И. Х. СИВАШИНСКИЙ

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

И. Х. СИВАШИНСКИЙ

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

ТЕОРИЯ И ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1965

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА II

ОБЗОР ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

ГЛАВА III

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ

Автор посвящает книгу
памяти
незабвенных своих родителей

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга написана на основе лекций, прочитанных автором в Московском институте усовершенствования учителей, и занятий по специальной программе с учащимися средней школы, готовящимися стать программистами-вычислителями.

В нашей литературе имеется много пособий по математике для школьников старших классов и для тех, кто желает самостоятельно усовершенствовать свои знания по математике. Однако некоторые темы в этой литературе освещены недостаточно; прежде всего это относится к функциям и графикам. Необходимо, однако, чтобы оканчивающие школу уверенно владели понятием функциональной зависимости и могли строить графики функций. В первую очередь, разумеется, это относится к тем, кто будет продолжать свои занятия математикой. Не случайно на вступительных экзаменах во многих вузах проверяется умение абитуриентов строить графики, находить области определения функций, промежутки возрастания и убывания функций и т. д.

В первой главе излагается общая теория элементарных функций, во второй дается обзор элементарных функций, а в третьей предлагается широкий круг задач на исследование функций и построение графиков. В конце книги даны решения и указания к задачам. Теоретический материал дается в объеме, необходимом для решения задач. Предполагается, что читатель уже имеет некоторое представление о тех функциях, которые рассматриваются в этой книге. Поэтому автор нашел возможным иллюстрировать теоретическую часть книги примерами функций до подробного их рассмотрения. Однако при первом чтении можно пропустить иллюстративный материал и вернуться к нему после прочтения второй главы.

В книге рассматриваются основные характеристики элементарных фуикций и особенности их графиков, причем используется только элементарная (школьная) математика.

И. Х. Сивашинский

ГЛАВА I

ПОНЯТИЕ О ФУНКЦИИ

§ 1. Функция. Область определения и область изменения функции

1. Постоянные и переменные величины. Величины, рассматриваемые в математике, разделяются на постоянные и переменные.

Постоянной величиной называется такая величина, которая в данном исследовании не изменяет своего числового значения.

Переменной величиной называется такая величина, которая в данном исследовании принимает различные числовые значения.

Обычно постоянную величину считают частным случаем переменной, т. е. считают, что постоянная величина — это такая переменная величина, все числовые значения которой равны между собой (в данном исследовании). Например, площадь треугольника ABC, у которого вершины A и C фиксированы, а B скользит по некоторой линии l (рис. 1), есть переменная величина. Если же линия l будет прямой, параллельной AC, то площадь треугольника будет постоянной ($S_{\triangle AB_1C} = S_{\triangle AB_2C} = \ldots$). Этот пример убеждает нас в удобстве соглашения считать постоянную величину частным случаем переменной.

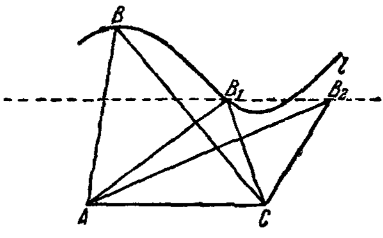

Рис. 1.

2. Область изменения переменной величины. Переменные величины могут изменяться по-разному в зависимости от исследуемой задачи. Например:

1) Число сторон многоугольника может быть любым целым числом, начиная с трех.

2) Если площадь круга равна S, то площади вписанных в него многоугольников могут принимать различные положительные значения, меньшие S.

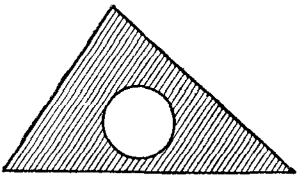

Рис. 2.

3) Пусть имеется набор равных треугольников площади S. Из каждого треугольника вырезан какой-нибудь круг (рис. 2). Площадь x заштрихованной части треугольника равна разности площадей треугольника и круга. Поскольку из всех этих кругов наибольшую площадь q имеет вписанный, то x изменяется от $S-q$ до S, т. е. имеет место двойное неравенство

$$S-q \leqslant x < S.$$

Совокупность всех числовых значений переменной величины называется *областью изменения* (областью значений) этой переменной.

Если переменная x может принимать все действительные значения, удовлетворяющие условию

$$a < x < b,$$

то говорят, что x изменяется в *интервале* (a, b).

Если переменная x может принимать все действительные значения, удовлетворяющие условию

$$a \leqslant x \leqslant b,$$

то говорят, что x изменяется на сегменте $[a, b]$.

Если одно из чисел a или b присоединяется к интервалу, то получается *полузамкнутый интервал* или *полусегмент*. Если присоединить число b к интервалу, то получится полузамкнутый интервал или полусегмент, который можно задать неравенствами

$$a < x \leqslant b$$

и обозначить $(a, b]$. Если присоединить число a к интервалу, то получится полузамкнутый интервал или полусегмент $[a, b)$, который можно задать неравенствами

$$a \leqslant x < b.$$

Когда переменная x принимает все значения, удовлетворяющие неравенству $x \leqslant b$, то говорят, что x изменяется *на полусегменте* $(-\infty, b]$.

Если $x \geqslant a$, то это значит, что x изменяется на полусегменте $[a, +\infty)$.

Если $x < b$, то это значит, что x изменяется в интервале $(-\infty, b)$. Если $x > b$, то это значит, что x изменяется в интервале $(b, +\infty)$. Если переменная x может прииимать всевозможные значения, то говорят, что x *изменяется в интервале* $(-\infty, +\infty)$.

Термины интервал, сегмент, полусегмент часто объединяют одним термином *промежуток*.

3. Определение функции. Возьмем некоторое множество значений переменной величины x и обозначим его буквой M. Это множество может состоять из отдельных значений x, например из всех целых положительных чисел, а может состоять из одного *или* нескольких интервалов, сегментов или полусегментов.

Если каждому значению x из множества M соответствует одно определенное значение другой величины y, то будем говорить, что величина y есть *функция* величины x, определенная на множестве M—*области определения* функции.

Переменную x называют *независимой переменной* или *аргументом*, а величину y—функцию—называют еще *зависимой переменной*.

Чаще всего значения функции находятся по значениям аргумента при помощи некоторой формулы. Например:

1. Площадь круга $Q = \pi R^2$, где R—радиус круга. Следовательно, величина Q есть функция величины R, причем R может принимать любые положительные значения.

2. Сумма внутренних углов многоугольника $S = \pi(n-2)$, где n—число сторон многоугольника. Поэтому величина S является функцией величины n, принимающей только целые положительные значения, начиная с трех.

Если функция задана при помощи формулы, то говорят, что она задана *аналитически*.

