеет наименьшее значение при $x=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$.

292. На числовой оси отметим точки A, B, C, D, соответствующие числам a, b, c и d. Точку с переменной абсциссой x обозначим через M. Рассмотрим все возможные случаи.

1) Если $x\leqslant a$, то $\varphi(x)=MA+MB+MC+MD=MA+3MB+2BC+CD$. Отсюда следует, что $\varphi(x)$ будет принимать наименьшее значение в том случае, когда точка M совпадает с точкой A, и что это значение равно

$$3AB+2BC+CD. \qquad (1)$$

2) Если $a < x \leqslant b$, то $\varphi(x) = AM + MB + MC + MD = AB + 2MB + 2BC + CD$. В этом случае функция $\varphi(x)$ принимает наименьшее значение, когда точка M совпадает с точкой B; это значение равно

$$AB + 2BC + CD. \tag{2}$$

3) Если $b \leqslant x \leqslant c$, то функция $\varphi(x)$ постоянная и равна

$$AB + 2BC + CD. \tag{3}$$

4) Если $c \leqslant x < d$, то функция $\varphi(x)$ принимает наименьшее значение при $x = c$ и равна также

$$AB + 2BC + CD. \tag{4}$$

5) Если $x \geqslant d$, то функция $\varphi(x)$ принимает наименьшее значение, равное

$$AB + 2BC + 3CD. \tag{5}$$

Сравнивая полученные результаты: (1), (2), (3), (4) и (5), видим что наименьшее значение функции $\varphi(x)$ равно $AB + 2BC + CD$, или $b - a + 2(c - b) + d - c = d + c - b - a$. Это значение функция $\varphi(x)$ принимает при условии, что $b \leqslant x \leqslant c$.

293. Функция состоит из произведения восьми сомножителей, из которых 5 равны $1 - x$, 1 равен $1 + x$ и 2 равны $1 + 2x$.

На основании зависимости между средним арифметическим и средним геометрическим имеем

$$\frac{5(1-x) + (1+x) + 2(1+2x)}{8} \geqslant \sqrt[8]{(1-x)^5(1+x)(1+2x)^2},$$

или $\sqrt[8]{(1-x)^5(1+x)(1+2x)^2} \leqslant 1$, т. е.

$$(1-x)^5(1+x)(1+2x)^2 \leqslant 1. \tag{1}$$

Правая часть неравенства (1) не зависит от x, поэтому наибольшее значение достигается при равенстве сомножителей, т. е. при $1 - x = 1 + x = 1 + 2x$. Эти равенства возможны только при $x = 0$.

Итак, наибольшее значение $y = 1$ (при $x = 0$).

Заметим, что эту задачу можно решить по-другому, воспользовавшись задачей 289.

294. Имеем

$$y = z + 2x. \tag{1}$$

Подставив это значение y в данное уравнение, получим $36x^2 + 16(z + 2x)^2 = 9$, или $100x^2 + 64zx + 16z^2 - 9 = 0$.

Отсюда $x = \dfrac{-32z \pm \sqrt{900 - 576z^2}}{100}$ или

$$x = \frac{-16z \pm 3\sqrt{25 - 16z^2}}{50}. \tag{2}$$

Для того чтобы x было вещественным, необходимо, чтобы имело место неравенство $25 - 16z^2 \geqslant 0$, откуда $-\dfrac{5}{4} \leqslant z \leqslant \dfrac{5}{4}$. Итак, наибольшее значение функции $+\frac{5}{4}$, а наименьшее $-\frac{5}{4}$. Значения x и y, соответствующие $z=-\frac{5}{4}$ и $z=\frac{5}{4}$, легко найти из (2) и (1).

295. Имеем $cdz=cd(a-x)(b-y)(cx+dy)$, или

$$cdz=(ac-cx)(bd-dy)(cx+dy). \qquad (1)$$

Поскольку сумма $(ac-cx)+(bd-dy)+(cx+dy)=ac+bd$ — постоянная величина, то выражение cdz достигает максимума при

$$ac-cx=bd-dy=cx+dy. \qquad (2)$$

Решая систему (2), находим $x=\frac{2ac-bd}{3c}$, $y=\frac{2bd-ac}{3d}$.

Таким образом, наибольшее значение выражения cdz равно

$$\left(ac-\frac{2ac-bd}{3}\right)\left(bd-\frac{2bd-ac}{3}\right)\left(\frac{2ac-bd}{3}+\frac{2bd-ac}{3}\right)=\frac{(ac+bd)^3}{27},$$

а наибольшее значение $z=\frac{(ac+bd)^3}{27dc}$.

296. Имеем

$$y=\sqrt{(\sqrt{x+1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x+1}-1)^2}=$$
$$=\sqrt{x+1}+1+|\sqrt{x+1}-1|.$$

Очевидно, что функция определена при $x\geqslant-1$. Если $x\geqslant 0$, то $y=2\sqrt{x+1}\geqslant 2$, а если $-1\leqslant x<0$, то $y=2$. Итак, наименьшее значение y равно 2.

297. Функция определена, если $1-x^2>0$, т. е. при

$$-1<x<1. \qquad (1)$$

Исследуемая функция достигает минимума при тех же значениях x, что и ее квадрат. Имеем

$$y^2=\left(\frac{5-3x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2=\frac{25-30x+9x^2}{1-x^2}=\frac{9-30x+25x^2}{1-x^2}+\frac{16(1-x^2)}{1-x^2}=$$
$$=\left(\frac{3-5x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2+16\geqslant 16.$$

Таким образом, наименьшее значение $y=\sqrt{16}=4$, если $3-5x=0$, т. е. при

$$x=\frac{3}{5}. \qquad (2)$$

Поскольку (2) не противоречит (1), то задача решена верно.

298. Область определения функции находим из системы неравенств

$$\begin{cases} -x^2+4x+12\geqslant 0, \\ -x^2+2x+3\geqslant 0, \end{cases}$$

откуда

$$-1 \leqslant x \leqslant 3. \qquad (1)$$

Докажем, что для всех x из области определения $y > 0$. Действительно, в этой области неравенство $\sqrt{-x^2+4x+12} > \sqrt{-x^2+2x+3}$ равносильно

$$x > -4{,}5. \qquad (2)$$

Поскольку все числа из промежутка (1) удовлетворяют неравенству (2), то $y > 0$.

Имеем $y^2 = [\sqrt{(x+2)(6-x)} - \sqrt{(x+1)(3-x)}]^2 = [\sqrt{(x+1)(6-x)} - \sqrt{(x+2)(3-x)}]^2 + 3 \geqslant 3$. Итак, $y^2 \geqslant 3$. Но поскольку $y > 0$, то $y \geqslant \sqrt{3}$. Таким образом, наименьшее значение данной функции равно $\sqrt{3}$. Легко убедиться, что оно достигается при $x=0$.

299. Функции y и $\frac{1}{4}y^2$ достигают наибольшего значения при одном и том же значении аргумента x.

Имеем $\frac{1}{4}y^2 = \frac{1}{4}x^4(a^2-x^2) = \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{2}x^2(a^2-x^2)$. Сумма $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 + (a^2-x^2) = a^2$ — постоянная величина, поэтому функция $\frac{1}{4}y^2$ достигает наибольшего значения при $\frac{1}{2}x^2 = a^2 - x^2$, т. е. при $x^2 = \frac{2a^2}{3}$. Таким образом, наибольшее значение

$$y = \frac{2a^2}{3}\sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{3}} = \frac{2\,|a^3|}{3\sqrt{3}} \quad \text{при} \quad x^2 = \frac{2a^2}{3}.$$

300. Функция определена, если $1-x^2 \geqslant 0$, т. е. при $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Так как $y \leqslant 3\,|x| + 4\sqrt{1-x^2}$, то наибольшее значение y возможно только тогда, когда

$$0 < x \leqslant 1. \qquad (1)$$

Исследуемая функция достигает наибольшего значения при тех же значениях x, что и ее квадрат. Имеем $y^2 = (3x+4\sqrt{1-x^2})^2 = 9x^2 + 16 - 16x^2 + 24x\sqrt{1-x^2} = -[16x^2 - 24x\sqrt{1-x^2} + 9(1-x^2)] + 25 = -(4x - 3\sqrt{1-x^2})^2 + 25 \leqslant 25$.

Таким образом, наибольшее значение $y = \sqrt{25} = 5$, если $4x - 3\sqrt{1-x^2} = 0$, откуда $4x = 3\sqrt{1-x^2}$, или $16x^2 = 9 - 9x^2$, или

$$x = \frac{3}{5}. \qquad (2)$$

Поскольку (2) не противоречит (1), то задача решена верно.

301. Имеем $y=\frac{x^3+16}{x}-12+12=\frac{x^3-12x+16}{x}+12=$
$=\frac{x^3+4x^2-4x^2-16x+4x+16}{x}+12=\frac{(x+4)x^2-4x(x+4)+4(x+4)}{x}+$
$+12$, или $y=\frac{(x+4)(x-2)^2}{x}+12$. Очевидно, что если $x>0$, то $z=\frac{(x+4)(x-2)^2}{x}\geqslant 0$. Отсюда видно, что наименьшее значение $z=0$ при $x=2$, а следовательно, наименьшее значение $y=12$ при $x=2$.

302. Пусть данная дробь равна c; тогда после тождественных преобразований получим

$$(2-c)x^4-4x^3+(9-2c)x^2-4x+2-c=0,$$

или, если $x\neq 0$,

$$(2-c)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+9-2c=0,$$

$$(2-c)\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+5=0. \qquad (1)$$

Для того чтобы x было вещественным, необходимо, чтобы и $x+\frac{1}{x}$ было вещественным, т. е. надо, чтобы дискриминант уравнения (1) был неотрицательным, т. е. $4-5(2-c)\geqslant 0$. Отсюда $c\geqslant\frac{6}{5}$. Таким образом, наименьшее значение $y=1{,}2$. Мы нашли наименьшее значение y, исходя из предположения, что $x\neq 0$. Если же $x=0$, то $y=2$. Так как $2>1{,}2$, то $y=2$ не является наименьшим значением функции. Подставляя в (1) значение $c=\frac{6}{5}$, найдем соответствующие значения x.

303. Поскольку произведение $am^{kx}bm^{-kx}=ab$ постоянно, то данная функция достигает наименьшего значения, когда $am^{kx}=bm^{-kx}$, или $m^{2kx}=\frac{b}{a}$, откуда $m^{kx}=\sqrt{\frac{b}{a}}$ и $m^{-kx}=\sqrt{\frac{a}{b}}$. Таким образом, наименьшее значение $y=a\sqrt{\frac{b}{a}}+b\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{ab}+\sqrt{ab}=$
$=2\sqrt{ab}\left(\text{при } x=\frac{1}{k}\log_m\frac{\sqrt{ab}}{a}\right)$.

304. Поделив обе части неравенства Буняковского

$$(a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)$$

на $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$, получим

$$y=\frac{(a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n)^2}{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)}{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2},$$

откуда $y \leqslant a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2$. Как известно, при $x_i=a_i$ неравенство Буняковского переходит в равенство. Таким образом, наибольшее значение $y=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2$.

305. На основании неравенства Буняковского имеем

$$y^2=(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2 \leqslant (x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2).$$

В нашей задаче $y^2 \leqslant 4 \cdot 9=36$. Отсюда $-6 \leqslant y \leqslant 6$. Так как в неравенстве Буняковского равенство достигается, то наименьшее значение $y=-6$, а наибольшее значение $y=6$.

306. Данную функцию можно представить в виде $y=a^2 \cdot \frac{1-x}{x}+$ $+b^2 \cdot \frac{x}{1-x}+a^2+b^2$. Поскольку произведение $\left(a^2 \cdot \frac{1-x}{x}\right) \times$ $\times\left(b^2 \cdot \frac{x}{1-x}\right)=a^2b^2$ не зависит от x, то функция $a^2 \cdot \frac{1-x}{x}+b^2 \cdot \frac{x}{1-x}$ достигает минимума, если $a^2 \cdot \frac{1-x}{x}=b^2 \cdot \frac{x}{1-x}$. Отсюда $x=\frac{a}{a+b}$. При этом значении x функция $y=(a+b)^2$.

307. Имеем $y=\frac{1+x^4+x^2+1+2x^3+2x^2+2x}{x^2+x+1}=\frac{(x^2+x+1)^2+1}{x^2+x+1}=$ $=x^2+x+1+\frac{1}{x^2+x+1}$. Поскольку корни квадратного трехчлена x^2+x+1 мнимые, то при любом действительном значении x функци $x^2+x+1>0$. Следовательно, исследуемая функция y есть сумма взаимно обратных положительных величин, и, как известно, в таком случае $y \geqslant 2$. Откуда заключаем, что наименьшее значение y равно 2. Это значение достигается при условии $x^2+x+1=1$, откуда $x_1=0$, $x_2=-1$.

308. Если m и n — целые положительные числа, то на основании неравенства Коши имеем

$$\frac{\overbrace{\frac{x}{m}+\frac{x}{m}+\ldots+\frac{x}{m}}^{m \text{ раз}}+\overbrace{\frac{y}{n}+\frac{y}{n}+\ldots+\frac{y}{n}}^{n \text{ раз}}}{m+n} \geqslant \sqrt[m+n]{\left(\frac{x}{m}\right)^m\left(\frac{y}{n}\right)^n},$$

или $\frac{x+y}{m+n} \geqslant \sqrt[m+n]{\left(\frac{x}{m}\right)^m\left(\frac{y}{n}\right)^n}$, или $\left(\frac{x+y}{m+n}\right)^{m+n} \geqslant \left(\frac{x}{m}\right)^m\left(\frac{y}{n}\right)^n$, откуда $x^my^n \leqslant \left(\frac{x+y}{m+n}\right)^{m+n} m^mn^n$.

Рассмотрим теперь случай, когда хотя бы одно из чисел m и n дробное. Пусть m и n имеют общий знаменатель p, тогда mp и np целые числа, а потому $\left(\frac{x+y}{mp+np}\right)^{mp+np} \geqslant \left(\frac{x}{mp}\right)^{mp}\left(\frac{y}{np}\right)^{np}$, или $\left(\frac{x+y}{m+n}\right)^{m+n} \geqslant \left(\frac{x}{m}\right)^m\left(\frac{y}{n}\right)^n$, откуда $x^my^n \leqslant \left(\frac{x+y}{m+n}\right)^{m+n} m^mn^n$.

Итак, неравенство доказано и для дробных m и n. Далее, если $x^m y^n = c$, то доказанное неравенство принимает вид $\left(\frac{x+y}{m+n}\right)^{m+n} \times$ $\times m^m n^n \geqslant c$, откуда $x+y \geqslant (m+n)\left(\frac{c}{m^m n^n}\right)^{\frac{1}{m+n}}$.

Следовательно, наименьшее значение суммы $x+y$ равно

$$(m+n)\sqrt[m+n]{\frac{c}{m^m n^n}}.$$

309. На основании неравенства Коши имеем

$$\frac{x+\frac{y}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}+\frac{z}{3}+\frac{z}{3}}{6} \geqslant \sqrt[6]{x\left(\frac{y}{2}\right)^2\left(\frac{z}{3}\right)^3}$$

$\left(\text{равенство достигается лишь при } x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}\right)$, или $\frac{x+y+z}{6} \geqslant$ $\geqslant \sqrt[6]{\frac{xy^2z^3}{108}}$, откуда $\frac{(x+y+z)^6}{xy^2z^3} \geqslant \frac{6^6}{108} = 432$. Итак, наименьшее значение $F(x, y, z) = 432$.

310. Имеем $y = \frac{(a+x)(b+x)}{x} = \frac{x^2+(a+b)x+ab}{x} = \frac{ab}{x}+x+$ $+(a+b) = \left(\sqrt{\frac{ab}{x}} - \sqrt{x}\right)^2 + (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$. Так как $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ — постоянная величина и $\left(\sqrt{\frac{ab}{x}}-\sqrt{x}\right)^2 \geqslant 0$, то y достигает минимума, если $\sqrt{\frac{ab}{x}}-\sqrt{x}=0$, т. е. при $x=\sqrt{ab}$. Наименьшее значение $y=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$.

311. Представим данную функцию в виде $y=\sin^3 x(1-\sin^3 x)$. Поскольку $\sin^3 x+(1-\sin^3 x)=1$ (постоянная величина), то функция достигает максимума при $\sin^3 x = 1-\sin^3 x$, откуда $\sin^3 x = \frac{1}{2}$. Наибольшее значение $y=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ при $x=(-1)^k \arcsin\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\pi k$.

312. Поскольку $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$, то исследуемую функцию можно переписать в виде $y=3\cos^2 x - 3\sqrt{3}\cos x+4$, или $y=$ $=\left(\sqrt{3}\cos x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$. Отсюда заключаем, что если $\sqrt{3}\cos x -$ $-\frac{3}{2}=0$ $\left(\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, то y принимает наименьшее значение, равное $\frac{7}{4}$, а если $\cos x=-1$, то y принимает наибольшее значение, равное $\left(-\sqrt{3}-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}=7+3\sqrt{3}$.

Итак, $y_{\text{наим}}=\frac{7}{4}$ при $x=\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi$; $y_{\text{наиб}}=7+3\sqrt{3}$ при $x=\pi(2k+1)$, где $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2.$

313. Имеем $y=\sin^2 x\,\frac{\sin x}{\cos x}+\cos^2 x\,\frac{\cos x}{\sin x}+2\sin x\cos x=$

$$=\frac{\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2}{\sin x\cos x}=\frac{1}{\sin x\cos x}=$$

$$=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x.$$

Таким образом, рассматриваемая функция есть сумма взаимно обратных величин. Следовательно, $y_{\max}=-2$, при $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, а $y_{\min}=2$ при $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, где $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$

314. Поскольку $\sin^2 x\leqslant 1$, то $\sin^2 x-4\sin x+5\leqslant 6-4\sin x=2(3-2\sin x)$.

Следовательно, учитывая, что $3-2\sin x>0$, имеем

$$\frac{\sin^2 x-4\sin x+5}{3-2\sin x}\leqslant\frac{2(3-2\sin x)}{3-2\sin x}=2.$$

Ясно, что равенство достигается при $\sin x=\pm 1$. Таким образом, наибольшее значение y равно 2 при $\sin x=\pm 1$, т. е. при $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, где $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$

Остается найти наименьшее значение функции. Имеем

$$y=\frac{\sin^2 x-4\sin x+5}{3-2\sin x}=\frac{(3-2\sin x)^2+5+(6-4\sin x)}{4(3-2\sin x)}=$$

$$=\frac{3-2\sin x}{4}+\frac{5}{4(3-2\sin x)}+\frac{1}{2}.$$

Поскольку $3-2\sin x>0$, то

$$\frac{3-2\sin x}{4}+\frac{5}{4(3-2\sin x)}\geqslant 2\sqrt{\frac{(3-2\sin x)\cdot 5}{4\cdot 4(3-2\sin x)}}=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Следовательно, наименьшее значение функции $y=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Наименьшее значение y достигается при условии $\frac{3-2\sin x}{4}=\frac{5}{4(3-2\sin x)}$, т. е. при $\sin x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, откуда $x=(-1)^k\arcsin\frac{3-\sqrt{5}}{2}+k\pi$, где $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$

315. Имеем:

$$z=[1-\cos^2(x+y)]\cos(x-y)+[1-\cos^2(x-y)]\cos(x+y)=$$
$$=\cos(x-y)-\cos^2(x+y)\cos(x-y)+\cos(x+y)-$$
$$-\cos^2(x-y)\cos(x+y)=\cos(x-y)[1-\cos(x+y)\cos(x-y)]+$$
$$+\cos(x+y)[1-\cos(x+y)\cos(x-y)]=$$
$$=[\cos(x-y)+\cos(x+y)][1-\cos(x+y)\cos(x-y)]=$$
$$=2\cos x\cos y\left[1-\frac{\cos 2x+\cos 2y}{2}\right]=2\cos x\cos y(\sin^2x+\sin^2y).$$

Так как $\sin^2 x+\sin^2 y=m$, то

$$z=2m\cos x\cos y. \qquad (1)$$

Далее, имеем $(\cos x-\cos y)^2\geqslant 0$, $\cos^2 x+\cos^2 y\geqslant 2\cos x\cos y$,

$$2-(\sin^2 x+\sin^2 y)\geqslant 2\cos x\cos y,$$
$$2\cos x\cos y\leqslant 2-m. \qquad (2)$$

В силу (1) и (2) находим $z\leqslant m(2-m)$.

Итак, наименьшее значение $z=m(2-m)$ при $x=\pm y+2k\pi$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

316. Имеем $\sin^2 x\leqslant 1$, $\cos^2 x\leqslant 1$. На основании свойства показательной функции заключаем, что $\sin^8 x\leqslant\sin^2 x$, $\cos^{14} x\leqslant\cos^2 x$. (Знак равенства в обоих неравенствах достигается при одном и том же значении $x=\frac{\pi}{2}k$, где k — целое число). Сложив эти два неравенства, получим $y=\sin^8 x+\cos^{14} x\leqslant\sin^2 x+\cos^2 x=1$, т. е. наибольшее значение функции y равно 1.

ГЛАВА II

РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ

§ 1. Неравенства, связанные с рациональной функцией

317. Заменив данное неравенство равносильным ему неравенством

$$ax > -b, \qquad (1)$$

рассмотрим три возможных случая.

1) $a > 0$. Разделив обе части неравенства (1) на положительное число a, получим равносильное ему неравенство $x > -\frac{b}{a}$, которому, очевидно, удовлетворяют все действительные числа, большие числа $-\frac{b}{a}$, и только эти числа. Таким образом, если $a > 0$, то решениями неравенства $ax+b > 0$ служат все те и только те числа, которые изображаются точками числовой оси, расположенными справа от точки, соответствующей числу $-\frac{b}{a}$.

2) $a < 0$. Разделив обе части неравенства (1) на отрицательное число a, получим равносильное ему неравенство $x < -\frac{b}{a}$, которому, очевидно, удовлетворяют все числа, меньшие числа $-\frac{b}{a}$, и только эти числа. Следовательно, если $a < 0$, решениями неравенства $ax+b > 0$ служат все те и только те числа, которые изображаются точками числовой оси, расположенными влево от точки, соответствующей числу $-\frac{b}{a}$.

3) $a=0$. В этом случае данное неравенство принимает вид $0 \cdot x > -b$. Если b — положительное число, то неравенству удовлетворяет любое число, так как 0 больше каждого отрицательного числа; если же b — отрицательное число, то неравенство не имеет решений, так как 0 не больше, а меньше любого положительного числа.

318. Перепишем данное неравенство в виде

$$ax-a > x-2, \quad ax-x > a-2,$$
$$(a-1)x > a-2. \qquad (1)$$

Если $a > 1$, то, поделив обе части неравенства (1) на положительное выражение $a-1$, получим $x > \frac{a-2}{a-1}$. Если $a < 1$, то, поделив обе части неравенства (1) на отрицательное выражение $a-1$, получим $x < \frac{a-2}{a-1}$. Если $a=1$, то неравенство (1) принимает вид $0 \cdot x > -1$, следовательно, его решением является любое число.

Ответ. Если $a > 1$, то $x > \frac{a-2}{a-1}$, если $a < 1$, то $x < \frac{a-2}{a-1}$, если $a=1$, то x — любое число.

319. Перенеся все члены неравенства в левую часть и приведя ее к общему знаменателю, получаем неравенство, равносильное данному $\frac{12x+4a-4ax-3x-3}{24a} > 0$, или

$$\frac{(9-4a)x+4a-3}{24a} > 0. \tag{1}$$

Рассмотрим два случая.

1) Если

$$a > 0, \tag{2}$$

то неравенство (1) равносильно неравенству $(9-4a)x+4a-3 > 0$, а следовательно, и неравенству

$$(9-4a)x > 3-4a. \tag{3}$$

Если $9-4a > 0$, т. е.

$$a < \frac{9}{4}, \tag{4}$$

то из (3) находим

$$x > \frac{3-4a}{9-4a}. \tag{5}$$

Таким образом, учитывая (2) и (4), заключаем, что если $0 < a < \frac{9}{4}$, то решением данного неравенства служат все числа из (5).

Если $9-4a < 0$, т. е.

$$a > \frac{9}{4}, \tag{6}$$

то из (3) получаем

$$x < \frac{3-4a}{9-4a}. \tag{7}$$

Итак, учитывая (2) и (6), заключаем, что если $a > \frac{9}{4}$, то решением данного неравенства служат все числа из (7). Если же $a=\frac{9}{4}$, то легко заметить, что неравенство имеет место при любом x.

2) Если $a < 0$, то неравенство (1) равносильно неравенству

$$(9-4a)x < 3-4a. \tag{8}$$

Так как при $a<0$ выражение $9-4a>0$, то из (8) находим

$$x<\frac{3-4a}{9-4a}.$$

Ответ. $x>\frac{3-4a}{9-4a}$ при $0<a<\frac{9}{4}$; $x<\frac{3-4a}{9-4a}$ при $a>\frac{9}{4}$ и при $a<0$; x — любое число при $a=\frac{9}{4}$.

320. Если $x-1\geqslant 0$, т. е.

$$x\geqslant 1, \tag{1}$$

то данное неравенство имеет вид $x-1>2$, откуда

$$x>3. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что числа $x>3$ служат решениями данного неравенства. Если $x-1<0$, т. е.

$$x<1, \tag{3}$$

то данное неравенство имеет вид $-(x-1)>2$, откуда

$$x<-1. \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует, что все числа $x<-1$ являются решениями данного неравенства.

Ответ. Все числа из промежутков $x>3$; $x<-1$.

321. Данное неравенство равносильно системе неравенств $-1<2x-5<1$, т. е. системе $4<2x<6$. Следовательно, $2<x<3$.

322. Чтобы дробь была положительной, необходимо и достаточно, чтобы ее члены были одинакового знака. Поэтому данное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\left\{\begin{array}{l} x-2>0, \\ 3x+12>0 \end{array}\right. \tag{1}$$

и

$$\left\{\begin{array}{l} x-2<0, \\ 3x+12<0. \end{array}\right. \tag{2}$$

Система (1) сводится к системе

$$\left\{\begin{array}{l} x>2, \\ x>-4, \end{array}\right.$$

откуда $x>2$. Система (2) сводится к системе

$$\left\{\begin{array}{l} x<2, \\ x<-4, \end{array}\right.$$

откуда $x<-4$.

Ответ. Все числа из промежутков $(-\infty, -4)$, $(2, +\infty)$.

323. Поскольку для того, чтобы дробь имела отрицательное значение, необходимо и достаточно, чтобы ее члены были противоположных знаков, данное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} x-1>0, \\ 2x+4<0, \end{cases} \qquad (1)$$

и

$$\begin{cases} x-1<0, \\ 2x+4>0. \end{cases} \qquad (2)$$

Система (1) сводится к системе

$$\begin{cases} x>1, \\ x<-2, \end{cases}$$

которая не имеет решений, а система (2) сводится к системе

$$\begin{cases} x<1, \\ x>-2, \end{cases}$$

откуда получаем $-2<x<1$.

Ответ. Все числа из промежутка $-2<x<1$.

324. Поскольку $x^2+x+1>0$ при любом значении x, то данное неравенство равносильно неравенству $x^2-1<x^2+x+1$, или $x+1>-1$, откуда $x>-2$.

Ответ. Все числа из промежутка $(-2, +\infty)$.

325. Заменим данную систему неравенств одним неравенством, равносильным ей:

$$\left(2-\frac{3x-1}{2x+1}\right)\left(1-\frac{3x-1}{2x+1}\right)<0,$$

или

$$\frac{(x+3)(x-2)}{(2x+1)^2}>0. \qquad (1)$$

Так как $(2x+1)^2 \geqslant 0$, то неравенство (1) равносильно системе

$$\begin{cases} (x+3)(x-2)>0, \\ x \neq -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Отсюда находим, что $x>2$ или $x<-3$.

Ответ. Все числа из промежутков $(-\infty, -3)$, $(2, +\infty)$.

326. Область допустимых значений решаемого неравенства есть все числа $x \neq 0$, а поэтому $|x|>0$, следовательно, все числа

$$x<0 \qquad (1)$$

служат решениями данного неравенства. Если же $x>0$, то решаемое неравенство можно переписать в виде $x>\frac{1}{x}$, или $x^2-1>0$, откуда, учитывая, что $x>0$,

$$x>1. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) заключаем, что решение данного неравенства состоит из всех чисел промежутков $(-\infty, 0)$ и $(1, +\infty)$.

327. Так как левая часть данного неравенства неотрицательна, то правая часть (бóльшая) должна быть положительной, т. е.

$$x > 1. \qquad (1)$$

Поскольку $x > 1$, то данное неравенство равносильно неравенству $x(x-1) < 1$, или $x^2-x-1 < 0$, или $\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) < 0$, откуда

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) заключаем, что решением данного неравенства служат все числа из промежутка $1 < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

328. Перепишем данное неравенство в виде $|x|(|x|-1) < 0$, откуда $0 < |x| < 1$. Левое неравенство выполняется при любом $x \neq 0$, а правое при $-1 < x < 1$. Таким образом, решением данного неравенства служат все числа из промежутков $-1 < x < 0$ и $0 < x < 1$.

329. Перепишем данное неравенство в виде

$$|x|^2-3|x|+2 > 0. \qquad (1)$$

Неравенство (1) выполняется при

$$|x| > 2 \qquad (2)$$

или при

$$|x| < 1. \qquad (3)$$

Из (2) находим $x < -2$ или $x > 2$, а из (3) получаем $-1 < x < 1$.

Ответ. Все числа из промежутков $(-\infty, -2)$, $(-1, 1)$, $(2, +\infty)$.

330. Если $x \geqslant 0$, то данное неравенство равносильно неравенству

$$x^2-4x+3 < 0. \qquad (1)$$

Поскольку корнями левой части неравенства (1) служат числа 1 и 3, то (1) имеет место при

$$1 < x < 3. \qquad (2)$$

Если же

$$x < 0, \qquad (3)$$

то решаемое неравенство равносильно неравенству $-x^2-4x+3 < 0$, или

$$x^2+4x-3 > 0. \qquad (4)$$

Так как числа $-2 \pm \sqrt{7}$ являются корнями левой части неравенства (4), то оно имеет место

$$\text{при } x < -2-\sqrt{7} \text{ или при } x > -2+\sqrt{7}. \qquad (5)$$

Из (3) и (5) заключаем, что, кроме (2), решениями данного неравенства являются все числа из промежутка $x < -2-\sqrt{7}$.

Ответ. Все числа из промежутков: $-\infty < x < -(2+\sqrt{7})$, $1 < x < 3$.

331. Первое решение. Поскольку обе части решаемого неравенства неотрицательны, то, возведя левую и правую его части в квадрат, получим равносильное ему неравенство $(1+x)^4 < (1-x^2)^2$, откуда $4x^3+8x^2+4x < 0$, или $x(x+1)^2 < 0$.

Последнее неравенство имеет место при $x < 0$ и $x \neq -1$. Таким образом, решением данного неравенства служат все числа из промежутков $-\infty < x < -1$, $-1 < x < 0$.

Второе решение.

1) Если $1-x^2 \geqslant 0$, т. е.

$$-1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{1}$$

то данное неравенство перепишется в виде $(1+x)^2 < 1-x^2$, или

$$x^2+x < 0. \tag{2}$$

Корни левой части неравенства (2) суть -1 и 0. Следовательно, имеем

$$-1 < x < 0. \tag{3}$$

Поскольку (3) не противоречит условию (1), то все числа из промежутка $(-1, 0)$ служат решениями данного неравенства.

2) Если $1-x^2 < 0$, т. е.

$$x > 1 \text{ или } x < -1, \tag{4}$$

то данное неравенство можно переписать в виде $(1+x)^2 < x^2-1$, или $x+1 < 0$, т. е.

$$x < -1. \tag{5}$$

Условие (5) противоречит одному из неравенств (4), $x > 1$, следовательно, ни одно число из промежутка $x > 1$ не является решением данного неравенства. Второе неравенство $x < -1$ из (4) совпадает с неравенством (5), поэтому все числа из промежутка $(-\infty, -1)$ удовлетворяют исходному неравенству.

Ответ. Все числа из двух промежутков $x < -1$ и $-1 < x < 0$.

332. Перепишем данное неравенство в виде

$$\frac{x-1}{x}-\frac{(x-1)+2}{x-1}-2 < 0,$$

или

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}+2 > 0. \tag{1}$$

Если

$$x < 0 \text{ или } x > 1, \tag{2}$$

то $x(x-1) > 0$. Следовательно, в силу (2), неравенство (1) равносильно неравенству $x-1+2x+2x(x-1) > 0$, или $2x^2+x-1 > 0$, откуда

$$x < -1 \text{ или } x > \frac{1}{2}. \tag{3}$$

В силу (2) и (3) заключаем, что все числа из промежутков $x < -1$ и $x > 1$ удовлетворяют данному неравенству. Если же

$$0 < x < 1, \tag{4}$$

то $x(x-1)<0$. Следовательно, учитывая (4), заключаем, что данное неравенство равносильно неравенству $2x^2+x-1<0$, откуда

$$-1<x<\frac{1}{2}. \tag{5}$$

Из (4) и (5) заключаем, что все числа из промежутка $0<x<\frac{1}{2}$ также удовлетворяют данному неравенству.

Ответ. Все числа из промежутков $x<-1$, $0<x<\frac{1}{2}$, $x>\frac{1}{2}$.

333. Решаемое неравенство равносильно неравенствам

$$\frac{x(x+1)-2(x-1)-8}{x^2-1}<0,$$

$$\frac{x^2-x-6}{x^2-1}<0, \quad (x^2-x-6)(x^2-1)<0,$$

$$(x+2)(x+1)(x-1)(x-3)<0. \tag{1}$$

Если $x<-2$, $-1<x<1$, $x>3$, то левая часть неравенства (1) положительна, поэтому числа из этих промежутков не являются решениями данного неравенства. Если же $-2<x<-1$, $1<x<3$, то левая часть неравенства (1) отрицательна, поэтому все числа из этих промежутков удовлетворяют данному неравенству.

Ответ. Все числа из промежутков $(-2, -1)$, $(1, 3)$.

334. Поскольку $|x|<1$, то $x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots$ есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Знаменатель прогрессии $q=x$. Таким образом, данное неравенство можно переписать в виде $\left|\frac{x}{1-x}\right|<1$, или

$$-1<\frac{x}{1-x}<1. \tag{1}$$

Так как $|x|<1$, то $1-x>0$, а следовательно, неравенство (1) равносильно неравенству $x-1<x<1-x$, откуда

$$x<\frac{1}{2}. \tag{2}$$

Условие $|x|<1$ равносильно

$$-1<x<1. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что решением данного неравенства служат все числа из промежутка $-1<x<\frac{1}{2}$.

335. Условие $|x|<3$ можно переписать в виде $\left|-\frac{1}{3}x\right|<1$. Следовательно, $x-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{9}x^3-\ldots$ есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Знаменатель прогрессии равен $-\frac{x}{3}$. Таким образом, данное неравенство равносильно неравенству

$$\left|\frac{x}{1+\frac{x}{3}}\right| < 1, \text{ или } \left|\frac{3x}{x+3}\right| < 1,$$

$$-1 < \frac{3x}{x+3} < 1. \qquad (1)$$

Так как $|x| < 3$, то (1) равносильно $-x-3 < 3x < x+3$, откуда

$$-\frac{3}{4} < x < \frac{3}{2}. \qquad (2)$$

Неравенство $|x| < 3$ равносильно

$$-3 < x < 3. \qquad (3)$$

Из (2) и (3) следует, что решением данного неравенства служат все числа из промежутка $-\frac{3}{4} < x < \frac{3}{2}$.

336. Поскольку корни квадратного трехчлена x^2-x+1 мнимые, то $x^2-x+1 > 0$ при любом x, а следовательно, данная система равносильна системе

$$-3(x^2-x+1) < x^2+ax-2 < 2(x^2-x+1). \qquad (1)$$

После тождественных преобразований из (1) получаем систему

$$\begin{cases} 4x^2+(a-3)x+1 > 0, \\ x^2-(a+2)x+4 > 0. \end{cases}$$

Для того чтобы каждое из неравенств системы удовлетворялось при любых x, необходимо и достаточно, чтобы дискриминанты их левых частей были отрицательны, т. е. должна иметь место система неравенств

$$\begin{cases} (a-3)^2-16 < 0, \\ (a+2)^2-16 < 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -4 < a-3 < 4, \\ -4 < a+2 < 4, \end{cases}$$

или $\begin{cases} -1 < a < 7 \\ -6 < a < 2 \end{cases}$, откуда получаем $-1 < a < 2$.

Ответ. Если $-1 < a < 2$, то данная система неравенств выполняется при любом x.

337. Вначале заметим, что если $a=1$, то неравенство соблюдается тождественно $(1 > 0)$. Если же $a=-1$, то получаем линейное неравенство, которое имеет место не при всех x.

Далее, чтобы данное неравенство при $a \neq \pm 1$ соблюдалось при любом x, необходимо и достаточно, чтобы корни левой его части были мнимыми, а коэффициент при старшем члене был положителен, т. е. должна иметь место система неравенств

$$\begin{cases} 4(a-1)^2-4(a^2-1) < 0, \\ a^2-1 > 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a-1>0, \\ a^2-1>0. \end{cases} \qquad (1)$$

Оба неравенства системы (1) одновременно выполняются лишь при $a>1$. Но учитывая, что при $a=1$ данное неравенство также верно, получаем $a \geqslant 1$.

Ответ. Неравенство выполняется при любых x, если $a \geqslant 1$.

338. Из уравнения системы находим $y=x+a$. Подставляя это значение y в неравенство системы, получаем $x^2+(x+a)^2+2x \leqslant 1$, или $x^2+(x+a)^2+2x-1 \leqslant 0$, или

$$2x^2+2(a+1)x+a^2-1 \leqslant 0. \qquad (1)$$

Так как из уравнения $y=x+a$ ясно, что каждое решение для x неравенства (1) имеет соответствующее решение y, то достаточно выяснить, когда (1) имеет единственное решение относительно x. Неравенство (1) имеет единственное решение относительно x тогда и только тогда, когда дискриминант его левой части равен нулю, т. е. когда $(a+1)^2-2(a^2-1)=0$, откуда получаем $a_1=3$, $a_2=-1$. Подставляя эти значения a в (1), получим, что если $a=3$, то x^2+ $+4x+4=0$ и $x=-2$, а следовательно, $y=1$, а если $a=-1$, то $x=0$, и следовательно, $y=-1$.

Единственное решение имеется только при $a=3$ $(x=-2,\ y=1)$ и при $a=-1$ $(x=0,\ y=-1)$.

339. Известно, что $y_{\max}=\frac{4ac-b^2}{4a}$ при $x=-\frac{b}{2a}$ и $a<0$. Таким образом, согласно условию задачи

$$\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{1}{4}, \qquad (1)$$

$$-\frac{b}{2a}=\frac{3}{2}. \qquad (2)$$

На основании теоремы Виета имеем

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2&=-\frac{b}{a}, \\ x_1x_2&=\frac{c}{a}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Далее, $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=9$, или, учитывая (3),

$$\left(-\frac{b}{a}\right)^3-3\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)=9. \qquad (4)$$

Подставляя из (2) $\frac{b}{a}=-3$ в (4), получаем $27-3\frac{c}{a}\cdot 3=9$, откуда $\frac{c}{a}=2$ и $c=2a$. Теперь, подставив $c=2a$ и $b=-3a$ в (1), получим $\frac{8a^2-9a^2}{4a}=\frac{1}{4}$, откуда $a=-1$ и, следовательно, $b=3$, $c=-2$.

Итак, искомый трехчлен $y=-x^2+3x-2$.

340. Пусть корни уравнения x_1 и x_2. Тогда на основании теоремы Виета имеем

$$x_1+x_2=1-a, \quad (1)$$

$$x_1 \cdot x_2=-2a. \quad (2)$$

Возведя обе части (1) в квадрат, получим $x_1^2+x_2^2+2x_1x_2=$ $=1-2a+a^2$, или, учитывая (2), $x_1^2+x_2^2-4a=1-2a+a^2$, откуда $x_1^2+x_2^2=1+2a+a^2=(a+1)^2$. Так как $(a+1)^2 \geqslant 0$, то наименьшее значение $x_1^2+x_2^2$ есть 0 (при $a=-1$).

341. Если $x=3$, согласно условию задачи имеем $9a+3b+c=0$. Известно, что $y_{\min}=\frac{4ac-b^2}{4a}$ при $x=-\frac{b}{2a}$ и $a>0$. Таким образом, $\frac{4ac-b^2}{4a}=-1$, и $-\frac{b}{2a}=2$.

Итак, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 9a+3b+c=0, \\ 4ac-b^2+4a=0, \\ 4a+b=0. \end{cases}$$

Из третьего уравнения системы находим

$$b=-4a. \quad (1)$$

Подставляя это значение b в два первых уравнения системы, получаем

$$\begin{cases} c-3a=0, \\ 4ac+4a-16a^2=0. \end{cases} \quad (2)$$

Коэффициент $a \neq 0$, поэтому (2) можно переписать в виде

$$\begin{cases} c=3a, \\ c-4a+1=0, \end{cases}$$

откуда $a=1$, $c=3$. Подставляя $a=1$ в (1), получим $b=-4$. Таким образом, искомый квадратный трехчлен $y=x^2-4x+3$.