4. Область определения функции, заданной аналитически. Если задана формула $y=f(x)$, но область определения функции не указана, то под областью ее определения обычно понимается множество тех действительных значений аргумента x, при которых аналитическое выражение $f(x)$, определяющее функцию, не теряет числового смысла и принимает лишь действительные значения. Так как под областью определения функции понимают то множество значений аргумента, при которых она существует, то поэтому *область определения* функции называют также *областью существования*.

Рассмотрим несколько примеров:

1) Функция $y=\sqrt{1-x}$ определена на полусегменте $(-\infty, 1]$, поскольку для существования функции необходимо, чтобы $1-x\geqslant 0$, т. е. $-\infty<x\leqslant 1$.

2) Функция $y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ определена на двух полусегментах $[-1, 0)$ и $(0, 1]$, так как функция $\sqrt{1-x^2}$ существует при $1-x^2\geqslant 0$, или при $-1\leqslant x\leqslant 1$. Для существования заданной функции должно еще иметь место $x\neq 0$.

3) Функция $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}$ определена только при $x=1$, так как функция $\sqrt{x-1}$ существует при $x\geqslant 1$, а функция $\sqrt{1-x}$ при $x\leqslant 1$.

4) Функция $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{-x}$ не определена ни при каком x, так как функция $\sqrt{x-1}$ определена при $x\geqslant 1$, а функция $\sqrt{-x}$ при $x\leqslant 0$; поскольку неравенства $x\geqslant 1$ и $x\leqslant 0$ противоречивы, то нет такого x, при котором заданная функция существует.

5. Многозначные функции. В нашем определении функции каждому значению x, принадлежащему области определения функции, соответствует одно-единственное значение функции. Поэтому иногда употребляют термин *однозначная функция*.

Если значению x соответствует не одно, а несколько значений y (или даже бесконечное число значений), то говорят, что определена *многозначная функция*.

6. Явные и неявные функции. В рассмотренных выше примерах функции были заданы *аналитически*, т. е. формулами, связывающими соответствующие значения аргумента и функции, причем во всех примерах в левой части равенства, определяющего фуикцию, стоял y, а в правой — выражение, зависящее от x. Такие функции называются *явными*.

Примеры явных функций: 1) $y=x^2$, 2) $y=\frac{x+1}{x}$.

Функциональная зависимость может быть задана и уравнением, не разрешенным относительно зависимой переменной. Такие функции называются *неявными*.

Примеры неявных функций: 1) $xy-x+1=0$, 2) $x^2+y^2=1$.

7. Область изменения функции. Часто при исследовании функции важно знать не только область определения, но и *область изменения* функции, т. е. в каких границах может изменяться сама функция. Например:

1) Функция $y=\arcsin x$ может принимать, по определению, только значения, удовлетворяющие условию $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$.

2) Функция $y=\sin x\cdot\cos x$ может принимать лишь значения, удовлетворяющие условию

$$-0{,}5\leqslant y\leqslant 0{,}5.$$

Действительно, $y=\frac{1}{2}\cdot 2\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$, а $|\sin 2x|\leqslant 1$, т. е. $-1\leqslant\sin 2x\leqslant 1$, следовательно, $-0{,}5\leqslant 0{,}5\sin 2x\leqslant 0{,}5$.

3) Функция $y=\frac{2x-1}{x+1}$ может принимать лишь значения, удовлетворяющие условиям:

$$-\infty<y<2,\quad 2<y<+\infty.$$

В самом деле, разрешив данное уравнение относительно переменной x, получим:

$$x=\frac{y+1}{2-y}.$$

Отсюда видно, что $y\neq 2$, т. е.

$$-\infty<y<2,\quad 2<y<+\infty.$$

4) Функция $y=x+\frac{1}{x}$ может принимать лишь значения, удовлетворяющие условиям:

$$-\infty<y\leqslant-2,\ 2\leqslant y<+\infty.$$

Действительно, разрешив данное уравнение относительно переменной x, получим, что

$$x=\frac{y\pm\sqrt{y^2-4}}{2},$$

откуда легко усмотреть, что должно иметь место неравенство $y^2-4\geqslant0$, т. е. $y\leqslant-2$ или $y\geqslant2$, что и соответствует нашему утверждению.

5) Функция $y=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$ может принимать лишь значения, удовлетворяющие условию $0\leqslant y\leqslant2$. Убедимся в этом. После преобразований данное уравнение принимает вид:

$$(y-1)x^2+2x+y-1=0. \qquad (1)$$

Если $y=1$, то из равенства (1) следует, что $2x=0$ и $x=0$. Если же $y\neq1$, то, разрешив (1) относительно переменной x, получим:

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-(y-1)^2}}{y-1}.$$

Отсюда следует, что должны иметь место соотношения $(y-1)^2\leqslant1$ и $y\neq1$. Из этих соотношений имеем:

$$0\leqslant y<1 \quad \text{или} \quad 1<y\leqslant2.$$

Так как выше мы установили, что y может быть равен 1, то получим область изменения данной функции:

$$0\leqslant y\leqslant2.$$

8. Табличный способ задания функции. На практике часто прибегают к так называемому *табличному* способу задания функции. Табличный способ состоит в следующем: вычисляют достаточное число частных значений функции в зависимости от часто употребляемых значений аргумента и составляют таблицу. Например, требуется найти значения функции $y=x^2$, если аргумент x изменяется от -4 до $+2,5$ через интервал 0,5. В этом случае поступают так: подставляют вместо x значения —4; —3,5; —3; ... ; 2; 2,5 и находят соответствующие им значения функции y. Такнм образом мы получим табличное представление функции:

x	—4	—3,5	—3	—2,5	—2	—1,5	—1	—0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5
y	16	12,25	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25

Такая таблица, кроме того, что она отвечает требованию задачи, дает довольно наглядное представление о поведеиии функции. Например, с нзменением аргумента от —4 до 0 функция убывает, а с изменением аргумента от 0 до 2,5 функция возрастает.

§ 2. Графическое изображеиие функциональиой зависимости

1. Числовая ось. Возьмем на прямой Ox две пронзвольные точки O и P и примем отрезок OP за еднннцу длины, а точку O за начало отсчета (рис. 3). Условимся, что каждой точке прямой Ox соответствует число, называемое *координатой* данной точки и определяемое так:

Рис. 3.

Координата точки M прямой Ox есть положительное число, равное длине отрезка OM, если точка M находится по ту же сторону от точки O, что и точка P; координата точки M прямой Ox есть отрицательное число, равное по абсолютной велнчнне длине отрезка OM, когда точки M и P находятся по разные стороны от точки O и, наконец, сама точка O имеет коорднату, равную нулю, и называется иачалом координат.