342. Из первого неравенства системы имеем

$$y>-0{,}5, \quad (1)$$

так как $|x^2-2x| \geqslant 0$, а из второго неравенства находим

$$y<2, \quad (2)$$

поскольку $|x-1| \geqslant 0$. Из (1) и (2) заключаем, что

$$-0{,}5<y<2. \quad (3)$$

Ясно, что из целых чисел только числа $y=0$ и $y=1$ удовлетворяют (3). Если $y=0$, то данная система имеет вид

$$\begin{cases} |x^2-2x|<0{,}5, \\ |x-1|<2. \end{cases} \quad (4)$$

Обоим неравенствам системы (4) удовлетворяют два значения: $x=0$ и $x=2$.

Если же $y=1$, то данная система такова:

$$\begin{cases} |x^2-2x| < 1{,}5, \\ |x-1| < 1. \end{cases} \qquad (5)$$

Системе (5) удовлетворяет единственное целое число $x=1$. Таким образом, данной системе неравенств удовлетворяют три пары чисел:

$$x_1=y_1=0; \quad x_2=2, \quad y_2=0; \quad x_3=y_3=1.$$

§ 2. Неравенства, связанные с иррациональностями

343. Левая часть неравенства определена, если $x+1\geqslant 0$, т. е при $x\geqslant -1$, а правая — при $x\geqslant 1$. Отсюда следует, что областью допустимых значений решаемого неравенства являются все x, удовлетворяющие условию $x\geqslant 1$. Поскольку обе части неравенства неотрицательны, то имеем $(\sqrt{x+1})^2 > (\sqrt{x-1})^2$, или $1 > -1$. Это неравенство верно при любом x. Но так как раньше мы установили, что $x\geqslant 1$, то решением заданного неравенства являются лишь все числа, принадлежащие промежутку $[1, +\infty)$.

344. Левая часть неравенства определена, если $1-x\geqslant 0$, т. е. когда

$$x\leqslant 1, \qquad (1)$$

а правая часть определена, если $5+x\geqslant 0$, т. е. когда

$$x\geqslant -5. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что областью допустимых значений данного неравенства является промежуток

$$-5\leqslant x\leqslant 1. \qquad (3)$$

Так как обе части решаемого неравенства неотрицательны, то, возведя обе его части в четвертую степень и соблюдая условие (3), получим равносильное ему неравенство $1-2x+x^2\leqslant 5+x$, или

$$x^2-3x-4\leqslant 0. \qquad (4)$$

Корнями левой части неравенства (4) служат числа -1 и 4, поэтому неравенство (4) равносильно неравенству

$$-1\leqslant x\leqslant 4. \qquad (5)$$

Поскольку неравенства (3) и (5) составляют систему, то окончательно $-1\leqslant x\leqslant 1$.

Ответ. Все числа из промежутка $-1\leqslant x\leqslant 1$.

345. Левая часть неравенства определена, если $-x^2+4x-3\geqslant 0$, или $x^2-4x+3\leqslant 0$, $(x-3)(x-1)\leqslant 0$, откуда

$$1\leqslant x\leqslant 3. \qquad (1)$$

Поскольку левая часть данного неравенства неотрицательна, то правая должна быть положительной, т. е. $x-2 > 0$, или

$$x > 2. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) заключаем, что решениями могут быть только числа из промежутка

$$2 < x \leqslant 3. \qquad (3)$$

Возведя обе части данного неравенства в квадрат, получим $-x^2+4x-3 < x^2-4x+4$, откуда $2x^2-8x+7 > 0$, т. е.

$$\left(x-\frac{4+\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{4-\sqrt{2}}{2}\right) > 0. \qquad (4)$$

Из (4) следует, что

$$x < \frac{4-\sqrt{2}}{2} \text{ или } x > \frac{4+\sqrt{2}}{2}. \qquad (5)$$

Из (3) и (5) следует (так как (3) и (5) составляют систему), что решением данного неравенства служат все числа из промежутка $\frac{4+\sqrt{2}}{2} < x \leqslant 3$.

346. Левая часть неравенства определена, если

$$x^2-3x-10 \geqslant 0. \qquad (1)$$

Так как корнями левой части неравенства (1) являются числа -2 и 5, то неравенство (1) имеет место при

$$x \leqslant -2 \text{ или } x \geqslant 5. \qquad (2)$$

Поскольку левая часть данного неравенства неотрицательна, то правая часть должна быть больше нуля, т. е. $8-x > 0$, или

$$x < 8. \qquad (3)$$

Из неравенств (2) и (3) заключаем, что решения могут быть только из промежутков

$$x \leqslant -2, \quad 5 \leqslant x < 8. \qquad (4)$$

Возведя обе части данного неравенства в квадрат, получим последовательно $x^2-3x-10 < 64-16x+x^2$, или $13x < 74$, откуда

$$x < \frac{74}{13}. \qquad (5)$$

В силу (4) и (5) находим, что решениями данного неравенства служат все числа из промежутков $-\infty < x \leqslant -2$, $5 \leqslant x < \frac{74}{13}$.

347. Область допустимых значений определяется системой неравенств $x-2 \geqslant 0$, $x-3 \geqslant 0$, $x-5 \geqslant 0$, или $x \geqslant 2$, $x \geqslant 3$, $x \geqslant 5$. Отсюда область допустимых значений:

$$x \geqslant 5. \qquad (1)$$

Перепишем решаемое неравенство в виде

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{x-5} > \sqrt{x-3}. \qquad (2)$$

Поскольку обе части неравенства (2) неотрицательны (строго говоря, если учесть (1), то обе части положительны), то возведем обе его части в квадрат. Получим равносильное ему неравенство (конечно, учитывая, что (1) и (2) составляют систему)

$$2x-7+2\sqrt{(x-2)(x-5)} > x-3,$$

которое можно переписать в виде

$$2\sqrt{(x-2)(x-5)} > 4-x. \qquad (3)$$

Учитывая условие (1), ясно, что в неравенстве (3) левая часть неотрицательна, а правая отрицательна. Следовательно, неравенство (3) верно при любых $x \geqslant 5$.

Ответ. Все числа, принадлежащие промежутку $[5, +\infty)$.

348. Левая часть неравенства определена при

$$x \geqslant -6, \qquad (1)$$

функция $\sqrt{x+1}$ определена при

$$x \geqslant -1, \qquad (2)$$

и, наконец, функция $\sqrt{2x-4}$ определена при

$$x \geqslant 2. \qquad (3)$$

Из неравенств (1), (2) и (3) следует, что областью допустимых значений решаемого неравенства является

$$2 \leqslant x < +\infty. \qquad (4)$$

Возводим обе части данного неравенства в квадрат:

$$x+6 > x+1+2x-4+2\sqrt{(x+1)(2x-4)},$$

$$9-2x > 2\sqrt{(x+1)(2x-4)}. \qquad (5)$$

Так как правая часть (5) неотрицательна, то $9-2x > 0$, или

$$x < {}^9/_2. \qquad (6)$$

Возводим обе части неравенства (5) в квадрат: $(9-2x)^2 >$ $> 4(x+1)(2x-4)$, $4x^2+28x-97 < 0$, откуда

$$-\frac{\sqrt{146}+7}{2} < x < \frac{\sqrt{146}-7}{2}. \qquad (7)$$

Так как (4), (6) и (7) составляют систему, то заключаем, что решением данного неравенства служат все x из промежутка

$$2 \leqslant x < \frac{\sqrt{146}-7}{2}.$$

349. Функция $\sqrt{1-9x^2}$ определена, если $1-9x^2 \geqslant 0$, т. е. когда

$$-{}^1/_3 \leqslant x \leqslant {}^1/_3. \qquad (1)$$

Должно еще быть

$$x \neq 0. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что областью допустимых значений является множество всех x из промежутков

$$-\frac{1}{3} \leqslant x < 0, \qquad 0 < x \leqslant \frac{1}{3}. \tag{3}$$

1) Рассмотрим данное неравенство для тех x, которые принадлежат промежутку $0 < x \leqslant \frac{1}{3}$. Поскольку $x > 0$, то данное неравенство равносильно неравенству $1-\sqrt{1-9x^2} < x$, или

$$1-x < \sqrt{1-9x^2}. \tag{4}$$

Так как $x \leqslant \frac{1}{3}$, то обе части (4) неотрицательны, а поэтому имеем $(1-x)^2 < 1-9x^2$, или

$$5x^2-x < 0. \tag{5}$$

Но так как $x > 0$, то из (5) следует, что $5x-1 < 0$, откуда

$$x < \frac{1}{5}. \tag{6}$$

Из (6) и второго из неравенств (3) заключаем, что $0 < x < \frac{1}{5}$.

2) Теперь будем искать решения данного неравенства в промежутке $-\frac{1}{3} \leqslant x < 0$. Так как $x < 0$, то данное неравенство равносильно такому:

$$1-\sqrt{1-9x^2} > x. \tag{7}$$

Поскольку $-\frac{1}{3} \leqslant x < 0$, то левая часть неравенства (7) положительна, а следовательно, всегда больше отрицательного x. Таким образом, решением данного неравенства являются все x из промежутков $\left[-\frac{1}{3}, 0\right)$, $\left(0, \frac{1}{5}\right)$.

350. Должно быть: $x \geqslant 0$, $x+1 \geqslant 0$, $x^2+x \geqslant 0$, $1-2x > 0$. Решая совместно эти неравенства, получаем, что областью допустимых значений данного неравенства являются все x из промежутка

$$0 \leqslant x < \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Перепишем данное неравенство в виде $(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})^2 + (\sqrt{x}+\sqrt{x+1})-2 \leqslant 0$, откуда

$$-2 \leqslant \sqrt{x}+\sqrt{x+1} \leqslant 1. \tag{2}$$

Левое неравенство имеет место при любом x из промежутка (1). Правое же неравенство, очевидно, имеет место только при $x=0$. Итак, (2) выполняется только при $x=0$, и неравенство вырождается в равенство.

Ответ. $x=0$.

351. Перепишем данное неравенство в виде

$$\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}\geqslant 2. \qquad (1)$$

Отсюда видно, что левая часть решаемого неравенства определена при

$$x\geqslant 1. \qquad (2)$$

Неравенство (1) можно переписать в виде

$$\sqrt{x-1}+1+|\sqrt{x-1}-1|\geqslant 2. \qquad (3)$$

Если $\sqrt{x-1}\geqslant 1$, т. е. если $x\geqslant 2$, то неравенство (3) принимает вид $\sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1\geqslant 2$, откуда

$$x\geqslant 2. \qquad (4)$$

Если же $\sqrt{x-1}<1$, т. е. когда

$$1\leqslant x<2, \qquad (5)$$

то неравенство (3) вырождается в равенство: $2=2$.

Из неравенств (2), (4) и (5) следует, что решением данного неравенства служит множество всех чисел $x\geqslant 1$.

352. Первое решение. Поскольку правая часть решаемого неравенства положительна при любом действительном x, то левая часть (бо́льшая) также должна быть положительной. Но так как $\sqrt{x^2+1}>0$, то $x-2>0$. Таким образом, должно быть

$$2<x<+\infty. \qquad (1)$$

Поскольку обе части данного неравенства положительны, то возведя обе его части в квадрат (конечно, учитывая, что данное неравенство и (1) составляют систему), получим неравенство, равносильное ему: $(x^2-4x+4)(x^2+1)>x^4+4x^2+4$, или $4x^3-x^2+4x<0$, $x(4x^2-x+4)<0$,

$$x\left[\left(2x-\frac{1}{4}\right)^2+3\frac{15}{16}\right]<0. \qquad (2)$$

Так как выражение, заключенное в квадратных скобках, положительно при любых x, то из (2) следует, что

$$x<0. \qquad (3)$$

Неравенства (1) и (3) несовместны, следовательно, данное неравенство не имеет решения.

Второе решение. Так как $x>2$, то, учитывая, что среднее арифметическое положительных чисел больше их среднего геометрического, имеем $(x-2)\sqrt{x^2+1}<\frac{(x-2)^2+x^2+1}{2}=x^2-2x+$ $+2+\frac{1}{2}=x^2+2-2\left(x-\frac{1}{4}\right)<x^2+2$. Следовательно, неравенство не имеет решений.

353. Левая часть неравенства определена, если имеют место неравенства $x+\sqrt{x}\geqslant 0$, $x-\sqrt{x}\geqslant 0$, а правая часть определена при $x>0$.

Таким образом, область допустимых значений определяется системой неравенств $x>0$, $x+\sqrt{x}\geqslant 0$, $x-\sqrt{x}\geqslant 0$. Если $x>0$, то $x+\sqrt{x}>0$, а учитывая, что $x-\sqrt{x}\geqslant 0$, получаем $x-1\geqslant 0$. Следовательно, областью допустимых значений являются все числа из промежутка

$$1\leqslant x<+\infty. \qquad (1)$$

Поскольку $x+\sqrt{x}>0$, то, умножив обе части данного неравенства на $\sqrt{x+\sqrt{x}}$, получим

$$x+\sqrt{x}-\sqrt{x^2-x}>\frac{3}{2}\sqrt{x}. \qquad (2)$$

Так как $\sqrt{x}>0$, то, разделив обе части неравенства (2) на $\sqrt{x}$, получим $\sqrt{x}+1-\sqrt{x-1}>\frac{3}{2}$, или

$$\sqrt{x}>\frac{1}{2}+\sqrt{x-1}. \qquad (3)$$

Поскольку обе части неравенства (3) положительны, то, возведя обе части в квадрат, получим $x>\frac{1}{4}+\sqrt{x-1}+x-1$, или $\sqrt{x-1}<\frac{3}{4}$, или $x-1<\frac{9}{16}$, откуда

$$x<\frac{25}{16}. \qquad (4)$$

Из (1) и (4) заключаем, что решениями данного неравенства служат все числа из промежутка $1\leqslant x<\frac{25}{16}$.

354. Левая часть данного неравенства определена, если $x-1\geqslant 0$, или

$$x\geqslant 1. \qquad (1)$$

Перепишем решаемое неравенство в виде

$$\sqrt[3]{2-x}>1-\sqrt{x-1}. \qquad (2)$$

Возведя обе части неравенства (2) в третью степень, получим равносильное ему неравенство $2-x>\left(1-\sqrt{x-1}\right)^3$, или

$$1-(x-1)>\left(1-\sqrt{x-1}\right)^3. \qquad (3)$$

Пусть $\sqrt{x-1}=y$; тогда неравенство (3) принимает вид $1-y^2>$ $>(1-y)^3$, $(1-y)(1+y-1+2y-y^2)>0$,

$$y(y-1)(y-3)>0. \qquad (4)$$

Неравенство (4) имеет место при $0<y<1$ или $y>3$, т. е. $0<\sqrt{x-1}<1$ или $\sqrt{x-1}>3$, откуда $1<x<2$ или $x>10$.

Ответ. Все числа из промежутков $(1,\ 2)$ и $(10,\ +\infty)$.

355. Область допустимых значений находим из неравенства $12-2x-x^2 \geqslant 0$, откуда

$$-(\sqrt{13}+1) \leqslant x \leqslant \sqrt{13}-1. \qquad (1)$$

Если

$$x \leqslant 0, \qquad (2)$$

то, решая систему (1) и (2), находим, что все числа из промежутка $-(\sqrt{13}+1) \leqslant x \leqslant 0$ являются решениями данного неравенства. Если же

$$x > 0, \qquad (3)$$

то данное неравенство равносильно неравенству $x \geqslant \sqrt{2+\sqrt{12-2x-x^2}}$,

$$x^2-2 \geqslant \sqrt{12-2x-x^2}. \qquad (4)$$

Из (4) следует, что $x^2-2 \geqslant 0$, т. е. учитывая, что $x > 0$,

$$x \geqslant \sqrt{2}. \qquad (5)$$

Возведя обе части неравенства (4) в квадрат, получаем $x^4-4x^2+4 \geqslant 12-2x-x^2$, или

$$(x-2)(x^3+2x^2+x+4) \geqslant 0. \qquad (6)$$

Так как при $x > 0$ выражение $x^3+2x^2+x+4 > 0$, то из (6) имеем

$$x \geqslant 2. \qquad (7)$$

В силу неравенств (1), (3), (5) и (7) заключаем, что все числа из промежутка $2 \leqslant x \leqslant \sqrt{13}-1$ также служат решениями данного неравенства.

Ответ. Все числа из промежутков $-(\sqrt{13}+1) \leqslant x \leqslant 0$, $2 \leqslant x \leqslant \sqrt{13}-1$.

356. Перепишем данное неравенство в виде $\sqrt{x^2} > 2\sqrt{(x-1)^2}$, или

$$|x| > 2|x-1|. \qquad (1)$$

Если

$$x \geqslant 1, \qquad (2)$$

то неравенство (1) имеет вид $x > 2x-2$, откуда

$$x < 2. \qquad (3)$$

Из (2) и (3) заключаем, что все числа из промежутка

$$1 \leqslant x < 2 \qquad (4)$$

удовлетворяют данному неравенству. Если

$$0 < x < 1, \qquad (5)$$

то неравенство (1) перепишется в виде $x > -2x+2$, откуда

$$x > \frac{2}{3}. \qquad (6)$$

Из (5) и (6) заключаем, что все числа из промежутка

$$\frac{2}{3} < x < 1 \tag{7}$$

также служат решениями данного неравенства. Наконец, если

$$x \leqslant 0, \tag{8}$$

то неравенство (1) переписывается в виде $-x > -2x+2$, откуда $x > 2$, что противоречит (8). Таким образом, решениями данного неравенства служат все x, которые удовлетворяют или (4) или (7), т. е. все числа из промежутка $\frac{2}{3} < x < 2$.

Ответ. Все числа из промежутка $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$.

357. Левая часть данного неравенства определена, если $\frac{x+1}{x-1} > 0$, т. е. если $x>1$, или $x < -1$. Обозначим $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ через y; тогда решаемое неравенство перепишется в виде

$$y-\frac{1}{y}-\frac{3}{2} < 0. \tag{1}$$

Поскольку $y > 0$, то неравенство (1) равносильно неравенству $2y^2-3y-2 < 0$, или $(y-2)\left(y+\frac{1}{2}\right) < 0$, откуда $-\frac{1}{2} < y < 2$.

Но так как $y > 0$, то $0 < y < 2$, т. е. $0 < \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} < 2$, или

$$0 < \frac{x+1}{x-1} < 4. \tag{2}$$

Если

$$x > 1, \tag{3}$$

то из (2) следует $0 < x+1 < 4x-4$, откуда

$$x > \frac{5}{3}. \tag{4}$$

Если же

$$x < -1, \tag{5}$$

то из (2) находим

$$x < \frac{5}{3}. \tag{6}$$

Из (3) и (4) заключаем, что $x > \frac{5}{3}$, а из (5) и (6), что $x < -1$.

Ответ. Все числа из промежутков $x > \frac{5}{3}$ и $x < -1$.

358. Функция $\sqrt{1+x}$ определена при

$$x \geqslant -1. \tag{1}$$

Если $x=0$, то неравенство выполняется $(-4<0)$. Если же $x \neq 0$, то решаемое неравенство можно переписать в виде $x-4<$ $<\left[\frac{x(\sqrt{x+1}-1)}{(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}-1)}\right]^2$, или $x-4<(\sqrt{x+1}-1)^2$, или $x-4<x+2-2\sqrt{x+1}$, или $x+1<9$,

$$x<8. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что данное неравенство выполняется для всех x из промежутка $-1 \leqslant x<8$.

359. Функция $\sqrt{x-1}$ определена при

$$x \geqslant 1. \tag{1}$$

Также должно быть $x-2\sqrt{x-1}>0$ и $x+2\sqrt{x-1}>0$, или $x>2\sqrt{x-1}$ и $x>-2\sqrt{x-1}$. Из $x>2\sqrt{x-1}$ следует $(x-2)^2>0$, что имеет место при любом

$$x \neq 2. \tag{2}$$

Неравенство $x>-2\sqrt{x-1}$ справедливо для любых x из промежутка (1).

Из (1) и (2) заключаем, что

$$1 \leqslant x<2, \quad x>2.$$

Обозначив левую часть данного неравенства через y и возведя полученное равенство в квадрат, получим

$$y^2=\frac{1}{x+2\sqrt{x-1}}+\frac{1}{x-2\sqrt{x-1}}+\frac{2}{\sqrt{x^2-4x+4}},$$

$$y^2=\frac{2x}{x^2-4x+4}+\frac{2}{\sqrt{x^2-4x+4}}=\frac{2x}{x^2-4x+4}+\frac{2}{|x-2|}.$$

1) Если $1 \leqslant x<2$, то $|x-2|=-(x-2)$, и $y^2=\frac{2x}{(x-2)^2}-\frac{2}{x-2}=$ $=\frac{2x-2(x-2)}{(x-2)^2}=\frac{4}{(x-2)^2}$, а поскольку $y>0$, то y есть арифметическое значение квадратного корня из $\frac{4}{(x-2)^2}$, т. е.

$$y=\sqrt{\frac{4}{(x-2)^2}}=\frac{2}{|x-2|}=\frac{2}{-(x-2)}=\frac{2}{2-x}.$$

2) Если $x>2$, то $x-2>0$, и значит, $|x-2|=x-2$, а поэтому $y^2=\frac{2x}{x^2-4x+4}+\frac{2}{x-2}=\frac{4(x-1)}{(x-2)^2}$, и следовательно, $y=$ $=\sqrt{\frac{4(x-1)}{(x-2)^2}}=\frac{2\sqrt{x-1}}{|x-2|}=\frac{2\sqrt{x-1}}{x-2}$. Итак, данное неравенство при

$$1 \leqslant x<2 \tag{3}$$

перепишется в виде $\frac{2}{2-x} > 2$, откуда $1 < x < 2$, что не противоречит (3), а если же

$$x > 2, \tag{4}$$

то $\frac{2\sqrt{x-1}}{x-2} > 2$, откуда

$$\frac{5-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{5+\sqrt{5}}{2}. \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует $2 < x < \frac{5+\sqrt{5}}{2}$. Таким образом, решением данного неравенства служат все числа из промежутков

$$1 < x < 2, \quad 2 < x < \frac{5+\sqrt{5}}{2}.$$

§ 3. Неравенства, связанные с показательной и логарифмической функциями

360. Поскольку $10^x > 0$, то, разделив обе части решаемого неравенства на 10^x, получим равносильное ему неравенство

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x - 2\left(\frac{5}{2}\right)^x - 1 < 0. \tag{1}$$

Пусть $\left(\frac{2}{5}\right)^x = y$; тогда неравенство (1) принимает вид $y - \frac{2}{y} - 1 < 0$ или $y^2 - y - 2 < 0$ или $(y-2)(y+1) < 0$, откуда следует, что $y - 2 < 0$, т. е. $y < 2$, так как $y + 1 > 0$. Следовательно, $\left(\frac{2}{5}\right)^x < 2$. Логарифмируя обе части последнего неравенства по основанию $^2/_5$, получаем $x > \log_{\frac{2}{5}} 2$. Знак неравенства изменился на противоположный, так как логарифмическая функция, при основании меньшем единицы,— убывающая.

Ответ. $x > \log_{\frac{2}{5}} 2$.

361. Левая часть решаемого неравенства определена при любом x, так как $2^x > 0$. Правая часть определена, если $2^{x+2} - 1 \neq 0$, т. е. если $x + 2 \neq 0$, или $x \neq -2$. Если $x < -2$, то правая часть неравенства отрицательна, и так как левая всегда положительна, то все числа $x < -2$ служат решениями данного неравенства. Если же $x > -2$, то обе части решаемого неравенства положительны, и поэтому оно равносильно неравенству $2^{x+2} - 1 > 2^x + 3$, или $2^x(4-1) > 4$, или $2^x > \frac{4}{3}$. Логарифмируя последнее неравенство по основанию 2, получаем $x > 2 - \log_2 3$.

Так как $2 - \log_2 3 > -2$, то в рассматриваемом случае решениями служат $x > 2 - \log_2 3$.

Ответ. Все числа из промежутков $-\infty < x < -2$ и $x > 2 - \log_2 3$.

362. Из условия следует, что $x \neq 1$, $x \neq -1$, $x \neq 0$, $x > -2$. Таким образом, левая часть неравенства определена на четырех интервалах: $-2 < x < -1$, $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$, $1 < x < +\infty$.

а) Если $-2 < x < -1$ или $1 < x < \infty$, то имеем $2 + x < x^2$, т. е. $x^2 - x - 2 > 0$, откуда $x > 2$ или $x < -1$. В этом случае имеем четыре системы:

$$1)\ \begin{cases} -2 < x < -1, \\ x > 2, \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} -2 < x < -1, \\ x < -1, \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} x > 1, \\ x > 2, \end{cases} \quad 4)\ \begin{cases} x > 1, \\ x < -1. \end{cases}$$

Системы 1) и 4) не имеют решений.

Решением системы 2) является промежуток $-2 < x < -1$, а решением системы 3) является $x > 2$.

б) Если $-1 < x < 0$ или $0 < x < 1$, то имеем $x + 2 > x^2$, или $x^2 - x - 2 < 0$, откуда $-1 < x < 2$. Таким образом, в этом случае имеем две системы:

$$1)\ \begin{cases} -1 < x < 0, \\ -1 < x < 2, \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} 0 < x < 1, \\ -1 < x < 2. \end{cases}$$

Решением системы 1) является промежуток $-1 < x < 0$, а системы 2) — промежуток $0 < x < 1$.

Ответ. $-2 < x < -1$, $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$, $x > 2$.

363. Левая часть данного неравенства определена при

$$x \neq 1, \quad x \neq -\frac{1}{2}. \tag{1}$$

Если имеет место (1), то решаемое неравенство равносильно каждому из следующих неравенств:

$$\left|\frac{x-1}{2x+1}\right| < 1, \quad -1 < \frac{x-1}{2x+1} < 1,$$

$$\left(\frac{x-1}{2x+1} + 1\right)\left(\frac{x-1}{2x+1} - 1\right) < 0,$$

$$\frac{3x(x+2)}{(2x+1)^2} > 0. \tag{2}$$

Поскольку знаменатель левой части (2) положителен $\left(\text{при } x \neq \frac{1}{2}\right)$, то из (2) следует $x(x+2) > 0$, откуда

$$x > 0 \quad \text{или} \quad x < -2.$$

Но, учитывая первое условие (1), заключаем, что решением данного неравенства служат все числа из промежутков

$$x < -2, \quad 0 < x < 1, \quad x > 1.$$

364. Левая часть решаемого неравенства определена при

$$x > 0 \quad \text{и} \quad x \neq 1, \tag{1}$$

а правая часть определена при $x+2>0$ и $x+2\neq 1$, т. е. при

$$x>-2 \quad \text{и} \quad x\neq -1. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) заключаем, что область допустимых значений решаемого неравенства состоит из всех x, принадлежащих промежуткам $0<x<1$ и $1<x<+\infty$.

Если $0<x<1$, то левая часть отрицательна, а правая положительна, поэтому все числа из промежутка $0<x<1$ являются решениями данного неравенства. Если же $1<x<+\infty$, то решаемое неравенство равносильно неравенству

$$\log_2 x \geqslant \log_2 \sqrt{x+2}\,. \qquad (3)$$

Поскольку логарифмическая функция при основании, большем единицы, возрастающая, то из (3) следует, что

$$x\geqslant \sqrt{x+2}\,. \qquad (4)$$

Так как обе части неравенства (4) положительны, то возведя обе его части в квадрат, получим неравенство, равносильное ему: $x^2\geqslant x+2$, или

$$x^2-x-2\geqslant 0. \qquad (5)$$

Корни левой части неравенства (5) -1 и 2, поэтому неравенство (5) выполняется при $x\geqslant 2$ или при $x\leqslant -1$. Но так как $x\leqslant -1$ несовместно с $x>1$, то в этом случае решениями данного неравенства служат лишь $x\geqslant 2$.

Ответ. Все числа из промежутков $0<x<1$ и $2\leqslant x<+\infty$.

365. Область определения правой части данного неравенства находим из неравенства $2x-5>0$, откуда $x>2{,}5$, а левая часть определена при любом x, так как $x^2+1>0$. Поскольку $0<0{,}1<1$, то из данного неравенства следует $x^2+1>2x-5$,

$$x^2-2x+6>0. \qquad (1)$$

Так как корни левой части неравенства (1) мнимые, то оно имеет место при любом значении x. Таким образом, $x>2{,}5$.

Ответ. Все числа из промежутка $\left(\frac{5}{2},\ +\infty\right)$.

366. Перепишем данное неравенство в виде $\log_a x\,(\log_a x-1)<0$, откуда видно, что $0<\log_a x<1$. Так как $0<a<1$, то $a<x<1$.

Ответ. Все числа из промежутка $(a,\ 1)$.

367. Данное неравенство равносильно неравенствам

$$\frac{1+\log_a^2 x}{1+\log_a x}-1>0, \qquad \frac{\log_a^2 x-\log_a x}{1+\log_a x}>0,$$

$$(\log_a x+1)\log_a x\,(\log_a x-1)>0. \qquad (1)$$

Неравенство (1) имеет место, если $-1<\log_a x<0$ или $\log_a x>1$.

Так как, по условию $0<a<1$, то $1<x<\frac{1}{a}$ или $0<x<a$.

Ответ. Все числа из промежутков $(0,\ a)$, $\left(1,\ \frac{1}{a}\right)$.

368. Левая часть решаемого неравенства определена при $2^x > 1$, т. е. при

$$x > 0. \qquad (1)$$

Так как $\log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1}-2) = -\log_2(2^{x+1}-2)$, то данное неравенство можно переписать так:

$$-\log_2(2^x-1)\log_2(2^{x+1}-2) > -2,$$
$$\log_2(2^x-1)\log_2[2(2^x-1)] < 2,$$
$$\log_2(2^x-1)[1+\log_2(2^x-1)]-2 < 0,$$
$$\log_2^2(2^x-1)+\log_2(2^x-1)-2 < 0,$$
$$[\log_2(2^x-1)+2][\log_2(2^x-1)-1] < 0. \qquad (2)$$

Неравенство (2) имеет место, если $-2 < \log_2(2^x-1) < 1$, откуда $\frac{1}{4} < 2^x-1 < 2$, $\quad \frac{5}{4} < 2^x < 3$,

$$\log_2\frac{5}{4} < x < \log_2 3. \qquad (3)$$

Значения x, при которых выполняются одновременно неравенства (1) и (3), служат решением данного неравенства.

Ответ. Все числа из промежутка $\left(\log_2\frac{5}{4},\ \log_2 3\right)$.

369. Из условия следует, что $5^x-1 > 0$, т. е.

$$x > 0. \qquad (1)$$

Для удобства обозначим 5^x-1 через y. Имеем

$$\log_{\sqrt{2}} y \log_{\sqrt{2}}\frac{2\sqrt{2}}{y} > 2,$$
$$\log_{\sqrt{2}} y\left(\log_{\sqrt{2}} 2\sqrt{2}-\log_{\sqrt{2}} y\right)-2 > 0,$$
$$\log_{\sqrt{2}} y\left(3-\log_{\sqrt{2}} y\right)-2 > 0,$$
$$\log_{\sqrt{2}}^2 y-3\log_{\sqrt{2}} y+2 < 0,$$
$$\left(\log_{\sqrt{2}} y-2\right)\left(\log_{\sqrt{2}} y-1\right) < 0.$$

Отсюда $1 < \log_{\sqrt{2}} y < 2$, или $\sqrt{2} < y < 2$, т. е. $\sqrt{2} < 5^x-1 < 2$, или $\sqrt{2}+1 < 5^x < 3$, откуда

$$\log_5(\sqrt{2}+1) < x < \log_5 3. \qquad (2)$$

Множество значений x, удовлетворяющих одновременно (1) и (2), служит решением данного неравенства.

Ответ. Все числа из промежутка $\log_5(\sqrt{2}+1) < x < \log_5 3$.

370. Для существования левой части решаемого неравенства должно быть

$$\frac{3-2x}{1-x} > 0 \qquad (1)$$

и

$$\log_2 \frac{3-2x}{1-x} \geqslant 0; \qquad (2)$$

но так как правая часть неравенства равна 1, то еще должно быть

$$\log_2 \frac{3-2x}{1-x} < 1. \qquad (3)$$

Из (1) находим

$$x < 1 \quad \text{или} \quad x > \frac{3}{2}, \qquad (4)$$

из (2) получаем

$$\frac{3-2x}{1-x} \geqslant 1, \qquad (5)$$

а из (3) имеем

$$\frac{3-2x}{1-x} < 2. \qquad (6)$$

В силу неравенств (5) и (6) следует $\left(\frac{3-2x}{1-x}-1\right)\left(\frac{3-2x}{1-x}-2\right) \leqslant 0$, или $\frac{(3-2x-1+x)(3-2x-2+2x)}{(1-x)^2} \leqslant 0$, т. е. $\frac{2-x}{(1-x)^2} < 0$, откуда

$$x > 2. \qquad (7)$$

Из (4) и (7) заключаем, что решение данного неравенства состоит из всех чисел промежутка $x > 2$.

Ответ. Все числа промежутка $(2, +\infty)$.

371. Логарифм определен при

$$x^2-5x+2 > 0, \qquad (1)$$

а радикал — при

$$\log_{\frac{1}{7}} (x^2-5x+2) \geqslant 0. \qquad (2)$$

Так как правая часть неравенства есть 1, то также должно иметь место

$$\log_{\frac{1}{7}} (x^2-5x+2) < 1. \qquad (3)$$

Из (2) и (3) следует, что $\frac{1}{7} < x^2-5x+2 \leqslant 1$. Из неравенства $x^2-5x+2 \leqslant 1$, или $x^2-5x+1 \leqslant 0$ получаем

$$\frac{5-\sqrt{21}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5+\sqrt{21}}{2}, \qquad (4)$$

а из равенства $x^2-5x+2 > \frac{1}{7}$, или $7x^2-35x+13 > 0$ находим

$$x > \frac{35+\sqrt{861}}{14} \quad \text{или} \quad x < \frac{35-\sqrt{861}}{14}. \qquad (5)$$

Из (4) и (5) получаем окончательно

$$\frac{35+\sqrt{861}}{14} < x \leqslant \frac{5+\sqrt{21}}{2} \quad \text{или} \quad \frac{5-\sqrt{21}}{2} \leqslant x < \frac{35-\sqrt{861}}{14}.$$

Все значения x, удовлетворяющие последнему неравенству, удовлетворяют и неравенству (1).

Ответ. Все числа из промежутков $\left(\frac{35+\sqrt{861}}{14}, \frac{5+\sqrt{21}}{2}\right]$, $\left[\frac{5-\sqrt{21}}{2}, \frac{35-\sqrt{861}}{14}\right)$.

372. Из неравенства $\log^2_{0,1} x < 1$ следует $-1 < \log_{0,1} x < 1$, откуда $0,1 < x < 0,1^{-1}$, или

$$0,1 < x < 10. \qquad (1)$$

Из неравенства $\log^2_{0,1} x > \frac{1}{100}$ следует $\log_{0,1} x > \frac{1}{10}$ или $\log_{0,1} x < -\frac{1}{10}$, откуда

$$x < \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{10}} \quad \text{или} \quad x > \left(\frac{1}{10}\right)^{-\frac{1}{10}}. \qquad (2)$$

Таким образом, из (1) и (2) имеем две системы неравенств:

$$\text{а)} \begin{cases} 0,1 < x < 10 \\ x < 0,1^{0,1} \end{cases} \quad \text{и} \quad \text{б)} \begin{cases} 0,1 < x < 10 \\ x > 10^{0,1}. \end{cases}$$

Из а) следует $0,1 < x < 0,1^{0,1}$, а из б) имеем $10^{0,1} < x < 10$.

Ответ. Все числа из промежутков $0,1 < x < \sqrt[10]{0,1}$ или $\sqrt[10]{10} < x < 10$.

373. Левая часть неравенства определена при

$$x > 0 \quad \text{и} \quad x \neq 1. \qquad (1)$$

Перепишем данное неравенство в виде $\frac{1-\log_a x}{\log_a x} > 0$. Это неравенство равносильно такому: $\log_a x(\log_a x - 1) < 0$. Отсюда $0 < \log_a x < 1$. Так как, по условию, $a > 1$, то

$$1 < x < a. \qquad (2)$$

Множество значений x, удовлетворяющих одновременно (1) и (2), служит решением данного неравенства.

Ответ. Все числа из промежутка $(1, a)$.

374. Левая часть данного неравенства определена при

$$x > 0. \qquad (1)$$

Из данного неравенства следует, что

$$\log_{0,1} x > \sqrt{7} \quad \text{или} \quad \log_{0,1} x < -\sqrt{7}. \qquad (2)$$

Поскольку $0 < 0,1 < 1$, то из неравенств (2) следует

$$x < \left(\frac{1}{10}\right)^{\sqrt{7}} \quad \text{или} \quad x > 10^{\sqrt{7}}. \tag{3}$$

Из (1) и (3) заключаем, что $0 < x < \left(\frac{1}{10}\right)^{\sqrt{7}}$ или $x > 10^{\sqrt{7}}$.

Ответ. Все числа из промежутков $\left(0,\ 10^{-\sqrt{7}}\right)$, $\left(10^{\sqrt{7}},\ +\infty\right)$.

375. Из условия следует, что

$$\frac{x^2-4x+6}{x} > 0. \tag{1}$$

Так как корни числителя (1) мнимые, то он положителен при любом x. Следовательно, должно быть $x > 0$. Поскольку $0,7 < 1$, то из данного неравенства следует

$$\frac{x^2-4x+6}{x} > 1. \tag{2}$$

Так как $x > 0$, то неравенство (2) равносильно такому: $x^2-5x+6 > 0$. Поскольку корни левой части последнего неравенства 2 и 3, а коэффициент при x^2 положителен, то $x > 3$ или $x < 2$. Учитывая, что $x > 0$, окончательно имеем $x > 3$ или $0 < x < 2$.

Ответ. Все числа из промежутков (0, 2), (3, $+\infty$).

376. Перепишем неравенство в виде $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{9}}(x^2-3x+1)} < \left(\frac{1}{2}\right)^0$.

Так как $0 < \frac{1}{2} < 1$, то имеем $\log_{\frac{1}{9}}(x^2-3x+1) > 0 = \log_{\frac{1}{9}} 1$.

Поскольку $0 < \frac{1}{9} < 1$, то имеем $x^2-3x+1 < 1$, $x^2-3x < 0$, или $x(x-3) < 0$, откуда

$$0 < x < 3. \tag{1}$$

Все вычисления были произведены, считая, что $x^2-3x+1 > 0$, откуда

$$x > \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad \text{или} \quad x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следуют две системы неравенств:

$$\text{а)} \begin{cases} 0 < x < 3, \\ x > \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \quad \text{и} \quad \text{б)} \begin{cases} 0 < x < 3, \\ x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

Из а) $\frac{3+\sqrt{5}}{2} < x < 3$, а из б) следует $0 < x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Ответ. Все числа из промежутков $\left(0,\ \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2},\ 3\right)$.

377. Перепишем данное неравенство в виде

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{1-(\log_2 x)^2} < \left(\frac{16}{25}\right)^{2+\log_{\sqrt{2}} x},$$

или

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{(\log_2 x)^2-1} < \left(\frac{4}{5}\right)^{2\left(2+\log_{\sqrt{2}} x\right)}. \qquad (1)$$

Поскольку $4/5 < 1$, то из (1) следует, что

$$(\log_2 x)^2 - 1 > 2\left(2+\log_{\sqrt{2}} x\right). \qquad (2)$$

Так как $\log_{\sqrt{2}} x = 2\log_2 x$, то (2) принимает вид

$$(\log_2 x)^2 - 4\log_2 x - 5 > 0, \quad \text{или} \quad (\log_2 x+1)(\log_2 x - 5) > 0,$$

откуда $\log_2 x > 5$ или $\log_2 x < -1$. Таким образом, $x > 2^5 = 32$ или $0 < x < 2^{-1} = \frac{1}{2}$.

Ответ. Все числа из промежутков $(0, 1/2)$, $(32, +\infty)$.

378. Из условия следует $x < 20$, $x > 0$ и $x \neq 1$. Таким образом, область допустимых значений неравенства состоит из промежутков $0 < x < 1$ и $1 < x < 20$. Поэтому естественно рассмотреть два случая.

а) Если x из промежутка $0 < x < 1$, то логарифмическая функция — убывающая, и поэтому имеем

$$\sqrt{20-x} < x. \qquad (1)$$

Поскольку обе части неравенства (1) положительны, то можно обе части возвести в квадрат: $20-x < x^2$, или $x^2+x-20 > 0$, откуда $x > 4$ или $x < -5$. Поскольку оба эти неравенства несовместны с неравенством $0 < x < 1$, то в этом случае неравенство не имеет решений.

б) Если $1 < x < 20$, то имеем $\sqrt{20-x} > x$, или $x^2+x-20 < 0$, откуда $-5 < x < 4$. Решая совместно неравенства $1 < x < 20$ и $-5 < x < 4$, получаем $1 < x < 4$.

Ответ. Все числа из промежутка $(1, 4)$.

379. Левая часть решаемого неравенства определена при $x+1 > 0$, или

$$x > -1, \qquad (1)$$

а правая — определена при $4-x^2 > 0$ или при

$$-2 < x < 2. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что областью допустимых значений предложенного неравенства является промежуток

$$-1 < x < 2. \qquad (3)$$

Перепишем решаемое неравенство в виде

$$\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{x+1} < \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{4-x^2} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2},$$

или

$$\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{x+1} < \log_{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}. \tag{4}$$

Поскольку при положительном основании, меньшем 1, логарифмическая функция — убывающая, то из (4) следует $\sqrt{x+1} > \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$, или $x+1 > \frac{4-x^2}{4}$, или $x^2+4x > 0$, откуда

$$x > 0 \quad \text{или} \quad x < -4. \tag{5}$$

Из (3) и (5) следует, что решениями данного неравенства служат все числа из промежутка $0 < x < 2$.

380. Область допустимых значений определяется системой неравенств

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x^2-1 \neq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Решая систему (1), получаем $0 < x < 1$, $x > 1$.

1) Если $0 < x < 1$, то данное неравенство равносильно неравенству

$$|x^2-1| < 1. \tag{2}$$

Так как при $0 < x < 1$ выражение $x^2-1 < 0$, то неравенство (2) равносильно неравенству $1-x^2 < 1$, или $x^2 > 0$, что имеет место при любом x из промежутка $0 < x < 1$. Таким образом, все числа из промежутка $0 < x < 1$ служат решениями данного неравенства.

2) Если $x > 1$, то данное неравенство равносильно неравенству

$$|x^2-1| > 1. \tag{3}$$

Поскольку при $x > 1$ выражение $x^2-1 > 0$, то неравенство (3) равносильно неравенству $x^2-1 > 1$, откуда $x > \sqrt{2}$ или $x < -\sqrt{2}$. Мы рассматриваем случай, когда $x > 1$, поэтому все числа из промежутка $x > \sqrt{2}$ являются решениями данного неравенства.

Ответ. Все числа из промежутков $0 < x < 1$ и $x > \sqrt{2}$.

381. Пусть $|\lg x| = z$, тогда решаемое неравенство перепишется в виде

$$\sin z + \cos z > \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{1}$$

Умножив обе части неравенства (1) на $\frac{\sqrt{2}}{2}$, получим $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos z + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin z > \frac{1}{2}$, или $\cos\left(z-\frac{\pi}{4}\right) > \frac{1}{2}$, откуда $-\frac{\pi}{3}+2k\pi < z-\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{3}+2k\pi$ и

$$-\frac{\pi}{12}+2k\pi < z < \frac{7\pi}{12}+2k\pi. \tag{2}$$

Так как $z \geqslant 0$, то $k=1, 2, 3, \ldots$ Кроме того, в формуле (2) при $k=0$ возможно лишь

$$0 \leqslant z < \frac{7\pi}{12}. \tag{3}$$

Поскольку $z = |\lg x|$, то (3) перепишется в виде

$$0 \leqslant |\lg x| < \frac{7\pi}{12}. \tag{4}$$

Если $\lg x \geqslant 0$, то из (4) следует $0 \leqslant \lg x < \frac{7\pi}{12}$, откуда

$$1 \leqslant x < 10^{\frac{7\pi}{12}}. \tag{5}$$

Если же $\lg x < 0$, то из (4) имеем $0 < \lg \frac{1}{x} < \frac{7\pi}{12}$, $1 < \frac{1}{x} < 10^{\frac{7\pi}{12}}$, и

$$10^{-\frac{7\pi}{12}} < x < 1. \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует, что все числа интервала $(10^{-\frac{7\pi}{12}}, 10^{\frac{7\pi}{12}})$ удовлетворяют данному неравенству.

Вернемся к неравенству (2), которое перепишем в виде

$$-\frac{\pi}{12} + 2k\pi < |\lg x| < \frac{7\pi}{12} + 2k\pi, \tag{7}$$

где $k=1, 2, 3, \ldots$ Если $\lg x > 0$, то (7) имеет вид $-\frac{\pi}{12} + 2k\pi < \lg x < \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$, откуда все числа из промежутка $10^{-\frac{\pi}{12}+2k\pi} < x < 10^{\frac{7\pi}{12}+2k\pi}$ удовлетворяют данному неравенству. Если же $\lg x < 0$, то (7) примет вид $-\frac{\pi}{12} + 2k\pi < \lg \frac{1}{x} < \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$, откуда $10^{-\frac{\pi}{12}+2k\pi} < \frac{1}{x} < 10^{\frac{7\pi}{12}+2k\pi}$. Следовательно, и все числа из промежутка $10^{-\frac{7\pi}{12}-2k\pi} < x < 10^{\frac{\pi}{12}-2k\pi}$ удовлетворяют решаемому неравенству.

Ответ. $10^{-\frac{7\pi}{12}} < x < 10^{\frac{7\pi}{12}}$; $10^{-\frac{\pi}{12}+2k\pi} < x < 10^{\frac{7\pi}{12}+2k\pi}$; $10^{-\frac{7\pi}{12}-2k\pi} < x < 10^{\frac{\pi}{12}-2k\pi}$, где $k=1, 2, 3, \ldots$

382. По определению, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin \lg x \leqslant \frac{\pi}{2}$. Но, учитывая условие, имеем $0 < \arcsin \lg x \leqslant \frac{\pi}{2}$, или $0 < \lg x \leqslant 1$, откуда $1 < x \leqslant 10$.

Ответ. $1 < x \leqslant 10$.

383. Левая часть неравенства определена при $x > 0$. Так как $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x^5}{4} = -(5 \log_2 x - 2)$, то данное неравенство принимает вид

$$(\log_2 x)^4 - (5 \log_2 x - 2)^2 - 20 \log_2 x + 148 < 0,$$

$$(\log_2 x)^4 - 25 \log_2^2 x + 144 < 0,$$

$$(\log_2 x + 4)(\log_2 x + 3)(\log_2 x - 3)(\log_2 x - 4) < 0.$$

Это неравенство имеет место, если $-4 < \log_2 x < -3$ или $3 < \log_2 x < 4$, откуда $\frac{1}{16} < x < \frac{1}{8}$ или $8 < x < 16$.

Ответ. Все числа из интервалов $\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{8}\right)$, $(8, 16)$.

384. Так как $\log_{\frac{1}{2}} x = -\log_2 x$, то данное неравенство можно представить в виде $\log_2^2 x - |\log_2 x| - 2 < 0$. Если $\log_2 x \geqslant 0$, т. е.

$$x \geqslant 1, \qquad (1)$$

то $\log_2^2 x - \log_2 x - 2 < 0$, откуда $-1 < \log_2 x < 2$, поэтому

$$\frac{1}{2} < x < 4. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что все числа из промежутка $1 \leqslant x < 4$ являются решениями данного неравенства. Если же $\log_2 x < 0$, т. е.

$$0 < x < 1, \qquad (3)$$

то $\log_2^2 x + \log_2 x - 2 < 0$, откуда $-2 < \log_2 x < 1$, или

$$\frac{1}{4} < x < 2. \qquad (4)$$

Из (3) и (4) следует, что все числа из промежутка $\frac{1}{4} < x < 1$ служат решениями данного неравенства.

Ответ. Все числа из промежутка $\frac{1}{4} < x < 4$.

385. Должно быть $x > 0$ и $kx \neq 1$. Так как $\log_{kx} x = \frac{1}{\log_x kx}$, то данное неравенство равносильно такому

$$\frac{1}{1 + \log_x k} + 2 + \log_x k > 0,$$

или

$$\frac{1+2+2\log_x k+\log_x k+\log_x^2 k}{1+\log_x k}>0,$$

или

$$\left(\log_x^2 k+3\log_x k+3\right)(1+\log_x k)>0.$$

Так как корни квадратного трехчлена $\log_x^2 k+3\log_x k+3$ относительно $\log_x k$ мнимые, то этот квадратный трехчлен положителен при любом значении $\log_x k$. Следовательно, $1+\log_x k>0$, или $\log_x k>-1$. Если $x>1$, то $k>x^{-1}$, или $\frac{1}{x}<k$ и $x>\frac{1}{k}$. Если же $0<x<1$, то $k<x^{-1}$, или $\frac{1}{x}>k$ и $x<\frac{1}{k}$. Так как $0<k<1$, то $0<x<1$.

Ответ. $x>\frac{1}{k}$ или $0<x<1$.

386. Левая часть данного неравенства определена при

$$x>0. \qquad (1)$$

Если (1) выполнено, то данное неравенство равносильно неравенству $x^{3-\log_2^2 x-2\log_2 x}>1$. Логарифмируя это неравенство по основанию 2 и положив $y=\log_2 x$, получим равносильное неравенство $y(3-y^2-2y)>0$, которое можно записать в виде $y(y+3)(y-1)<0$, откуда $y<-3$, $0<y<1$, поэтому $\log_2 x<-3$, $0<\log_2 x<1$, т. е. $0<x<\frac{1}{8}$, $1<x<2$.

Таким образом, исходное неравенство имеет место тогда и только тогда, когда $0<x<\frac{1}{8}$ или $1<x<2$.

§ 4. Неравенства, связанные с тригонометрическими функциями

387. Данное неравенство равносильно неравенству

$$5\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+1-\cos^2 2x-4\cos 2x>0,$$

или

$$2\cos^2 2x+13\cos 2x-7<0. \qquad (1)$$

Корнями квадратного трехчлена $2\cos^2 2x+13\cos 2x-7$ относительно $\cos 2x$ служат числа $\frac{1}{2}$ и -7.

Следовательно, из (1) заключаем, что

$$-7<\cos 2x<\frac{1}{2}. \qquad (2)$$

Но так как $|\cos\alpha|\leqslant 1$ то, учитывая (2), имеем $-1\leqslant\cos 2x<\frac{1}{2}$, откуда $\frac{\pi}{3}+2\pi k<2x<\frac{5\pi}{3}+2\pi k$.

Ответ. $\frac{\pi}{6}+k\pi<x<\frac{5\pi}{6}+k\pi$, где $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$

388. Преобразуем левую часть данного неравенства. Имеем
$$\sin^6 x+\cos^6 x=(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3=(\sin^2 x+\cos^2 x)\times$$
$$\times(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)=\sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x-$$
$$-3\sin^2 x\cos^2 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-\frac{3}{4}\cdot 4\sin^2 x\cos^2 x=$$
$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}=\frac{5}{8}+\frac{3\cos 4x}{8}.$$
Таким образом, решаемое неравенство можно переписать в виде $\frac{5}{8}+\frac{3\cos 4x}{8}>\frac{5}{8}$, откуда $\cos 4x>0$ и $-\frac{\pi}{2}+2k\pi<4x<\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

Ответ. $-\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}$, где $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$

389. Данное неравенство равносильно неравенствам:
$$4\sin^3 x-2\sin x-\cos 2x<0,$$
$$4\sin^3 x-2\sin x-(1-2\sin^2 x)<0,$$
$$4\sin^3 x+2\sin^2 x-2\sin x-1<0,$$
$$2\sin^2 x(2\sin x+1)-(2\sin x+1)<0,$$
$$(2\sin^2 x-1)(2\sin x+1)<0,$$
$$4\left(\sin^2 x-\frac{1}{2}\right)\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)<0,$$
$$\left(\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)\left(\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)<0,$$
откуда $\sin x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ или $-\frac{1}{2}<\sin x<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Из неравенства $\sin x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ получаем $-\frac{3\pi}{4}+2k\pi<x<-\frac{\pi}{4}+2k\pi$, а из неравенства $-\frac{1}{2}<\sin x<\frac{\sqrt{2}}{2}$ находим
$$-\frac{\pi}{6}+2\pi m<x<\frac{\pi}{4}+2\pi m,\quad \frac{3\pi}{4}+2l\pi<x<\frac{7\pi}{6}+2l\pi.$$

Ответ. $-\frac{3\pi}{4}+2k\pi<x<-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ -\frac{\pi}{6}+2\pi m<x<\frac{\pi}{4}+2\pi m,$ $\frac{3\pi}{4}+2l\pi<x<\frac{7\pi}{6}+2l\pi$, где $k,\ l,\ m,\ n$ — целые числа.

390. Поскольку $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ и $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, то данное неравенство можно переписать в виде

$$3\sin x - 4\sin^3 x > 4\sin x\,(1 - 2\sin^2 x),$$

или

$$4\sin^3 x - \sin x > 0,$$
$$\sin x\,(4\sin^2 x - 1) > 0,$$
$$\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)\sin x\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) > 0,$$

откуда $\sin x > \frac{1}{2}$ или $-\frac{1}{2} < \sin x < 0$.

Из неравенства $\sin x > \frac{1}{2}$ получаем $\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, а из неравенства $-\frac{1}{2} < \sin x < 0$ находим $-\frac{\pi}{6} + 2n\pi < x < 2n\pi$, $\pi + 2m\pi < x < \frac{7\pi}{6} + 2m\pi$.

Ответ. $\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $-\frac{\pi}{6} + 2n\pi < x < 2n\pi$, $\pi(2m + 1) < x < \frac{7\pi}{6} + 2m\pi$, где k, m, n — целые числа.

391. Левая часть решаемого неравенства определена при $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Если $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, то $\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, а следовательно, данное неравенство перепишется в виде

$$\frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg} x - 2 \geqslant 0,$$
$$\operatorname{tg}^3 x - 2\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x - 2 \geqslant 0,$$
$$\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 2\operatorname{tg} x - 2 \geqslant 0,$$
$$\operatorname{tg}^2 x(\operatorname{tg} x - 1) - \operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x - 1) + 2(\operatorname{tg} x - 1) \geqslant 0,$$
$$(\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 2)(\operatorname{tg} x - 1) \geqslant 0. \qquad (1)$$

Поскольку корни квадратного трехчлена $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 2$ мнимые, то он положителен при любом $\operatorname{tg} x$. Следовательно, неравенство (1) равносильно неравенству $\operatorname{tg} x - 1 \geqslant 0$, откуда $\frac{\pi}{4} + \pi k \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi k$.

Ответ. $\frac{\pi}{4} + \pi k \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

392. Очевидно, что $|\cos x| \neq 0$, так как в противном случае $|\sin x| = 1$, что приводит к неверному неравенству ($1 < 0$). Следовательно, $|\cos x| > 0$. Поделив обе части данного неравенства на $|\cos x|$, получим равносильное ему неравенство $|\operatorname{tg} x| < 1$, или $-1 < \operatorname{tg} x < 1$.

Ответ. $-\frac{\pi}{4}+\pi k < x < \frac{\pi}{4}+k\pi$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

393. Из условия задачи следует, что $\sin x \neq 0$, следовательно, $|\sin x| > 0$. Поделив обе части решаемого неравенства на $|\sin x|$, получим $|\operatorname{ctg} x| < 1$, или $-1 < \operatorname{ctg} x < 1$.

Ответ. $\frac{\pi}{4}+\pi k < x < \frac{3\pi}{4}+k\pi$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

394. Перепишем данное неравенство в виде $2|\sin x|\cos x > \frac{1}{2}$. Так как произведение $|\sin x|\cos x$ должно быть положительным, а в данной задаче $|\sin x| > 0$, то и $\cos x > 0$. Если $\sin x > 0$, то данное неравенство перепишется в виде $\sin 2x > \frac{1}{2}$. Итак, в данном случае имеем систему

$$\sin x > 0, \quad \cos x > 0, \quad \sin 2x > \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Так как $\sin x > 0$ и $\cos x > 0$, то решения системы (1) должны принадлежать промежуткам

$$2\pi m < x < \frac{\pi}{2}+2\pi m. \tag{2}$$

Из неравенства $\sin 2x > \frac{1}{2}$ следует, что $\frac{\pi}{6}+2\pi l < 2x < \frac{5\pi}{6}+2\pi l$, откуда

$$\frac{\pi}{12}+\pi l < x < \frac{5\pi}{12}+\pi l. \tag{3}$$

Из (2) и (3) заключаем, что $\frac{\pi}{12}+2\pi k < x < \frac{5\pi}{12}+2\pi k$. Если же $\sin x < 0$, то имеем систему

$$\sin x < 0, \quad \cos x > 0, \quad \sin 2x < -\frac{1}{2}. \tag{4}$$

Поскольку $\sin x < 0$ и $\cos x > 0$, то решения системы (4) должны принадлежать промежуткам

$$\frac{3\pi}{2}+2\pi m < x < 2\pi+2\pi m. \tag{5}$$

Из неравенства $\sin 2x < -\frac{1}{2}$ следует, что $-\frac{5\pi}{6}+2\pi l < 2x < -\frac{\pi}{6}+2\pi l$, откуда

$$-\frac{5\pi}{12}+\pi l < x < -\frac{\pi}{12}+\pi l. \tag{6}$$

Из (5) и (6) заключаем, что

$$-\frac{5\pi}{12}+2\pi n < x < -\frac{\pi}{12}+2\pi n.$$

Ответ. Промежутки $2\pi k+\frac{\pi}{12}<x<\frac{5\pi}{12}+2\pi k$, $2\pi n-\frac{5\pi}{12}<x<$
$<-\frac{\pi}{12}+2\pi n$.

395. Так как $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ и $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$, то данное неравенство можно переписать в виде

$$6\sin x(1-2\sin^2 x)-2(3\sin x-4\sin^3 x)<4,$$
$$2\sin x(3-6\sin^2 x-3+4\sin^2 x)<4,$$
$$\sin^3 x>-1,\quad \sin x>-1.$$

Ответ. Все числа, кроме чисел $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, где $k=0$, ± 1, ± 2, ...

396. Вначале заметим, что $x\neq\frac{\pi}{2}k$, так как при этих значениях x левая часть неравенства равна единице, а по условию должна быть больше единицы. Если $x\neq\frac{\pi}{2}k$, то имеем

$$\left.\begin{aligned}|\sin x|&>\sin^2 x,\\ |\cos x|&>\cos^2 x.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Складывая почленно неравенства (1), получим

$$|\sin x|+|\cos x|>\sin^2 x+\cos^2 x=1.$$

Значит, решением данного неравенства являются все числа, кроме $x=\frac{\pi}{2}k$.

Ответ. Все числа, кроме $x=\frac{\pi}{2}k$, где $k=0$, ± 1, ± 2, ...

397. Поскольку $\sin^2 x=1-\cos^2 x$, то данное неравенство равносильно неравенству $4\cos^2 x+4|\cos x|-3>0$, или $4|\cos x|^2+$ $+4|\cos x|-3>0$, откуда

$$|\cos x|>\frac{1}{2}\quad\text{или}\quad|\cos x|<-\frac{3}{2}.\qquad(1)$$

Так как $|\cos x|\geqslant 0$, то из (1) имеем только

$$|\cos x|>\frac{1}{2}.\qquad(2)$$

Учитывая, что период функции $|\cos x|$ есть π, из (2) получаем $-\frac{\pi}{3}+\pi k<x<\frac{\pi}{3}+\pi k$, где $k=0$, ± 1, ± 2, ...

398. Заданное неравенство равносильно системе неравенств $-1<\sin x+\cos x<1$ или $-\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x<\frac{\sqrt{2}}{2}$, или $-\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $-\frac{\pi}{4}+k\pi<x+\frac{\pi}{4}<$ $<\frac{\pi}{4}+k\pi$.

Ответ. $-\frac{\pi}{2}+k\pi < x < k\pi.$

399. Поскольку при положительном основании, меньшем 1, показательная функция — убывающая, то из условия следует, что $\sin x < \cos x$, $\cos x - \sin x > 0$, $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x > 0$, $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) > 0$, откуда $-\frac{\pi}{2}+2k\pi < x+\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}+2k\pi.$

Ответ. Все числа из промежутков $-\frac{3\pi}{4}+2k\pi < x < \frac{\pi}{4}+2k\pi$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

400. Поскольку при основании, большем 1, показательная функция возрастающая, то данное неравенство равносильно неравенствам $\sin x > \cos x$, $\sin x - \cos x > 0$, $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x > 0$, $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) > 0$, откуда $2k\pi < x-\frac{\pi}{4} < \pi+2k\pi.$

Ответ. Все числа промежутков $\frac{\pi}{4}+2k\pi < x < \frac{5\pi}{4}+2k\pi$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

401. Область допустимых значений определяется соотношением $\sin x \neq \cos x$, т. е.

$$x \neq \frac{\pi}{4}+k\pi. \tag{1}$$

Умножив числитель и знаменатель левой части данного неравенства на $\frac{\sqrt{2}}{2}$, получим

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x}{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x} > \sqrt{3},$$

или

$$\frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} > \sqrt{3}, \text{ т. е. } \operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) > \sqrt{3},$$

откуда

$$k\pi < x-\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{6}+k\pi. \tag{2}$$

Решая совместно (1) и (2), получим решения данного неравенства.

Ответ. $\frac{\pi}{4}+k\pi < x < \frac{5\pi}{12}+k\pi$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

402. Перепишем данное неравенство в виде

$$\frac{5-4(1-\cos^2 x+\cos x)}{\cos x} \leqslant 0,$$

или

$$\frac{4\cos^2 x-4\cos x+1}{\cos x}\leqslant 0,$$

$$\frac{(2\cos x-1)^2}{\cos x}\leqslant 0.$$

Если $2\cos x-1=0$, т. е. если $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то имеет место равенство.

Если же $(2\cos x-1)^2>0$, то должно быть $\cos x<0$, откуда $\frac{\pi}{2}+2n\pi<x<\frac{3\pi}{2}+2n\pi$.

Ответ. $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$; $\frac{\pi}{2}+2n\pi<x<\frac{3\pi}{2}+2n\pi$, где n и k — любые целые числа.

403. Область допустимых значений определяется соотношениями

$$x\neq\frac{\pi}{2}(2k+1),\ x\neq\frac{\pi}{4}(2k+1),\ x\neq-\operatorname{arctg}2+k\pi. \qquad (1)$$

Учитывая, что $\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$, перепишем данное неравенство в виде $\operatorname{tg}x>\frac{2\operatorname{tg}x-2(1-\operatorname{tg}^2 x)}{2\operatorname{tg}x+2(1-\operatorname{tg}^2 x)}$, или $\frac{\operatorname{tg}^3 x-1}{\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}x-1}>0$,

или

$$\frac{(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}x+1)(\operatorname{tg}x-1)}{\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}x-1}>0. \qquad (2)$$

Имеем $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}x+1>0$, при любом значении $\operatorname{tg}x$, так как корни квадратного трехчлена $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}x+1$ мнимые. Поэтому неравенство (2) равносильно неравенству

$$\frac{\operatorname{tg}x-1}{\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}x-1}>0. \qquad (3)$$

Поскольку знаменатель равен $\left(\operatorname{tg}x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\operatorname{tg}x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, то неравенство (3) равносильно неравенству

$$\left(\operatorname{tg}x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)(\operatorname{tg}x-1)\left(\operatorname{tg}x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)>0,$$

откуда

$$\operatorname{tg}x>\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ \text{ или }\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}<\operatorname{tg}x<1. \qquad (4)$$

Решая совместно (1) и (4), получим все решения данного неравенства.

Ответ. $\pi k+\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{5}}{2}<x<\frac{\pi}{2}+\pi k$; $\pi k-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}-1}{2}<x<\frac{\pi}{4}+\pi k$.

404. Левая часть неравенства определена, если $\sin x \neq -\cos x$, т. е.

$$x \neq -\frac{\pi}{4}+\pi k. \qquad (1)$$

Из условия задачи следует, что

$$-1 \leqslant \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x} \leqslant 1, \quad -1 \leqslant \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x}{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x} \leqslant 1,$$

$$-1 \leqslant \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} \leqslant 1, \quad -1 \leqslant \operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1,$$

откуда $-\frac{\pi}{4}+\pi k \leqslant x-\frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\pi}{4}+\pi k$. Следовательно,

$$\pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}+\pi k. \qquad (2)$$

Решая совместно (1) и (2), получим все решения данного неравенства.

Ответ. $\pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}+\pi k$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

405. Поскольку $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)=$ $=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, то данное неравенство можно переписать в виде

$$\sqrt{\frac{2\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}} \geqslant 1,$$

или

$$\sqrt{\frac{2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1}{2-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}} \geqslant 1. \qquad (1)$$

Левая часть (1) определена, если

$$\frac{2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1}{2-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} \geqslant 0. \qquad (2)$$

Из (1) следует, что

$$\frac{2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1}{2-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\geqslant 1. \qquad (3)$$

Так как выполнение (3) влечет за собой (2), то неравенство (3) равносильно данному неравенству. Поскольку $2-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0$, то неравенство (3) равносильно неравенству

$$2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1\geqslant 2-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right),$$

или

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\geqslant 1. \qquad (4)$$

Так как $\cos\alpha\leqslant 1$, то из (4) следует, что $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$.

Ответ. $x=\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

406. Левая часть неравенства определена, если выполняются одновременно следующие три условия:

1) $\cos 2x>0$, 2) $\cos 2x\neq\sqrt{2}$, 3) $\cos^2 2x-\sin^2 x>0$. Поскольку $|\cos 2x|\leqslant 1$, то $\cos 2x\neq\sqrt{2}$. Таким образом, остаются только условия 1) и 3).

Так как $\frac{\cos 2x}{\sqrt{2}}<1$, то, потенцируя обе части данного неравенства, получаем $\frac{\cos^2 2x-\sin^2 x}{2}\geqslant\frac{\cos^2 2x}{2}$, откуда $\sin^2 x\leqslant 0$, что имеет место только тогда, когда $\sin x=0$, т. е. при $x=\pi k$. При этих значениях имеем $\cos 2x=\cos 2\pi k=1>0$, $\cos^2 2x-\sin^2 x=\cos^2 2\pi k-\sin^2\pi k=1>0$, т. е. выполняются условия 1) и 3).

Ответ. $x=\pi k$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

407. Решая квадратное неравенство относительно $\operatorname{arctg} x$, получаем

$$\operatorname{arctg} x>3 \quad \text{или} \quad \operatorname{arctg} x<1. \qquad (1)$$

Также имеем (по определению)

$$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg} x<\frac{\pi}{2}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg} x<1$, откуда $-\infty<x<\operatorname{tg} 1$.

Ответ. Все числа из промежутка $(-\infty, \operatorname{tg} 1)$.

408. Область допустимых значений находится из неравенства $-1\leqslant x^2-2x-2\leqslant 1$, или

$$1\leqslant x^2-2x\leqslant 3. \qquad (1)$$

Данное неравенство равносильно неравенству $\sin[\arcsin(x^2-2x-2)] > \sin\frac{\pi}{4}$, или $x^2-2x-2 > \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$x^2-2x > 2+\frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует $2+\frac{\sqrt{2}}{2} < x^2-2x \leqslant 3$. Из неравенства $2+\frac{\sqrt{2}}{2} < x^2-2x$ получаем

$$x < 1-\sqrt{3+\frac{1}{\sqrt{2}}} \text{ или } x > 1+\sqrt{3+\frac{1}{\sqrt{2}}}, \qquad (3)$$

а из неравенства $x^2-2x \leqslant 3$ находим

$$-1 \leqslant x \leqslant 3. \qquad (4)$$

Из (3) и (4) следует, что решениями данного неравенства являются все числа из промежутков

$$-1 \leqslant x < 1-\sqrt{3+\frac{1}{\sqrt{2}}}, \quad 1+\sqrt{3+\frac{1}{\sqrt{2}}} < x \leqslant 3.$$

ГЛАВА III

ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С НЕРАВЕНСТВАМИ

§ 1. Нахождение области определения функций

409. Функция определена, если $1-x \geqslant 0$, откуда $x \leqslant 1$.

Ответ. Промежуток $(-\infty, 1]$.

410. Для того чтобы числитель был определен, должно быть $1-x^2 \geqslant 0$, откуда

$$-1 \leqslant x \leqslant 1. \tag{1}$$

Также должно выполняться соотношение

$$x \neq 0. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что заданная функция определена на двух промежутках, $-1 \leqslant x < 0$ и $0 < x \leqslant 1$.

Ответ. Промежутки $[-1, 0)$, $(0, 1]$.

411. Функция $\sqrt{x-1}$ определена, если $x-1 \geqslant 0$, откуда

$$x \geqslant 1, \tag{1}$$

а функция $\sqrt{1-x}$ определена при $1-x \geqslant 0$, откуда

$$x \leqslant 1. \tag{2}$$

Из (1) и (2) заключаем, что данная функция определена только при $x=1$.

Ответ. 1.

412. Функция $\sqrt{x-1}$ определена, если имеет место $x-1 \geqslant 0$, откуда

$$x \geqslant 1, \tag{1}$$

а функция $\sqrt{-x}$ определена, если имеет место $-x \geqslant 0$, откуда

$$x \leqslant 0. \tag{2}$$

Поскольку (1) и (2) несовместны, то заданная функция не определена ни при каком x.

413. Функция $\sqrt{1+x}$ определена при $1+x \geqslant 0$, откуда

$$x \geqslant -1, \tag{1}$$

а функция $\sqrt{1-x}$ определена, если $1-x \geqslant 0$, откуда

$$x \leqslant 1, \tag{2}$$

а для того, чтобы знаменатель данной функции был отличен от нуля, должно иметь место $1+x \neq 1-x$, откуда

$$x \neq 0. \tag{3}$$

Из (1), (2) и (3) следует, что заданная функция определена на двух промежутках, $-1 \leqslant x < 0$ и $0 < x \leqslant 1$.

414. Должно быть $1-\cos x \neq 0$, или $\cos x \neq 1$, откуда $x \neq 2\pi k$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

415. Должно быть $x \neq 0$ и $\frac{1}{x^2} \neq \pi k$.

Ответ. Множество всех действительных чисел, исключая $x=0$ и $x=\pm\frac{1}{\sqrt{\pi k}}$, где $k=1, 2, 3, \ldots$

416. Должно быть $x \neq 0$ и $\sin\frac{1}{x} \geqslant 0$, откуда $2\pi k \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \pi + 2\pi k$. При $k=0$ имеем $x \geqslant \frac{1}{\pi}$. При $k=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ имеем $\frac{1}{\pi(2k+1)} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2\pi k}$.

Ответ. $x \geqslant \frac{1}{\pi}$ или $\frac{1}{\pi(2k+1)} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2\pi k}$, где $k=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

417. Должно быть $\sin(\cos x) \geqslant 0$, откуда

$$2\pi n \leqslant \cos x \leqslant \pi + 2\pi n, \tag{1}$$

но

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что $0 \leqslant \cos x \leqslant 1$, т. е. аргумент x находится в первом и четвертом квадрантах, включая их границы.

Ответ. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

418. Должно быть

$$\operatorname{tg}^2 x - (\sqrt{3}+1)\operatorname{tg} x + \sqrt{3} \geqslant 0. \tag{1}$$

Левая часть неравенства (1) есть квадратный трехчлен относительно $\operatorname{tg} x$, корни которого $\sqrt{3}$ и 1, поэтому неравенство (1) имеет место при

$$\operatorname{tg} x \geqslant \sqrt{3}, \tag{2}$$

или при

$$\operatorname{tg} x \leqslant 1. \tag{3}$$

Из неравенства (2) следует $\pi k + \frac{\pi}{3} \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, а из неравенства (3) вытекает $\pi k - \frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi k + \frac{\pi}{4}$.

Ответ. Промежутки $\frac{\pi}{3}(3k+1) \leqslant x < \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $\frac{\pi}{2}(2k-1) < x \leqslant \frac{\pi}{4}(4k+1)$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

419. Должно быть $\left|\frac{2}{1-x}\right| \leqslant 1$. Следовательно, $\left|\frac{x-1}{2}\right| \geqslant 1$, т. е. $|x-1| \geqslant 2$, откуда 1) $x-1 \geqslant 2$, т. е. $x \geqslant 3$, или 2) $x-1 \leqslant -2$, т. е. $x \leqslant -1$.

Ответ. Промежутки $x \geqslant 3$, $x \leqslant -1$.

420. Должно быть

$$-1 \leqslant \frac{2x}{1+x^2} \leqslant 1. \tag{1}$$

Так как $1+x^2 > 0$ при любом значении x, то (1) равносильно неравенству $-1-x^2 \leqslant 2x \leqslant 1+x^2$.

Решим каждое неравенство отдельно.

1) $x^2+1 \geqslant 2x$, или $x^2-2x+1 \geqslant 0$, или $(x-1)^2 \geqslant 0$; последнее имеет место при любом x.

2) $2x \geqslant -1-x^2$, или $x^2+2x+1 \geqslant 0$, или $(x+1)^2 \geqslant 0$; последнее имеет место при любом x.

Ответ. x — любое число.

421. Должно быть $0 \leqslant \arcsin(\log_2 x) \leqslant \frac{\pi}{2}$, откуда $0 \leqslant \log_2 x \leqslant 1$.

Ответ. $1 \leqslant x \leqslant 2$.

422. Должно быть

$$|1+\operatorname{tg}^2 \pi x| \leqslant 1. \tag{1}$$

Ясно, что

$$1+\operatorname{tg}^2 \pi x \geqslant 1 \tag{2}$$

при всех допустимых значениях x. Из (1) и (2) следует, что $\operatorname{tg}^2 \pi x + 1 = 1$. Последнее соотношение возможно, если $\operatorname{tg}^2 \pi x = 0$, т. е. когда $\pi x = \pi k$.

Ответ. $x=k$ — любое целое число.

423. Должно быть $-1 \leqslant \operatorname{tg} x \leqslant 1$.

Ответ. $\pi k - \frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} + \pi k$.

424. Должно быть $|2x^2+x| \leqslant 1$, т. е. $-1 \leqslant 2x^2+x \leqslant 1$. Из неравенства $2x^2+x-1 \leqslant 0$ находим, что $-1 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$, а неравенство $2x^2+x+1 \geqslant 0$ имеет место при любом x.

Ответ. $-1 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$.

425. Должно быть $x \neq 0$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и $x > 2$. Так как $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и $x > 2$ несовместны, то функция y не определена ни при каком значении x.

426. Должно быть $\cos x > 0$, $\sin x > 0$, $\cos x \neq 1$. Из этих неравенств следует: $2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

Ответ. $2\pi k < x < \frac{\pi}{2}(4k+1)$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

427. Должно быть $\sin x - \cos x > 0$, или $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x > 0$, или $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$. Отсюда $2\pi k < x - \frac{\pi}{4} < \pi + 2\pi k$.

Ответ. $\frac{\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$.

428. Должно быть $\cos 2\pi x > 0$ и $\lg(\cos 2\pi x) \geqslant 0$, откуда $\cos 2\pi x \geqslant 1$. Но $\cos 2\pi x \leqslant 1$, следовательно, $\cos 2\pi x = 1$, откуда $2\pi x = 2\pi k$.

Ответ. $x = k$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

429. Функция определена, если имеет место соотношение $x^3 - 3x^2 + 2x \neq 0$, или $x(x-1)(x-2) \neq 0$. Корнями левой части неравенства являются числа 0, 1, 2.

Ответ. Множество всех действительных чисел, кроме 0, 1, 2.

430. Функция $\sqrt{-x}$ определена, если имеет место неравенство $x \leqslant 0$, а функция $\frac{1}{\sqrt{2+x}}$ определена, если $2 + x > 0$, откуда $x > -2$.

Ответ. $-2 < x \leqslant 0$.

431. Для того чтобы функция была определена, необходимо, чтобы имело место неравенство $3x - x^3 \geqslant 0$, или $x(x^2 - 3) \leqslant 0$, или $x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) \leqslant 0$. Корнями левой части этого неравенства являются числа $-\sqrt{3}$, 0, $\sqrt{3}$. Следовательно, $x \leqslant -\sqrt{3}$ или $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$.

Ответ. Промежутки $(-\infty, -\sqrt{3}]$, $[0, \sqrt{3}]$.

432. Функция определена при $\frac{x^2 - 3x + 2}{x+1} > 0$. Если частное двух величин положительно, то и произведение этих величин положительно. Таким образом, $(x^2 - 3x + 2)(x+1) > 0$, или $(x-1)(x-2)\times(x+1) > 0$. Следовательно, $-1 < x < 1$ или $x > 2$.

433. Числитель определен при $x \geqslant 0$. Для того чтобы знаменатель был отличным от нуля, надо, чтобы $\pi x \neq \pi k$, т. е. $x \neq k$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Ответ. Все нецелые положительные числа.

434. Ясно, что $2x = m$, где m — любое целое положительное число *). Таким образом, $x = \frac{m}{2}$.

Ответ. $\frac{m}{2}$, где $m = 1, 2, 3, \ldots$

435. Функция $\operatorname{ctg} \pi x$ определена при $\pi x \neq \pi k$, т. е. $x \neq k$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Функция $\arccos(2^x)$ определена при $-1 \leqslant 2^x \leqslant 1$. Неравенство $2^x \geqslant -1$ имеет место при любом x, а неравенство $2^x \leqslant 1$ при $x \leqslant 0$.

Ответ. Все нецелые отрицательные числа.

436. Функция $\sqrt{x}$ определена при $x \geqslant 0$. Должно быть $\sin(\sqrt{x}) \geqslant 0$, откуда $2\pi k \leqslant \sqrt{x} \leqslant \pi(2k+1)$, где $k = 0, +1, +2, \ldots$, или $4\pi^2 k^2 \leqslant x \leqslant \pi^2(2k+1)^2$.

---

*) Если учесть, что, по определению, $0! = 1$, то m может быть равно и нулю.

Ответ. Промежутки $4\pi^2k^2 \leqslant x \leqslant \pi^2(2k+1)^2$, где $k=0, +1, +2, +3, \ldots$

437. Должно быть $\log_3 \log_4 x > 0$, поэтому $\log_4 x > 1$, откуда $x > 4$.

438. Должно быть $\lg \operatorname{tg} x \geqslant 0$, откуда $\operatorname{tg} x \geqslant 1$. Отсюда $\pi k + \frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi k$.

Ответ. Промежутки $\frac{\pi}{4} + \pi k \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

439. Функция $\lg x$ определена при

$$x > 0. \tag{1}$$

Та кже должно быть $\cos(\lg x) > 0$, откуда $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < \lg x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, или

$$10^{-\frac{\pi}{2}+2\pi k} < x < 10^{\frac{\pi}{2}+2\pi k}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что областью определения функции являются интервалы

$$10^{-\frac{\pi}{2}+2\pi k} < x < 10^{\frac{\pi}{2}+2\pi k}, \text{ где } k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

440. Должно быть $-1 \leqslant \lg \frac{x}{10} \leqslant 1$, откуда $0{,}1 \leqslant \frac{x}{10} \leqslant 10$. Следовательно, $1 \leqslant x \leqslant 100$.

441. Поскольку $|y|$ — неотрицательное число, то должно быть $1 - x^2 \geqslant 0$, или $(x-1)(x+1) \leqslant 0$, откуда $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

442. Должно иметь место $2 - x > 0$, т. е.

$$x < 2. \tag{1}$$

Поскольку $|y|$ — неотрицательное число, то $\lg(2-x) \geqslant 0$, откуда $2 - x \geqslant 1$, или

$$x \leqslant 1. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что функция определена в промежутке $-\infty < x \leqslant 1$.

443. Поскольку логарифмировать можно только положительные числа и так как $|4 - x^2| \geqslant 0$, то должно быть $4 - x^2 \neq 0$, или $x^2 \neq 4$, или $x \neq \pm 2$.

Таким образом, областью определения функции являются три промежутка: $(-\infty, -2)$, $(-2, +2)$, $(2, +\infty)$.

444. Должно быть $3^x - 3^{-x} > 0$, или $3^{2x} - 1 > 0$, откуда $2x > 0$, т. е. $x > 0$.

445. Должно быть $x - 3 \geqslant 0$ и $\sqrt{x-3} > 2$. Из первого неравенства имеем $x \geqslant 3$, а из второго $x > 7$. Следовательно, $x > 7$.

446. Должно быть $1 - \operatorname{tg} x > 0$, или $\operatorname{tg} x < 1$.

Ответ. Промежутки $-\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

447. Знаменатель $\sin x \neq 0$, следовательно,

$$\cos x \neq \pm 1. \tag{1}$$

Числитель определен при $\cos x > 0$ и

$$\lg \cos x \geqslant 0. \tag{2}$$

Но поскольку $\cos x \leqslant 1$, то

$$\lg \cos x \leqslant 0. \tag{3}$$

В силу (2) и (3) $\lg \cos x = 0$, откуда

$$\cos x = 1. \tag{4}$$

Таким образом, должны иметь место одновременно соотношения (1) и (4). Но поскольку они несовместны, то данная функция не определена ни при каких значениях x.

448. Основание логарифма должно быть положительным и отличным от единицы, т. е.

$$x > 0, \tag{1}$$

и

$$x \neq 1. \tag{2}$$

Далее, поскольку отрицательные числа и нуль не имеют логарифмов, то необходимо, чтобы имело место $\cos x > 0$, откуда

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi. \tag{3}$$

Если $k = 0$, то (3) имеет вид

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

Из (1), (2) и (4) получаем $0 < x < 1$, $1 < x < \frac{\pi}{2}$. Учитывая (1), в неравенстве (3) $k = 1, 2, 3, \ldots$ ($k = 0$ мы уже учли).