Если все перечисленные условия выполнены, то прямая Ox называется *координатной осью* илн, чаще, *числовой осью.*

Та часть числовой оси, точки которой имеют положительные координаты, называется *положительной полуосью*, а та часть числовой оси, точки которой имеют отрицательные координаты, называется *отрицательной полуосью.*

Каждому числу соответствует одна и только одна точка на числовой оси и, наоборот, каждой точке числовой оси соответствует одно и только одно число. Последнее выражают так: между множеством всех точек числовой оси и множеством всех (действительных) чисел существует *взаимно однозначное соответствие* *).

2. Прямоугольная система координат. Для определения положения точки на плоскости выбирают на этой плоскости прямоугольную систему координат: две взаимно перпендикулярные прямые, на которых указано направление отсчета. Точку пересечения прямых принимают за начало отсчета на каждой из них (рис. 4).

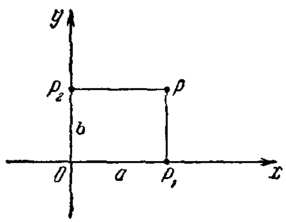

Рис. 4.

За единицу измерения на обеих осях обычно выбирается один и тот же отрезок.

Плоскость, на которой выбрана определенная выше система координат, называется *координатной* или *числовой плоскостью.*

Положение каждой точки на числовой плоскости вполне определяется двумя действительными числами, заданными в известном порядке. Эти числа находятся следующим образом:

Пусть P—произвольная точка плоскости. Построим проекции P_1 и P_2 точки P на оси координат (рис. 4). Точки P_1 и P_2 окажутся расположенными на осях, ввиду чего точка P_1 имеет координату a, являющуюся алгебраическим значением (направленного) отрезка OP_1, а точка P_2—координату b, являющуюся алгебраическим значением (направленного) отрезка OP_2, так что $\overline{OP_1}=a$, $\overline{OP_2}=b$.

Чтобы различать координатные оси, условились одну из этих осей (обычно горизонтальную) называть *осью абсцисс*, а другую (вертикальную) *осью ординат*. В соответствии с этим координату проекции P_1 точки P на ось абсцисс называют *абсциссой* точки P, а координату проекции P_2 точки P на ось ординат называют *ординатой* точки P.

---

*) Строгое обоснование этого вопроса можно найти в университетских курсах математического анализа.

Следовательно, числа a и b являются соответственно абсциссой и ординатой точки P.

Абсцисса и ордината точки называются *координатами точки*, а ось абсцисс (Ox) и ось ординат (Oy) — *осями координат*. Точка пересечения O осей координат называется *началом координат*.

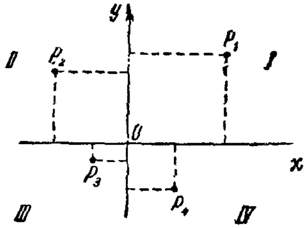

Рис. 5.

Координатные оси образуют при пересечении четыре прямых угла, определяющие на плоскости четыре четверти (квадранта); они пронумерованы на рис. 5 (в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки) римскими цифрами I, II, III, IV. На основании рис. 5 можно составить таблицу, указывающую, какие знаки имеют координаты точки в зависимости от ее положения:

P	I	II	III	IV
x	+	−	−	+
y	+	+	−	−

Если изменить положение точки на плоскости, то изменится ее расстояние от обеих осей или по крайней мере от одной из них. Следовательно, каждой точке числовой плоскости соответствует одна и только одна пара действительных чисел, из которых первое есть ее абсцисса, а второе — ордината.

Обратно, каждой паре действительных чисел a и b соответствует одна и только одна точка иа числовой плоскости.

Тот факт, что каждой точке числовой плоскости соответствует одна и только одна пара действительных чисел и что, обратно, каждой паре действительных чисел соответствует одна и только одна точка числовой плоскости, выражают кратко, говоря, что между множеством всех точек числовой плоскости и множеством всех пар действительных чисел существует *взаимно однозначное соответствие* *).

3. Графическое задание функции. Выше мы рассмотрели два способа задания функциональной зависимости: аналитический и табличный. Наряду с этими способами существует так называемый *графический* способ задания функции.

Этот способ нагляден; он дает возможность проследить за поведением функции при изменении аргумента.

Графиком функции $y=f(x)$ называется геометрическое место точек плоскости xOy, координаты которых связаны соотношением $y=f(x)$. Равенство $y=f(x)$ называется *уравнением* этого графика.

Говорят, что функция задана *графически*, если начерчен ее график.

Областью определения функции, как правило, является бесконечное множество точек, поэтому невозможно построить график «точно» по точкам, поскольку нельзя нанести на координатную плоскость бесконечное множество точек.

Убедимся на примере в том, что построение графика «по точкам» далеко не безупречно.

Попытаемся построить «по точкам» график функции

$$y=\frac{1}{(3x^2-1)^2}.$$

Составим таблицу частных значений аргумента и соответствующих им значений функции:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{676}$	$\frac{1}{121}$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{121}$	$\frac{1}{676}$

Отметим на плоскости точки, соответствующие каждой паре чисел (x, y) (рис. 6). Проведя плавную линию через эти точки, неискушенный читатель может подумать, что полученная линия представляет (хотя бы схематично) график функции. Однако, например, при $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ функция вообще

*) См. сноску на стр. 16.

не существует, а при $x=0,5$ функция равна 16, что на «графике» никак не отражено. Следовательно, построение графика функции «по точкам» не гарантирует от ошибок (даже грубых).

Обычно построение графика функции производится на основании исследования функции, и только для уточнения графика определяется некоторое количество точек.

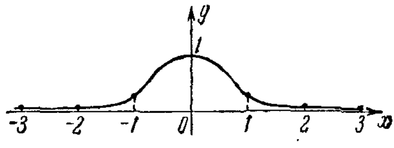

Рис. 6.

4. Возрастающая и убывающая функции. Функция называется *возрастающей* в интервале, если бо́льшим значениям аргумента соответствуют бо́льшие значения функции.

Функция называется *убывающей*, если бо́льшим значениям аргумента соответствуют меньшие значения функции.

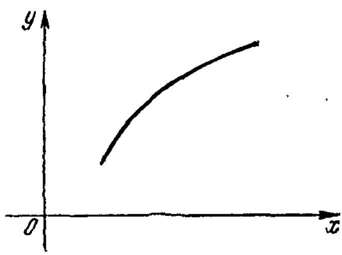

Рис. 7.