Ответ. Промежутки $0 < x < 1$, $1 < x < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$

§ 2. Нахождение области значений функций

449. По определению, функция $\arcsin x$ может принимать только значения, удовлетворяющие условию $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Ответ. Промежуток $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

450. Функция $y = \sin x \cos x$ может принимать лишь значения, удовлетворяющие условию $-0{,}5 \leqslant y \leqslant 0{,}5$.

Действительно, $y = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$, а $|\sin 2x| \leqslant 1$, т. е. $-1 \leqslant \sin 2x \leqslant 1$, следовательно, $-0{,}5 \leqslant 0{,}5 \sin 2x \leqslant 0{,}5$.

451. Разрешив данное уравнение относительно переменной x, получим $x=\frac{y+1}{2-y}$. Отсюда видно, что $y \neq 2$, т. е. $-\infty < y < 2$, $2 < y < +\infty$ *).

Ответ. Промежутки $(-\infty, 2)$, $(2, +\infty)$.

452. Разрешив данное уравнение относительно x, получим, что $x=\frac{y \pm \sqrt{y^2-4}}{2}$, откуда легко усмотреть, что должно иметь место неравенство $y^2-4 \geqslant 0$, т. е. $y \leqslant -2$ или $y \geqslant 2$.

Ответ. Промежутки $(-\infty, -2]$, $[2, +\infty)$.

453. После преобразований данное уравнение принимает вид

$$(y-1)x^2+2x+y-1=0. \qquad (1)$$

Если $y=1$, то из равенства (1) следует, что $2x=0$, т. е. $x=0$. Если же $y \neq 1$, то, разрешив (1) относительно x, получим

$$x=\frac{-1 \pm \sqrt{1-(y-1)^2}}{y-1}.$$

Отсюда следует, что должны иметь место соотношения $(y-1)^2 \leqslant 1$ и $y \neq 1$. Из этих соотношений имеем $0 \leqslant y < 1$ или $1 < y \leqslant 2$. Так как выше мы установили, что y может быть равен 1, то получим область значений данной функции: $0 \leqslant y \leqslant 2$. Эту задачу можно решить иначе. Имеем $y=1-\frac{2x}{x^2+1}$. Так как $-1 \leqslant \frac{2x}{x^2+1} \leqslant 1$, то ясно, что $0 \leqslant y \leqslant 2$.

Ответ. Промежуток $[0, 2]$.

454. Если $y=0$, то $x=0$. Теперь, считая, что $y \neq 0$, представим данную функциональную зависимость в виде $yx^2-x+y=0$. Решая это уравнение относительно x, получаем: $x=\frac{1 \pm \sqrt{1-4y^2}}{2y}$. Область изменения данной функции определяется неравенством $1-4y^2 \geqslant 0$, откуда $-\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}$. Эту задачу можно решить иначе. Имеем $y=\frac{x}{1+x^2}=\frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2}$. Так как $\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \leqslant 1$, то $|y| \leqslant \frac{1}{2}$, т. е. $-\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}$.

Ответ. Промежуток $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

455. Представим данную функциональную зависимость в виде $x^2-2yx+4y-5=0$. Решая это уравнение относительно x, находим $x=y \pm \sqrt{y^2-4y+5}$. Область изменения исследуемой функции

*) В данной и в некоторых других задачах этого параграфа значение аргумента x, при котором функция принимает значение $y=y_0$ из найденной области значений функции, находится решением относительно x того уравнения, которое получится из формулы функциональной зависимости после замены функции y числом y_0.

определяется неравенством

$$y^2-4y+5\geqslant 0. \qquad (1)$$

Дискриминант левой части соотношения (1) — отрицательное число, а коэффициент при y^2 — положительное число. Поэтому $y^2-4y+5>0$ при любом действительном значении y, т. е. неравенство (1) имеет место при любом значении функции y.

Ответ. Промежуток $(-\infty, +\infty)$.

456. Функция $-x^2+x+2$ имеет максимум, равный $\frac{4(-1)\cdot 2-1^2}{-4}=\frac{9}{4}$. Следовательно, исследуемая функция имеет максимум $\frac{3}{2}$, т. е.

$$y\leqslant\frac{3}{2}. \qquad (1)$$

С другой стороны, поскольку радикал берется арифметический, то

$$y\geqslant 0. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что областью значений функции является промежуток $0\leqslant y\leqslant\frac{3}{2}$.

Ответ. Промежуток $0\leqslant y\leqslant\frac{3}{2}$.

457. Представим данную функциональную зависимость в виде

$$(y-1)x^2-(y+1)x+2(y-1)=0. \qquad (1)$$

Отсюда получаем $x=\frac{y+1\pm\sqrt{-7y^2+18y-7}}{2(y-1)}$. Ясно, что должно иметь место соотношение $7y^2-18y+7\leqslant 0$, или $\frac{9-4\sqrt{2}}{7}\leqslant y\leqslant\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$. Действия были произведены в предположении, что $y\neq 1$. Подставляя в (1) вместо y число 1, убеждаемся, что $x=0$. Следовательно, y может быть равен 1.

Ответ. Промежуток $\left[\frac{9-4\sqrt{2}}{7}, \frac{9+4\sqrt{2}}{7}\right]$.

458. Из равенства $y=\frac{1}{2^x-1}$ следует $2^x=\frac{y+1}{y}$. Поскольку $2^x>0$ при любом действительном x и пробегает все положительные значения, то $\frac{y+1}{y}>0$, откуда $y<-1$ или $y>0$. Для каждого значения y, удовлетворяющего одному из этих неравенств, находим соответствующее значение x из равенства $x=\log_2\frac{y+1}{y}$.

Ответ. Промежутки $(-\infty, -1)$ и $(0, +\infty)$.

459. Представим данную функциональную зависимость так:

$$y=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right),\quad y=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

Поскольку $-1\leqslant\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$, то $-\sqrt{2}\leqslant y\leqslant\sqrt{2}$.

Ответ. Промежуток $[-\sqrt{2},\ \sqrt{2}]$.

460. Функция $1-2\cos x$ принимает наибольшее значение, равное 3 (когда $\cos x=-1$). Следовательно, наибольшее значение исследуемой функции есть $\lg 3$.

Таким образом, областью значений функции является промежуток $-\infty< y\leqslant\lg 3$.

§ 3. Исследование функций на выпуклость и вогнутость

461. Пусть x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента. Тогда $y_1=f(x_1)=x_1^2$, $y_2=f(x_2)=x_2^2$, $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2$. Для исследования графика функции $y=x^2$ на выпуклость и вогнутость установим знак разности $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$. Имеем: $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{x_1^2+x_2^2}{2}-\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2=\frac{2x_1^2+2x_2^2-x_1^2-2x_1x_2-x_2^2}{4}=$
$=\frac{x_1^2-2x_1x_2+x_2^2}{4}=\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2>0$, так как $x_1\neq x_2$. Поскольку рассматриваемая разность положительна, то график данной функции вогнутый (рис. 8).

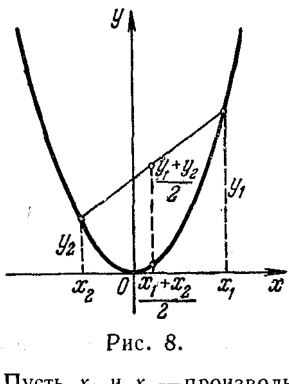

Рис. 8.

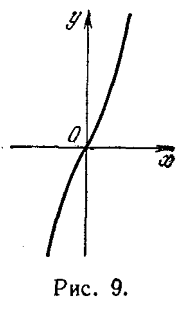

Рис. 9.

462. Пусть x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента, причем x_1 и x_2 имеют один и тот же знак. Тогда

$$f(x_1)=x_1^3+2x_1,\quad f(x_2)=x_2^3+2x_2,$$
$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{(x_1+x_2)^3+8(x_1+x_2)}{8}.$$

Рассмотрим разность

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{x_1^3+2x_1+x_2^3+2x_2}{2}-$$
$$-\frac{(x_1+x_2)^3+8(x_1+x_2)}{8}=\frac{4(x_1^3+x_2^3)-(x_1+x_2)^3}{8}=$$
$$=\frac{(x_1+x_2)(3x_1^2+3x_2^2-6x_1x_2)}{8}=\frac{3}{8}(x_1+x_2)(x_1-x_2)^2.$$

Если $x>0$, то $x_1+x_2>0$, и рассматриваемая разность положительна. Если же $x<0$, то $x_1+x_2<0$, и рассматриваемая разность отрицательна. Итак, при $x>0$ график вогнутый, а при $x<0$ — выпуклый (рис. 9).

463. Пусть x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента, причем x_1 и x_2 имеют один и тот же знак. Тогда

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=$$
$$=\frac{x_1^3-4x_1+x_2^3-4x_2}{2}-\frac{(x_1+x_2)^3-16(x_1+x_2)}{8}=$$
$$=\frac{4(x_1^3+x_2^3)-16(x_1+x_2)-(x_1+x_2)^3+16(x_1+x_2)}{8}=\frac{3}{8}(x_1+x_2)(x_1-x_2)^2.$$

Если $x>0$, то $x_1+x_2>0$, и рассматриваемая разность положительна, если же $x<0$, то рассматриваемая разность отрицательна.

Итак, при $x>0$ график вогнутый, а при $x<0$ — выпуклый (рис. 10).

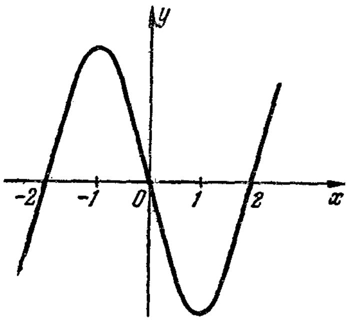

Рис. 10.

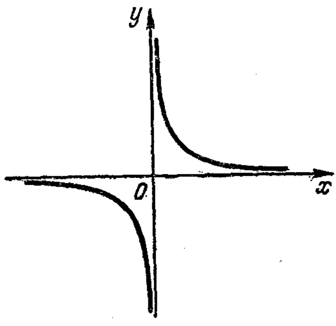

Рис. 11.

464. Пусть x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента x, отличные от нуля, причем x_1 и x_2 одного знака. Рассмотрим разность

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}{2}-\frac{2}{x_1+x_2}=\frac{x_1+x_2}{2x_1x_2}-\frac{2}{x_1+x_2}=$$
$$=\frac{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}{2x_1x_2(x_1+x_2)}=\frac{(x_1-x_2)^2}{2x_1x_2(x_1+x_2)}.$$

Если $x_1>0$ и $x_2>0$, то $x_1x_2>0$ и $x_1+x_2>0$, а поэтому рассматриваемая разность положительна. Если же $x_1<0$ и $x_2<0$, то $x_1x_2>0$, а $x_1+x_2<0$, и рассматриваемая разность отрицательна.

Итак, если $x>0$, то график вогнутый, а если $x<0$, то график выпуклый (рис. 11).

465. Пусть x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента, отличные от нуля и имеющие одинаковые знаки. Рассмотрим разность

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{x_2^2+x_1^2}{2x_1^2x_2^2}-\frac{4}{(x_1+x_2)^2}=$$

$$=\frac{x_1^4+2x_1^3x_2+2x_1x_2^3+x_2^4-6x_1^2x_2^2}{2x_1^2x_2^2(x_1+x_2)^2}=$$

$$=\frac{(x_1^4-2x_1^2x_2^2+x_2^4)+2x_1^3x_2+2x_1x_2^3-4x_1^2x_2^2}{2x_1^2x_2^2(x_1+x_2)^2}=$$

$$=\frac{(x_1^2-x_2^2)+2x_1x_2(x_1^2-2x_1x_2+x_2^2)}{2x_1^2x_2^2(x_1+x_2)^2}=\frac{(x_1^2-x_2^2)^2+2x_1x_2(x_1-x_2)^2}{2x_1^2x_2^2(x_1+x_2)^2}=$$

$$=\frac{(x_1-x_2)^2(x_1^2+4x_1x_2+x_2^2)}{2x_1^2x_2^2(x_1+x_2)^2}>0,$$

если $x_1>0$ и $x_2>0$, а также если $x_1<0$ и $x_2<0$.

Итак, график функции вогнут как при $x>0$, так и при $x<0$ (рис. 12).

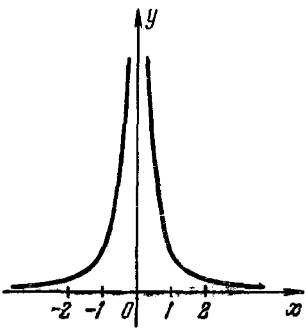

Рис. 12.

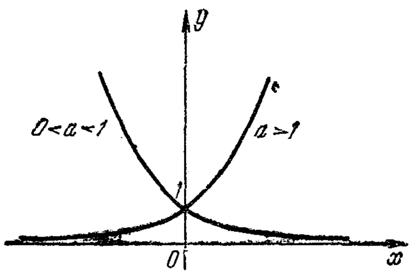

Рис. 13.

466. Пусть x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента x. Рассмотрим разность

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{a^{x_1}+a^{x_2}}{2}-a^{\frac{x_1+x_2}{2}}=\frac{a^{x_1}+a^{x_2}-2a^{\frac{x_1+x_2}{2}}}{2}=$$

$$=\frac{\left(a^{\frac{x_1}{2}}-a^{\frac{x_2}{2}}\right)^2}{2}>0.$$

Следовательно, график функции вогнутый (рис. 13).

467. Пусть x_1 и x_2 — произвольные (положительные) значения аргумента x. Тогда $\log_a x_1 + \log_a x_2 = \log_a x_1 x_2$, или

$$\frac{\log_a x_1 + \log_a x_2}{2} = \log_a \sqrt{x_1 x_2}. \qquad (1)$$

Известно, что $\sqrt{x_1 x_2} < \frac{x_1 + x_2}{2}$, если $x_1 \neq x_2$ и $x_1 > 0$, $x_2 > 0$.

Функция $\log_a x$ возрастает, если $a > 1$, и убывает, если $0 < a < 1$. Поэтому $\log_a \frac{x_1 + x_2}{2} > \log_a \sqrt{x_1 x_2}$, если $a > 1$, и $\log_a \frac{x_1 + x_2}{2} < \log_a \sqrt{x_1 x_2}$, если $0 < a < 1$.

Заменяя правую часть равенства (1) выражением $\log_a \frac{x_1 + x_2}{2}$, получаем $\frac{\log_a x_1 + \log_a x_2}{2} < \log_a \frac{x_1 + x_2}{2}$, если $a > 1$, и $\frac{\log_a x_1 + \log_a x_2}{2} > \log_a \frac{x_1 + x_2}{2}$, если $0 < a < 1$.

Итак, если $a > 1$, то график данной функции выпуклый, а если $0 < a < 1$ — вогнутый (рис. 14).

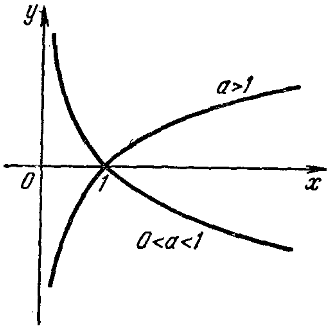

Рис. 14.

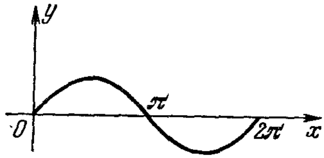

Рис. 15.

468. Пусть x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента x, причем оба принадлежат промежутку $(0, \pi)$ или промежутку $(\pi, 2\pi)$. Рассмотрим разность

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} - f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{\sin x_1 + \sin x_2}{2} - \sin \frac{x_1 + x_2}{2} =$$

$$= \sin \frac{x_1 + x_2}{2} \cos \frac{x_1 - x_2}{2} - \sin \frac{x_1 + x_2}{2} = \sin \frac{x_1 + x_2}{2} \left(\cos \frac{x_1 - x_2}{2} - 1\right).$$

Поскольку $|\cos\alpha| \leqslant 1$, то выражение $\cos \frac{x_1 - x_2}{2} - 1$ или отрицательно, или равно нулю. Так как $0 < x < 2\pi$, то $\cos \frac{x_1 - x_2}{2} - 1 < 0$.

Если $0 < x_1 < \pi$, $0 < x_2 < \pi$, то и $0 < \frac{x_1+x_2}{2} < \pi$, а следовательно, $\sin\frac{x_1+x_2}{2} > 0$. Итак, если x_1 и x_2 принадлежат промежутку $(0, \pi)$, то произведение $\sin\frac{x_1+x_2}{2}\left(\cos\frac{x_1-x_2}{2}-1\right) < 0$, т. е. рассматриваемая разность отрицательна. Таким образом, в интервале $(0, \pi)$ график функции выпуклый (рис. 15).

Если $\pi < x_1 < 2\pi$, $\pi < x_2 < 2\pi$, то и $\pi < \frac{x_1+x_2}{2} < 2\pi$, следовательно, $\sin\frac{x_1+x_2}{2} < 0$ и произведение $\sin\frac{x_1+x_2}{2}\left(\cos\frac{x_1-x_2}{2}-1\right) > 0$, т. е. рассматриваемая разность положительна. Таким образом, в интервале $(\pi, 2\pi)$ график функции вогнутый (рис. 15).

§ 4. Задачи на составление неравенств

469. Пусть числитель дроби p (p — натуральное), тогда, согласно условию, ее знаменатель будет равен p^2-1. Таким образом, искомая дробь $\frac{p}{p^2-1}$. По условию задачи имеем систему неравенств:

$$\frac{p+2}{p^2+1} > \frac{1}{3}, \quad 0 < \frac{p-3}{p^2-4} < \frac{1}{10}. \tag{1}$$

Неравенство $\frac{p+2}{p^2+1} > \frac{1}{3}$ равносильно неравенству $p^2-3p-5 < 0$, откуда

$$\frac{3-\sqrt{29}}{2} < p < \frac{3+\sqrt{29}}{2}. \tag{2}$$

Но так как должно быть $p > 0$, то имеем

$$0 < p < \frac{3+\sqrt{29}}{2}; \tag{3}$$

поскольку $4 < \frac{3+\sqrt{29}}{2} < 4{,}5$, то из (3) следует, что p, как целое число, может быть равным или 1, или 2, или 3, или 4. Подставляя эти значения p во второе неравенство системы (1), убеждаемся, что $p=4$ удовлетворяет ему, а $p=1$, $p=2$, $p=3$ не удовлетворяют. Итак, искомая дробь $\frac{p}{p^2-1}=\frac{4}{4^2-1}=\frac{4}{15}$.

470. Если скорость первого автомобиля x *км/час*, то скорость второго $(x-10)$ *км/час*. Отсюда ясно, что

$$x > 10 \text{ км/час}. \tag{1}$$

Первый автомобиль проходит путь в 100 *км* вместе с остановкой за $\left(\frac{100}{x}+\frac{5}{6}\right)$ часов, а второй за $\frac{100}{x-10}$ часов. Согласно условию задачи должно иметь место неравенство $\frac{100}{x}+\frac{5}{6}\leqslant\frac{100}{x-10}$, или $x^2-10x-1200\leqslant 0$, или $(x+30)(x-40)\leqslant 0$, откуда $-30\leqslant x\leqslant 40$. Учитывая (1), имеем окончательно $10 < x\leqslant 40$.

471. Пусть скорость путешественника x *км/день*; тогда согласно условию задачи имеем систему неравенств

$$\begin{cases} (x+20)\,8 < 1000, \\ \left(x-15\frac{2}{3}\right)12 > 1000. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $99 < x < 105$.

Ответ. 99 *км/день* $< x <$ 105 *км/день*.

472. Пусть скорость точки x *м/сек*; тогда она тратит на прохождение пути в 630 *км* $\frac{630}{x}$ секунд, а при скорости в $(x+3)$ *м/сек* $\frac{630}{x+3}$ секунд. Согласно условию задачи должна иметь место система неравенств $\frac{630}{x}-280\leqslant\frac{630}{x+3}\leqslant\frac{630}{x}-1$. После тождественных преобразований получаем систему неравенств

$$x^2+3x-1890\leqslant 0, \qquad (1)$$
$$4x^2+12x-27\geqslant 0. \qquad (2)$$

Учитывая, что $x > 0$, из неравенства (1) получаем $0 < x\leqslant 42$, а из неравенства (2) находим $x\geqslant\frac{3}{2}$. Поскольку неравенства (1) и (2) составляют систему, то $\frac{3}{2}$ *м/сек* $\leqslant x\leqslant 42$ *м/сек*.

473. Введем обозначения: x *км/час* — собственная скорость катеров, y *км/час* — скорость течения «быстрой» реки, z *км/час* — скорость течения «медленной» реки, S *км* — расстояние, пройденное каждым катером в одном направлении, t_1 *час* — время движения, затраченное катером на весь путь по реке с быстрым течением, t_2 *час* — время движения, затраченное катером на весь путь по реке с медленным течением. Имеем

$$t_1=\frac{S}{x+y}+\frac{S}{x-y}=\frac{2Sx}{x^2-y^2},$$
$$t_2=\frac{S}{x+z}+\frac{S}{x-z}=\frac{2Sx}{x^2-z^2}.$$

Поскольку $y > z$, то $x^2-y^2 < x^2-z^2$, а следовательно, $\frac{2Sx}{x^2-y^2} > \frac{2Sx}{x^2-z^2}$, т. е. $t_1 > t_2$.

Ответ. Время движения по реке с быстрым течением больше, чем время движения по реке с медленным течением.

474. Через x единиц времени первое тело будет находиться на расстоянии $|a-xv|$, а второе тело — на расстоянии $|b-xv_1|$ от точки O (рис. 16). На основании теоремы Пифагора расстояние между телами через x единиц времени равно

$$d=\sqrt{(a-xv)^2+(b-xv_1)^2}. \qquad (1)$$

Так как d принимает наименьшее значение одновременно с подкоренным выражением, то задача сводится к нахождению наименьшего значения выражения $(a-xv)^2+(b-xv_1)^2$, или выражения $(v^2+v_1^2)x^2-2(av+bv_1)x+(a^2+b^2)$. Так как $v_1^2+v^2>0$, то последнее

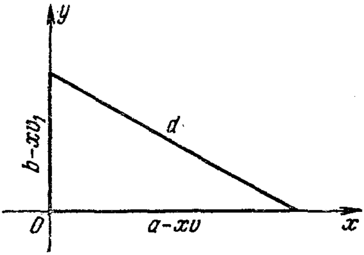

Рис. 16.

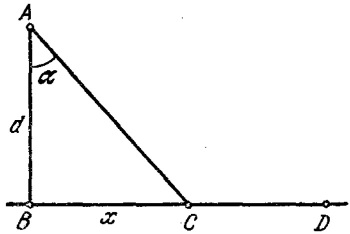

Рис. 17.

выражение имеет минимум при $x=\dfrac{av+bv_1}{v^2+v_1^2}$. Подставляя это значение x в (1), получим

$$d_{\min}=\sqrt{\frac{(bv-av_1)^2}{v^2+v_1^2}}=\frac{|bv-av_1|}{\sqrt{v^2+v_1^2}}.$$

475. Пусть C — искомая точка (рис. 17), $AB=d$, $BC=x$, $\angle BAC=\alpha$.

На преодоление пути AC по полю затрачивается $\dfrac{AC}{v}$ часов, а на прохождение пути CD по дороге — $\dfrac{CD}{u}$ часов. Так как $AC=\dfrac{AB}{\cos\alpha}=\dfrac{d}{\cos\alpha}$, $CD=BD-BC$, где $BC=AB\operatorname{tg}\alpha=d\operatorname{tg}\alpha$, то на весь путь от A до D затрачивается время $t=\dfrac{d}{v\cos\alpha}+\dfrac{BD-d\operatorname{tg}\alpha}{u}=\dfrac{d}{v\cos\alpha}+\dfrac{BD}{u}-\dfrac{d\operatorname{tg}\alpha}{u}=\dfrac{d}{uv}\,\dfrac{u-v\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{BD}{u}$. Так как $\dfrac{d}{uv}$ и $\dfrac{BD}{u}$ — постоянные величины, то t достигает минимума при том же α, что и выражение $\dfrac{u-v\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Поскольку $u>v\sin\alpha$, то $\dfrac{u-v\sin\alpha}{\cos\alpha}>0$ а потому $\dfrac{u-v\sin\alpha}{\cos\alpha}$ и $\left(\dfrac{u-v\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2$ достигают минимума при одном и том же α. Имеем $\left(\dfrac{u-v\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2=\dfrac{u^2+v^2\sin^2\alpha-2uv\sin\alpha}{\cos^2\alpha}=$

$$=\frac{(v-u\sin\alpha)^2+(u^2-v^2)(1-\sin^2\alpha)}{\cos^2\alpha}=\frac{(v-u\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}+(u^2-v^2),$$

которое принимает наименьшее значение при $v-u\sin\alpha=0$, откуда $\sin\alpha=\frac{v}{u}$.

Далее, $\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{v^2}{u^2}}=\frac{\sqrt{u^2-v^2}}{u}$; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{v}{\sqrt{u^2-v^2}}$. Если $BD\leqslant x=\frac{dv}{\sqrt{u^2-v^2}}$, то надо двигаться прямо по полю из точки A в точку D.

476. Положим, что скорость лодки в стоячей воде равна x *км/час*, тогда ее скорость по течению равна $(x+v)$ *км/час*, а против течения $(x-v)$ *км/час*. Время прохождения a *км* по течению равно $\frac{a}{x+v}$ часов, а на прохождение b *км* против течения затрачивается $\frac{b}{x-v}$ часов. Согласно условию задачи должно иметь место неравенство

$$\frac{a}{x+v}+\frac{b}{x-v}\leqslant t. \tag{1}$$

Так как $x+v>0$ и $x-v>0$, то, умножив обе части неравенства (1) на $(x+v)(x-v)$, получим равносильное ему неравенство $a(x-v)+b(x+v)\leqslant t(x^2-v^2)$, или

$$tx^2-(a+b)x+v(a-b)-tv^2\geqslant 0. \tag{2}$$

Поскольку $t>0$ и $-tv^2<0$, то корни левой части неравенства действительны и имеют противоположные знаки. Положительный корень левой части (2) равен

$$\frac{a+b+\sqrt{(a+b)^2-4vt(a-b)+4t^2v^2}}{2t}.$$

Так как $t>0$, то неравенство (2) имеет место при x, большем большего (положительного) корня или при x, меньшем меньшего корня (отрицательного). Но поскольку x должен быть положительным, то

$$x\geqslant\frac{a+b+\sqrt{(a+b)^2-4vt(a-b)+4t^2v^2}}{2t}\ \text{км/час}.$$

477. Пусть скорость велосипедиста при движении от A до B и от B до остановки равна x *км/час*. Тогда он затратил времени на движение от A до B

$$\frac{60}{x}\ \text{часов}, \tag{1}$$

а на движение от B до A

$$\left(1+\frac{1}{3}+\frac{60-x}{x+4}\right)\ \text{часов}. \tag{2}$$

Согласно условию выражение (2) должно быть не более, чем выражение (1), т. е. должно иметь место неравенство

$$1+\frac{1}{3}+\frac{60-x}{x+4}\leqslant\frac{60}{x},$$

т. е.

$$-36 \leqslant x \leqslant 20. \qquad (3)$$

Но так как $x > 0$, то, учитывая (3), имеем $0 < x \leqslant 20$ *км/час*.

478. Пусть длины плеч a и b, x — действительный вес при первом взвешивании, y — при втором взвешивании. При первом взвешивании имеем

$$x \cdot a = 1 \cdot b, \qquad (1)$$

а при втором

$$y \cdot b = 1 \cdot a. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) находим, что $y = \frac{1}{x}$.

Таким образом, вес всего товара равен $x + \frac{1}{x}$.

Но так как $x \neq 1$ (плечи разные), то $x + \frac{1}{x} > 2$, т. е. отпускалось товара больше двух килограммов. Заметим, что если бы неточность весов была вызвана разным весом чашек, то тогда было бы отпущено ровно два килограмма.

479. Обозначим расстояние от A до B через a *км*. Если первый турист затратил времени t часов, то $\frac{t}{2} v_1 + \frac{t}{2} v_2 = a$, откуда время движения первого туриста $t = \frac{2a}{v_1 + v_2}$. Время движения второго туриста $T = \frac{a}{2v_1} + \frac{a}{2v_2} = \frac{a(v_1 + v_2)}{2v_1 v_2}$. Рассмотрим разность $T - t$. Имеем $T - t = \frac{a(v_1+v_2)}{2v_1v_2} - \frac{2a}{v_1+v_2} = \frac{a[(v_1+v_2)^2 - 4v_1v_2]}{2v_1v_2(v_1+v_2)} = \frac{a(v_1 - v_2)^2}{2v_1v_2(v_1+v_2)}$.

Так как $v_1 \neq v_2$, то $T - t > 0$, т. е. $T > t$. Следовательно, первый турист прибыл в B раньше второго.

К тому же результату можно прийти исходя из следующих соображений. Пусть $v_1 > v_2$. Со скоростью v_1 второй турист прошел половину пути, а первый турист — больше половины пути; поэтому первый затратил меньше времени, чем второй, так как в момент достижения каждым из них середины пути второй замедлил скорость движения, а первый продолжал еще некоторое время идти с прежней (большей) скоростью, а поэтому обогнал второго.

Ответ. Первый турист пришел в B раньше второго.

480. Если поезд идет со скоростью v *км/час* ($v > 20$) вместо 20 *км/час*, то увеличение прибыли составляет $p(v-20)$, а увеличение издержек $q(v-20)^2$, где p и q — постоянные. Следовательно, прибыль равна

$$p(v-20) - q(v-20)^2. \qquad (1)$$

Согласно условию задачи при скорости в 40 *км/час* прибыль равна нулю, т. е. $p(40-20) - q(40-20)^2 = 0$, откуда $p = 20q$. Подставляя в (1) вместо p число $20q$, получим, что прибыль равна $20q(v-20) - q(v-20)^2$, или $q[20v - 400 - v^2 + 40v - 400]$, или $q[100 - (v^2 - 60v + 900)]$, или $q[100 - (v-30)^2]$. Отсюда видно, что наибольшая прибыль при $v = 30$ *км/час*.

481. Предположим, что пароход движется со скоростью v *км/час*, следовательно, движение продолжалось $\frac{2000}{v}$ часов. Согласно условию задачи количество угля, потребляемого пароходом в час, равно kv^3, где k — коэффициент пропорциональности. Известно, что когда скорость v равна 15 *км/час*, то угля расходуется 1,5 тонны в час, поэтому $k\cdot 15^3=1{,}5$, откуда коэффициент пропорциональности $k=$ $=\frac{1}{2250}$. Следовательно, $\frac{v^3}{2250}$ тонн угля расходуется в час, а стоимость этого угля в рублях равна $\frac{18v^3}{2250}$, поэтому вся стоимость прохождения пути в 2000 *км* равна

$$\frac{2000}{v}\left(\frac{18v^3}{2250}+16\right)=16\left(v^2+\frac{2000}{v}\right).$$

Таким образом, нам надо найти минимум функции

$$y=16\left(v^2+\frac{2000}{v}\right),\ \text{ или } y=16\left[\frac{(v-10)^2(v+20)}{v}+300\right].$$

Отсюда видно, что наименьшее значение y будет при $v=10$. Итак, $y_{\min}=4800$ рублей.

482. Пусть секундная пропускная способность большей трубы x, тогда при совместном действии обеих труб при закрытом кране за 1 *сек* поступает в бассейн $(x+1)$ *м*^{3} воды, а при действии только большей трубы при открытом кране $(x-1)$ *м*^{3} воды. Согласно условию задачи имеем неравенство

$$3\leqslant\frac{10}{x+1}+\frac{6}{x-1}\leqslant 4. \qquad (1)$$

Ясно, что

$$x>1, \qquad (2)$$

так как в противном случае при действии только большей трубы при открытом кране в бассейне не увеличивалось бы количество воды, а также потому, что эта труба большая. Таким образом, $(x-1)(x+1)>0$. Умножив неравенства (1) на $(x-1)(x+1)$, получим неравенство, равносильное ему: $3(x^2-1)\leqslant 16x-4\leqslant 4(x^2-1)$. Итак, нужно, чтобы одновременно выполнялись два неравенства:

$$3x^2-16x+1\leqslant 0 \qquad (3)$$

и

$$4x^2-16x\geqslant 0. \qquad (4)$$

Из (3) находим, что

$$\frac{8-\sqrt{61}}{3}\leqslant x\leqslant\frac{8+\sqrt{61}}{3}, \qquad (5)$$

а из (4) получаем

$$x\leqslant 0 \quad \text{или} \quad x\geqslant 4. \qquad (6)$$

Из неравенств (2), (5) и (6) получаем окончательно $4\leqslant x\leqslant$ $\leqslant\frac{8+\sqrt{61}}{3}\approx 5{,}3$.

483. Положим, что до введения пошлин за год было продано a тонн местного угля и b тонн иностранного. Следовательно, до введения пошлин выручка составляла $p(a+b)$ денежных единиц. Число тонн угля, ввозимого в течение года, после наложения пошлин равно

$$\frac{p(a+b)}{p+\frac{d}{n}}-a=\frac{npb-ad}{np+d}.$$

Поскольку за каждую тонну ввозимого угля власти N получали по d денежных единиц, то весь их доход за год составляет $x=\frac{npb-ad}{np+d}\cdot d$ (ден. ед). Перепишем последнее равенство в виде $ad^2-(npb-x)d+npx=0$, откуда

$$d=\frac{npb-x\pm\sqrt{(npb-x)^2-4anpx}}{2a}. \qquad (1)$$

Чтобы d было вещественным, необходимо, чтобы $(npb-x)^2-4anpx\geqslant 0$. Следовательно, наибольшее значение x получится из условия

$$4anpx=(npb-x)^2. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что в этом случае

$$d=\frac{npb-x}{2a}. \qquad (3)$$

Исключив из (2) и (3) x, получим $d=np\left(\sqrt{1+\frac{b}{a}}-1\right)$.

484. Положим, что через t *сек* после начала движения вторая точка, которая движется с некоторой скоростью v, догнала первую.

Следовательно, путь второй точки равен vt *м*. Согласно условию задачи должно иметь место неравенство

$$vt\leqslant 10. \qquad (1)$$

За это же время t первая точка проходит тот же путь vt. Как известно из физики $\left(s=v_0t+\frac{at^2}{2}\right)$, этот путь при $v_0=3$ и $a=2$ равен

$$vt=3t+\frac{2t^2}{2}. \qquad (2)$$

Из (2) находим, что $t=v-3$. Подставляя это значение t в (1), получаем $v(v-3)\leqslant 10$, или

$$v^2-3v-10\leqslant 0. \qquad (3)$$

Корнями левой части неравенства (3) являются 5 и -2, поэтому

$$-2\leqslant v\leqslant 5. \qquad (4)$$

Но для того, чтобы вторая точка могла бы вначале перегнать первую, ей надо иметь скорость бо́льшую, чем начальная скорость первой, т. е. больше 3 *м/сек*. Таким образом, учитывая (4), имеем $3<v\leqslant 5$.

485. За время t (часов) автомашина пройдет путь $S_A=40t$ (*км*), а мотоцикл пройдет путь $S_B=16t^2$ (*км*). Через t часов после начала движения расстояние между автомашиной и мотоциклом будет равно $d=|S_B+9-S_A|$, т. е. $d=|16t^2-40t+9|=|(4t-5)^2-16|$. При возрастании t от $t=0$ до $t=\frac{1}{4}$ выражение $(4t-5)^2$ убывает от 25 до 16, а d убывает от 9 до 0. При возрастании t от $t=\frac{1}{4}$ до $t=1\frac{1}{4}$ выражение $(4t-5)^2$ убывает от 16 до 0, а d возрастает от 0 до 16. При возрастании t от $t=1\frac{1}{4}$ до $t=2$ выражение $(4t-5)^2$ возрастает от 0 до 9, а d убывает от 16 до 7. Следовательно, через $1\frac{1}{4}$ часа после начала движения автомобиль и мотоцикл будут находиться на расстоянии 16 *км* друг от друга, что превышает расстояние между ними в любой другой момент в течение первых двух часов движения.

486. Пусть вес бриллианта P каратов. Разделим его на n частей, веса которых $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Таким образом,

$$P=p_1+p_2+\ldots+p_n. \tag{1}$$

Пусть стоимость бриллианта до разлома $C=kP^2$, где k — коэффициент пропорциональности, или (см. (1)) стоимость бриллианта до разлома $C=k(p_1+p_2+\ldots+p_n)^2$. Стоимость после разлома

$$C_1=kp_1^2+kp_2^2+\ldots+kp_n^2=k(p_1^2+p_2^2+\ldots+p_n^2). \tag{2}$$

Докажем, что $C>C_1$. Действительно, $C=k(p_1^2+p_2^2+\ldots+p_n^2)+$ $+2k(p_1p_2+p_1p_3+p_1p_4+\ldots+p_{n-1}p_n)>k(p_1^2+p_2^2+\ldots+p_n^2)=C_1$. Итак, мы доказали, что стоимость всех частей бриллианта меньше стоимости целого.

Далее, пусть

$$p_1=\frac{P}{n}+x_1,\quad p_2=\frac{P}{n}+x_2,\quad \ldots,\quad p_n=\frac{P}{n}+x_n, \tag{3}$$

где

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=0, \tag{4}$$

так как $P=p_1+p_2+\ldots+p_n=n\frac{P}{n}+(x_1+x_2+\ldots+x_n)$.

Из (2) и (3) следует, что стоимость после разлома равна

$$k\left[\left(\frac{P}{n}+x_1\right)^2+\left(\frac{P}{n}+x_2\right)^2+\ldots+\left(\frac{P}{n}+x_n\right)^2\right],$$

или

$$k\left[n\frac{P^2}{n^2}+2(x_1+x_2+\ldots+x_n)\frac{P}{n}+(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)\right],$$

или, учитывая (4),

$$k\left[\frac{P^2}{n}+(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)\right].$$

Отсюда заключаем, что наименьшая стоимость всех частей бриллианта будет, когда $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=0$, а последнее возможно лишь тогда, когда $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$, т. е. когда $p_1=p_2=\ldots=p_n$, что и требовалось доказать.

487. При каждой операции вливания в сосуд поступало $\frac{ap}{100}$ *л* спирта, а после каждой операции выливания в сосуде сохранялось $\frac{A}{A+a}$ того количества спирта, которое было в сосуде в момент, предшествующий этому выливанию.

Пусть $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ — количество спирта в сосуде соответственно после 1-го, 2-го, 3-го, ..., n-го выливания; тогда

$$x_1=\frac{ap}{100}\cdot\frac{A}{A+a},$$

$$x_2=\left(\frac{ap}{100}\cdot\frac{A}{A+a}+\frac{ap}{100}\right)\cdot\frac{A}{A+a},$$

$$x_3=\left[\frac{ap}{100}\cdot\left(\frac{A}{A+a}\right)^2+\frac{ap}{100}\cdot\frac{A}{A+a}+\frac{ap}{100}\right]\cdot\frac{A}{A+a},$$

. . . .

$$x_n=\frac{ap}{100}\left[\left(\frac{A}{A+a}\right)^{n-1}+\left(\frac{A}{A+a}\right)^{n-2}+\ldots+\frac{A}{A+a}+1\right]\frac{A}{A+a}=$$

$$=\frac{ap}{100}\cdot\frac{1-\left(\frac{A}{A+a}\right)^n}{1-\frac{A}{A+a}}\cdot\frac{A}{A+a}=\frac{Aap}{100}\cdot\frac{1-\left(\frac{A}{A+a}\right)^n}{a}=$$

$$=\frac{Ap}{100}\left[1-\left(\frac{A}{A+a}\right)^n\right].$$

Согласно условию задачи должно быть $x_n\geqslant\frac{Aq}{100}$, следовательно, $\frac{Ap}{100}\left[1-\left(\frac{A}{A+a}\right)^n\right]\geqslant\frac{Aq}{100}$, откуда $1-\left(\frac{A}{A+a}\right)^n\geqslant\frac{q}{p}$, или $\left(\frac{A}{A+a}\right)^n\leqslant1-\frac{q}{p}$, т. е. $\left(\frac{A+a}{a}\right)^n\geqslant\frac{p}{p-q}$.

Ясно, что задача имеет решение лишь в том случае, если $p>q$.

Далее, $n\lg\left(\frac{A+a}{a}\right)\geqslant\lg\frac{p}{p-q}$, откуда $n\geqslant\frac{\lg\frac{p}{p-q}}{\lg\frac{A+a}{a}}$.

Ответ. $n\geqslant\frac{\lg\frac{p}{p-q}}{\lg\frac{A+a}{a}}$.

488. Пусть ширина клумбы x *м*, а длина y *м*; тогда длина участка, т. е. клумбы вместе с дорожками, $(y+6)$ *м*, а ширина

$(x+4)$ *м*. Площадь дорожек $S=(x+4)(y+6)-216=xy+6x+$ $+4y-192$. Но так как $xy=216$, $y=\frac{216}{x}$, то

$$S=216+6x+\frac{864}{x}-192;\quad S=24+72\left(\frac{x}{12}+\frac{12}{x}\right).$$

Функция S достигает минимума при том же x, что и функция $Z=\frac{x}{12}+\frac{12}{x}$. Но при $x>0$ выполняется неравенство $\frac{x}{12}+\frac{12}{x}\geqslant 2$ (как сумма двух взаимно обратных положительных чисел). Функция Z достигает минимума $Z_{\min}=2$ при $x=12$. Таким образом, площадь дорожек наименьшая, если ширина клумбы 12 *м*, а длина 18 *м*.

489. Пусть высота прямоугольной части окна h, сторона треугольной части a, а периметр P; тогда $2h+3a=P$, откуда

$$h=\frac{P-3a}{2}. \tag{1}$$

Площадь окна $S=ah+\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Учитывая (1), имеем

$$S=\frac{a}{4}[2P-(6-\sqrt{3})a]. \tag{2}$$

Выражение (2) достигает максимума при том же значении a, что и выражение

$$(6-\sqrt{3})a[2P-(6-\sqrt{3})a]. \tag{3}$$

Поскольку $(6-\sqrt{3})a+[2P-(6-\sqrt{3})a]=2P$ — постоянная величина, то выражение (3) имеет максимум, если $(6-\sqrt{3})a=2P-$ $-(6-\sqrt{3})a$, откуда

$$a=\frac{P}{6-\sqrt{3}}. \tag{4}$$

Подставляя значение a из (4) в (1), получим

$$h=\frac{P(3-\sqrt{3})}{2(6-\sqrt{3})}. \tag{5}$$

Поделив почленно (5) на (4), получаем $\frac{h}{a}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$. К этому же результату можно прийти, заметив, что (2) есть квадратная функция аргумента a; ее максимум достигается при

$$a=\frac{-\frac{P}{2}}{2\left(-\frac{6-\sqrt{3}}{4}\right)}=\frac{P}{6-\sqrt{3}}.$$

Ответ. $\frac{1}{2}(3-\sqrt{3})$.

490. Пусть высота прямоугольной части окна h, а ширина a, следовательно, радиус закругленной части $\frac{a}{2}$. Согласно условию задачи имеем

$$2h+a+\frac{\pi a}{2}=P. \tag{1}$$

Площадь окна $S=ah+\frac{\pi a^2}{8}$.

Учитывая (1), получаем

$$S=\frac{Pa}{2}-\frac{a^2}{2}-\frac{\pi a^2}{8}, \quad \text{или} \quad S=-\frac{4+\pi}{8}a^2+\frac{P}{2}a.$$

Квадратная функция S достигает максимума при

$$a=\frac{-\frac{P}{2}}{2\left(-\frac{4+\pi}{8}\right)}=\frac{2P}{4+\pi}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) находим: $h=\frac{P}{4+\pi}$.

Ответ. Ширина $\frac{2P}{4+\pi}$, а высота $\frac{P}{4+\pi}$.

ГЛАВА IV

НЕРАВЕНСТВА В ГЕОМЕТРИИ

§ 1. Неравенства в планиметрии

491. Из треугольника DMC (рис. 18) имеем $DC-DM < CM$, но так как $DC=DB$, то $DB-DM < CM$. Поскольку $CM=AC-AM$, то $DB-DM < AC-AM$, или $DB-DM < AB-AM$, что и требовалось доказать.

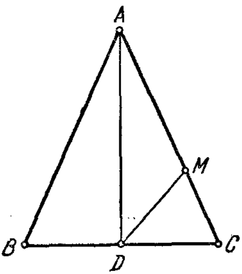

Рис. 18.

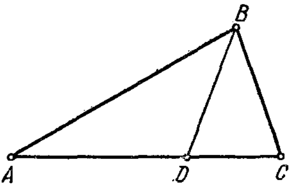

Рис. 19.

492. Требуется доказать (рис. 19), что $AB+BC-AC < 2BD$. Имеем $AB < AD+BD$, $BC < DC+BD$. Складывая эти два неравенства почленно, получаем: $AB+BC<AC+2BD$, откуда $AB+BC-AC < 2BD$, что и требовалось доказать.

493. Из рис. 20 видно, что $BF+FC > BC$, или $BF+FC+DE > BC+AC$, или $BF+DF > AC+BC$, что и требовалось доказать.

494. Пусть O — произвольная точка, взятая внутри треугольника ABC. Из рис. 21 видно, что

$$\left.\begin{aligned} AO+BO &> AB,\\ AO+CO &> AC,\\ BO+CO &> BC. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Складывая неравенства (1) почленно, получаем

$$AB+AC+BC<2(AO+BO+CO). \tag{2}$$

Далее,

$$\left.\begin{aligned} AB+BC&>AO+CO,\\ BC+AC&>BO+AO,\\ AB+AC&>BO+CO.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Складывая почленно неравенства (3), получим $2(AB+AC+BC)>$ $>2(AO+BO+CO)$, или

$$AB+AC+BC>AO+BO+CO. \tag{4}$$

Из (2) и (4) следует утверждение задачи.

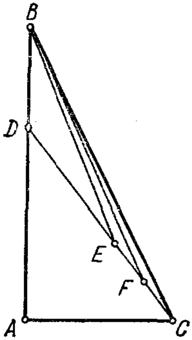

Рис. 20.

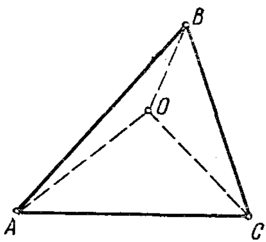

Рис. 21.

495. П е р в о е   р е ш е н и е. Если прямоугольные треугольники равны, то теорема очевидна. Если же треугольники не равны, то, построив их на общей гипотенузе AB и описав около треугольников ACB и AC_1B общую окружность (рис. 22), замечаем, что $AC>BC_1$, так как AC стягивает дугу, не меньшую четверти окружности, BC_1 стягивает дугу меньше четверти окружности и $AC<AC_1$, так как AC стягивает дугу меньшую, чем дуга, стягиваемая AC_1.

В т о р о е   р е ш е н и е. Пусть a, b — катеты одного прямоугольного треугольника и c — гипотенуза его, причем $a\leqslant b$. Имеем

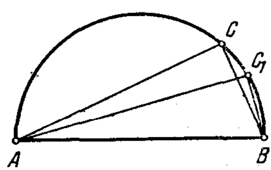

Рис. 22.

$$a^2+b^2=c^2. \tag{1}$$

Допустим, что существует другой прямоугольный треугольник с гипотенузой c и катетами a_1 и b_1, где $a_1\leqslant b_1$, $a_1<a$, $b_1<b$. Имеем

$$a_1^2+b_1^2=c^2. \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) следует, что $a^2+b^2=a_1^2+b_1^2$ или $(a^2-a_1^2)+$ $+(b^2-b_1^2)=0$, что невозможно, так как $a^2-a_1^2>0$ и $b^2-b_1^2>0$.

Поэтому прямоугольный треугольник с гипотенузой c и катетами a_1 и b_1 не существует. Тем более невозможно существование такого прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна c, а катеты a_1 и b_1, причем $a_1<a\leqslant b$ и $b_1\leqslant a=b$.

496. Пусть пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$ выпуклый. Легко заметить, что при проведении диагоналей выпуклого пятиугольника образуются пять выпуклых четырехугольников: $A_1A_2A_3A_4$, $A_1A_2A_4A_5$, $A_2A_3A_4A_5$, $A_1A_2A_3A_5$, $A_1A_3A_4A_5$. Сумма диагоналей выпуклого четырехугольника больше суммы двух его противоположных сторон (в чем читатель может легко убедиться), а поэтому имеем пять неравенств:

$$\left.\begin{aligned}
A_1A_3+A_2A_4 &> A_1A_2+A_3A_4,\\
A_1A_4+A_2A_5 &> A_1A_2+A_4A_5,\\
A_2A_4+A_3A_5 &> A_2A_3+A_4A_5,\\
A_1A_3+A_2A_5 &> A_2A_3+A_5A_1,\\
A_3A_5+A_4A_1 &> A_3A_4+A_5A_1.
\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Сложив почленно все пять неравенств (1) и сократив на два, получим $A_1A_3+A_2A_4+A_3A_5+A_4A_1+A_5A_2>A_1A_2+A_2A_3+A_3A_4+$ $+A_4A_5+A_5A_1$, что и требовалось доказать.

497. Анализ. Пусть C (рис. 23) есть некоторая точка прямой xy. Построим точку A_1, симметричную точке A относительно xy, $CA=CA_1$. Следовательно, при любом положении точки C будет иметь место $CB-CA=$ $=CB-CA_1$. Если точки C, A_1, B не лежат на одной прямой, то $CB-CA_1<$ $<A_1B$. Когда точка C совпадает с точкой D (D — точка пересечения xy с BA_1), разность $DB-DA_1$ делается равной A_1B. Это и есть наибольшая величина рассматриваемой разности. Отсюда вытекает и построение. Находим точку A_1, симметричную точке A относительно прямой xy. Потом проводим прямую BA_1 до пересечения с прямой xy в точке D. Точка D является искомой.

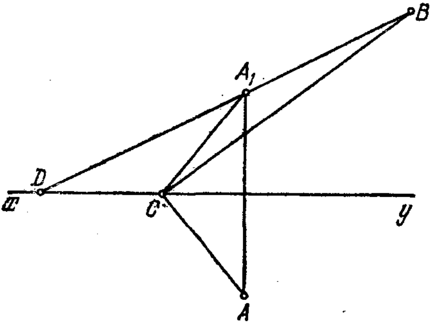

Рис. 23.

498. Дана прямая xy и точки A и B, лежащие по одну сторону от нее (рис. 24). Через точку A_1, симметричную точке A относительно xy, и точку B проводим прямую, которая пересекает xy в точке M. Докажем, что точка M является искомой. Предположим, что другая точка M_1 прямой xy — искомая. Из рисунка видно, что $AM+BM=A_1M+BM=A_1B$ и $AM_1+BM_1=A_1M_1+BM_1>A_1B$.

Из этих двух соотношений заключаем, что $AM+BM < AM_1+BM_1$, т. е. точка M является искомой.

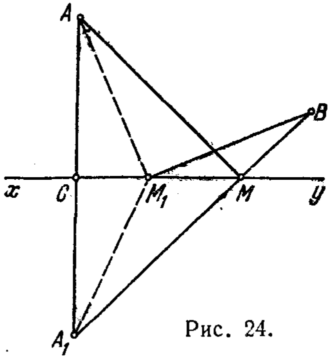

Рис. 24.

499. Пусть C_1 — произвольная точка на прямой xy (рис. 25, *a*). Отложим на xy отрезок $C_1D_1=CD$, а затем проводим отрезок D_1B. Далее, построим отрезок BB_1, равный отрезку D_1C_1 и параллельный ему. Затем построим точку B_2, симметричную точке B_1 относительно xy, и проводим отрезки AC_1, B_1C_1, B_2C_1. Нетрудно убедиться, что длина ломаной AC_1D_1B равна $AC_1+C_1B_2+CD$. Сумма $AC_1+C_1B_2+CD$ достигает наименьшего значения, если ломаная AC_1B_2 займет положение отрезка AB_2. Поэтому, чтобы ломаная была наименьшей длины, надо точку

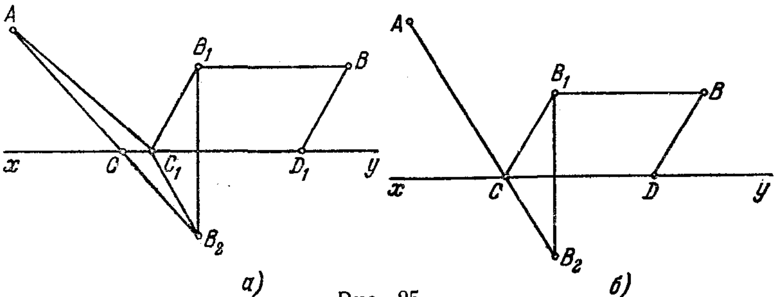

Рис. 25.

C_1 заменить точкой C, в которой AB_2 пересекается прямой xy (рис. 25, *б*).

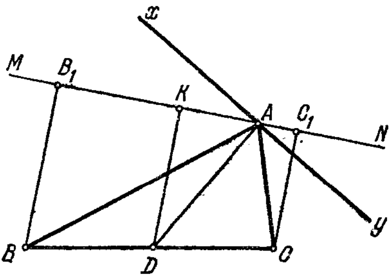

Рис. 26.

500. Через вершину A проведем произвольную прямую MN (рис. 26). Из точек B, C и середины D стороны BC опустим перпендикуляры BB_1, CC_1 и DK на MN. Сумма расстояний от вершин B и C до прямой MN равна $BB_1+CC_1=2KD$, где KD — средняя линия трапеции BB_1C_1C. Очевидно, что DK принимает наибольшее значение, когда KD совпадает с медианой (AD) треугольника ABC, так как KD не больше медианы AD.

Итак, искомая прямая xy должна быть перпендикулярной к медиане AD.

501. Возьмем на сторонах угла xOy две произвольные точки B_1 и C_1 и рассмотрим периметр треугольника AB_1C_1 (рис. 27). Построив точку A_1, симметричную точке A относительно Ox, а также точку A_2, симметричную точке A относительно Oy, и соединив точку A_1 с B_1 и A_2 с C_1, получим ломаную линию $A_1B_1C_1A_2$, концы которой находятся в точках A_1 и A_2 и длина которой равна периметру треугольника AB_1C_1. В самом деле, длина ломаной линии $l = A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_2$, но $A_1B_1 = AB_1$ и $C_1A_2 = AC_1$, а поэтому $l = AB_1 + B_1C_1 + AC_1$. Эта сумма отрезков есть периметр треугольника AB_1C_1. Поскольку кратчайшее расстояние между двумя точками A_1 и A_2 есть прямолинейный отрезок, соединяющий эти точки, то, значит, искомые точки B и C находятся на прямой A_1A_2. Отсюда и построение: находим точку A_1, симметричную A относительно Ox, далее строим точку A_2, симметричную A относительно Oy. Потом через точки A_1 и A_2 проводим прямую, пересекающую Ox и Oy в точках B и C, которые и являются вершинами искомого треугольника, имеющего наименьший периметр, равный отрезку A_1A_2.

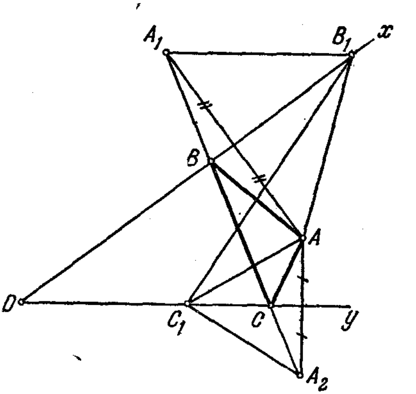

Рис. 27.

502. Отразим точки A и B симметрично соответственно относительно OM и ON (рис. 28). Пусть точка A_1 — отражение точки A, а точка B_1 — отражение точки B. Прямая A_1B_1 пересекает OM и ON соответственно в точках C и D. Докажем, что точки C и D искомые. Действительно, так как $AC = A_1C$ и $BD = B_1D$, то $A_1B_1 = AC + CD + DB$, и поскольку A_1B_1 меньше любой ломаной, концы которой находятся в точках A_1 и B_1, например, $A_1C_1D_1B_1$, следовательно, и ломаная $ACDB$ меньше $A_1C_1D_1B_1$.

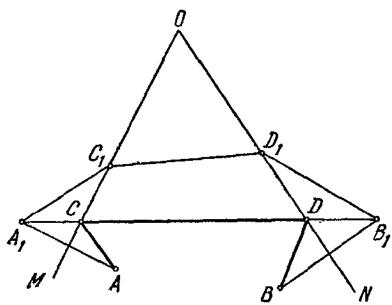

Рис. 28.

503. П е р в ы й с л у ч а й. Точка F находится вне круга (рис. 29). Пусть FBA — секущая (A и B — точки пересечения секущей с окружностью). Требуется найти наибольшие и наименьшие значения

$$c = AF + BF. \qquad (1)$$

Из центра O опустим перпендикуляр OC на AF. Поскольку точка C делит AB пополам, то

$$AC = BC = \frac{AB}{2}. \tag{2}$$

В силу (1) и (2) имеем $c = AC + CB + BF + BF = 2(BC + BF) = 2FC$.

Рассматривая прямоугольный треугольник FCO, легко убедиться, что отрезок FC достигает максимума, когда он займет положение FO. Итак, c принимает максимальное значение, когда секущая проходит через центр.

Далее, если OC будет увеличиваться, т. е. FA будет удаляться от центра, то FC будет уменьшаться, так как гипотенуза FO треугольника FCA не изменяется. Поскольку наибольшее расстояние секущей от центра достигается, когда обе точки пересечения сливаются, т. е. когда секущая вырождается в касательную, то c принимает наименьшее значение, когда секущая — касательная (FA_1).

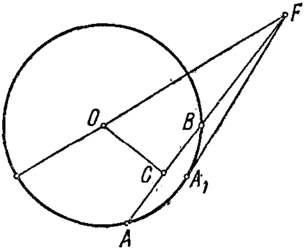

Рис. 29.

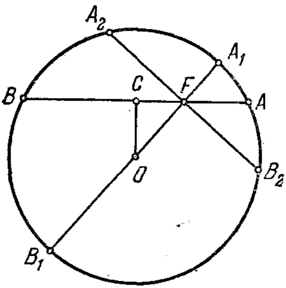

Рис. 30.

Второй случай. Точка F находится внутри круга (рис. 30). Проведем через точку F произвольную секущую (хорду) AFB и диаметр A_1FB_1. Поскольку $FA_1 + FB_1 = A_1B_1$ — диаметр, а $FA + FB = AB$ — хорда, и так как любая хорда не больше диаметра, то искомая сумма достигает максимума, когда секущая проходит через центр.

Далее, из всех хорд, проведенных через точку F, наименьшей будет та, которая наиболее удалена от центра O. Такой хордой является хорда A_2B_2, проведенная через точку F перпендикулярно к диаметру A_1B_1.

Действительно, опустив из центра O перпендикуляр OC на хорду AB, убедимся, что в треугольнике OCF $OF > OC$ (гипотенуза больше катета); следовательно, $A_2B_2 < AB$.

Третий случай. Точка F находится на окружности. В данном случае точка F сливается с одной из точек пересечения секущей с окружностью. Следовательно, одно из слагаемых искомой суммы равно нулю, а второе слагаемое есть хорда или диаметр, а так как диаметр не меньше хорды, то и в этом случае искомая сумма достигает максимума, когда секущая проходит через центр круга. В рассматриваемом случае имеется и минимум суммы, равный нулю.

Это достигается тогда, когда секущая вырождается в касательную, т. е. когда точка F и обе точки пересечения секущей с окружностью сливаются в одну точку, а следовательно, оба слагаемых искомой суммы равны нулю.

504. Обозначим сторону квадрата через a, тогда его периметр $4a$, а площадь a^2. Известно, что из всех треугольников с данной площадью равносторонний имеет наименьший периметр (задача 524), поэтому мы можем предположить, что треугольник равносторонний. Пусть сторона равностороннего треугольника равна b, тогда его периметр $3b$, а площадь $\frac{b^2\sqrt{3}}{4}$. Итак, дано $a^2=\frac{b^2\sqrt{3}}{4}$ и требуется доказать, что $3b>4a$. Рассмотрим разность $3b-4a=3b-2b\sqrt[4]{3}=b\sqrt[4]{3}\left(\sqrt[4]{27}-\sqrt[4]{16}\right)>0$. Следовательно, $3b>4a$.

505. Пусть CN — биссектриса внешнего угла BCB_1 треугольника ABC (рис. 31). Отразим точку B симметрично относительно биссектрисы CN. Отражение точки B попадет в точку B_1, находящуюся на продолжении стороны AC; действительно, треугольники BM_1C и B_1M_1C (M_1 — точка пересечения CN с BB_1) равны по общему катету CM_1 и прилежащим к нему углам BCM_1 и B_1CM_1, следовательно, $BM_1=B_1M_1$. Из равенства этих же треугольников следует, что $BC=B_1C$, откуда имеем

$$AB_1=AC+BC. \tag{1}$$

Поскольку $CN\perp BB_1$ и CN проходит через середину M_1 отрезка BB_1, то

$$MB=MB_1. \tag{2}$$

Из треугольника AMB_1 следует, что

$$MA+MB_1>AB_1. \tag{3}$$

В силу (1), (2) и (3) следует, что $MA+MB>AC+BC$, что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается эта теорема для случая, когда точка M находится на другой биссектрисе.

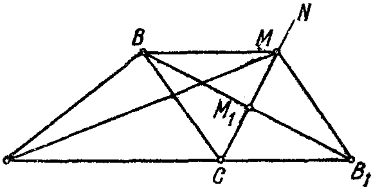

Рис. 31.

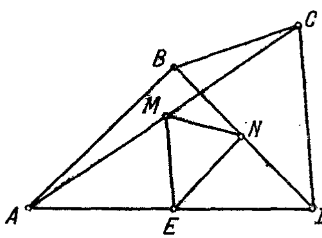

Рис. 32.

506. Пусть точки M и N — середины диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$ (сторона выбрана так, что M, N и E не лежат на одной прямой) (рис. 32). Построим треугольник MNE, где E — середина стороны AD; $NE=\frac{AB}{2}$, $ME=\frac{DC}{2}$, как средние линии треугольников ABD и ACD. Пусть точки M и N не совпадают.

Известно, что сторона треугольника больше разности двух других его сторон. Из треугольника MNE имеем

$$MN > |NE - ME| = \left|\frac{AB}{2} - \frac{DC}{2}\right| = \frac{|AB - DC|}{2}. \qquad (1)$$

Если же середины обеих диагоналей совпадают с точкой пересечения их, то, как известно, данный четырехугольник — параллелограмм и тогда

$$MN = \frac{1}{2}(AB - CD) = 0. \qquad (2)$$

Объединяя выводы (1) и (2), получим $MN \geqslant \frac{|AB - DC|}{2}$.

507. Опустим из точек B и C (рис. 33) перпендикуляры BB_1 и CC_1 на прямую KM и продолжим перпендикуляр CC_1 на отрезок C_1E, равный CC_1. Соединим отрезком точки E и A и докажем, что линия BAE — прямая. Так как AD — биссектриса угла BAC, то

$$\angle BAB_1 = \angle CAC_1, \qquad (1)$$

как дополнение равных углов до прямого. Точки A и B_1 лежат на перпендикуляре MK, проведенном через середину отрезка CE, а поэтому

$$AC = AE \quad \text{и} \quad B_1C = B_1E. \qquad (2)$$

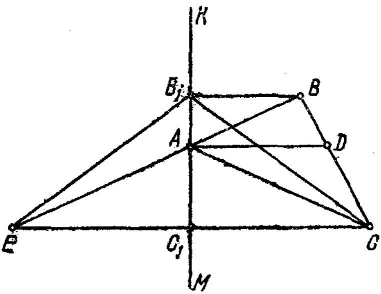

Рис. 33.

Следовательно, треугольник CAE — равнобедренный и его высота AC_1 является биссектрисой угла CAE, т. е.

$$\angle EAC_1 = \angle CAC_1. \qquad (3)$$

Из равенств (1) и (3) следует, что $\angle BAB_1 = \angle EAC_1$, но B_1AM — прямая, следовательно, и линия BAE — прямая. Из треугольника BB_1E следует, что $BA + AE < BB_1 + B_1E$, или, учитывая равенство (2), имеем: $BA + AC < BB_1 + B_1C$.

Прибавив к обеим частям последнего неравенства по BC, получим утверждение задачи: $BA + AC + BC < BB_1 + B_1C + BC$.

508. Первое решение. Пусть стороны треугольника a и b, а угол между ними C, тогда его площадь $S = \frac{1}{2} ab \sin C$. Так как $\sin C$ принимает наибольшее значение, когда угол C прямой, то и наибольшая площадь треугольника будет при перпендикулярности сторон a и b.

В т о р о е р е ш е н и е (рис. 34). Примем отрезок CB, равный a, за основание треугольников: A_1CB (угол C — острый), ACB (угол C — прямой), A_2CB (угол C — тупой), $A_1C = AC = A_2C = b$. Из точки C опишем дугу радиусом, равным b. Эта дуга пройдет через A_1, A и A_2. Так как половина хорды не больше радиуса, то высоты A_1D и A_2E треугольников A_1CB и A_2CB меньше высоты AC прямоугольного треугольника ACB, а поскольку у этих трех треугольников общее основание, то наибольшую площадь имеет треугольник ACB.

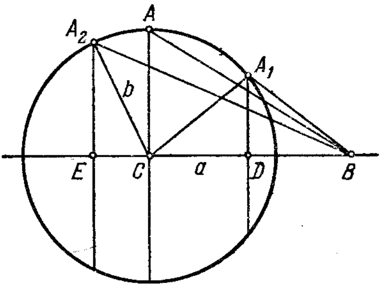

Рис. 34.

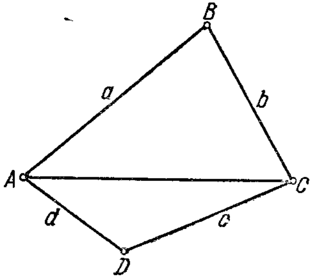

Рис. 35.

509. Обозначим через a, b, c, d стороны AB, BC, CD, DA четырехугольника $ABCD$ (рис. 35). Имеем $S = S_{ABC} + S_{DAC} = \frac{ab\sin B}{2} + \frac{cd\sin D}{2} = \frac{2ab\sin B}{4} + \frac{2cd\sin D}{4} \leqslant \frac{(a-b)^2 + 2ab}{4} + \frac{(c-d)^2 + 2cd}{4} = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}$, что и требовалось доказать. Равенство имеет место лишь в том случае, когда четырехугольник — квадрат.

510. Пусть две стороны треугольника a и b, причем $a > b$, а соответствующие им высоты h_a и h_b. Требуется доказать, что $h_a < h_b$. Удвоенная площадь треугольника равна ah_a или bh_b, откуда $ah_a = bh_b$. Следовательно, $\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}$. Так как $a > b$, то $\frac{b}{a} < 1$, а потому и $\frac{h_a}{h_b} < 1$, откуда $h_a < h_b$, что и требовалось доказать.

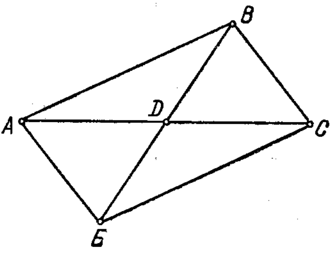

Рис. 36.

511. Пусть в треугольнике ABC (рис. 36) $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, медиана $BD = m_b$. Продолжим медиану BD на отрезок DE, равный BD. Четырехугольник $ABCE$ — параллелограмм, так как его диагонали точкой пересечения делятся пополам. Из геометрии известно, что $AC^2 + BE^2 = 2AB^2 + 2BC^2$, или, в наших обозначениях,

$b^2+(2m_b)^2=2c^2+2a^2$, откуда $m_b=\dfrac{\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}}{2}$. Аналогично, $m_a=\dfrac{\sqrt{2c^2+2b^2-a^2}}{2}$. Для определенности пусть $a<b$; тогда требуется доказать, что $m_a>m_b$, т. е. надо доказать, что $\sqrt{2c^2+2b^2-a^2}>$ $>\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}$, или $2b^2-a^2>2a^2-b^2$, или $a^2<b^2$ и $a<b$. Таким образом, мы доказали, что $m_a>m_b$, если $a<b$.

512. Пусть в треугольнике ABC стороны, противолежащие углам A, B, C, соответственно равны a, b, c, и пусть биссектрисы углов A и B соответственно равны l_A и l_B. Для определенности положим, что $a>b$. Следовательно, надо доказать, что $l_A<l_B$. В наших обозначениях площадь треугольника равна $\frac{1}{2}bc\sin A$ или $\frac{1}{2}\left(bl_A\sin\frac{A}{2}+cl_A\sin\frac{A}{2}\right)$. Таким образом, $bc\sin A=bl_A\sin\frac{A}{2}+$ $+cl_A\sin\frac{A}{2}$, или $2bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=bl_A\sin\frac{A}{2}+cl_A\sin\frac{A}{2}$, или $2bc\cos\frac{A}{2}=l_A(b+c)$. Отсюда $l_A=\dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$, или, поделив числитель и знаменатель последнего равенства на произведение bc, получим

$$l_A=\frac{2\cos\frac{A}{2}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}. \tag{1}$$

Аналогично,

$$l_B=\frac{2\cos\frac{B}{2}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}. \tag{2}$$

Поскольку $a>b$, то и $A>B$, и так как, кроме того, $0<\frac{A}{2}<\frac{\pi}{2}$, $0<\frac{B}{2}<\frac{\pi}{2}$, то $\cos\frac{A}{2}<\cos\frac{B}{2}$. Следовательно, числитель дроби (1) меньше числителя дроби (2). Далее, знаменатель $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ дроби (1) больше знаменателя $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$ дроби (2) в силу того, что $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$. На основании изложенного заключаем, что $l_A<l_B$, что и требовалось доказать.

513. Требуется доказать (рис. 37), что $\frac{1}{2}(AB+AC)-\frac{1}{2}BC<$ $<AM<\frac{1}{2}(AB+AC)$. Имеем $AB-BM<AM$ и $AC-MC<AM$,

следовательно, $AB+AC-BC<2AM$, откуда делением обеих частей на 2 получаем

$$\frac{1}{2}(AB+AC)-\frac{1}{2}BC<AM.$$

Итак, мы доказали первое неравенство.

Теперь на продолжении медианы AM отложим отрезок $MD=AM$. Из треугольника ACD имеем: $AD<DC+AC$, или $2AM<AB+AC$, откуда делением пополам обеих частей получаем

$$AM<\frac{1}{2}(AB+AC).$$

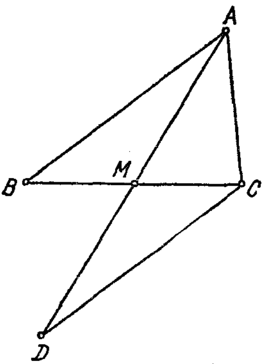

Рис. 37.

514. Обозначим стороны треугольника через a, b, c, а соответственные медианы через m_a, m_b, m_c.

Имеем (см. задачу 513):

$$\frac{1}{2}(b+c)-\frac{1}{2}a<m_a<\frac{1}{2}(b+c),$$

$$\frac{1}{2}(c+a)-\frac{1}{2}b<m_b<\frac{1}{2}(c+a),$$

$$\frac{1}{2}(a+b)-\frac{1}{2}c<m_c<\frac{1}{2}(a+b).$$

Складывая эти три неравенства почленно, получаем

$$\frac{1}{2}(a+b+c)<m_a+m_b+m_c<a+b+c.$$

Итак, сумма медиан треугольника заключается между его полупериметром и периметром.

515. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Поскольку точка M делит каждую из медиан в отношении 1:2, считая от стороны треугольника, то $AM=\frac{2m_a}{3}$, $BM=\frac{2m_b}{3}$. Из треугольника AMB имеем: $\frac{2m_a}{3}+\frac{2m_b}{3}>c$, откуда $m_a+m_b>\frac{3}{2}c$.

516. Имеем $S=\frac{ab\sin C}{2}=\frac{4ab\sin C}{8}\leqslant\frac{(a-b)^2+4ab}{8}=\left(\frac{a+b}{2\sqrt{2}}\right)^2$, что и требовалось доказать.

Знак равенства имеет место лишь тогда, когда треугольник прямоугольный и равнобедренный ($C=90°$).

517. Имеем: $S_{ABC}=\frac{ab\sin C}{2}\leqslant\frac{(a-b)^2+ab}{2}=\frac{1}{2}(a^2-ab+b^2)$, что и требовалось доказать.

Знак равенства имеет место лишь тогда, когда треугольник равнобедренный и прямоугольный ($C=90°$).

518. Имеем: $S=\frac{ab\sin C}{2}=\frac{2ab\sin C}{4}\leqslant\frac{(a-b)^2+2ab}{4}=\frac{a^2+b^2}{4}$, что и требовалось доказать.

Знак равенства имеет место лишь тогда, когда треугольник прямоугольный и равнобедренный ($a=b$).

519. Требуется доказать, что $S < \frac{a^2+b^2+c^2}{6}$. В задаче 518 мы доказали, что

$$S \leqslant \frac{a^2+b^2}{4}; \quad S \leqslant \frac{b^2+c^2}{4}; \quad S \leqslant \frac{a^2+c^2}{4}.$$

Ясно, что знак равенства может иметь место только в одном из этих трех соотношений, поэтому $3S < \frac{a^2+b^2+b^2+c^2+a^2+c^2}{4} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$, откуда $S < \frac{a^2+b^2+c^2}{6}$.

520. На отрезке AB — основании искомого треугольника (рис. 38) строим сегмент, вмещающий данный угол. Рассмотрим два треугольника: ACB — равнобедренный и AC_1B — произвольный, где C и C_1 — точки на дуге AB. Биссектрисы CD и C_1E этих треугольников продолжим до встречи (в одной точке) с окружностью в точке K. Диаметр CK больше хорды C_1K, т. е. $CD+DK > C_1E+EK$, но DK меньше EK, так как DK перпендикуляр к AB, а CK — наклонная. Следовательно, CD больше C_1E, что и требовалось доказать.

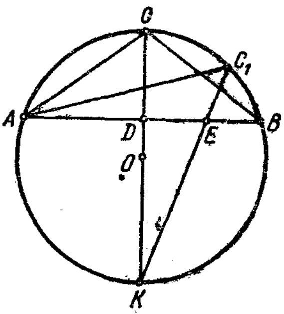

Рис. 38.

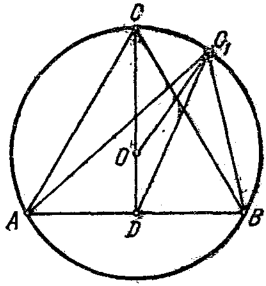

Рис. 39.

521. На отрезке AB — основании искомого треугольника — строим сегмент, вмещающий данный острый угол (рис. 39). Пусть ACB — равнобедренный, а AC_1B — произвольный треугольники, где C и C_1 — точки на дуге AB. Пусть D — основание медиан CD и C_1D, O — центр круга. Из рисунка 39 видим, что $OC=OC_1$ и $OC_1+OD>DC_1$. Сложив эти два соотношения, получим $OC+OC_1+OD > OC_1+DC_1$, или $OC+OD > DC_1$, или $DC > DC_1$, что и требовалось доказать.

522. На отрезке AB — основании искомого треугольника — строим сегмент, вмещающий данный тупой угол (рис. 40). Пусть ACB — равнобедренный треугольник, а AC_1B — произвольный треугольник, где C и C_1 — точки на дуге AB. Требуется доказать, что медиана CD меньше медианы C_1D. Из рисунка 40 усматриваем, что $OD+DC=OC_1$

есть радиус и $OC_1 < OD+DC_1$. Сложив эти два соотношения, получим $OD+DC+OC_1 < OC_1+OD+DC_1$, откуда $DC < DC_1$, что и требовалось доказать.

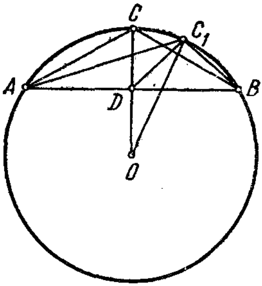

Рис. 40.

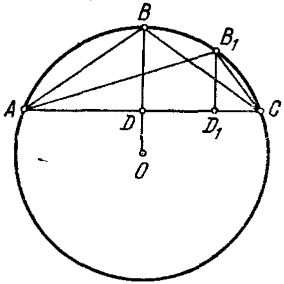

Рис. 41.

523. 1) На отрезке AC — основании искомого треугольника — строим сегмент, вмещающий данный угол ABC (рис. 41). Из середины D основания AC проводим перпендикуляр к AC до пересечения с дугой ABC в точке B. Равнобедренный треугольник ABC — искомый. Действительно, пусть AB_1C — треугольник с вершиной в произвольной точке B_1 на дуге AC. Сравним площади треугольников ABC и AB_1C. Эти треугольники имеют общее основание AC, а высота BD треугольника ABC больше высоты B_1D_1 треугольника AB_1C, поэтому площадь треугольника ABC больше площади треугольника AB_1C.

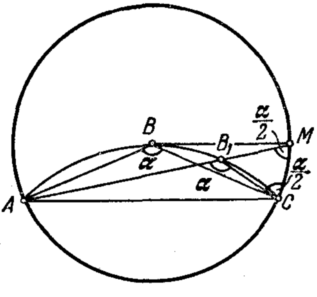

Рис. 42.

2) Первое решение. Как и в 1), строим на данном основании AC сегмент, вмещающий данный угол α (рис. 42), и рассматриваем два треугольника, вписанных в этот сегмент: равнобедренный ABC и неравнобедренный AB_1C. Далее, из точки B радиусом $AB=BC$ опишем окружность и продолжим AB_1 до пересечения с окружностью в точке M. Из рисунка усматриваем, что

$$AB+BC=AB+BM > AM=AB_1+B_1M. \qquad (1)$$

Но в треугольнике CB_1M угол $B_1MC=\frac{\alpha}{2}$, так как он измеряется половиной дуги AC (α). Следовательно, и $\angle MCB_1=\frac{\alpha}{2}$. Таким образом, треугольник B_1MC — равнобедренный. Поэтому

$$B_1M=B_1C. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) заключаем, что $AB+BC > AM = AB_1 + B_1C$, что и требовалось доказать.

Второе решение. По теореме синусов имеем $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin(A+B)} = \frac{AC}{\sin B}$, откуда $AB = \frac{AC \cdot \sin(A+B)}{\sin B}$; $BC = \frac{AC \cdot \sin A}{\sin B}$.

Таким образом, периметр треугольника ABC

$$P = AC\left[1 + \frac{\sin(A+B)+\sin A}{\sin B}\right] = AC\left[1 + \frac{2\sin\left(A+\frac{B}{2}\right)\cos\frac{B}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}\right] =$$

$$= AC\left[1 + \frac{\sin\left(A+\frac{B}{2}\right)}{\sin\frac{B}{2}}\right].$$

Поскольку AC и $\sin\frac{B}{2}$ — постоянные величины, то P достигает наибольшего значения, когда $\sin\left(A+\frac{B}{2}\right)=1$, т. е. когда $A+\frac{B}{2}=90°$.

Итак, имеем $A+\frac{B}{2}=\frac{A+B+C}{2}$, или $2A=A+C$, откуда $A=C$; следовательно, треугольник равнобедренный.

524. Площадь треугольника

$$S = \sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a+c-b}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}},$$

где a, b, c — стороны треугольника. Отсюда $(a+b+c)(a+b-c)\times \times(a+c-b)(b+c-a)=16S^2$. Сумму $a+b+c$ можно представить так:

$$a+b+c=\frac{3}{4}\left(\frac{a+b+c}{3}+\frac{a+b-c}{1}+\frac{a+c-b}{1}+\frac{b+c-a}{1}\right).$$

Произведение $\frac{a+b+c}{3}\cdot\frac{a+b-c}{1}\cdot\frac{a+c-b}{1}\cdot\frac{b+c-a}{1}=\frac{16S^2}{3}$, т. е. равно постоянной величине. Следовательно, сумма сомножителей принимает наименьшее значение тогда, когда эти сомножители равны между собой, т. е. если $\frac{a+b+c}{3}=a+b-c=a+c-b=b+c-a$.

Эти равенства возможны только при $a=b=c$. Итак, искомый треугольник равносторонний.

525. Пусть боковые стороны $a+\alpha$ и $a-\alpha$, тогда площадь треугольника $S=\frac{1}{2}(a-\alpha)(a+\alpha)\sin\varphi=\frac{1}{2}(a^2-\alpha^2)\sin\varphi$. Ясно, что S достигает максимума при $\alpha=0$. Таким образом, искомый треугольник — равнобедренный.

526. Первое решение. Рассмотрим два треугольника (рис. 43); равнобедренный ABC ($AB=AC$) и ADE, у которых общий угол A и

$$AB+AC=AD+AE. \qquad (1)$$

Из этого равенства следует, что $BD=EC$. Из точек D и E опустим перпендикуляры DK и EF на прямую BC. Легко убедиться, что треугольники BDK и CEF равны между собой. Из равенства этих треугольников следует, что $BK=CF$, а потому $KF=BC$. Но KF является проекцией DE на прямую BC, поэтому $KF<DE$, т. е.

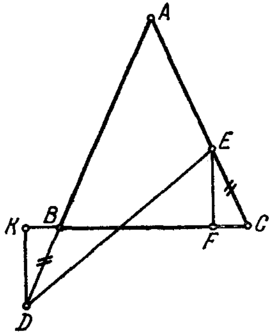

Рис. 43.

$$BC<DE. \qquad (2)$$

В силу соотношений (1) и (2) имеем $AB+AC+BC<AD+AE+DE$, т. е. у равнобедренного треугольника меньший периметр, чем у любого другого треугольника, если эти треугольники удовлетворяют условию задачи.