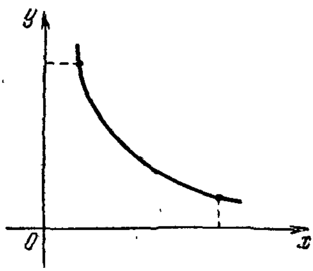

Рис. 8.

Таким образом, $y=f(x)$ возрастает в интервале (a, b), если для любых значений x_1, x_2, удовлетворяющих условию $a<x_1<x_2<b$, имеет место неравенство $f(x_1)<f(x_2)$, и убывает, если для любых значений x_1, x_2, удовлетворяющих указанному условию, имеет место неравенство $f(x_1)>f(x_2)$.

Характерной особенностью графика возрастающей функции является тот факт, что при движении вдоль кривой (графика) в сторону возрастающих x (вправо) мы движемся и в сторону возрастающих y (вверх) (рис. 7). Если же функция убывает, то при движении вдоль кривой в сторону возрастающих x (вправо) мы движемся в сторону убывающих y (вниз) (рис. 8).

Заметим, что функция в одних промежутках может быть возрастающей, а в других — убывающей. Например:

1) Функция $y=x^2$ (рис. 9) убывает при изменении аргумента от $-\infty$ до 0 и возрастает при изменении аргумента от 0 до $+\infty$.

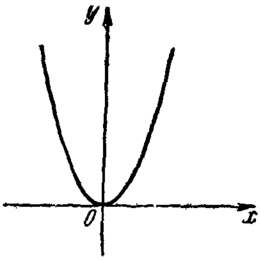

Рис. 9.

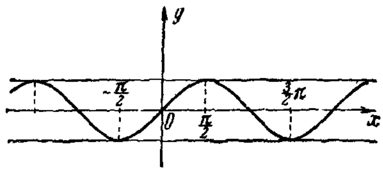

Рис. 10.

2) Функция $y=\sin x$ (рис. 10) возрастает в промежутках $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k, \quad \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$ и убывает в промежутках $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k, \ \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$, где $k=0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ldots$

§ 3. Взаимно обратные функции

1. Определение. Пусть функциональная зависимость между двумя переменными величинами x и y задана некоторым уравнением. Выбор одной из них в качестве независимой переменной может быть сделан по нашему усмотрению. Если, например, величина x выбрана независимой переменной, то функцией будет y. Если в силу каких-либо соображений целесообразнее считать аргументом y, то функцией будет x.

Однако y как функция x выражается, вообще говоря, иначе, чем x как функция от y. Такие две функции называются *взаимно обратными*.

Функция, в которой переменные x и y поменялись своими ролями, называется обратной по отношению к первоначальной функции. В свою очередь первоначальная функция является обратной к полученной обратной, так что эти две функции естественно назвать *взаимно обратными*.

Например, пусть x и y находятся между собой в такой зависимости, что значение y можно получить, если умножить соответствующее значение x на два и к полученному произведению прибавить единицу, т. е.

$$y = 2x + 1. \qquad (1)$$

Эту же зависимость можно выразить и так:

$$x = \frac{y-1}{2}. \qquad (2)$$

Это — иная запись предыдущего равенства. Считая здесь y независимой переменной, а x — функцией, замечаем, что x выражается через свой аргумент y иначе, чем функция y через свой аргумент x в равенстве (1). Чтобы получить значение первой функции $y = 2x + 1$, нужно значение x умножить на два и к полученному произведению прибавить единицу; а значение второй функции $x = \frac{y-1}{2}$ получим, если из значения независимой переменной вычтем единицу и полученную разность разделим на два.

Поменяем x и y местами в равенстве (2):

$$y = \frac{x-1}{2}.$$

Функции $y = 2x + 1$ и $y = \frac{x-1}{2}$ являются взаимно обратными функциями аргумента x.

В рассмотренном нами примере обе функции (прямая и обратная) однозначны. Но бывает, что прямая функция однозначна, а обратная многозначна. Например, прямая функция $y = x^2$ однозначна, а обратная ей функция $y = \pm\sqrt{x}$ двузначна (каждому допустимому значению x соответствуют два значения y). В таких случаях часто рассматривают две пары взаимно обратных однозначных функций. В нашем примере:

1) $y = x^2, \quad y = +\sqrt{x},$

2) $y = x^2, \quad y = -\sqrt{x}.$

2. График обратной функции. Поскольку прямая и обратная функции выражают одну и ту же зависимость и отличаются только тем, что у них поменялись ролями x и y, что равносильно изменению обозначений осей координат, то для вычерчивания обратной функции достаточно отразить график прямой функции относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. В силу симметричности взаимно обратных функций относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов, легко усмотреть, что точки пересечения графика прямой функции с осью абсцисс переходят в точки пересечения обратной функции с осью ординат и наоборот (рис. 11). Если прямая функция возрастает (убывает), то и обратная функция возрастает (убывает).

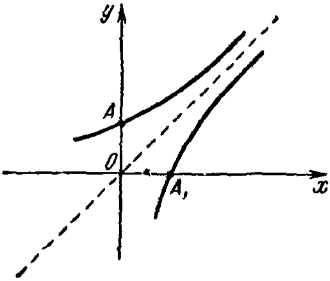

Рис. 11.

§ 4. Четные и нечетные функции

1. Определение четной функции. Функция называется *четной*, если при изменении знака аргумента значение функции не изменяется:

$$f(-x) \equiv f(x).$$

Примеры четных функций:

1) $y = x^4$, так как $(-x)^4 = x^4 = y$,

2) $y = |x|$, так как $|-x| = |x| = y$,

3) $y = \cos x$, так как $\cos(-x) = \cos x = y$.

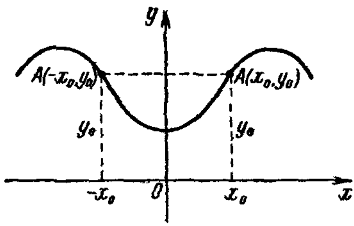

Рис. 12.

График четной функции симметричен относительно оси ординат. Действительно, согласно определению четной функции каждой паре значений аргумента, равных по абсолютной величине, но противоположных по знаку, соответствуют равные значения функции (ординаты), т. е. каждой точке (x_0, y_0) графика четной функции (для положительных значений аргумента) соответствует точка $(-x_0, y_0)$ (для отрицательных значений аргумента) (рис. 12). Поэтому для построения графика четной функции достаточно построить ту его часть, которая соответствует положительным значениям аргумента, а затем дополнить построенную часть графика другой, представляющей собой геометрическое место точек, симметричных найденным относительно оси ординат.