Второе решение. Введем обозначения $AB=AC=a$; $BD=CE=x$. Из треугольника DAE имеем

$$DE^2= \\ =(a+x)^2+(a-x)^2-2(a^2-x^2)\cos A. \qquad (1)$$

Из треугольника BAC следует

$$BC^2=2a^2-2a^2\cos A. \qquad (2)$$

Вычитая почленно из равенства (1) равенство (2), получим

$$DE^2-BC^2=2x^2+2x^2\cos A=2x^2(1+\cos A).$$

Так как $1+\cos A>0$ и $x^2>0$, то $DE^2-BC^2>0$, откуда $DE>BC$, и мы пришли к такому же заключению, как и в первом решении.

527. Площадь треугольника равна $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где a, b, c — стороны треугольника. По условию, $\sqrt{p}$ — постоянная величина. Следовательно, наибольшая площадь треугольника будет тогда, когда произведение $(p-a)(p-b)(p-c)$ примет наибольшее значение. Так как сумма $(p-a)+(p-b)+(p-c)=p$ — постоянная величина, то произведение $(p-a)(p-b)(p-c)$ будет наибольшим, когда $p-a=p-b=p-c$, т. е. при $a=b=c$.

528. По теореме Пифагора имеем

$$a^2+b^2=c^2. \qquad (1)$$

Учетверенная площадь прямоугольного треугольника равна

$$2ab \text{ или } 2ch. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует $a^2+2ab+b^2=c^2+2ch$, или $(a+b)^2=(c+h)^2-h^2$, откуда $a+b=\sqrt{(c+h)^2-h^2}<\sqrt{(c+h)^2}=c+h$.

529. Обозначим через a, b, c стороны треугольника. Для определенности, пусть $a \geqslant b \geqslant c$, тогда соответствующие им высоты будут удовлетворять соотношениям:

$$h_a \leqslant h_b \leqslant h_c. \tag{1}$$

Если расстояния от произвольной точки, взятой внутри треугольника до сторон a, b, c, соответственно равны l_a, l_b, l_c, то удвоенная площадь данного треугольника

$$2S = al_a + bl_b + cl_c. \tag{2}$$

Так как
$$c \leqslant a, \ c \leqslant b, \tag{3}$$

то из (2) следует $cl_a + cl_b + cl_c \leqslant 2S$, откуда $l_a + l_b + l_c \leqslant \frac{2S}{c}$. Но поскольку $\frac{2S}{c} = h_c$, то

$$l_a + l_b + l_c \leqslant h_c. \tag{4}$$

Также, учитывая (2) и (3), имеем $al_a + al_b + al_c \geqslant 2S$, откуда

$$l_a + l_b + l_c \geqslant \frac{2S}{a} = h_a. \tag{5}$$

В силу (4) и (5) имеем окончательно: $h_a \leqslant l_a + l_b + l_c \leqslant h_c$, что и требовалось доказать.

530. На стороне AC треугольника ABC (рис. 44) возьмем три точки: вершины A и C и произвольную точку M между ними. Для определенности, пусть угол A больше угла C, тогда расстояние AN от A до стороны BC будет меньше, чем расстояние CL от C до стороны AB. Остается сравнить сумму $MF + ME$ расстояний от точки M до сторон BC и AB с AN. Из точки M опустим перпендикуляр MK на AN. Из рисунка видим, что достаточно сравнить отрезки AK и ME, так как $KN = MF$.

В прямоугольных треугольниках AKM и AEM катет AK меньше катета ME, так как они имеют общую гипотенузу и угол EAM больше угла $KMA\,(=BCA)$. Итак, $AK + KN < MF + ME$, или $AN < MF + ME$, т. е. вершина A большего угла при AC является искомой точкой. Если же углы A и C равны, то легко убедиться, что $ME + MF = AN$ — постоянные величины.

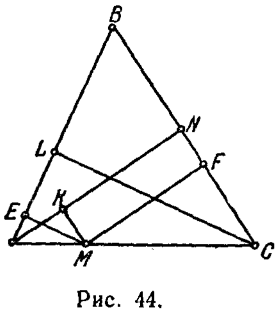

Рис. 44.

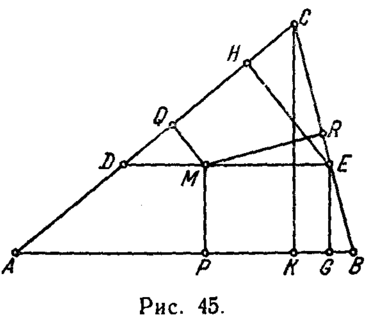

Рис. 45.

531. Для определенности, пусть $\angle C > \angle B > \angle A$ (рис. 45). Через произвольную точку M, взятую внутри треугольника, проведем прямую $DE \parallel AB$ (D—на AC; E—на BC). Из точки M опустим перпендикуляры MQ и MR на AC и BC, а из точки E—перпендикуляр EH на AC. В задаче 530 мы установили, что в треугольнике DCE

$$EH < MQ + MR. \tag{1}$$

Из точек M и E опускаем перпендикуляры MP и EG на AB. Так как $MP = EG$, то (1) можно переписать так:

$$EH + EG < MQ + MR + MP. \tag{2}$$

Рассмотрим треугольник ACB. На основании задачи 530 высота

$$CK < EG + EH. \tag{3}$$

В силу (2) и (3) имеем окончательно $CK < MQ + MR + MP$, т. е. высота CK, опущенная из вершины наибольшего угла, есть наименьшее значение суммы $MQ + MR + MP$.

Более простые случаи, когда $\angle C = \angle A = \angle B$, $\angle C = \angle B > \angle A$, $\angle C > \angle B = \angle A$, предоставляется рассмотреть читателю.

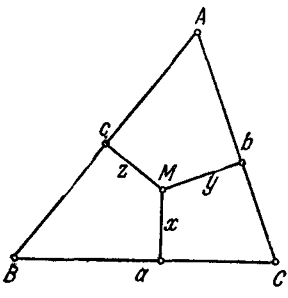

Рис. 46.

532. Обозначим через x, y, z расстояния от точки M, взятой внутри треугольника ABC, до сторон BC, AC, AB (рис. 46). Тогда площадь треугольника ABC $S = \frac{ax}{2} + \frac{by}{2} + \frac{cz}{2}$, откуда

$$ax + by + cz = 2S.$$

Произведение xyz принимает наибольшее значение тогда, когда $ax \cdot by \cdot cz$ также достигает наибольшего значения. Последнее имеет место, когда $ax = by = cz = \frac{2S}{3}$, откуда

$$x = \frac{2S}{3a} = \frac{ah_a}{3a} = \frac{h_a}{3}\,;\;\; y = \frac{h_b}{3}\,;\; z = \frac{h_c}{3},$$

где h_a, h_b, h_c—высоты треугольника ABC.

Из последних трех равенств заключаем, что искомая точка — точка пересечения медиан.

533. Поскольку $R = \frac{c}{2}$, где c—гипотенуза треугольника, а $r = \frac{S}{p}$, где p—полупериметр треугольника, то $R + r = \frac{c}{2} + \frac{S}{p} =$ $= \frac{c}{2} + \frac{ab}{a+b+c}$, где a и b—катеты. Далее,

$$R + r = \frac{ac + bc + c^2 + 2ab}{2(a+b+c)} = \frac{c(a+b) + (a+b)^2}{2(a+b+c)} =$$

$$= \frac{(a+b)(a+b+c)}{2(a+b+c)} = \frac{a+b}{2}.$$

Так как $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} = \sqrt{2S}$, то $R + r \geqslant \sqrt{2S}$. Знак равенства имеет место только при $a = b$, т. е. когда треугольник равнобедренный.

534. Известно, что среднее арифметическое положительных чисел не меньше их среднего геометрического. Поэтому

$$\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3} \geqslant \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)},$$

или

$$\frac{3p-(a+b+c)}{3} \geqslant \sqrt[3]{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},$$

но так как площадь треугольника $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=pr$, то

$$\frac{3p-2p}{3} \geqslant \sqrt[3]{\frac{S^2}{p}}=\sqrt[3]{\frac{p^2r^2}{p}}=\sqrt[3]{pr^2},$$

или $\frac{p}{3} \geqslant \sqrt[3]{pr^2}$, или $\frac{p^3}{27} \geqslant pr^2$, откуда $p^2 \geqslant 27r^2$. Впрочем, этот результат сразу следует из задачи 527. Действительно, площадь любого треугольника периметра $2p$ превосходит площадь равностороннего треугольника с тем же периметром, т. е. $\frac{p^2}{3\sqrt{3}}$. Но, как известно, $S=pr$ и, следовательно, $pr \leqslant \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$, откуда $p^2 \geqslant 27r^2$.

535. Обозначим радиус круга, вписанного в треугольник ABC, через r. Тогда сторона правильного треугольника $A_1B_1C_1$, вписанного в круг, будет равна $r\sqrt{3}$, а периметр $3r\sqrt{3}$. Если обозначим периметр треугольника ABC через $2p$, то задача сводится к доказательству неравенства $2p \geqslant 6r\sqrt{3}$, или $p \geqslant 3r\sqrt{3}$, или $p^2 \geqslant 27r^2$; это неравенство было нами доказано в задаче 534.

536. Левое неравенство $a+b>c$ имеет место в любом треугольнике. Остается доказать, что $a+b \leqslant c\sqrt{2}$. Обозначим острый угол треугольника через α. Имеем $a=c\sin\alpha$, $b=c\cos\alpha$, откуда $a+b=$ $=c(\cos\alpha+\sin\alpha)=c\sqrt{2}(\cos\alpha\sin 45^\circ+\sin\alpha\cos 45^\circ)=c\sqrt{2}\sin(\alpha+45^\circ)$. Поскольку наибольшее значение $\sin(\alpha+45^\circ)$ есть 1, то $a+b \leqslant c\sqrt{2}$. Вторую часть можно доказать и так: пусть h — высота треугольника, опущенная на гипотенузу. Имеем

$$a^2+b^2=c^2. \tag{1}$$

Учетверенная площадь треугольника равна

$$2ab, \text{ или } 2ch. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что $(a+b)^2=c^2+2ch$. Но так как $h \leqslant \frac{c}{2}$, то $(a+b)^2 \leqslant 2c^2$, откуда $a+b \leqslant c\sqrt{2}$. Рекомендуем читателю самостоятельно получить последнее неравенство из результата задачи 523.

537. Обозначим катеты треугольника через a и b, а гипотенузу через c. Площадь треугольника $S=\frac{a+b+c}{2}r$, или $S=\frac{hc}{2}$, откуда

$\frac{r}{h}=\frac{c}{a+b+c}$. Так как $a+b>c$, то

$$\frac{r}{h}<\frac{c}{c+c}=0{,}5. \qquad (1)$$

Теперь, сложив почленно очевидное неравенство $a^2+b^2\geqslant 2ab$ с равенством $c^2=a^2+b^2$, получим $(a^2+b^2)+c^2\geqslant(a+b)^2$, или $2c^2\geqslant$ $\geqslant(a+b)^2$, откуда $a+b\leqslant c\sqrt{2}$. Имеем

$$\frac{r}{h}=\frac{c}{a+b+c}\geqslant\frac{c}{c\sqrt{2}+c}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1\approx 0{,}41>0{,}4. \qquad (2)$$

В силу (1) и (2) следует, что $0{,}4<\frac{r}{h}<0{,}5$.

538. Пусть окружность радиуса r_1 вписана в квадрат (рис. 47). Проведем к этой окружности касательные A_1B_1 и B_1C_1, причем $A_1B_1\parallel AB$, $B_1C_1\parallel BC$. Очевидно, что треугольник $A_1B_1C_1$ лежит внутри

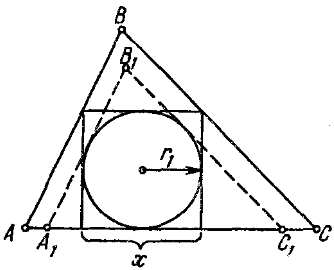

Рис. 47.

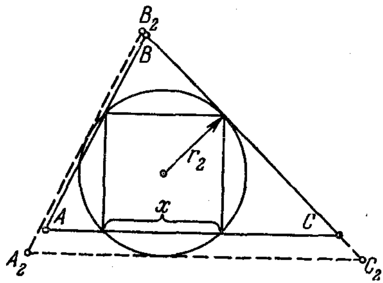

Рис. 48.

треугольника ABC; следовательно, $A_1C_1<AC$. Далее, поскольку треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны, то $\frac{r_1}{r}=\frac{A_1C_1}{AC}<1$, откуда $r_1<r$. Но так как $x=2r_1$, то

$$x<2r. \qquad (1)$$

Теперь пусть r_2 — радиус окружности, описанной около квадрата (рис. 48). Проведем к ней касательные A_2B_2, B_2C_2 и A_2C_2, причем $A_2B_2\parallel AB$, $B_2C_2\parallel BC$ и $A_2C_2\parallel AC$.

Очевидно, что треугольник ABC лежит внутри треугольника $A_2B_2C_2$; следовательно, $A_2C_2>AC$. Поскольку треугольники $A_2B_2C_2$ и ABC подобны, то $\frac{r_2}{r}=\frac{A_2C_2}{AC}>1$, откуда $r<r_2$. Но так как $x=r_2\sqrt{2}$, то имеем

$$x>r\sqrt{2}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что $r\sqrt{2}<x<2r$, что и требовалось доказать.

539. Первое решение. Очевидно, что $h_a>2r$; $h_b>2r$; $h_c>2r$.

Умножив эти неравенства на $2R$, получим

$$2Rh_a > 4Rr; \quad 2Rh_b > 4Rr; \quad 2Rh_c > 4Rr. \qquad (1)$$

Известно, что $\frac{abc}{4S}=R$, или $\frac{abc}{2ah_a}=R$, откуда $bc=2Rh_a$. Аналогично $ac=2Rh_b$ и $ab=2Rh_c$. В силу последних трех соотношений неравенства (1) принимают вид $bc > 4Rr$; $ac > 4Rr$; $ab > 4Rr$.

Из последних трех неравенств получаем $\frac{abc}{4R} > 2\sqrt{Rr^3}$. Так как $\frac{abc}{4R}=S$, то $S > 2\sqrt{Rr^3}$.

Второе решение. Нужно доказать, что

$$S > 2\sqrt{Rr^3}. \qquad (1)$$

Поскольку $R=\frac{abc}{4S}$ и $r=\frac{2S}{a+b+c}$, то неравенство (1) принимает вид $S > 2\sqrt{\frac{abc}{4S}\cdot\frac{8S^3}{(a+b+c)^3}}$, или $(a+b+c)^3 > 8abc$, или $a+b+c > 2\sqrt[3]{abc}$, или $\frac{a+b+c}{3} > \frac{2}{3}\sqrt[3]{abc}$, но так как $\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc} > \frac{2}{3}\sqrt[3]{abc}$, то

$$\frac{a+b+c}{3} > \frac{2}{3}\sqrt[3]{abc}. \qquad (2)$$

Поскольку все произведенные операции обратимы, то из неравенства (2) следует и неравенство (1).

540. Имеем $2\sqrt{(p-b)(p-c)}=\sqrt{(a-b+c)(a+b-c)}=\sqrt{a^2-(b-c)^2}\leqslant a$. Очевидно, что только при $b=c$ имеет место знак равенства.

541. Пусть стороны прямоугольника равны a и b. По условию, $ab=S$, следовательно, $2a\cdot b=2S$. Таким образом, сумма $2a+b$ будет наименьшей при $2a=b$. Итак, имеем систему $2ab=2S$, $2a=b$. Решая эту систему, находим $b=\sqrt{2S}$, $2a=\sqrt{2S}$.

Ответ. $2\sqrt{2S}$.

542. Так как $p-a>0$, $p-b>0$, $p-c>0$, где $p=\frac{a+b+c}{2}$, то на основании задачи 188 имеем $(p-a)(p-b)+(p-b)(p-c)+(p-c)(p-a)\geqslant\sqrt{3(p-a)(p-b)(p-c)p}$, или $3p^2-2p(a+b+c)+ab+bc+ac\geqslant\sqrt{3p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Отсюда $ab+bc+ca\geqslant S\sqrt{3}+p^2$, т. е. $4(ab+bc+ca)\geqslant 4S\sqrt{3}+4p^2$. После преобразований получаем

$$2(ab+bc+ca)\geqslant 4S\sqrt{3}+a^2+b^2+c^2.$$

Равенство достигается лишь тогда, когда треугольник равносторонний.

543. Имеем $(a+b)+(a+c)+(b+c) \geqslant 3\sqrt[3]{(a+b)(a+c)(b+c)}$, т. е.

$$a+b+c \geqslant \frac{3}{2}\sqrt[3]{(a+b)(a+c)(b+c)}. \quad (1)$$

Далее,

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=$$

$$=\frac{1}{(a+b)(a+c)(b+c)}[(a+b)(a+c)+(a+b)(b+c)+(b+c)(a+c)] \geqslant$$

$$\geqslant \frac{3}{(a+b)(a+c)(b+c)}\sqrt[3]{(a+b)^2(a+c)^2(b+c)^2}. \quad (2)$$

Перемножив почленно неравенства (1) и (2), получим

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \geqslant \frac{3}{2}\sqrt[3]{(a+b)(a+c)(b+c)} \times$$

$$\times \frac{3}{(a+b)(b+c)(c+a)}\sqrt[3]{(a+b)^2(a+c)^2(b+c)^2}=\frac{9}{2}.$$

Поделив обе части последнего неравенства на два, получим

$$\frac{a+b+c}{2}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \geqslant \frac{9}{4},$$

или

$$p\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \geqslant \frac{9}{4}.$$

544. Обозначим площади треугольников MBC, MCA, MAB (рис. 49) соответственно через S_1, S_2, S_3.

Поскольку треугольники ABC и MBC имеют общее основание, то $\frac{AA_1}{MA_1}=\frac{S_1+S_2+S_3}{S_1}$. Составим производную пропорцию

$$\frac{AA_1-MA_1}{MA_1}=\frac{S_2+S_3}{S_1},$$

или

$$\frac{MA}{MA_1}=\frac{S_2+S_3}{S_1}=\frac{S_2}{S_1}+\frac{S_3}{S_1}.$$

Аналогично получим

$$\frac{MB}{MB_1}=\frac{S_3+S_1}{S_2}=\frac{S_3}{S_2}+\frac{S_1}{S_2}$$

и

$$\frac{MC}{MC_1}=\frac{S_1+S_2}{S_3}=\frac{S_1}{S_3}+\frac{S_2}{S_3}.$$

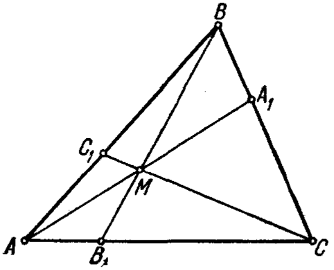

Рис. 49.

Сложив последние три равенства, получаем

$$\frac{AM}{A_1M}+\frac{BM}{B_1M}+\frac{CM}{C_1M}=\left(\frac{S_1}{S_2}+\frac{S_2}{S_1}\right)+\left(\frac{S_2}{S_3}+\frac{S_3}{S_2}\right)+\left(\frac{S_3}{S_1}+\frac{S_1}{S_3}\right) \geqslant 6, \quad (1)$$

так как выражения в скобках суть суммы взаимно обратных положительных чисел. Знак равенства имеет место только тогда, когда $S_1=S_2=S_3$, т. е. когда точка M есть центр тяжести.

545. В предыдущей задаче мы доказали, что

$$\frac{AM}{A_1M}=\frac{S_2+S_3}{S_1}; \quad \frac{BM}{B_1M}=\frac{S_3+S_1}{S_2}; \quad \frac{CM}{C_1M}=\frac{S_1+S_2}{S_3}, \text{ где } S_1,\ S_2,\ S_3$$

площади треугольников MBC, MCA, MAB. Перемножая эти равенства почленно, получаем

$$\frac{AM}{A_1M}\cdot\frac{BM}{B_1M}\cdot\frac{CM}{C_1M}=\frac{(S_2+S_3)(S_3+S_1)(S_1+S_2)}{S_1S_2S_3}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{2\sqrt{S_2S_3}\cdot 2\sqrt{S_3S_1}\cdot 2\sqrt{S_1S_2}}{S_1S_2S_3}=8.$$

Знак равенства имеет место, лишь когда M является точкой пересечения медиан.

546. Предварительно докажем, что имеет место неравенство $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\geqslant\frac{4}{m+n}$, если $m>0$, $n>0$. Действительно, рассмотрим очевидное неравенство

$$(m-n)^2\geqslant 0, \quad \text{или} \quad m^2-2mn+n^2\geqslant 0, \quad m^2+2mn+n^2-4mn\geqslant 0,$$

$$(m+n)^2-4mn\geqslant 0, \quad (m+n)^2\geqslant 4mn,$$

$$\frac{m+n}{mn}\geqslant\frac{4}{m+n}, \quad \frac{1}{m}+\frac{1}{n}\geqslant\frac{4}{m+n}.$$

На основании этого неравенства имеем

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}\geqslant\frac{4}{(p-a)+(p-b)}=\frac{4}{2p-a-b}=\frac{4}{c},$$

$$\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\geqslant\frac{4}{2p-b-c}=\frac{4}{a}, \qquad \frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-c}\geqslant\frac{4}{2p-a-c}=\frac{4}{b}.$$

Сложив почленно последние три неравенства, получим

$$\frac{2}{p-a}+\frac{2}{p-b}+\frac{2}{p-c}\geqslant\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c},$$

или

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\geqslant 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

547. Если a, b, c — стороны треугольника, а A, B, C — противолежащие им углы, то имеем

$$a=2R\sin A, \quad b=2R\sin B, \quad c=2R\sin C=2R\sin(A+B),$$

где R — радиус описанной окружности. Рассмотрим

$$y=a^2+b^2+c^2=4R^2\left[\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2(A+B)\right]=$$

$$=4R^2\left[\frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2B}{2}+1-\cos^2(A+B)\right]=$$

$$=4R^2\left[2-\cos(A-B)\cos(A+B)-\cos^2(A+B)\right].$$

Величина y достигает максимума при тех же значениях A и B, что и выражение, стоящее в квадратных скобках, которое обозначим через x, т. е. $x=2-\cos(A-B)\cos(A+B)-\cos^2(A+B)$. Из этого равенства следует, что

$$\cos(A+B)=\frac{-\cos(A-B)\pm\sqrt{\cos^2(A-B)+8-4x}}{2}.$$

Поэтому необходимо, чтобы $\cos^2(A-B)+8-4x\geqslant 0$, откуда

$$x\leqslant\frac{\cos^2(A-B)+8}{4}.$$

Очевидно, что x достигает максимума при $\cos(A-B)=1$, т. е. при $A=B$. Аналогично можно доказать, что $A=C$. Итак, треугольник, вписанный в данную окружность, у которого сумма квадратов сторон имеет наибольшую величину, есть равносторонний. Поэтому, учитывая, что $A=B=\frac{\pi}{3}$, $A-B=0$, $A+B=\frac{2\pi}{3}$, легко убедиться, что $x=\frac{9}{4}$. Действительно,

$$x=2-\cos(A-B)\cos(A+B)-\cos^2(A+B)=$$
$$=2-1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)^2=2+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{9}{4}.$$

548. Обозначим стороны треугольника, образующие данный угол φ через x и y, тогда площадь треугольника равна $\frac{1}{2}xy\sin\varphi$. Поскольку площадь треугольника дана, то произведение xy — постоянно. Пусть $xy=a^2$. Далее, пусть $x=a\alpha$, тогда $y=\frac{a}{\alpha}$, а $x^2+y^2=a^2\alpha^2+\frac{a^2}{\alpha^2}=a^2\left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\right)$. Но так как $\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\geqslant 2$, причем знак равенства имеет место при $\alpha^2=1$, т. е. при $\alpha=1$, то наименьшее значение $x^2+y^2=2a^2$ будет при $\alpha=1$, т. е. при $x=y=a$. Итак, искомый треугольник равнобедренный.

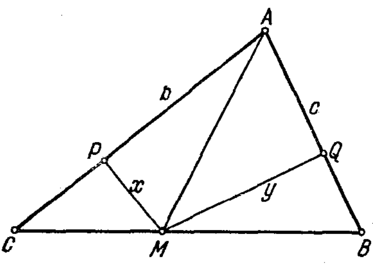

Рис. 50.

549. Пусть M — искомая точка на стороне BC треугольника ABC, $MP=x$ — расстояние от точки M до стороны $AC=b$, $MQ=y$ — расстояние от M до стороны $AB=c$ (рис. 50).

В силу наших обозначений удвоенная площадь треугольника ABC

$$2S=bx+cy. \tag{1}$$

Легко проверить, что имеет место тождество

$$x^2+y^2=\frac{(bx+cy)^2}{b^2+c^2}+\frac{(cx-by)^2}{b^2+c^2}.$$

Учитывая (1), имеем

$$x^2+y^2=\frac{4S^2+(cx-by)^2}{b^2+c^2}.$$

Поскольку $4S^2$ и b^2+c^2 — постоянные величины, то x^2+y^2 достигает наименьшего значения при условии $(cx-by)^2=0$, т. е. при $cx=by$, или $x/y=b/c$. Таким образом, когда расстояния точки M до боковых сторон прямо пропорциональны длинам этих сторон, то сумма квадратов этих расстояний наименьшая. Очевидно, что отношение площадей треугольников AMC и AMB равно b^2/c^2 и, кроме того, равно $\frac{CM}{MB}$; поэтому $\frac{CM}{MB}=\frac{b^2}{c^2}$. Нетрудно доказать, что AM лежит на прямой, симметричной медиане стороны BC относительно биссектрисы угла CAB. Этим доказывается существование точки M.

550. Пусть искомая точка M, а расстояния от нее до сторон треугольника a, b, c равны соответственно x, y, z. Удвоенная площадь данного треугольника

$$2S=ax+by+cz. \qquad (1)$$

Легко проверить, что имеет место тождество

$$x^2+y^2+z^2=\frac{(ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Учитывая (1), имеем

$$x^2+y^2+z^2=\frac{4S^2+(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Отсюда ясно, что $x^2+y^2+z^2$ достигает минимума, когда $ay-bx=bz-cy=cx-az=0$, т. е. когда $x/a=y/b=z/c$. Таким образом, расстояния от искомой точки до сторон треугольника обратно пропорциональны их длинам.

551. Обозначим высоту AD данного треугольника ABC через h, отрезки основания BD, CD — через a и b (рис. 51). Пусть искомая точка M, а отрезок $MD=x$. Имеем

$$AM^2=AD^2+MD^2=h^2+x^2,$$
$$BM^2=(BD-MD)^2=(a-x)^2,$$
$$CM^2=(CD+MD)^2=(b+x)^2.$$

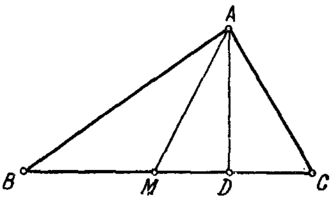

Рис. 51.

Требуется найти наименьшее значение функции $y=AM^2+BM^2+CM^2$, т. е. $y=(h^2+x^2)+(a-x)^2+(b+x)^2$, или $y=3x^2-2(a-b)x+a^2+b^2+h^2$. Известно, что квадратный трехчлен mx^2+nx+p при $m>0$ достигает минимального значения при $x=-\frac{n}{2m}$, равное $\frac{4mp-n^2}{4m}$.

В нашей задаче наименьшее значение $y=\frac{3h^2+2(a^2+b^2+ab)}{3}$ достигается при $x=\frac{a-b}{3}$.

552. Пусть A, B, C — углы треугольника, a, b, c — противолежащие им стороны, x, y, z — расстояния от центра описанной окружности до этих сторон (соответственно), R — радиус описанной окружности. В силу принятых нами обозначений имеем $x=R\cos A$, $y=R\cos B$, $z=R\cos C$. Рассмотрим $x^2+y^2+z^2=$ $=R^2(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C)=R^2\ [3-(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)]=$ $=3R^2-R^2[\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 (A+B)]$. Очевидно, что сумма $x^2+y^2+z^2$ примет наименьшее значение, когда $\sin^2 A+\sin^2 B+$ $\sin^2(A+B)$ имеет наибольшее значение. Имеем

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 (A+B)=$$
$$=\frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2B}{2}+1-\cos^2(A+B)=$$
$$=\frac{4-\cos 2A-\cos 2B-2\cos^2(A+B)}{2}=$$
$$=2-[\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos^2(A+B)]=$$
$$=2-\left\{\left[\cos(A+B)+\frac{1}{2}\cos(A-B)\right]^2-\frac{1}{4}\cos^2(A-B)\right\}.$$

Теперь ясно, что для того, чтобы $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2(A+B)$ имело наибольшее значение, надо, чтобы $\cos^2(A-B)$ имело наибольшее значение, т. е. $\cos(A-B)=1$, а выражение $\left[\cos(A+B)+\frac{1}{2}\cos(A-B)\right]^2$ имело наименьшее значение, т. е. это выражение должно быть равно нулю. Итак, имеем систему

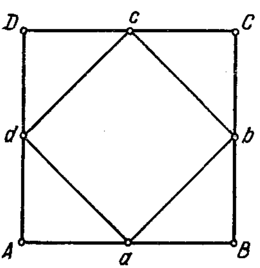

Рис. 52.

$$\begin{cases} \cos(A-B)=1, \\ \cos(A+B)+\frac{1}{2}\cos(A-B)=0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \cos(A-B)=1, \\ \cos(A+B)=-\frac{1}{2}, \end{cases}$$

откуда $A-B=0$, $A+B=120°$, или $A=B$, $A+B=120°$. Следовательно, $A=B=60°$, т. е. искомый треугольник — равносторонний.

553. Пусть сторона квадрата AB равна k. Обозначим Aa через x, тогда $AB-Aa=k-x$, т. е. $aB=k-x$ (рис. 52). По теореме Пифагора имеем $(ab)^2=x^2+(k-x)^2=2x^2-2kx+k^2$. Но площадь S квадрата $abcd$ равна $(ab)^2$. Значит, $S=2x^2-2kx+k^2$. Таким образом, наименьшее значение для S получится при $x=-\frac{-2k}{2\cdot 2}=\frac{k}{2}$. Итак, точки a, b, c, d должны быть серединами сторон квадрата $ABCD$.

554. Пусть стороны прямоугольника равны x и y, а сторона равновеликого ему квадрата z. Таким образом, требуется доказать, что $4z < 2(x+y)$, т. е.

$$z < \frac{x+y}{2}, \qquad (1)$$

при условии $z^2 = xy$, т. е.

$$z = \sqrt{xy}. \qquad (2)$$

Учитывая (2), неравенство (1) можно переписать в виде $\sqrt{xy} < \frac{x+y}{2}$, что очевидно при $x \neq y$.

555. Пусть стороны прямоугольника равны $\frac{P}{4}+x$ и $\frac{P}{4}-x$ (периметр равен P). Тогда площадь прямоугольника

$$S = \left(\frac{P}{4}+x\right)\left(\frac{P}{4}-x\right) = \frac{P^2}{16} - x^2.$$

Так как x^2 неотрицательно, а следовательно $-x^2$ неположительно, то площадь S принимает наибольшее значение, когда x равен нулю, т. е. все стороны прямоугольника равны по $\frac{P}{4}$. Таким образом, искомый прямоугольник — квадрат.

556. Имеем (рис. 53):

$$m = a\cos\alpha, \quad n = b\sin\alpha, \quad p = b\cos\alpha, \quad q = a\sin\alpha.$$

Площадь описанного прямоугольника $S = (m+n)(p+q) = (a\cos\alpha + b\sin\alpha)(b\cos\alpha + a\sin\alpha) = a^2\sin\alpha\cos\alpha + b^2\sin\alpha\cos\alpha + ab\sin^2\alpha + ab\cos^2\alpha = (a^2+b^2)\sin\alpha\cos\alpha + ab = \frac{a^2+b^2}{2}\sin 2\alpha + ab.$

Площадь S принимает наибольшее значение одновременно с $\sin 2\alpha$, т. е. при $\sin 2\alpha = 1$. Таким образом, $S_{\max} = \frac{a^2+b^2}{2} + ab$.

Ответ. $\frac{(a+b)^2}{2}$.

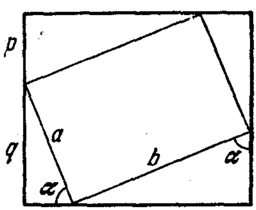

Рис. 53.

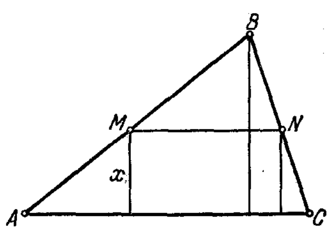

Рис. 54.

557. Пусть основание треугольника ABC (рис. 54) равно b, его высота h, а сторона прямоугольника, перпендикулярная к основанию треугольника, x. Вторая сторона прямоугольника $MN = \frac{Q}{x}$, где Q — площадь прямоугольника. Из подобия треугольников ABC и MBN имеем

$$\frac{h}{b}=\frac{(h-x)\,x}{Q}, \quad \text{откуда} \quad x_{1,2}=\frac{bh\pm\sqrt{b^2h^2-4bhQ}}{2b}.$$

Должно быть $4bhQ\leqslant b^2h^2$, или $Q\leqslant\frac{bh}{4}$.

Таким образом, наибольшее значение площади прямоугольника $Q_{\max}=\frac{bh}{4}$ при $x=\frac{h}{2}$. Итак, из всех прямоугольников, вписанных в треугольник, наибольшую площадь имеет тот, у которого высота равна половине высоты треугольника.

558. Обозначим одну из сторон загона, перпендикулярную к стене, через x (рис. 55), тогда вторая сторона равна $(300-2x)$, а площадь загона $S=x(300-2x)$, или $S=-2x^2+300x$. Рассматривая S как функцию от x, и зная, что функция $y=-ax^2+bx+c$, где $a>0$, достигает максимума при $x=\frac{b}{2a}$, находим $S_{\max}=$ $=\frac{300}{2\cdot 2}=75$ *м*. Итак, сторона забора, перпендикулярная к стене амбара, равна 75 *м*, а параллельная этой стене — 150 *м*, т. е. загон имеет форму половины квадрата.

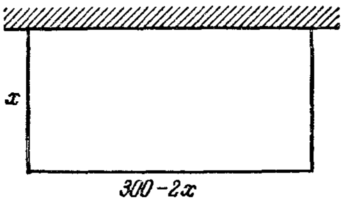

Рис. 55.

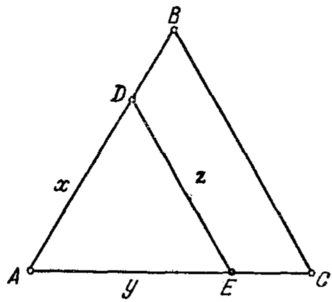

Рис. 56.

559. Пусть $DE=z$ — искомый отрезок, $AD=x$, $AE=y$ (рис. 56). Площадь треугольника ABC равна $\frac{a^2}{2}\sin 60°$, тогда площадь отсекаемого треугольника ADE

$$\frac{a^2}{4}\sin 60°. \tag{1}$$

С другой стороны, площадь отсекаемого треугольника равна

$$\frac{xy}{2}\sin 60°. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что $\frac{a^2}{2}=xy$, откуда

$$y=\frac{a^2}{2x}. \tag{3}$$

Из треугольника ADE по теореме косинусов имеем

$$z^2=x^2+y^2-2xy\cos 60^\circ=x^2+y^2-xy. \tag{4}$$

Подставляя значение y из (3) в (4), получим

$$z^2=x^2+\frac{a^4}{4x^2}-\frac{a^2}{2}. \tag{5}$$

Поскольку $(-a^2/2)$ — постоянная величина, то будем находить минимум функции $y_1=x^2+\frac{a^4}{4x^2}$. Поскольку произведение $x^2\cdot\frac{a^4}{4x^2}=\frac{a^4}{4}$ — постоянная величина, то y достигнет минимума, когда $x^2=\frac{a^4}{4x^2}$, т. е. при $x=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Подставляя это значение x в (5), получим $z^2_{\min}=\frac{a^2}{2}$, а следовательно, $z_{\min}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Так же находим, что $y=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Таким образом, треугольник ADE — равносторонний и DE параллелен BC.

560. В задаче 526 доказано, что из всех треугольников, имеющих данный угол φ, заключенный между сторонами a и b, сумма которых постоянна $(a+b=m)$, наименьшую третью сторону имеет равнобедренный треугольник $(a=b=m/2)$. По условию задачи $BC=BD+CE$ (рис. 57). Поэтому $AD+AE=AB+AC+BC$. Но так как из треугольников, у которых общий угол, и сумма сторон, заключающих этот угол, постоянна, наименьшую третью сторону имеет равнобедренный, то DE будет принимать наименьшее значение, когда $AD=AE=0,5\,(AB+AC+BC)$.

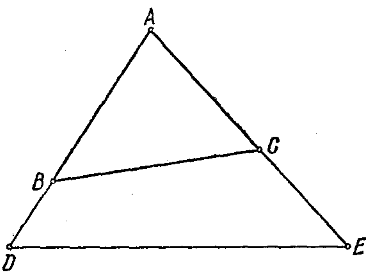

Рис. 57.

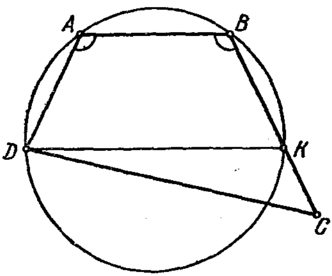

Рис. 58.

561. Через вершины A, B, D проведем окружность. Эта окружность пересечет прямую BC в точке K (рис. 58). Четырехугольник $DABK$ — равнобочная трапеция $(BK=AD)$.

Так как сумма углов четырехугольника равна $4d$, то $\angle A + \angle C < 2d$, а поэтому вершина C находится вне круга. Отсюда заключаем, что точка K находится между точками B и C, т. е. $BC > BK = AD$.

Второе решение. Продолжив DA и CB до пересечения в точке S, получим треугольник DSC, в котором $CS > DS$. Так как в треугольнике ASB углы A и B равны, то $AS = BS$. Поэтому $CB > DA$.

562. Если брать точки C на окружности по одну сторону от хорды AB (рис. 59), то угол ACB будет иметь постоянное значение, которое обозначим через α. При всяком возможном положении точки C выражение $\frac{1}{2} AC \cdot BC \sin \alpha$ будет представлять площадь треугольника ACB, которая, отличаясь от произведения $AC \cdot BC$ постоянным множителем $\frac{1}{2} \sin \alpha$, будет иметь максимум одновременно с $AC \cdot BC$. Но максимум площади треугольника ACB, имеющего постоянное основание AB, будет при наибольшем значении высоты его, что, очевидно, может быть только тогда, когда вершина C будет находиться в точке пересечения окружности с перпендикуляром, проведенным к AB через его середину, и, очевидно, в той из двух точек пересечения, которая будет отстоять дальше от AB. На нашем рисунке C_1 — искомая точка.

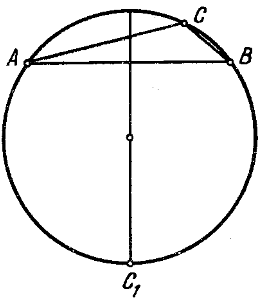

Рис. 59.

563. Через данную точку P проведем две хорды: AB перпендикулярно к диаметру, проходящему через P, и произвольную другую A_1B_1 (рис. 60). Опустив перпендикуляр OP_1 на A_1B_1, получим прямоугольный треугольник OP_1P, у которого гипотенуза OP больше катета OP_1, а следовательно, AB меньше A_1B_1. Итак, наименьшая хорда, проходящая через точку P, есть та, которая перпендикулярна к диаметру, проходящему через эту точку.

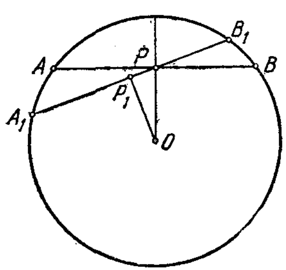

Рис. 60.

564. Пусть вписанная окружность касается сторон треугольника AB, BC, AC в точках E, F, D. Касательная MN имеет с окружностью общую точку K (рис. 61). Легко видеть, что $MK = ME$, $NF = NK$. Следовательно, $MN = ME + NF$. Также заметим, что $AC = AE + CF$. На основании изложенного заключаем, что периметр треугольника MBN равен $2p - 2AC$. Поскольку треугольники MBN и ABC подобны, то

$$\frac{MN}{AC} = \frac{p - AC}{p}. \tag{1}$$

Введем обозначения: $MN=y$, $AC=x$. В этих обозначениях (1) принимает вид

$$\frac{y}{x}=\frac{p-x}{p}. \tag{2}$$

Решая (2) относительно y, получаем $y=\frac{1}{p}\cdot x(p-x)$. Поскольку $\frac{1}{p}$ — постоянная величина, то y принимает наибольшее значение одновременно с произведением $x(p-x)$. Но так как сумма $x+(p-x)=p$ постоянная величина, то $x(p-x)$ принимает наибольшее значение при $x=p-x$, т. е. при $x=\frac{p}{2}$. Таким образом, интересующий нас отрезок принимает наибольшее значение в треугольниках, у которых основание равно четверти периметра. Очевидно, что таких треугольников бесконечное множество. Итак, $y_{\max}=\frac{1}{p}\cdot\frac{p}{2}\left(p-\frac{p}{2}\right)=\frac{p}{4}$, следовательно, в таких треугольниках искомый отрезок есть средняя линия.