2. Определение нечетной функции. Функция называется *нечетной*, если при изменении знака аргумента значение функции изменяет только знак:

$$f(-x) \equiv -f(x).$$

Примеры нечетных функций:

1) $y=x^3$, так как $(-x)^3=-x^3=-y$,

2) $y=x|x|$, так как $(-x)|-x|=-x|x|=-y$,

3) $y=\sin x$, так как $\sin(-x)=-\sin x=-y$,

4) $y=\lg\frac{1+x}{1-x}$, так как $\lg\frac{1+(-x)}{1-(-x)}=\lg(1-x)-$
$$-\lg(1+x)=-[\lg(1+x)-\lg(1-x)]=$$
$$=-\lg\frac{1+x}{1-x}=-y.$$

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Действительно, согласно определению нечетной функции каждой паре значений аргумента (абсциссы), равных по абсолютной величине, но противоположных по знаку, соответствуют равные по абсолютной величине и противоположные по знаку значения функции (ординаты). Поэтому каждой точке (x_0, y_0) графика нечетной функции (для положительных значений аргумента) соответствует точка $(-x_0, -y_0)$ (для отрицательных значений аргумента) (рис. 13).

Таким образом, для построения графика нечетной функции достаточно построить ту его часть, которая соответствует положительным значениям аргумента, а затем дополнить построенную часть другой, представляющей собой геометрическое место точек, симметричных найденным относительно начала координат.

Замечание. Для построения точки $(-x_0, -y_0)$, симметричной точке (x_0, y_0) относительно начала координат, можно поступить и так: сначала построить точку $(-x_0, y_0)$, являющуюся зеркальным отражением точки (x_0, y_0) относительно оси ординат, а затем точку $(-x_0, -y_0)$, представляющую собой зеркальное отражение точки $(-x_0, y_0)$ относительно оси абсцисс (рис. 14).

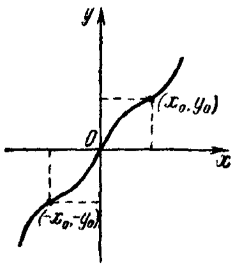

Рис. 13.

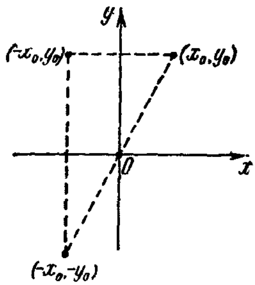

Рис. 14.

Заметим, что большинство функций не являются ни четными, ни нечетными, например:

1) $y = x^2 + x$, так как $(-x)^2 + (-x) = x^2 - x \neq \pm y$,

2) $y = 2^x$, так как $2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x \neq \pm y$,

3) $y = \cos(x - 1)$, так как $\cos(-x - 1) = \cos(x + 1) \neq \pm y$,

4) $y = x^2 + \arcsin x$, так как $(-x)^2 + \arcsin(-x) = x^2 - \arcsin x \neq \pm y$.

§ 5. Асимптоты

1. Определение асимптоты. Для описания поведения функции, а следовательно, и ее графика имеет существенное значение, как она изменяется при $x \to \infty$ и при $x \to -\infty$.

Рассмотрим функцию

$$y = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Так как $(-x)^2 = x^2$, то и $\frac{1}{(-x)^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1} = y$, а следовательно, график функции симметричеи относительно оси ординат. Поэтому достаточно рассмотреть эту функцию только для $x \geqslant 0$. Заметим также, что для всех x функция y положительна, поэтому ее график расположен выше оси абсцисс.

Для того чтобы примерно представить себе график функции, построим несколько его точек:

Если $x=0$, то $y=1$; еслн $x=0{,}5$, то $y=0{,}8$; если $x=1$, то $y=0{,}5$; если $x=2$, то $y=0{,}2$; если $x=3$, то $y=0{,}1$ и т. д. График функции показан на рис. 15.

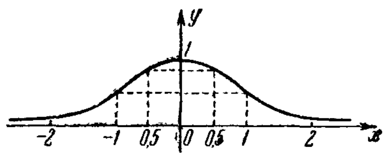

Рис. 15.

Замечаем, что когда x увеличивается, y уменьшается. Более того, при безграничном увеличении абсциссы x ордината y будет становиться все меньше и меньше, неограниченно приближаясь к нулю. Но равной нулю ордината никогда не станет, так как при любом значении x функция $y>0$. В таком случае говорят, что прямая Ox является асимптотой рассматриваемой кривой.

Если расстояние d от точки кривой до некоторой определенной прямой по мере удаления точки в бесконечность стремится к нулю, то такая прямая называется *асимптотой* крнвой.

2. Горизоитальная и вертикальная асимптоты. Если при стремлении аргумента x к ∞ функция y стремится к постоянному числу a, то прямая $y=a$ является *горизонтальной асимптотой*. В рассмотренном выше примере найденная асимптота является горизонтальной.

Нетрудно убедиться в том, что прямая $y=1$ служит горизонтальной асимптотой графика функции

$$y=1+\frac{1}{x^2+1}$$

(рис. 16).

Если при стремлении аргумента x к постоянному числу b функция y по модулю неограниченно возрастает, то прямая $x=b$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции.

Рассмотрим функцию

$$y = \log_2 (x-1).$$

Если $x \to 1$ (справа), то выражение $(x-1) \to 0$, оставаясь положительным, и, следовательно, $y = \log_2 (x-1) \to -\infty$. Поэтому прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой графика функции (рис. 17).

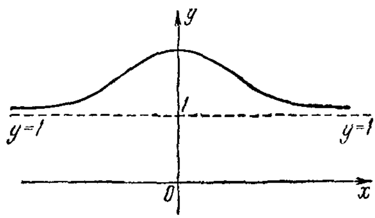

Рис. 16.

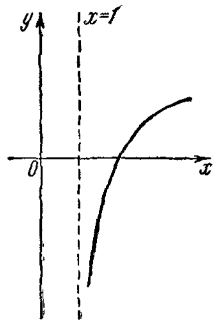

Рис. 17.

3. Наклонная асимптота. Теперь перейдем к нахождению наклонных (вообще невертикальных) асимптот.

Положим, что прямая $y = ax + b$ служит асимптотой кривой $y = f(x)$. Пусть α — угол, образованный асимптотой с положительным направлением оси абсцисс, MK — расстояние точки кривой до асимптоты и MK_1 — разность ординат кривой и асимптоты при одинаковом значении абсциссы x (рис. 18).

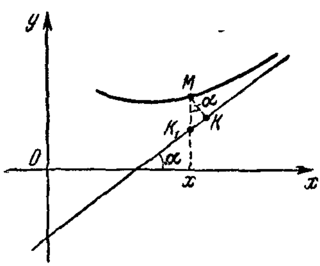

Рис. 18.