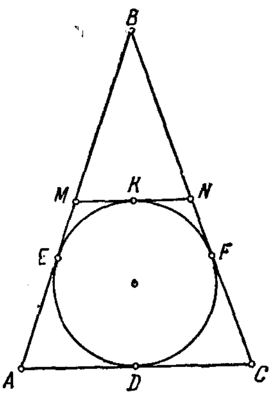

Рис. 61.

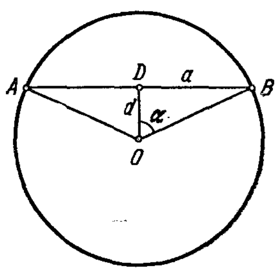

Рис. 62.

565. Первое решение. Пусть искомая хорда $AB=2a$, расстояние от центра O до этой хорды $OD=d$ (рис. 62). Требуется найти максимальное значение

$$c=2a+d. \tag{1}$$

Обозначим угол BOD через α, а радиус данного круга через R. Из прямоугольного треугольника BDO находим

$$\left.\begin{aligned} a&=R\sin\alpha,\\ d&=R\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Подставляя значения a и d из (2) в (1), получим

$$c=R(2\sin\alpha+\cos\alpha). \tag{3}$$

Если обозначить 2 через $\operatorname{tg}\varphi$, то (3) примет вид

$$c=\frac{R}{\cos\varphi}(\sin\alpha\sin\varphi+\cos\alpha\cos\varphi),\ \text{или}\ c=\frac{R}{\cos\varphi}\cos(\alpha-\varphi).$$

Величина c достигает максимума, когда $\cos(\alpha-\varphi)=1$, т. е. когда $\alpha-\varphi=0$, откуда $\alpha=\varphi$. Но так как $\operatorname{tg}\varphi=2$, то $\cos\alpha=\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}}$. Таким образом, $c_{max}=\frac{R}{\frac{1}{\sqrt{5}}}\cdot 1=R\sqrt{5}$. Искомая хорда равна

$$2a=2R\sin\alpha=2R\sqrt{1-\frac{1}{5}}=\frac{4R\sqrt{5}}{5}.$$

Второе решение. В обозначениях первого решения имеем $d=\sqrt{R^2-a^2}$, $d+2a=c$, откуда

$$c=2a+\sqrt{R^2-a^2}, \tag{1}$$

или

$$5a^2-4ac+c^2-R^2=0. \tag{2}$$

Величина c достигает максимума, когда дискриминант левой части (2) равен нулю, т. е. если $4c^2-5c^2+5R^2=0$, откуда

$$c_{max}=R\sqrt{5}. \tag{3}$$

Из (2) и (3) находим, что $2a=\frac{4R\sqrt{5}}{5}$.

566. Пусть $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$. Имеем $2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$. Очевидно, что $2R$ имеет наименьшее значение, если $\sin A=1$, т. е. когда $A=90°$. Таким образом, a — гипотенуза, b — катет. Далее, $\cos C=\frac{b}{a}$, $R=\frac{a}{2}$.

Ответ. $C=\arccos\frac{b}{a}$, $R=\frac{a}{2}$.

567. Первое решение. Обозначим через R радиус круга, а одну из сторон прямоугольника через x, тогда другая сторона прямоугольника, смежная с первой, равна $\sqrt{4R^2-x^2}$. Площадь прямоугольника $S=x\sqrt{4R^2-x^2}$. Ясно, что S и S^2 достигают максимального значения при одном и том же значении x, поэтому будем находить значение x, при котором $S^2=x^2(4R^2-x^2)$ принимает наибольшее значение. Так как сумма $x^2+(4R^2-x^2)=4R^2$ — постоянная величина, то S^2, а следовательно и S, достигает максимума при равенстве x^2 и $4R^2-x^2$. Итак, $x^2=4R^2-x^2$, откуда $x=R\sqrt{2}$. Таким образом, обе смежные стороны прямоугольника равны по $R\sqrt{2}$, т. е. искомый прямоугольник — квадрат.

Второе решение. Пусть R — радиус круга, описанного около прямоугольника $ABCD$ (рис. 63), а $\angle BAC=\alpha$. Тогда

$AB=2R\cos\alpha$, $BC=2R\sin\alpha$, $S_{ABCD}=2R^2\sin 2\alpha$. Площадь S_{ABCD} достигает максимального значения при $\sin 2\alpha=1$, т. е. при $2\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$. Тогда $AB=2R\cos\frac{\pi}{4}=2R\sin\frac{\pi}{4}=BC$, т. е. $ABCD$ — квадрат.

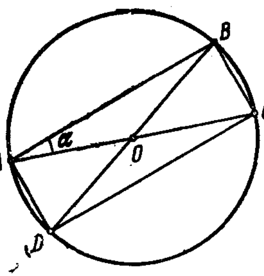

Рис. 63.

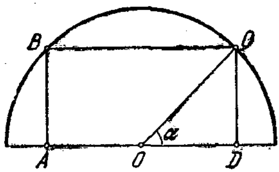

Рис. 64.

568. Пусть OC — радиус полуокружности, α — острый угол, образованный OC и диаметром (рис. 64). Из прямоугольного треугольника COD получаем $CD=OC\sin\alpha$, $OD=OC\cos\alpha$. Площадь прямоугольника $ABCD$ равна $S=2OD\cdot CD=2OC\cos\alpha\cdot OC\sin\alpha=OC^2\cdot\sin 2\alpha$.

Наибольшее значение S равно OC^2 при $\sin 2\alpha=1$, т. е. при $\alpha=45°$. Следовательно, $AD:CD=2$. Впрочем, эта задача является следствием предыдущей задачи.

569. Пусть в данный сегмент AMB (рис. 65) вписан искомый прямоугольник $CEFD$. Обозначим: $OF=r$, $OH=a$, $OK=x$, $KF=y$. Из прямоугольного треугольника OKF имеем $KF^2=OF^2-OK^2$, или $y^2=r^2-x^2$, откуда $y=\sqrt{r^2-x^2}$. Площадь прямоугольника $CEFD$ равна $S=2KF\cdot KH=2KF\,(OK-OH)$, или $S=2y\,(x-a)=2\,(x-a)\sqrt{r^2-x^2}$.

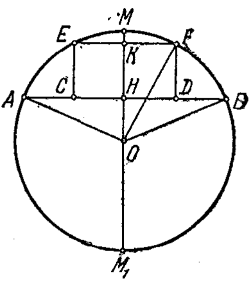

Рис. 65.

Выражение $(x-a)\sqrt{r^2-x^2}$ достигает максимума одновременно с квадратом этого выражения: $(x-a)^2(r^2-x^2)=(x-a)(x-a)(r+x)(r-x)$.

Мы умеем находить максимум произведения нескольких сомножителей, сумма которых постоянна. Но в нашем случае сумма сомножителей не есть постоянное число. Для того чтобы воспользоваться упомянутым методом, введем два неопределенных коэффициента α и β, обладающих таким свойством, что при умножении на них соответственно $(r+x)$ и $(r-x)$ сумма всех четырех сомножителей становится постоянной, т. е. сумма $(x-a)+(x-a)+\alpha(r+x)+\beta(r-x)$, или $(\alpha-\beta+2)x+\alpha r+\beta r-2a$ делается постоянной величиной. Это возможно, когда $\alpha-\beta+2=0$.

Условием для достижения максимума произведения $(x-a)(x-a)\alpha(r+x)\beta(r-x)$ является $x-a=\alpha(r+x)=\beta(r-x)$.

Итак, имеем систему

$$\begin{cases} \alpha-\beta+2=0, \\ x-a=\alpha(r+x), \\ x-a=\beta(r-x). \end{cases}$$

Исключив из этих уравнений α и β, получим

$$x=\frac{a \pm \sqrt{a^2+8r^2}}{4}.$$

Знак плюс соответствует прямоугольнику, вписанному в данный сегмент AMB, а знак минус — прямоугольнику, вписанному в дополнительный сегмент AM_1B.

Чтобы можно было построить прямоугольник по заданному x, достаточно, чтобы $|x|$ было меньше r, т. е.

$$|a \pm \sqrt{a^2+8r^2}| < 4r.$$

Это же неравенство приводит к условию $a < r$, которое всегда имеет место. Следовательно, задача всегда возможна.

В частном случае, когда $a=0$, имеем

$$x=\frac{\pm \sqrt{8r^2}}{4}=\frac{\pm r\sqrt{2}}{2},$$

т. е. когда сегмент равен полукругу, а вписанный в него прямоугольник наибольшей площади составляет половину вписанного в целый круг квадрата.

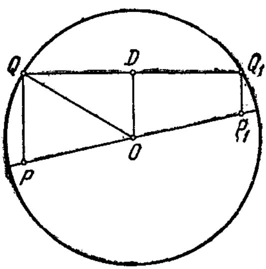

Рис. 66.

570. Пусть средняя линия $OD=x$, высота $QQ_1=h$, радиус круга — R (рис. 66). Из прямоугольного треугольника ODQ имеем $OD^2=OQ^2-DQ^2$, или, в наших обозначениях,

$$x^2=R^2-\frac{h^2}{4}. \qquad (1)$$

Площадь трапеции равна

$$S=hx. \qquad (2)$$

Поскольку S и S^2 достигают максимума одновременно, то исследуем $S^2=h^2x^2$ или, учитывая (1),

$$S^2=\left(R^2-\frac{h^2}{4}\right)h^2, \text{ т. е. } h^4-4h^2R^2+4S^2=0,$$

откуда

$$h^2=2R^2 \pm \sqrt{4R^4-4S^2}. \qquad (3)$$

Для того чтобы h^2 было действительным числом, необходимо и достаточно, чтобы $4R^4 \geqslant 4S^2$, или $S \leqslant R^2$. Отсюда следует, что наибольшее значение S равно R^2. Подставляя это значение S в (3), получим $h=R\sqrt{2}$. Наконец, из (1) находим, что $x=\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

571. Пусть центральный угол сектора равен α, а радиус R; тогда длина дуги сектора $l=R\alpha$, а площадь сектора $S=\frac{R^2\alpha}{2}$. Итак, имеем систему

$$\begin{cases} 2R+R\alpha=2p, \\ S=\frac{R^2\alpha}{2}. \end{cases}$$

Из первого равенства системы находим $\alpha=\frac{2p-2R}{R}$. Подставляя это значение α во второе равенство, получаем $S=R\,(p-R)$. Поскольку сумма $R+(p-R)=p$ — постоянная величина, то S достигает максимума при условии $R=p-R$, откуда $R=\frac{p}{2}$.

Далее, поскольку $2R+R\alpha=2p$ и $R=\frac{p}{2}$, то $\alpha=2$ радианам.

Итак, $S_{\max}=\frac{\left(\frac{p}{2}\right)^2\cdot 2}{2}=\frac{p^2}{4}$.

572. Обозначим угол ABC через α (рис. 67). Из прямоугольных треугольников ABC и ACD имеем

$$\left.\begin{aligned} AC&=AB\sin\alpha=2R\sin\alpha, \\ CD&=AC\cos\alpha=2R\sin\alpha\cos\alpha, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

откуда $AC\cdot CD=4R^2\sin^2\alpha\cos\alpha$. Обозначим выражение $\sin^2\alpha\cos\alpha$ через y. Произведение $AC\cdot CD$ достигает максимума вместе с y, а потому и вместе с y^2; $y^2=\sin^4\alpha\cos^2\alpha=\sin^2\alpha\sin^2\alpha\,(1-\sin^2\alpha)=$ $=4\,\frac{\sin^2\alpha}{2}\,\frac{\sin^2\alpha}{2}\,(1-\sin^2\alpha)$. Так как $\frac{\sin^2\alpha}{2}+\frac{\sin^2\alpha}{2}+(1-\sin^2\alpha)=1$ — постоянная величина, то y^2 достигает максимума при $\frac{\sin^2\alpha}{2}=1-\sin^2\alpha$, откуда

$$\sin^2\alpha=\frac{2}{3}. \qquad (2)$$

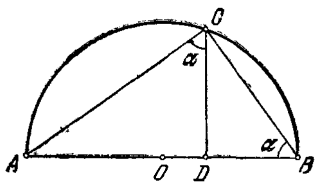

Рис. 67.

Из равенств (1) и (2) имеем $AD=AC\sin\alpha=2R\sin^2\alpha=\frac{4R}{3}$. Итак, для построения точки C достаточно на диаметре AB отложить отрезок $AD=\frac{4R}{3}$ и из точки D провести перпендикуляр к диаметру AB. Точка пересечения этого перпендикуляра с окружностью и есть точка C.

573. Пусть (рис. 68) R_1 и R_2 — радиусы окружностей, описанных соответственно около треугольников ADC и BDC, угол $ADC=\alpha$ ($\angle BDC=180^\circ-\alpha$). Тогда

$$AC=2R_1\sin\alpha,\quad BC=2R_2\sin(180^\circ-\alpha)=2R_2\sin\alpha,$$

откуда $R_1=\frac{AC}{2\sin\alpha}$, $R_2=\frac{BC}{2\sin\alpha}$. Поскольку AC и BC постоянные величины, то R_1 и R_2 достигают наименьших значений, когда $\sin\alpha$ принимает наибольшее значение, т. е. когда $\sin\alpha=1$, откуда $\alpha=\angle ADC=90°$. Итак, R_1 и R_2 наименьшие, когда CD — высота треугольника ABC. К этому выводу можно прийти и из чисто геометрических соображений. Если CD — высота, то AC и BC — диаметры окружностей, а если CD — не высота, то AC и BC — хорды.

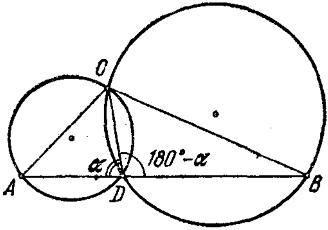

Рис. 68.

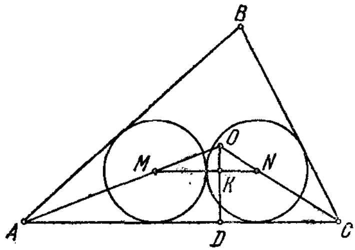

Рис. 69.

574. Очевидно, что искомые круги должны касаться друг друга и каждый из них должен касаться двух сторон треугольника, так как в противном случае они будут не наибольшими, поскольку их радиусы можно было бы увеличить (рис. 69). Следовательно, центры искомых кругов должны находиться на биссектрисах внутренних углов треугольника. Пусть O — точка пересечения биссектрис углов A и C, $OD=R$ — радиус круга, вписанного в данный треугольник ABC, r — радиусы искомых кругов, M и N — центры искомых кругов, K — точка пересечения MN и OD. Из подобия треугольников AOC и MON имеем $\frac{OK}{MN}=\frac{OD}{AC}$, или, в наших обозначениях, $\frac{R-r}{2r}=\frac{R}{AC}$, откуда $\frac{1}{r}=\frac{2}{AC}+\frac{1}{R}$. Поскольку $\frac{1}{R}$ — постоянная величина, то $\frac{1}{r}$ будет тем меньше, чем больше AC. Следовательно, r принимает наибольшее значение, когда AC — наибольшее, т. е. оба круга должны касаться наибольшей стороны данного треугольника.

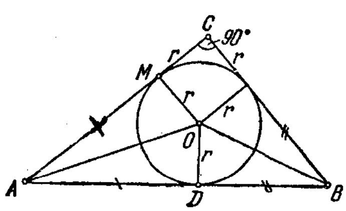

Рис. 70.

575. Первое решение. Пусть $AB=c$ — гипотенуза прямоугольного треугольника ACB (рис. 70). Будем считать c постоянной величиной, а r — переменной. Пусть P — периметр треугольника ABC; нетрудно установить, что $P=2(c+r)$. Тогда

$$\frac{P}{r}=\frac{2(c+r)}{r}=2\left(\frac{c}{r}+1\right). \qquad (1)$$

Так как AO и BO — биссектрисы острых углов прямоугольного треугольника ABC, то $\angle OAD + \angle OBD = 45°$, а поэтому $\angle AOB = 135°$.

Из всех треугольников с основанием $AB = c$ и противолежащим углом в 135° наибольшую высоту OD, опущенную на AB, имеет равнобедренный треугольник ($AO = OB$). Но тогда $\angle OAD = \angle OBD = 22°30'$, $\angle CAB = \angle CBA = 45°$, $AC = CB$. Таким образом, если $AC = CB$, то указанная высота $OD = r$ имеет наибольшее значение, а поэтому на основании равенства (1) отношение $\frac{p}{r}$ имеет наименьшее значение, а отношение $\frac{r}{p}$ имеет наибольшее значение.

Второе решение. Известно, что в любом прямоугольном треугольнике $r = p - c$, где r — радиус вписанной окружности, p — полупериметр, c — гипотенуза. Пусть один из острых углов треугольника α, тогда катеты будут равны $c \sin\alpha$ и $c \cos\alpha$, а периметр $2p = c\,(1 + \sin\alpha + \cos\alpha) = c\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right) =$

$$= 2c\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right) = 2c\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= c\sqrt{2}\,[\cos 45° + \cos(45° - \alpha)], \quad \text{откуда} \quad \frac{c}{p} = \frac{\sqrt{2}}{\cos 45° + \cos(45° - \alpha)}.$$

Итак, $\frac{r}{2p} = \frac{p - c}{2p} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{c}{p}\right) = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\sqrt{2}}{\cos 45° + \cos(45° - \alpha)}\right]$.

Отношение $\frac{r}{2p}$ принимает наибольшее значение, когда $\frac{\sqrt{2}}{\cos 45° + \cos(45° - \alpha)}$ принимает наименьшее значение, а последнее имеет место при наибольшем значении $\cos(45° - \alpha)$, т. е. при $\cos(45° - \alpha) = 1$, или при $45° - \alpha = 0$, откуда $\alpha = 45°$, что и требовалось доказать.

576. Пусть $AB = a_n$, $AM = a_{2n}$, C — середина AB. Дуга AMB содержит $\frac{360°}{n}$; дуга MB содержит $\frac{180°}{n}$. Имеем

$$AM = a_{2n} = \frac{AC}{\cos\angle MAB} = \frac{AB}{2\cos\angle MAB} = \frac{a_n}{2\cos\angle MAB}.$$

Итак, $a_{2n} = \frac{a_n}{2\cos\angle MAB}$ (рис. 71). Поскольку $n \geqslant 3$, то $a_{2n} \leqslant \frac{a_n}{2\cos 30°} = \frac{a_n}{\sqrt{3}}$. Но так как $\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{2}{3}$, то $a_{2n} < \frac{2}{3}a_n$.

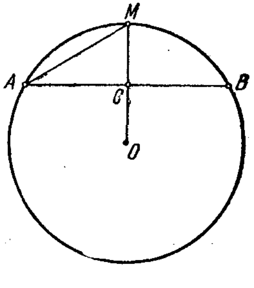

Рис. 71.

577. Введем обозначения $AD = AE = x$, $\angle DAE = \alpha$ (рис. 72). Из прямоугольного треугольника ADF (F — основание высоты AF на DE треугольника DAE) имеем $DF = AD\sin\frac{\alpha}{2} = x\sin\frac{\alpha}{2}$.

Следовательно, имеем $DE=2x\sin\frac{\alpha}{2}$. Из прямоугольного треугольника ADB находим, что $\cos\alpha=\frac{x}{AB}=\frac{x}{d}$. Далее, поскольку

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{x}{d}}{2}}=\sqrt{\frac{d-x}{2d}},\text{ то}$$

$$DE=2x\sin\frac{\alpha}{2}=2x\sqrt{\frac{d-x}{2d}}=\frac{2}{\sqrt{2d}}\sqrt{x^2(d-x)}=\frac{2}{\sqrt{2d}}\sqrt{\frac{1}{2}xx(2d-2x)}.$$

Так как сумма $x+x+(2d-2x)=2d$ — постоянная величина, то произведение $xx(2d-2x)$ принимает наибольшее значение при $x=2d-2x$, т. е. при $x=\frac{2d}{3}$, а следовательно, и DE принимает наибольшее значение при $x=\frac{2d}{3}$. Итак, наибольшее возможное расстояние $DE=2\cdot\frac{2d}{3}\sqrt{\frac{d-\frac{2d}{3}}{2d}}=\frac{2d\sqrt{6}}{9}$.

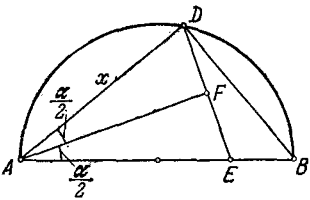

Рис. 72.

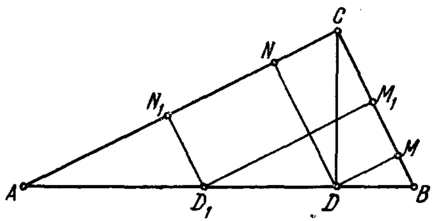

Рис. 73.

578. Опустим из вершины C прямого угла треугольника ABC (рис. 73) перпендикуляр CD на гипотенузу AB. Из полученной точки D опустим перпендикуляры DM и DN на катеты BC и AC. Образовавшийся прямоугольник $CMDN$ — искомый. Действительно, любой другой прямоугольник $CM_1D_1N_1$ имеет бóльшую диагональ, так как его диагональ CD_1, являясь наклонной к AB, больше перпендикуляра CD.

579. Пусть P — периметр, S — площадь, a и b — длины сторон прямоугольника. Так как $\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ (см. задачу 9), то

$$P=2(a+b)=4\cdot\frac{a+b}{2}\leqslant 4\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=2c\sqrt{2},\text{ откуда}$$

$$P_{\max}=2c\sqrt{2}. \qquad (1)$$

На основании теоремы о сравнении среднего арифметического и среднего геометрического, имеем $S=ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{P^2}{16}$, откуда

$$S_{\max}=\frac{P^2}{16}=\frac{(2c\sqrt{2})^2}{16}=\frac{c^2}{2}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) заключаем, что $S_{\max}$ и $P_{\max}$ достигается, когда $a=b$, т. е. когда прямоугольник — квадрат. Впрочем, эту задачу можно решить, пользуясь результатом задачи 523.

580. Обозначим диагонали четырехугольника через d_1 и d_2, а угол между ними через α. Известно, что площадь S четырехугольника равна полупроизведению его диагоналей на синус угла между ними. Имеем

$$S=\frac{d_1 d_2\sin\alpha}{2}=\frac{2d_1 d_2\sin\alpha}{4}\leqslant\frac{(d_1-d_2)^2+2d_1 d_2}{4}=\frac{d_1^2+d_2^2}{4},$$

что и требовалось доказать.

Знак равенства имеет место только для четырехугольника, у которого диагонали равны и взаимно перпендикулярны.

581. Пусть сторона ромба a, а острый угол α. Из рис. 74 видно, что

$$\frac{AC}{2}=OC=a\sin\frac{\alpha}{2} \quad \text{и} \quad AC=2a\sin\frac{\alpha}{2};$$

$$\frac{BD}{2}=OD=a\cos\frac{\alpha}{2} \quad \text{и} \quad BD=2a\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Имеем

$$k=\frac{4a}{AC+BD}=\frac{4a}{2a\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{2}{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+45^\circ\right)}. \qquad (1)$$

Так как $0<\frac{\alpha}{2}<45^\circ$, то имеет место неравенство

$$\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\left(\frac{\alpha}{2}+45^\circ\right)\leqslant 1. \qquad (2)$$

В силу (1) и (2) заключаем, что $\sqrt{2}\leqslant k<2$, что и требовалось доказать.

582. Пусть ABC (рис. 75) — один из возможных треугольников. Обозначим угол ACN через α, тогда и угол MAB также равен α.

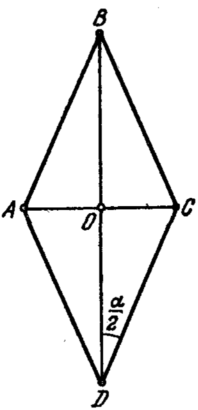

Рис. 74.

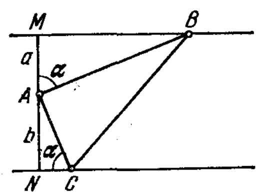

Рис. 75.

Из треугольника AMB имеем $AB=\frac{a}{\cos\alpha}$, а из треугольника ANC находим $AC=\frac{b}{\sin\alpha}$. Площадь прямоугольного треугольника ABC

равна $S=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{ab}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{ab}{\sin 2\alpha}$. Так как $\frac{ab}{\sin 2\alpha}$ принимает наименьшее значение, когда $\sin 2\alpha$ наибольшее, т. е. когда $\sin 2\alpha=1$, то $S_{\min}=\frac{ab}{1}=ab$ при $\alpha=45°$.

Ответ. ab.

583. Пусть MN — секущая прямая, проходящая через точку A (рис. 76), где M — точка на стороне OM данного угла MON, N — точка на стороне ON. Проведем $AP \parallel ON$ и $AQ \parallel OM$ (P на OM, Q на ON).

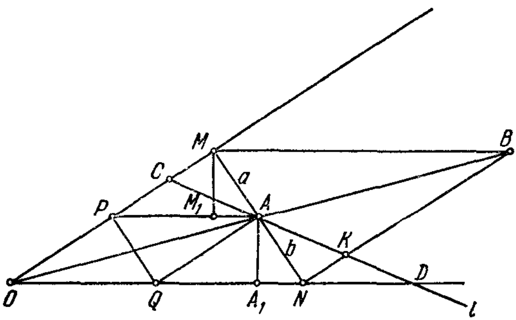

Рис. 76.

Введем обозначения: $AM=a$, $AN=b$, p — площадь $\triangle APM$, q — площадь $\triangle AQN$, s — площадь $\triangle APQ$ и площадь $\triangle OPQ$. Так как $AP \parallel ON$, то $\angle MAP=\angle MNO$. Следовательно, если MM_1 и AA_1 соответственно высоты треугольников AMP и NAQ, то треугольники MM_1A и A_1AN подобны, а поэтому

$$\frac{MM_1}{AA_1}=\frac{a}{b}. \qquad (1)$$

Далее,

$$\frac{p}{s}=\frac{\frac{1}{2}PA\cdot MM_1}{\frac{1}{2}OQ\cdot AA_1}. \qquad (2)$$

Учитывая, что $PA=OQ$, из (1) и (2) получаем $\frac{p}{s}=\frac{a}{b}$ и $p=\frac{as}{b}$. Аналогично получаем $\frac{q}{s}=\frac{b}{a}$ и $q=\frac{bs}{a}$. Поскольку площадь параллелограмма $OPAQ$ — постоянная величина, то площадь треугольника OMN будет иметь наименьшую величину, когда сумма $p+q$ будет наименьшей. Имеем $p+q=\frac{as}{b}+\frac{bs}{a}=s\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$. Известно, что $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$, причем равенство достигается при $a=b$. Таким образом, $p+q$, а следовательно, и s принимает наименьшее значение, когда $a=b$.

Построение. Продолжаем OA на отрезок $AB=OA$; затем проводим $BN \parallel OM$ и, наконец, проводим прямую NAM.

Второе решение. Если l—какая-либо прямая, проходящая через A и отличная от MN, то треугольники AMC и ANK равны ($CM \parallel NK$), а поэтому площадь треугольника AMC меньше площади треугольника AND. Но тогда площадь треугольника OCD больше площади треугольника OMN.

584. Пусть равносторонний треугольник $A_1B_1C_1$—искомый (рис. 77). Обозначим угол BC_1A_1 через α, а угол BA_1C_1 через β. Поскольку $\angle B=60°$, то

$$\alpha+\beta=120°. \qquad (1)$$

Так как $\angle BC_1A_1+\angle AC_1B_1=120°$, т. е. $\alpha+\angle AC_1B_1=120°$, то, учитывая (1), заключаем, что $\angle AC_1B_1=\beta$. Аналогично, легко убедиться, что $\angle AB_1C_1=\angle CA_1B_1=\alpha$, $\angle CB_1A_1=\beta$.

Таким образом, треугольники A_1BC_1, B_1AC_1, A_1CB_1 равны. Следовательно, $AC_1=BA_1=CB_1=x$, $AB_1=BC_1=CA_1=y$. Треугольник $A_1B_1C_1$ будет иметь наименьшую площадь, когда сумма площадей треугольников AB_1C_1, BA_1C_1, CA_1B_1 будет наибольшей. Итак, достаточно найти, при каких условиях площадь треугольника AB_1C_1 максимальна. Имеем

$$S_{\triangle AB_1C_1}=\frac{1}{2}xy\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{4}xy.$$

Но так как $x+y$—постоянная величина (сторона данного треугольника), то произведение xy достигает максимума при $x=y$. Отсюда заключаем, что треугольник $A_1B_1C_1$ имеет наименьшую площадь, когда треугольники AB_1C_1, BA_1C_1, CA_1B_1—равносторонние, т. е. стороны треугольника $A_1B_1C_1$—средние линии данного треугольника.

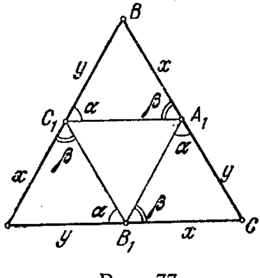

Рис. 77.

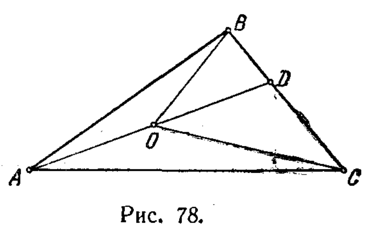

Рис. 78.

585. Проведем прямую AOD (рис. 78). Угол BOD больше угла BAO, так как $\angle BOD$—внешний по отношению к треугольнику ABO. Аналогично убеждаемся, что $\angle COD$ больше угла CAO. Следовательно, $\angle BOC=\angle BOD+\angle COD > \angle BAO+\angle CAO=\angle BAC$, что и требовалось доказать.

586. Пусть отрезок c образует со сторонами угла углы β и $\alpha-\beta$ (рис. 79); тогда $a=c\sin\beta$, $b=c\sin(\alpha-\beta)$. Следовательно, имеем $a+b=c[\sin\beta+\sin(\alpha-\beta)]=2c\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)$. Поскольку

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)\leqslant 1,\ \text{то}\ a+b\leqslant 2c\sin\frac{\alpha}{2},\ \text{откуда}\quad \sin\frac{\alpha}{2}\leqslant\frac{a+b}{2c}.$$

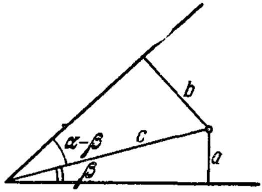

Рис. 79.

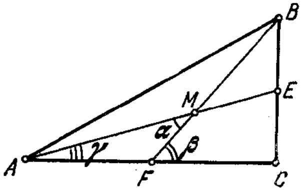

Рис. 80.

587. Пусть M — точка пересечения медиан AE и BF прямоугольного треугольника ABC (рис. 80). По условию, $\angle AMF=\alpha$. Введем обозначения: $\angle BFC=\beta$, $\angle EAC=\gamma$; $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$. Так как внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним, то $\alpha=\beta-\gamma$. Из прямоугольного треугольника BCF находим $\operatorname{tg}\beta=\frac{2a}{b}$, а из прямоугольного треугольника ACE получим $\operatorname{tg}\gamma=\frac{a}{2b}$. Имеем

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\beta-\gamma)=\frac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\gamma}{1+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}=\frac{\frac{2a}{b}-\frac{a}{2b}}{1+\frac{2a}{b}\cdot\frac{a}{2b}}=\frac{3ab}{2(a^2+b^2)}=\frac{3ab}{2c^2}.$$

Но так как $\frac{a}{c}=\sin A$, $\frac{b}{c}=\cos A$, то

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{2}\,\frac{a}{c}\,\frac{b}{c}=\frac{3}{2}\sin A\cos A=\frac{3}{4}\sin 2A.$$

Поскольку $\sin 2A\leqslant 1$, то $\operatorname{tg}\alpha\leqslant {}^3/_4$. Знак равенства имеет место только при $\sin 2A=1$, т. е. при $A=45^\circ$ (треугольник равнобедренный).

588. Пусть O — искомая точка (рис. 81, a); расстояние CA и CB от вершины прямого угла обозначим соответственно через a и b, а углы AOC и BOC — через α и β. Имеем $\theta=\beta-\alpha$, откуда

$$\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}(\beta-\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Но $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{x}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{b}{x}$, где $x=OC$. Итак, $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{b-a}{x+\frac{ab}{x}}$.

Поскольку наибольшее значение острого угла θ достигается одновременно с наибольшим значением его тангенса и так как числитель $b-a$ есть постоянная величина, то надо найти наименьшее значение знаменателя $x+\frac{ab}{x}$.

Так как произведение слагаемых x и $\frac{ab}{x}$ есть постоянная величина, то сумма $x+\frac{ab}{x}$ принимает наименьшее значение при равенстве слагаемых. Итак, $x=\frac{ab}{x}$, откуда $x=\sqrt{ab}$.

Ответ. Искомая точка O отстоит от вершины прямого угла C на расстоянии, равном $\sqrt{CA\cdot CB}$.

Обобщение задачи, указанной в условии.

На одной стороне произвольного угла C дан отрезок AB. Найти на другой стороне угла точку, из которой отрезок AB виден под

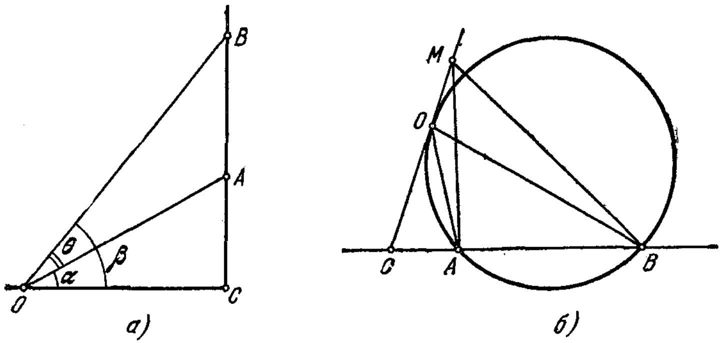

Рис. 81.

наибольшим углом (рис. 81, *б*). Проведем окружность, проходящую через точки A, B и касающуюся прямой OC. Тогда, по известной теореме, $OC=\sqrt{CA\cdot CB}$. Точка C — искомая, так как для любой отличной от O точки M на OC угол AMB является опирающимся на AB углом с вершиной вне круга, т. е. этот угол меньше вписанного угла.

589. Пусть точки C и D делят хорду AB на три равные части (рис. 82). Углы OAC и OBD равны как углы при основании равнобедренного треугольника AOB. Треугольники AOC и BOD равны, так как $AO=BO$, $AC=BD$ и $\angle A=\angle B$; следовательно, углы AOC и BOD равны. Обозначим их через α, а угол DOC через β. Из равенства этих же треугольников заключаем, что $OC=OD$. Поскольку треугольники AOC и COD имеют равные основания и общую высоту, то они равновелики, т. е.

$$\frac{1}{2}OC^2\sin\beta=\frac{1}{2}OC\cdot OA\sin\alpha,\ \text{или}\ OC\sin\beta=OA\sin\alpha. \quad (1)$$

Так как $OC < OA$, то из (1) следует, что $\sin\beta > \sin\alpha$, а поскольку углы α и β острые, то $\beta > \alpha$.

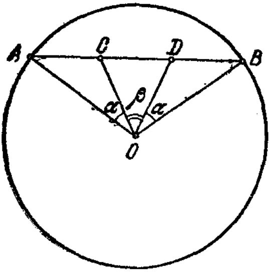

Рис. 82.

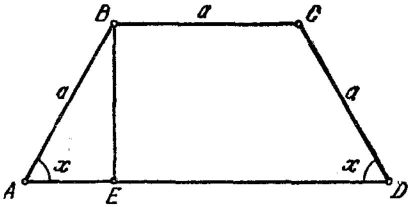

Рис. 83.

590. Пусть в трапеции $ABCD$ (рис. 83) BE — высота, угол BAE обозначим через x. Имеем $AE = a\cos x$, $AD = a + 2AE = a + 2a\cos x$; $BE = a\sin x$. Площадь трапеции равна

$$S = (AD + BC)\frac{BE}{2} = (a + 2a\cos x + a)\frac{a\sin x}{2} = a^2(1+\cos x)\sin x.$$

Поскольку $1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$, $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, то площадь $S = 4a^2\cos^3\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}$. Так как $4a^2$ — постоянная величина, то S достигает наибольшей величины при том же значении x, что и $\cos^3\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}$. Поэтому достаточно найти, при каком значении x выражение $\cos^3\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}$ достигает максимума. Имеем

$$\cos^3\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\cos^6\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{2}} =$$
$$= \sqrt{27\,\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{3}\cdot\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{3}\cdot\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{3}\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Поскольку сумма $\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{3} + \frac{\cos^2\frac{x}{2}}{3} + \frac{\cos^2\frac{x}{2}}{3} + \sin^2\frac{x}{2} = 1$ — постоянная величина, то $\cos^3\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}$ достигает максимума при $\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{3} = \sin^2\frac{x}{2}$, откуда $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$, т. е. $x = 60°$, что и требовалось доказать.

591. Умножим обе части равенства $\frac{1}{h_c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ на $2S$, где S — площадь треугольника. Получим

$$\frac{2S}{h_c}=\frac{2S}{a}+\frac{2S}{b}. \qquad (1)$$

Поскольку $c=\frac{2S}{h_c}$, $h_a=\frac{2S}{a}$, $h_b=\frac{2S}{b}$, то из (1) следует, что

$$c=h_a+h_b. \qquad (2)$$

Но так как $h_a=c\sin B$, $h_b=c\sin A$, то из (2) имеем

$$c\sin A+c\sin B=c,$$

или

$$\sin A+\sin B=1,$$

или

$$2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}=1. \qquad (3)$$

Поскольку $A+B+C=180°$, то $\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$. Таким образом, (3) перепишется так:

$$2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}=1. \qquad (4)$$

Учитывая, что $\cos\frac{A-B}{2}\leqslant 1$, из (4) получаем $\cos\frac{C}{2}\geqslant\frac{1}{2}$, откуда $\frac{C}{2}\leqslant 60°$ и $C\leqslant 120°$.

592. Известно (задача 512), что в треугольнике (рис. 84) биссектриса угла C равна

$$l_c=\frac{2ab}{a+b}\cos\frac{C}{2}. \qquad (1)$$

Из условия задачи находим

$$m_c=\frac{ab}{a+b}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что $m_c=\frac{l_c}{2\cos\frac{C}{2}}$. Но так как $l_c\leqslant m_c$, то

$2\cos\frac{C}{2}=\frac{l_c}{m_c}\leqslant 1$, а следовательно, $\cos\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{2}$, откуда $\frac{C}{2}\geqslant 60°$ и $C\geqslant 120°$.

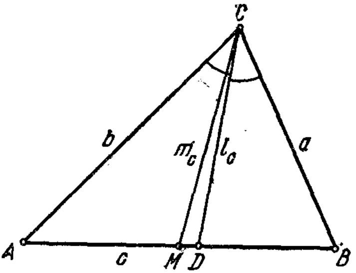

Рис. 84.

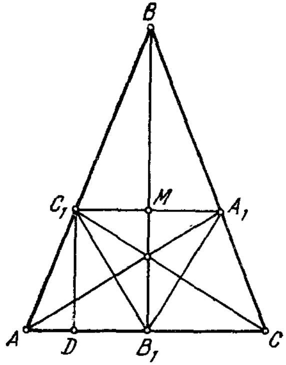

Рис. 85.

593. Пусть M — точка пересечения прямых BB_1 и A_1C_1 (рис. 85). Из прямоугольного треугольника A_1MB_1 получаем

$$\operatorname{tg}\angle B_1A_1C_1=\frac{B_1M}{A_1M}. \qquad (1)$$

Опустим из точки C_1 перпендикуляр C_1D на AC. Имеем

$$\sin\angle BAC=\frac{C_1D}{AC_1}=\frac{B_1M}{A_1C}. \qquad (2)$$

Поскольку в треугольнике A_1C_1C углы A_1CC_1 и A_1C_1C равны, то $A_1C=A_1C_1$. Следовательно, $A_1C=2A_1M$. Поэтому (2) можно переписать в виде

$$\sin\angle BAC=\frac{B_1M}{2A_1M}. \qquad (3)$$

Из (1) и (3) следует, что

$$\operatorname{tg}\angle B_1A_1C=2\sin\angle BAC. \qquad (4)$$

Так как угол BAC острый, то $\sin\angle BAC<1$. Из (4) и (5) заключаем, что $\operatorname{tg}\angle B_1A_1C_1<2$, что и требовалось доказать.