Из прямоугольного треугольника MKK_1 имеем:

$$|MK_1| = \frac{MK}{\cos\alpha} \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}\right),$$

а следовательно, условие $MK \to 0$ можно заменить условием $MK_1 \to 0$. Поскольку MK_1 есть разность ординат кривой и асимптоты при одинаковых абсциссах, то условие $MK_1 \to 0$ можно переписать так:

$$f(x) - ax - b \to 0, \text{ если } x \to \infty,$$

откуда мы и должны получить значения a и b.

Перепишем последнее условие так:

$$x\left[\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\right]\longrightarrow 0, \quad \text{если} \quad x\longrightarrow\infty.$$

Но так как $x\longrightarrow\infty$, то выражение, стоящее в скобках, должно стремиться к нулю, т. е.

$$\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\longrightarrow 0.$$

Так как при $x\longrightarrow\infty$ выражение $\frac{b}{x}\longrightarrow 0$, то

$$\frac{f(x)}{x}\longrightarrow a, \text{ если } x\longrightarrow\infty.$$

Из первоначального условия

$$f(x)-ax-b\longrightarrow 0, \quad \text{если} \quad x\longrightarrow\infty,$$

имеем

$$f(x)-ax\longrightarrow b, \text{ если } x\longrightarrow\infty.$$

Итак, для существования наклонной асимптоты у кривой $y=f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы при движении по бесконечной ветви кривой значение x беспредельно возрастало и чтобы одновременно имели место:

$$\frac{f(x)}{x}\longrightarrow a \quad \text{и} \quad f(x)-ax\longrightarrow b.$$

Тогда уравнение

$$y=ax+b$$

будет уравнением наклонной асимптоты.

Для исследования расположения кривой относительно асимптоты надо отдельно разобрать случаи стремления x к $+\infty$ и к $-\infty$ и в каждом из этих случаев определить знак разности

$$f(x)-(ax+b).$$

Если он будет положителен, то кривая расположена над асимптотой, а если отрицателен, то под асимптотой.

Пример. Найти асимптоты кривой

$$f(x)=\frac{x^2}{x+1}.$$

Решение. Функция определена на всей оси абсцисс, за исключением точки $x=-1$. Корнем (нулем) функции служит только точка $x=0$.

Вертикальной асимптотой будет прямая $x=-1$, причем $f(x)\to+\infty$ при $x\to-1$ справа и $f(x)\to-\infty$ при $x\to-1$ слева. Найдем наклонную асимптоту. Так как $\frac{f(x)}{x}=\frac{x}{1+x}=$ $=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\to 1$ при $x\to\pm\infty$, то в уравнении асимптоты $y=ax+b$ коэффициент $a=1$. Далее,

$$f(x)-ax=f(x)-1\cdot x=f(x)-x=$$
$$=\frac{x^2}{x+1}-x=\frac{x^2-x^2-x}{x+1}=-\frac{x}{x+1}=-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}.$$

Ясно, что при $x\to\pm\infty$ значение $(f(x)-ax)\to-1$, т. е. коэффициент b равен -1. Итак, уравнение наклонной асимптоты: $y=x-1$.

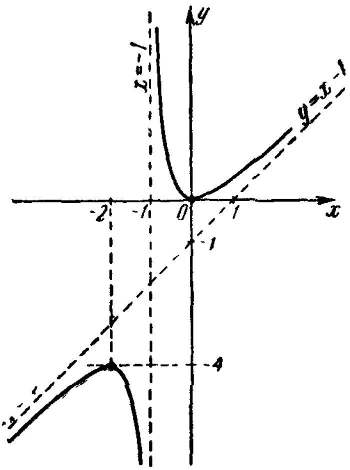

Рис. 19.

Поскольку разность

$$d=\frac{x^2}{1+x}-(x-1)=\frac{1}{1+x}$$

положительна при $x>-1$ и отрицательна при $x<-1$, то график справа от прямой $x=-1$ находится над асимптотой $y=x-1$, а слева от прямой $x=-1$ под ней. Очевидно, что в интервалах $(-1,0)$ и $(0,1)$ функция $y>0$; а если $x=0$, то и $y=0$. Отсюда ясно, что правая ветвь графика касается оси абсцисс в начале координат.

Легко заметить, что в интервалах $(-\infty,\ -2)$ и $(-2,\ -1)$ функция $f(x)<-4$, а при $x=-2$ функция $f(x)=-4$. Значит, прямая $y=-4$ касается левой ветви графика в точке $(-2,\ -4)$.

На основании изложенного можно построить график данной функции (рис. 19).

§ 6. Максимум и минимум функции

1. Точки экстремума функции. Мы уже знаем (стр. 19), что функция в некоторых промежутках может возрастать, а в некоторых убывать. Например, пусть функция $y=f(x)$ задана в промежутке $[a, m]$ (рис. 20). Из рисунка мы видим, что в промежутках $[a, b)$, (c, d), (e, f), (k, l) функция возрастает, а в промежутках $[b, c)$, (d, e), (f, k), $(l, m]$ убывает. Те точки оси абсцисс, которые отделяют промежутки возрастания от промежутков убывания или, наоборот, промежутки убывания от промежутков возрастания, называются *точками экстремума* функции. В нашем примере точками экстремума являются b, c, d, e, f, k, l.

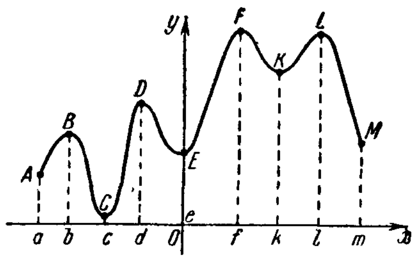

Рис 20.

Отметим еще, что точки экстремума, по определению, являются внутренними точками области определения функции. На рис. 20 точки a и m — концы промежутка определения функции — не являются точками экстремума.

2. Максимум и минимум функции. Если к точке экстремума слева примыкает участок возрастания, а справа — участок убывания функции, то такая точка называется *точкой максимума* функции.

Если же к точке экстремума слева примыкает участок убывания, а справа — участок возрастания, то такая точка называется *точкой минимума* функции.

Для рассматриваемой функции точки b, d, f, l являются точками максимума функции, а точки c, e, k — точками минимума функции. Значения функции в точках максимума или минимума для краткости называют *максимумом* или *минимумом функции*.

3. Наименьшее и наибольшее значения функции. Заметим, что максимум функции и наибольшее значение функции это далеко не всегда совпадающие понятия. Например, наибольшее значение функции $y=-x^2$ и ее максимум совпадают, а у функции $y=x^3-3x$ (рис. 21) на сегменте

$[-2; 2{,}5]$ не совпадают. Максимум функции (ордината точки A) меньше наибольшего значения функции (ордината точки B). Точно так же минимум функции и наименьшее значение функции являются в общем не совпадающими понятиями.