594. Если диагонали параллелограмма x и y, то по известной теореме имеем

$$x^2+y^2=2a^2+2b^2. \qquad (1)$$

Из треугольника (с нетупым углом α), образованного стороной b и половинами диагоналей, на основании теоремы косинусов получаем (рис. 86): $b^2=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}-\frac{xy\cos\alpha}{2}$, откуда

$$x^2+y^2=4b^2+2xy\cos\alpha. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует $2a^2+2b^2=4b^2+2xy\cos\alpha$, или

$$a^2-b^2=xy\cos\alpha. \qquad (3)$$

Вернемся к равенству (1). Поскольку сумма x^2+y^2 постоянна, то произведение x^2y^2 принимает наибольшее значение при $x^2=y^2=a^2+b^2$. Итак, $x^2y^2\leqslant(a^2+b^2)^2$, откуда

$$xy\leqslant a^2+b^2. \qquad (4)$$

Из (3) и (4) следует, что $a^2-b^2\leqslant(a^2+b^2)\cos\alpha$, откуда $\cos\alpha\geqslant\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$. Знак равенства имеет место при $a=b$, т. е. когда параллелограмм — ромб ($\alpha=90^\circ$).

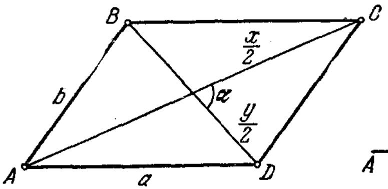

Рис. 86.

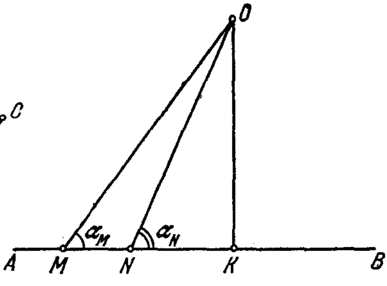

Рис. 87.

595. Пусть прямые MO и NO пересекаются в точке O, причем $\angle OMB=\alpha_M$, $\angle ONB=\alpha_N$ и пусть точка O проектируется на прямую AB в точку K (рис. 87). Имеем $MK=OK\operatorname{ctg}\alpha_M$, $NK=OK\operatorname{ctg}\alpha_N$. Далее,

$$MN=MK-NK=OK(\operatorname{ctg}\alpha_M-\operatorname{ctg}\alpha_N). \qquad (1)$$

Поскольку по условию $|\operatorname{ctg}\alpha_M-\operatorname{ctg}\alpha_N|<MN$, то из (1) следует, что $OK>1$, что и требовалось доказать. На рисунке α_M и α_N — острые углы.

Рекомендуем рассмотреть самостоятельно случаи, когда оба угла тупые и когда один угол тупой, а другой острый.

596. Из данного равенства находим $x=-\frac{by+cz}{a}$. Поэтому

$$ayz+bzx+cxy=\frac{1}{a}[a^2yz-(bz+cy)(by+cz)]=$$
$$=-\frac{1}{a}[bcy^2+bcz^2+(b^2+c^2-a^2)yz]=$$
$$=-\frac{1}{4abc}\left\{[2bcy+(b^2+c^2-a^2)z]^2+[4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2]z^2\right\}.$$

Но так как

$$4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2=(a+b+c)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)>0,$$

то $ayz+bzx+cxy<0$, что и требовалось доказать.

597. Вначале докажем необходимость этого неравенства. Обозначив полупериметр треугольника со сторонами x_1, x_2, x_3 буквой l, получим величину площади треугольника в виде

$$\sqrt{l(l-x_1)(l-x_2)(l-x_3)}=$$
$$=\sqrt{l[l^3-(x_1+x_2+x_3)l^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)l-x_1x_2x_3]}=$$
$$=\sqrt{l}\sqrt{\left(-\frac{p}{2}\right)^3-(-p)\left(-\frac{p}{2}\right)^2+q\left(-\frac{p}{2}\right)-(-r)}=$$
$$=\sqrt{l}\sqrt{-\frac{p^3}{8}+\frac{p^3}{4}-\frac{pq}{2}+r}=\sqrt{\frac{l}{8}}\sqrt{p^3-4pq+8r}.$$

Очевидно, необходимо, чтобы выполнялось неравенство $p^3-4pq+8r>0$, так как в противном случае площадь треугольника не может быть выражена положительным числом. Таким образом, доказано, что неравенство $p^3-4pq+8r>0$ является необходимым условием возможности построения треугольника со сторонами x_1, x_2, x_3.

Далее, для того чтобы из отрезков x_1, x_2, x_3 можно было построить треугольник, достаточно, чтобы имели место неравенства:

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2-x_3>0, \\ x_2+x_3-x_1>0, \\ x_3+x_1-x_2>0. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Перемножив неравенства (1), получим

$$(x_1+x_2-x_3)(x_2+x_3-x_1)(x_3+x_1-x_2)>0. \qquad (2)$$

Вообще неравенство (2) может иметь место, когда все три сомножителя левой части положительны или когда один положительный, а два отрицательны. Докажем, что при $x_1>0$, $x_2>0$, $x_3>0$ второго случая быть не может. Действительно, предположим, что только один сомножитель в левой части (2) положителен, а два других отрицательны, например, $x_1+x_2-x_3<0$ и $x_2+x_3-x_1<0$. Сложив эти неравенства, получим $2x_2<0$, т. е. $x_2<0$, что невозможно.

По формулам Виета имеем *)

$$x_1+x_2+x_3=-p,\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=q,\ x_1x_2x_3=-r. \qquad (3)$$

Учитывая (3), неравенство (2) можно переписать в виде

$$(-p-2x_3)(-p-2x_1)(-p-2x_2)>0,$$
$$-p^3-2p^2(x_1+x_2+x_3)-4p(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)-8x_1x_2x_3>0$$

или, учитывая еще раз (3), получаем требуемое, т. е. $p^3-4pq+8r>0$.

598. Пусть AD, BE, CF — медианы треугольника ABC, а O — точка их пересечения (рис. 88). В прямоугольном треугольнике AOB медиана $OF=\frac{c}{2}$, где c — длина стороны AB. Следовательно, медиана $CF=\frac{3c}{2}$. Дополним треугольник ABC до параллелограмма

---

*) См. И. Х. Сивашинский. Задачник по элементарной математике, «Наука», 1966, задача 100.

$AKBC$. В этом параллелограмме диагональ $KC = 3c$. Так как сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон, то $(3c)^2 + c^2 = 2a^2 + 2b^2$, или

$$5c^2 = a^2 + b^2. \qquad (1)$$

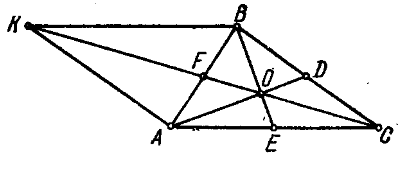

Рис. 88.

Поскольку $c < a+b$ и $c > |a-b|$, то, учитывая (1), заключаем, что условия существования треугольника ABC принимают вид

$$\left.\begin{aligned} 5(a+b)^2 &> a^2+b^2, \\ 5(a-b)^2 &< a^2+b^2. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Первое неравенство из (2) имеет место при любых a и b, а второе неравенство преобразуется в следующее: $\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{5}{2}\left(\frac{a}{b}\right) + 1 < 0$, откуда $\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < 2$, что и требовалось доказать.

§ 2. Неравенства в стереометрии

599. Пусть плоскости P и Q пересекаются по прямой MN (рис. 89). Из точки A плоскости P проведем к MN перпендикуляр AB и наклонную AC. Если точка A проектируется на плоскость Q в точку A_1, то согласно условию задачи надо доказать, что $\angle ABA_1 > \angle ACA_1$. Поскольку $AB < AC$, то $A_1B < A_1C$. Отложим на A_1C отрезок A_1D, равный A_1B. Прямоугольные треугольники ABA_1 и ADA_1 равны, так как у них катеты соответственно равны. Следовательно, $\angle ADA_1 = \angle ABA_1$. Поскольку угол ADA_1 — внешний по отношению к треугольнику ADC, то $\angle ADA_1 > \angle ACA_1$, а поэтому и $\angle ABA_1 > \angle ACA_1$, что и требовалось доказать.

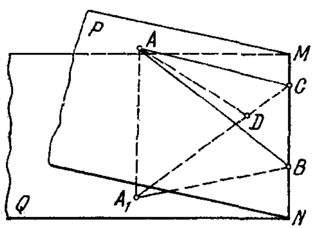

Рис. 89.

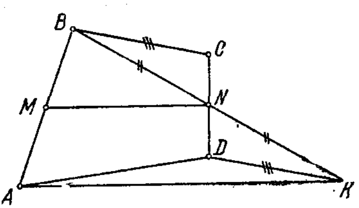

Рис. 90.

600. Соединим точки B и C, A и D отрезками прямых (рис. 90). Через точку A проведем прямую параллельно MN до встречи в точке K с прямой, проходящей через B и N. Заметим, что $AK = 2MN$, так как MN — средняя линия треугольника ABK. Далее, $\triangle BNC = \triangle KND$, ибо $BN = NK$, $CN = ND$ и $\angle BNC = \angle KND$. Поэтому $DK = BC$. Из треугольника ADK усматриваем, что

$DK+AD>AK=2MN$ (здесь существенно, что точка D не лежит на прямой AK, иначе пришлось бы поставить знак $\geqslant$). Итак, $BC+AD>2MN$, что и требовалось доказать.

601. Обозначим сторону вырезаемого квадрата через x, тогда сторона квадратного дна коробки равна $6a-2x$ (рис. 91). Высота коробки x. Объем ее равен $v=(6a-2x)^2x=4x(3a-x)(3a-x)=2(2x)(3a-x)(3a-x)$. Ясно, что v достигает максимума одновременно с функцией $y=(2x)(3a-x)(3a-x)$. Так как $2x+(3a-x)+(3a-x)=6a$ — постоянная величина, то y принимает наибольшее значение при $2x=3a-x$, откуда $x=a$, т. е. сторона вырезаемого квадрата должна быть в шесть раз меньше стороны листа жести.

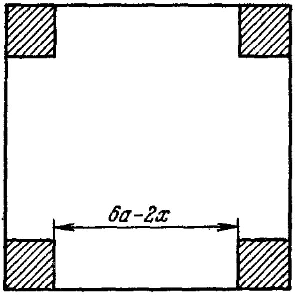

Рис. 91.

602. Если измерения прямоугольного параллелепипеда a, b, c, то его полная поверхность

$$S=2(ab+bc+ca). \qquad (1)$$

Сложив почленно известное неравенство (задача 4) $ab+bc+ca\leqslant a^2+b^2+c^2$ с тождеством $2(ab+bc+ca)=2(ab+bc+ca)$, получим $3(ab+bc+ca)\leqslant(a+b+c)^2$, откуда $2(ab+bc+ca)\leqslant\frac{2}{3}(a+b+c)^2$ или, учитывая (1), имеем

$$S\leqslant\frac{2}{3}(a+b+c)^2. \qquad (2)$$

Так как $a+b+c=\frac{L}{4}$, то из (2) следует, что

$$S\leqslant\frac{2}{3}\left(\frac{L}{4}\right)^2=\frac{L^2}{24}, \text{ т. е. } S_{\max}=\frac{L^2}{24}.$$

Очевидно, что это достигается при $a=b=c$, т. е. в случае, когда параллелепипед — куб.

603. Это обратная задача предыдущей. В последней мы установили, что $S\leqslant\frac{L^2}{24}$, или $L\geqslant 2\sqrt{6S}$, т. е. $L_{\min}=2\sqrt{6S}$. Это достигается, когда параллелепипед — куб.

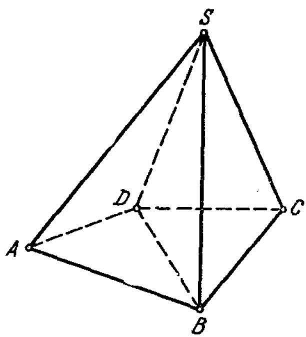

Рис. 92.

604. Пусть в четырехгранном угле $SABCD$ наибольший плоский угол есть ASB (рис. 92). Проведем плоскость через прямые SD и SB. Так как любой плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других, то можем записать $\angle ASB<\angle ASD+\angle DSB$, $\angle DSB<\angle DSC+\angle BSC$.

Отсюда получаем $\angle ASB<\angle ASD+\angle DSC+\angle BSC$.

605. Введем обозначения: H — высота пирамиды, Q — площадь ее основания, h — высота призмы, q — площадь ее основания. Известно, что в пирамиде площади параллельных сечений относятся как квадраты их расстояний от вершины. Следовательно, имеем $\frac{q}{Q}=\frac{(H-h)^2}{H^2}$, откуда $q=\frac{Q}{H^2}(H-h)^2$. Объем призмы равен $V=qh=\frac{Qh}{H^2}(H-h)^2$. Поскольку Q и H постоянны, то V зависит от произведения $y=h(H-h)^2=\frac{2h(H-h)(H-h)}{2}$. Так как сумма $2h+(H-h)+(H-h)=2H$ — постоянная величина, то y достигает максимума при условии $2h=H-h$, откуда $h=\frac{H}{3}$. Итак, $V_{\max}=\frac{QH}{3H^2}\left(H-\frac{H}{3}\right)^2=\frac{4QH}{27}$.

606. Пусть радиусы оснований цилиндра и конуса равны R, их высоты H, образующая конуса l, а отношение их боковых поверхностей k. Имеем $k=\frac{2\pi RH}{\pi Rl}=2\frac{H}{l}$. Поскольку $H<l$, то $\frac{H}{l}<1$. Следовательно, $k<2$, что и требовалось доказать.

607. Обозначим через R радиус основания конуса, высоту его через H, радиус основания цилиндра через r, высоту цилиндра через h. Из рисунка 93 видно, что $\frac{H-h}{H}=\frac{r}{R}$, откуда $h=\frac{H}{R}(R-r)$. Объем цилиндра $V=\pi r^2h=\pi r^2\frac{H}{R}(R-r)=\frac{4\pi H}{R}\cdot\frac{r}{2}\cdot\frac{r}{2}(R-r)$.

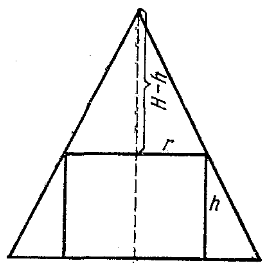

Рис. 93.

Поскольку $\frac{4\pi H}{R}$ — постоянная величина, то V достигает максимума одновременно с функцией $y=\frac{r}{2}\cdot\frac{r}{2}(R-r)$. Так как сумма сомножителей $\frac{r}{2}$, $\frac{r}{2}$ и $(R-r)$ есть постоянная величина R, то y будет наибольшим при $\frac{r}{2}=R-r$, откуда $\frac{r}{R}=\frac{2}{3}$, что и требовалось доказать.

608. Пусть образующая цилиндрической части котла l, а общий радиус основания цилиндра и полусферы R. Тогда, по условию задачи, объем котла

$$V=\pi R^2l+\frac{4}{3}\pi R^3, \tag{1}$$

откуда

$$l=\frac{V-\frac{4}{3}\pi R^3}{\pi R^2}. \tag{2}$$

Поверхность котла

$$S = 2\pi Rl + 4\pi R^2. \tag{3}$$

Подставляя из (2) значение l в (3), получим

$$S = 2\left(\frac{V}{R} + \frac{2\pi R^2}{3}\right) \quad \text{или} \quad S = 2\left(\frac{V}{2R} + \frac{V}{2R} + \frac{2\pi R^2}{3}\right).$$

Поверхность S достигает минимума при условии $\frac{V}{2R} = \frac{2\pi R^2}{3}$, откуда

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}. \tag{4}$$

Из (1) и (4) заключаем, что поверхность котла будет наименьшей при $\pi R^2 l = 0$, т. е. при $l = 0$. Таким образом, минимальная поверхность котла достигается, когда он состоит только из двух полусфер. Итак, $S_{\min} = 4\pi R^2 = 4\pi \sqrt[3]{\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^2}$.

609. Обозначим радиус стола через r, центр его через O, высоту лампы над столом через h, расстояние AL от края A стола до лампы L через l и угол LAO через φ (рис. 94). Из курса физики известно, что сила света I в точке A выражается формулой $I = k\frac{\sin\varphi}{l^2}$, где k — некоторый постоянный коэффициент пропорциональности. Так как $\cos\varphi = \frac{r}{l}$, то $I = \frac{k}{r^2}\sin\varphi\cos^2\varphi$. Поскольку

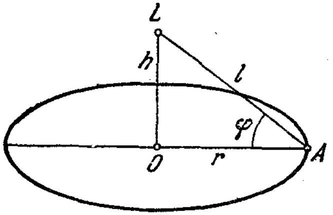

Рис. 94.

I^2 достигает максимума вместе с I, то рассмотрим

$$I^2 = \frac{k^2}{r^4}\sin^2\varphi\cos^4\varphi = \frac{4k^2}{r^4}(1 - \cos^2\varphi)\frac{\cos^2\varphi}{2}\cdot\frac{\cos^2\varphi}{2}.$$

Так как $\frac{4k^2}{r^4}$ постоянная величина, то I^2 достигает максимума вместе с функцией $y = (1 - \cos^2\varphi)\frac{\cos^2\varphi}{2}\frac{\cos^2\varphi}{2}$. Поскольку сумма сомножителей $(1 - \cos^2\varphi)$, $\frac{\cos^2\varphi}{2}$ и $\frac{\cos^2\varphi}{2}$ есть постоянная величина 1, то y принимает наибольшее значение при $1 - \cos^2\varphi = \frac{\cos^2\varphi}{2}$, т. е. при $\cos\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}$, откуда $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$. А так как $h = r\operatorname{tg}\varphi$, то $h = r\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7r$.

610. Обозначим через R радиус шара, а через r и h соответственно радиус основания и высоту цилиндра. Пусть точка M — середина высоты цилиндра (центр шара), O — центр основания цилиндра, A — произвольная точка окружности того же основания. По теореме Пифагора имеем $OM^2 = AM^2 - OA^2$, или $\frac{h^2}{4} = R^2 - r^2$, откуда $h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$. Боковая поверхность цилиндра $S = 2\pi rh = 2\pi r \cdot 2\sqrt{R^2 - r^2} = 4\pi r\sqrt{R^2 - r^2}$. Ясно, что S и S^2 достигают наибольшего значения при одном и том же значении r, поэтому будем искать то значение r, при котором S^2 принимает максимальное значение. Имеем $S^2 = 16\pi^2 r^2 (R^2 - r^2)$. Так как $16\pi^2$ — постоянная величина, то достаточно найти максимальное значение выражения $y = r^2 (R^2 - r^2)$, а потом полученный результат умножить на $16\pi^2$. Поскольку сумма $r^2 + (R^2 - r^2) = R^2$ — постоянная величина, то y достигает наибольшего значения при равенстве r^2 и $R^2 - r^2$. Итак, $r^2 = R^2 - r^2$, откуда $r = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, а следовательно, $h = R\sqrt{2}$ и $2r = R\sqrt{2}$. Таким образом, осевое сечение искомого цилиндра есть квадрат.

611. Обозначим радиус основания цилиндра через r, а его высоту через h (рис. 95). Из чертежа видно, что $\frac{h^2}{4} = R^2 - r^2$, откуда $h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$. Объем цилиндра $V = \pi r^2 h = 2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}$. Так как 2π — постоянная величина, то V достигает максимума одновременно с функцией $y = r^2\sqrt{R^2 - r^2}$. Ясно, что y^2 и y принимают наибольшие значения при одном и том же значении переменной r, поэтому будем находить значение r, для которого y^2 достигает максимума. Имеем

$$y^2 = r^4 (R^2 - r^2),$$

$$y^2 = 4\frac{r^2}{2} \cdot \frac{r^2}{2} (R^2 - r^2).$$

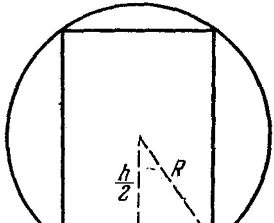

Рис. 95.

Поскольку сумма трех сомножителей $\frac{r^2}{2}$, $\frac{r^2}{2}$ и $(R^2 - r^2)$ равна постоянной величине, то y^2, а следовательно и y, достигают наибольшей величины при равенстве этих сомножителей, т. е. при $\frac{r^2}{2} = R^2 - r^2$. Отсюда $\frac{3r^2}{2} = R^2$, или, окончательно, $r : R = \sqrt{2} : \sqrt{3}$.

612. Обозначим через R радиус шара и через r и h соответственно радиус основания и высоту конуса (рис. 96).

Продолжим высоту SO конуса до встречи с шаровой поверхностью в точке E. Так как $SE = 2R$, а $SO = h$, то $OE = 2R - h$. Известно, что перпендикуляр, опущенный из точки окружности на диаметр, есть среднее пропорциональное между отрезками, на которые делится диаметр основанием этого перпендикуляра, поэтому $AO^2 = SO \cdot OE$, или, в наших обозначениях, $r^2 = h(2R - h)$.

Объем конуса

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{\pi}{3}h^2(2R-h)=\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{2}(2R-h).$$

Так как $\frac{4\pi}{3}$ — постоянная величина, то V достигает максимума одновременно с произведением $y=\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{2}(2R-h)$.

Поскольку сумма сомножителей $\frac{h}{2}$, $\frac{h}{2}$ и $(2R-h)$ есть постоянная величина $2R$, то y достигает максимума при равенстве этих сомножителей, т. е. при $\frac{h}{2}=2R-h$, откуда $\frac{R}{h}=\frac{3}{4}$.

613. Обозначим через R и H соответственно радиус основания и высоту конуса, а через r и h — радиус основания и высоту искомого цилиндра. Пусть точка O — центр основания конуса, A — произвольная точка окружности его основания, точка K — центр основания цилиндра (не лежащего в одной плоскости с основанием конуса), B — точка окружности того же основания, S — вершина конуса. Из подобия треугольников SKB и SOA следует $\frac{SK}{SO}=\frac{BK}{AO}$, или, в наших обозначениях, $\frac{H-h}{H}=\frac{r}{R}$, откуда $h=\frac{H}{R}(R-r)$. Боковая поверхность цилиндра $S=2\pi rh=2\pi r\frac{H}{R}(R-r)=$

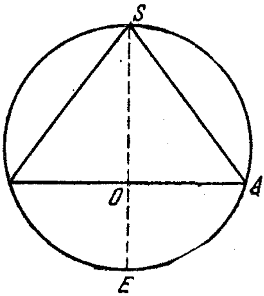

Рис. 96.

$=\frac{2\pi H}{R}(-r^2+Rr)$. Так как $\frac{2\pi H}{R}$ — постоянная величина, то S принимает максимальное значение, когда функция $y=-r^2+Rr$ достигает максимума. Функция y достигает максимума при $r=-\frac{R}{-2}=\frac{R}{2}$, а следовательно, $h=\frac{H}{R}\left(R-\frac{R}{2}\right)=\frac{H}{2}$, что и требовалось доказать.

614. Пусть треугольник SAB — осевое сечение некоторого конуса, описанного около шара данного радиуса, с центром в точке O (рис. 97). Обозначим угол OAD через α, где D — основание высоты. Имеем: $AD=OD\operatorname{ctg}\alpha=r\operatorname{ctg}\alpha$; $SD=AD\operatorname{tg}2\alpha=r\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha$. Объем конуса

$$V=\frac{\pi}{3}AD^2\cdot SD=\frac{\pi}{3}r^3\operatorname{ctg}^3\alpha\operatorname{tg}2\alpha=\frac{\pi}{3}r^3\frac{1}{\operatorname{tg}^3\alpha}\cdot\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=$$

$$=\frac{2\pi}{3}r^3\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}.$$

Поскольку $\frac{2\pi r^3}{3}$ — постоянная величина, то объем конуса достигает наименьшего значения одновременно с выражением $\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}$.

Но выражение $\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}$ имеет наименьшее значение, когда $\operatorname{tg}^2\alpha(1-\operatorname{tg}^2\alpha)$ достигает наибольшего значения. Так как $\operatorname{tg}^2\alpha+$ $+(1-\operatorname{tg}^2\alpha)=1$ — постоянная величина, то $\operatorname{tg}^2\alpha(1-\operatorname{tg}^2\alpha)$ принимает наибольшее значение, когда $\operatorname{tg}^2\alpha=1-\operatorname{tg}^2\alpha$, откуда $\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{2}$. Итак,

$$V_{\min}=\frac{2\pi}{3}r^3\frac{1}{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)}=\frac{8\pi r^3}{3}.$$

615. Пусть $SABC$ — трехгранный угол (рис. 98). Введем обозначения: $\angle BSC=\alpha$, $\angle ASC=\beta$, $\angle ASB=\gamma$. Опустим перпендикуляр AO на грань BSC. Угол, образованный прямой SA и

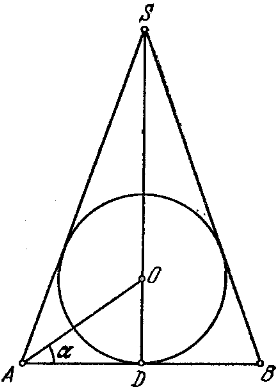

Рис. 97.

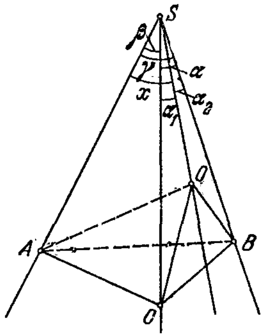

Рис. 98.

плоскостью BSC, есть $\angle ASO$. Обозначим его через x. Ясно, что $x<\beta$, так как угол, образованный прямой с ее проекцией на плоскость, меньше любого другого угла, образованного этой прямой с любой прямой плоскости, отличной от проекции (и не параллельной проекции). Если обозначим углы, образованные ребрами SB и SC с противоположными гранями, соответственно через y и z, то легко убедиться, что $y<\gamma$, $z<\alpha$. Сложив почленно неравенства $x<\beta$, $y<\gamma$, $z<\alpha$, получим

$$x+y+z<\alpha+\beta+\gamma. \quad (1)$$

Введем еще обозначения: $\angle CSO=\alpha_1$, $\angle BCO=\alpha_2$. Из трехгранного угла $SACO$ имеем $x>\beta-\alpha_1$, а из трехгранного угла $SABO$ находим $x>\gamma-\alpha_2$. Сложив последние два неравенства, получим

$$2x>\beta+\gamma-(\alpha_1+\alpha_2)=\beta+\gamma-\alpha. \quad (2)$$

Аналогично, легко получить

$$2y > \alpha+\gamma-\beta, \tag{3}$$

$$2z > \alpha+\beta-\gamma. \tag{4}$$

Сложив почленно неравенства (2), (3) и (4), получим $2(x+y+z) > > \alpha+\gamma+\beta$, откуда

$$x+y+z > \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}. \tag{5}$$

Из (1) и (5) следует утверждение задачи: $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} < x+y+z < < \alpha+\beta+\gamma$.

616. Пусть α — угол при вершине осевого сечения конуса.

Случай 1. $\alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Пусть треугольник AMB — осевое сечение конуса, а треугольник CMD — плоское сечение конуса, проведенное через вершину M данного конуса и произвольную хорду CD основания (рис. 99).

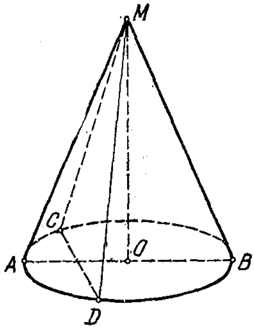

Рис. 99.

Если CD не проходит через центр основания, то $CD < AB$. В треугольниках AMB и CMD $AM=CM$, $BM=DM$, но $CD < AB$. По известной теореме: если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого треугольника, а третьи стороны не равны, то против большей из этих сторон лежит больший угол, имеем $\angle AMB > \angle CMD$, или, обозначая $\angle CMD$ буквой β, $\alpha > \beta$. Площадь треугольника AMB равна $0{,}5l^2 \sin\alpha$, а площадь треугольника CMD равна $0{,}5l^2 \sin\beta$, где l — длина образующей конуса. Так как $0 < \beta < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $\sin\alpha > \sin\beta$; поэтому площадь треугольника AMB больше площади треугольника CMD. В рассмотренном случае $\left(\alpha \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ искомое сечение — осевое сечение конуса.

Случай 2. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Пусть $\alpha = \frac{\pi}{2} + \varphi$, где $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, а β — угол при вершине произвольного плоского сечения конуса, не проходящего через центр основания. Между углами β и φ возможны лишь три следующих соотношения:

а) $\frac{\pi}{2} - \varphi < \beta < \frac{\pi}{2} + \varphi$; тогда $\sin\beta > \sin\alpha$.

При $\beta = \frac{\pi}{2}$ $\sin\beta = 1$ (наибольшее значение $\sin\beta$), и сечение наибольшей площади проходит через хорду основания, длина которой равна $l\sqrt{2}$.

б) $\beta = \frac{\pi}{2} - \varphi$; тогда $\sin\beta = \sin\alpha$.

в) $0 < \beta < \frac{\pi}{2} - \varphi$; тогда $\sin\beta < \sin\alpha$.

В рассмотренном случае $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$ искомое сечение проходит через хорду основания, длина которой равна $l\sqrt{2}$.

617. Опустим из точек A и B, взятых на данных полупрямых, перпендикуляры AA_0 и BB_0 на данную плоскость P (рис. 100).

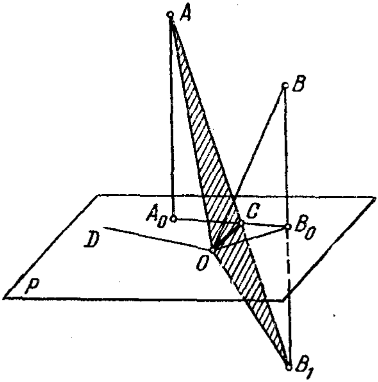

Рис. 100.

На продолжении BB_0 отложим отрезок $B_0B_1 = BB_0$ и построим отрезок OB_1. Пусть OD — произвольная прямая, проведенная на плоскости P через точку O. OD составляет с OB и OB_1 одинаковые углы. Построив отрезки BD и B_1D, убедимся, что $\triangle DOB = \triangle DOB_1$ (по трем сторонам), а поэтому $\angle DOB = \angle DOB_1$. Считая OD, OA и OB_1 ребрами трехгранного угла, получим неравенство $\angle DOA + \angle DOB_1 > \angle AOB_1$, или $\angle DOA + \angle DOB > \angle AOB_1$.

Если же вместо OD взять прямую OC (линию пересечения плоскости P и плоскости $\triangle AOB_1$), то получим равенство

$$\angle COA + \angle COB = \angle AOB_1 < \angle DOA + \angle DOB.$$

Следовательно, OC — искомая прямая.

618. Опустим из точек A и B перпендикуляры AA_0 и BB_0 на плоскость P (рис. 101). На продолжении отрезка AA_0 отложим

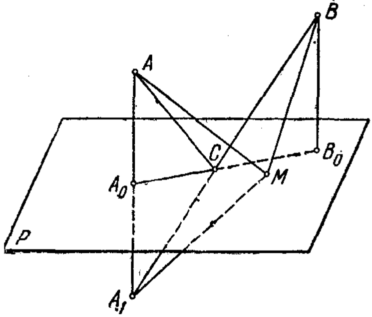

Рис. 101.

отрезок $A_0A_1 = AA_0$. Пусть M — произвольная точка плоскости P. Тогда сумма $AM + BM = A_1M + BM$, так как $AM = A_1M$. Но из треугольника A_1BM следует, что $A_1M + BM > A_1B$. Очевидно, что сумма $AM + BM$ окажется наименьшей, если точка M будет принадлежать отрезку A_1B. Такой точкой является точка C, в которой прямая A_1B пересекает плоскость P. Действительно, $AC + CB = A_1C + CB = AB$.

619. Опустим из точек A и B перпендикуляры AA_0 и BB_0 на плоскость P (рис. 102). На продолжении BB_0 отложим отрезок $B_0B_1 = BB_0$. Пусть M — произвольная точка плоскости P. Тогда $|AM - MB| = |AM - MB_1|$, так как $MB = MB_1$. Но из треугольника AMB_1 следует, что $|AM - MB_1| < AB_1$. Если же заменить точку M точкой C, в которой прямая AB_1 пересекает плоскость P, то получим $|AC - BC| = |AC - B_1C| = AB_1 > |AM - MB|$.

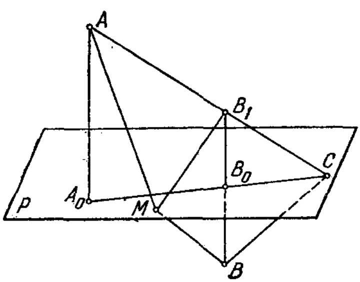

Рис. 102.

Следовательно, искомой точкой является точка C, в которой прямая AB_1 пересекает плоскость P.

620. Случай 1. Данная точка A и данная окружность $(O;\ R)$ лежат в одной плоскости.

Точка A может лежать вне окружности (рис. 103) или внутри ее (рис. 104). Случай, когда точка A лежит на окружности, мы не рассматриваем ввиду очевидности решения. Проводим прямую AO, пересекающую окружность в точках B и C. Пусть D и E — произвольные точки окружности, не лежащие на прямой AO. Из $\triangle AOD$ имеем $AO+OD > AD$, или $AO+OB > AD$, т. е. $AB > AD$. Из

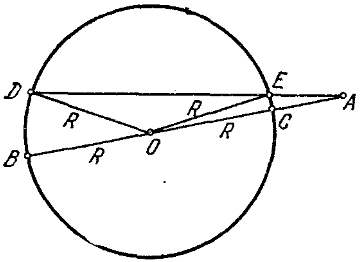

Рис. 103.

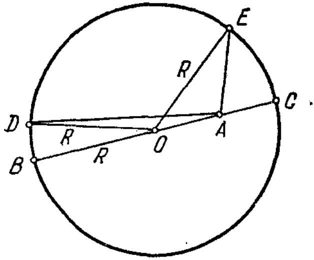

Рис. 104.

$\triangle AOE$ следует $AO < AE+OE$, или $AC+R < AE+R$, т. е. $AC < AE$.

Следовательно, AB — искомый отрезок наибольшей длины, AC — искомый отрезок наименьшей длины.

Случай 2. Данная точка и окружность не лежат в одной плоскости.

Из данной точки A опустим перпендикуляр AA_0 на плоскость P, в которой лежит данная окружность. (Точка A_0 — проекция точки A на плоскость P.) В плоскости P проводим A_0COB — секущую к данной окружности, пересекающую ее в точках C и B. Так как согласно выводу, полученному в случае 1, A_0B — наибольший отрезок, соединяющий точку A_0 с точкой окружности, а A_0C — наименьший отрезок такого вида, то на основании теоремы о сравнении длин наклонных, проведенных к данной плоскости из одной и той же точки, лежащей вне этой плоскости, имеем: AB — искомый отрезок наибольшей длины, AC — искомый отрезок наименьшей длины.

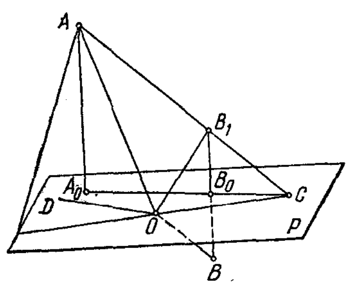

Рис. 105.

621. Опустим из точек A и B (взятых произвольно на полупрямых OA и OB соответственно) на плоскость P перпендикуляры AA_0 и BB_0 (рис. 105). На продолжении BB_0 отложим отрезок $B_0B_1 = BB_0$. Любая прямая OD, проведенная на плоскости P из точки O, образует одинаковые углы с OB и OB_1 (построив треугольники DOB и DOB_1, можно легко доказать, что они равны). Лучи OA, OB_1 и OD являются ребрами трехгранного угла, а поэтому

$$|\angle DOA - \angle DOB_1| < \angle AOB_1. \qquad (1)$$

Если заменить OD прямой OC, по которой плоскость P пересекается с плоскостью, определяемой прямыми OA и OB_1, получим

$$|\angle COA - \angle COB_1| = \angle AOB_1. \qquad (2)$$

Учитывая формулы (1) и (2), находим, что OC — искомая прямая.

622. Из условия задачи видно, что угол между плоскостями берется острый или прямой, так как, по определению, угол прямой с плоскостью не больше $\frac{\pi}{2}$. Все параллельные прямые составляют с плоскостью один и тот же (по величине) угол. Поэтому

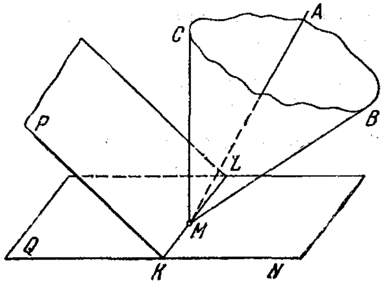

Рис. 106.

если данные плоскости P и Q пересекаются по прямой KL, то, проведя из произвольной точки M прямой KL луч MA, параллельный произвольной прямой, указанной в условии, убедимся,

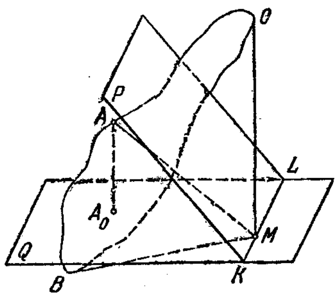

Рис. 107.

что если эта произвольная прямая составляет с плоскостью P угол α, а с плоскостью Q — угол β, то и луч MA составляет с этими плоскостями те же углы. Пусть φ — угол между плоскостями P и Q $\left(\varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

Проведем из точки M лучи $MB \perp P$ и $MC \perp Q$ так, чтобы лучи MB и MA лежали по одну сторону от P, а лучи MC и MA — по одну сторону от Q. Тогда $\angle AMB = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\angle AMC = \frac{\pi}{2} - \beta$.

Если $\angle BMC$ — острый (или прямой), то $\angle BMC = \varphi$ (рис. 106).

В трехгранном угле $MABC$ $|\angle AMB - \angle AMC| \leqslant \angle BMC$ (знак равенства имеет место, если лучи MA, MB и MC лежат в одной плоскости и MC — средний из этих лучей) или

$$\left|\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\right| \leqslant \varphi, \text{ т. е. } |\alpha - \beta| \leqslant \varphi.$$

Если $\angle BMC$ — тупой, то $\angle BMC = \pi - \varphi$ (рис. 107).

В трехгранном угле $MABC$ $\angle AMB + \angle AMC \geqslant \angle BMC$ (знак равенства возможен лишь в том случае, когда лучи MA, MB и MC лежат в одной плоскости) или

$$\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \geqslant \pi - \varphi, \text{ т. е. } \alpha + \beta \leqslant \varphi.$$

Но $|\alpha - \beta| \leqslant \alpha + \beta$, а поэтому $|\alpha - \beta| \leqslant \varphi$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беккенбах Э., Беллман Р., Введение в неравенства, «Мир», 1965.
2. Беккенбах Э., Беллман Р., Неравенства, «Мир», 1965.
3. Блох А. Ш., Неверов Г. С., Решение неравенств, Минск, 1962.
4. Делоне Б. и Житомирский О., Задачник по геометрии, Физматгиз, 1959.
5. Зетель С. И., Задачи на максимум и минимум, Гостехиздат, 1948.
6. Kazarinoff N. D., Analytic inequalities, New York, 1961.
7. Kazarinoff N. D., Geometrie inequalities, pub. Random House, USA, 1961.
8. Крейн С. Г., Ушакова В. И., Математический анализ элементарных функций, «Наука», 1966.
9. Кречмар В. А., Задачник по алгебре, Гостехиздат, 1950.
10. Коровкин П. П., Неравенства, «Наука», 1966.
11. Крыжановский Д. А., Элементы теории неравенств, ОНТИ, 1936.
12. Маракуев Н. Н., Элементарная алгебра, т. II, Москва, 1903.
13. Mitrinović D. S., Elementary inequalities, Groningen, 1964.
14. Mitrinović D. S., Nejednakosti, Beograd, 1965.
15. Натансон И. П., Простейшие функции на максимум и минимум, Гостехиздат, 1952.
16. Невяжский Г. Л., Неравенства, Учпедгиз, 1947.
17. Пржевальский Е., Собрание алгебраических задач, ч. II, Москва, 1912.
18. Пржевальский Е., Собрание геометрических теорем и задач, Москва, 1879.
19. Сборник задач московских математических олимпиад (под редакцией В. Г. Болтянского), «Просвещение», 1965.

20. Скопец З. А., Жаров В. А., Задачи и теоремы по геометрии, Учпедгиз, 1962.
21. Соминский И. С., Метод математической индукции, «Наука», 1965.
22. Соминский И. С., Элементарная алгебра, «Наука», 1967.
23. Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г., Неравенства, ИЛ, 1948.
24. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М., Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра, «Наука», 1965.
25. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М., Избранные задачи и теоремы планиметрии, «Наука», 1967.
26. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М., Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. III, Геометрия (стереометрия), Гостехиздат, 1954.