Отметим, что максимум функции может быть как больше, так и меньше ее минимума. Так, например, на рис. 20 точка B лежит ниже точки K.

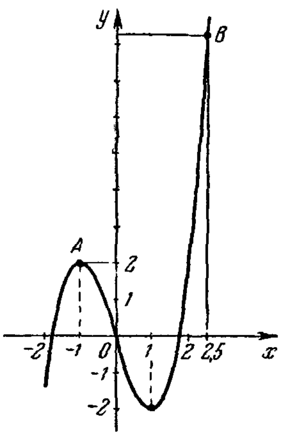

Рис. 21.

В математическом анализе даются общие приемы нахождения экстремальных значений функции. Но это выходит за рамки данной книги.

В предлагаемых нами задачах экстремальные значения функции можно определить средствами элементарной математики.

Пример 1. Исследовать и построить график функции

$$y = \frac{(x-3)^2}{4(x-1)}.$$

Решение. Функция определена на всей числовой оси, кроме точки $x=1$, т. е. прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой графика функции.

Найдем асимптоту, не параллельную оси ординат. Имеем:

$$\frac{y}{x} = \frac{(x-3)^2}{4(x-1)x} = \frac{\left(1-\frac{3}{x}\right)^2}{4\left(1-\frac{1}{x}\right)}.$$

Очевидно, что если $x \to \infty$, то $\frac{y}{x} \to \frac{1}{4}$. Таким образом, для асимптоты $y' = ax + b$ коэффициент $a = \frac{1}{4}$.

Далее,

$$\frac{(x-3)^2}{4(x-1)} - ax = \frac{(x-3)^2}{4(x-1)} - \frac{x}{4} = \frac{-5x+9}{4(x-1)} = \frac{-5+\frac{9}{x}}{4\left(1-\frac{1}{x}\right)}.$$

Ясно, что если $x \to \infty$, то рассматриваемая разность стремится к числу $-\frac{5}{4}$, т. е. $b=-\frac{5}{4}$.

Итак, уравнение асимптоты (наклонной) есть

$$y'=\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}.$$

Теперь исследуем положение графика относительно асимптоты. Рассмотрим разность

$$\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}-\left(\frac{x}{4}-\frac{5}{4}\right)=\frac{(x-3)^2-(x-5)(x-1)}{4(x-1)}=\frac{1}{x-1}.$$

Если $\frac{1}{x-1}>0$, т. е. $x>1$, то график расположен над асимптотой. Если же $\frac{1}{x-1}<0$, т. е. $x<1$, то график расположен под асимптотой.

Если $x \to 1$ справа, то $y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)} \to +\infty$, а если $x \to 1$ слева, то $y \to -\infty$.

Перейдем к нахождению точек экстремума функции. Имеем:

$$y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)},$$

$$4xy-4y=x^2-6x+9,$$

$$x^2-(6+4y)x+4y+9=0.$$

Решая это уравнение относительно x, получаем:

$$x_{1,2}=3+2y\pm 2\sqrt{y^2+2y}.$$

Ясно, что в точках экстремумов должно быть $x_1=x_2$, а следовательно, дискриминант

$$y^2+2y=0,$$

откуда

$$y_1=-2, \; y_2=0.$$

Соответствующие им значения аргумента суть $x=-1$ и $x=3$.

Для вычерчивания графика найдем еще точку пересечения его с осью ординат. Если $x=0$, то $y=\frac{3^2}{-4}=-\frac{9}{4}=$ $=-2,25$, т.е. точка $(0; -2,25)$ принадлежит графику.

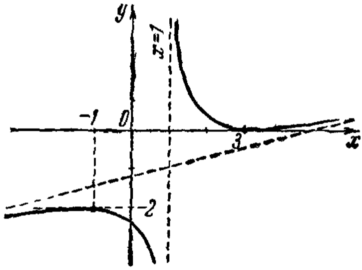

Рис. 22.

Нанося все полученные данные на координатную плоскость, получим график данной функции (рис. 22).

§ 7. Выпуклость и вогнутость функции (кривой)

Функция $y=f(x)$ называется *выпуклой* в некотором промежутке, если для любой пары различных значений аргумента x_1 и x_2 из этого промежутка выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

Функция $y=f(x)$ называется *вогнутой* в некотором промежутке, если для любой пары различных значений аргумента x_1 и x_2 из этого промежутка выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

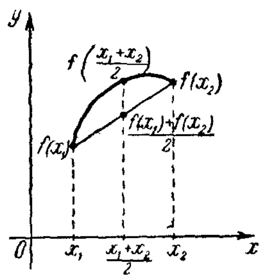

Рис. 23.

Данные выше определения имеют следующий геометрический смысл.

Середина любой хорды графика выпуклой функции лежит ниже соответствующей точки дуги (рис. 23), а середина любой хорды графика вогнутой функции лежит выше соответствующей точки дуги (рис. 24).

Ясно, что одна и та же кривая $y=f(x)$ может состоять и из выпуклых и из вогнутых частей. Точки, отделяющие выпуклые части кривой от ее вогнутых частей, называются *точками перегиба.*

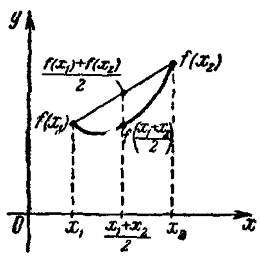

Рис. 24.

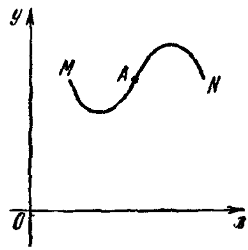

Рис. 25.

На рис. 25 точка A является точкой перегиба кривой MAN.

§ 8. Действия с графиками

1. Сложение графиков. Пусть требуется построить график функции

$$y = x + \frac{1}{x}.$$

Вначале строим два вспомогательных графика: $y_1 = x$ и $y_2 = \frac{1}{x}$. На рис. 26 они показаны пунктирными линиями. Затем складываем их ординаты для одинаковых значений x, причем под суммой ординат мы понимаем их алгебраическую сумму. Получив, таким образом, достаточное число точек, проводим через них «плавную» линию, которая и является графиком (или частью графика) данной функции. В нашем примере возьмем значения $x = 1/2$, 1, 2, 3. Складывая ординаты обоих графиков для каждого из этих значений x, получим точки A, B, C, D. Соединив их «плавной»

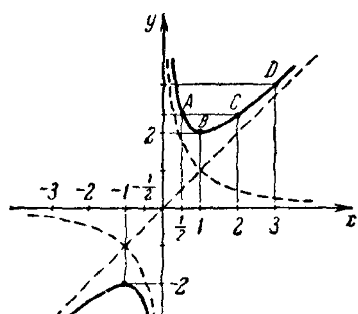

Рис. 26.

линией, получим ветвь графика функции при $x>0$. Аналогично получается и ветвь графика при $x<0$. На этом примере мы видим, что если заданы графики функций $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$, то можно построить по точкам их сумму, т. е. график функции $y=y_1+y_2$.

2. Вычитание графиков. Если заданы графики функций $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$, то график функции $y=f_1(x)-f_2(x)$ можно построить по точкам. В этом случае из ординат функции y_1 вычитают ординаты функции y_2 при одних и тех же значениях x. Через полученные таким образом точки проводим «плавную» линию, которая и будет графиком данной функции. Однако обычно не прибегают к вычитанию графиков, а строят два графика y_1 и $-y_2$, а искомый график строится как сумма этих графиков, т. е. $y=y_1+(-y_2)$. Это легко осуществить. Действительно, если задан график функции $y=\varphi(x)$, то, зеркально отобразив $\varphi(x)$ относительно оси абсцисс, получим график функции $y=-\varphi(x)$ (рис. 27).

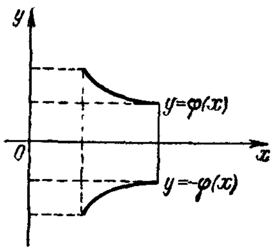

Рис. 27.

3. Умножение графиков. Если заданы графики функций $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$, то можно построить по точкам график функции $y=y_1\cdot y_2$. Но если при сложении (вычитании) графиков можно пользоваться циркулем для сложения ординат, то при умножении надо предварительно переводить отрезки (ординаты) в числа, а потом, перемножая эти числа (конечно, с учетом их знаков), наносить на плоскость соответствующие им точки.

4. Деление графиков. Если заданы графики функций $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$, то можно построить по точкам график функции $y=\frac{y_1}{y_2}$.

Сказанное выше относительно умножения графиков имеет место и при делении графиков. Но здесь надо добавить только, что y_2 не должен быть равен нулю, так как в противном случае y не существует. Если же $y_2\to 0$, то в зависимости от поведения y могут быть следующие случаи: $y\to 0$, $y\to\pm\infty$, $y\to c$ (постоянная).

Деление графиков можно свести к умножению, поскольку график функции $\frac{1}{y_2}$ легко получить из графика y_2 заменой ординат обратными числами. Затем строить график произведения $y = y_1 \cdot \left(\frac{1}{y_2}\right)$.

§ 9. Преобразования графиков

1. Сдвиг (перенос) на данный отрезок вдоль оси ординат.

Пример 1. Пусть требуется построить график функции $y = x + 2$.

Решение. Функция $y = x + 2$ линейная, а следовательно, ее график — прямая линия. Зададим два произвольных значения x и найдем соответствующие значения y, т. е. определим две точки, координаты которых удовлетворяют данному уравнению. Проведя через эти две точки прямую, получим график данной функции.

Но можно поступить иначе. Строим сначала график функции $y = x$ и замечаем, что при одинаковых значениях x ординаты функции $y = x + 2$ больше ординат функции $y = x$ на 2. Таким образом, чтобы построить график функции $y = x + 2$, надо график функции $y = x$ поднять вдоль оси ординат на две единицы. В этом случае говорят, что

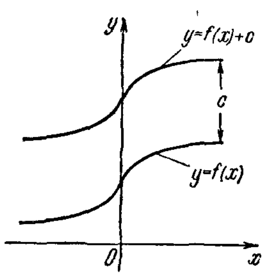

Рис 28.

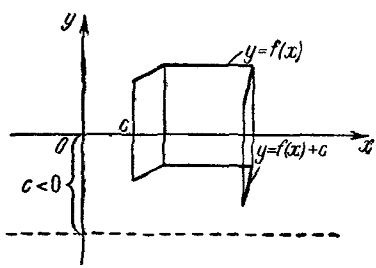

Рис. 29.

мы произвели сдвиг графика $y = x$ (перенос) на две единицы (вверх) вдоль оси ординат. Практически можно поступить и так: построить график функции $y = x$, а потом опустить ось абсцисс на две единицы.

Мы разобрали здесь простейший пример. Но ясно, что этот прием применим и к построению графика любой функции вида $y=f(x)+c$, где c — постоянная величина. Строим график функции $y=f(x)$ и сдвигаем его вдоль оси ординат на c: поднимаем, если $c>0$, и опускаем, если $c<0$ (рис. 28, 29).

2. Сдвиг (перенос) на данный отрезок вдоль оси абсцисс.

Пример 2. Построить график функции $y=(x+1)^2$.

Решение. Сравним данную функцию с функцией $y=x^2$. Для того чтобы обе фуикции принимали одинаковые значения, например 4, у функции $y=x^2$ аргумент x должен быть равен 2 или -2, а у функции $y=(x+1)^2$ аргумент x должен быть равен 1 или -3, т. е. для того чтобы получить одинаковые значения этих функций, надо придать аргументу x функции $y=(x+1)^2$ значение на одну единицу меньше, чем значению аргумента x функции $y=x^2$. Таким образом, чтобы получнть график функции $y=(x+1)^2$, надо график функции $y=x^2$ перенести вдоль оси абсцисс влево на единицу. В этом случае говорят, что мы произвели сдвиг графика $y=x^2$ на -1 вдоль оси абсцисс (рис. 30).

Очевидно, что вообще график функции $y=f(x+c)$ можно получить путем сдвига графика $y=f(x)$ на $-c$

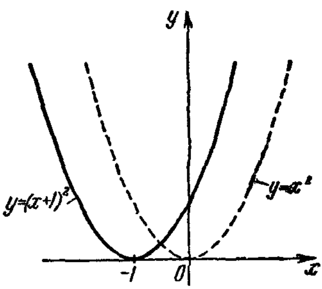

Рис. 30.

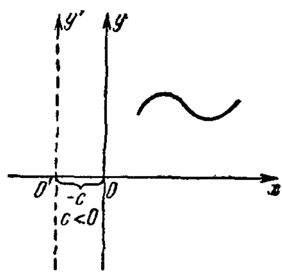

Рис. 31.

вдоль оси абсцисс. Практически вместо сдвнга графика вдоль оси абсцисс на $-c$ можно перенести ось ординат на $+c$. График, изображенный иа рис. 31, представляет функцию $y=f(x)$, если ось ординат $O'y'$, и функцию $y=f(x-c)$, если ось ординат Oy.

3. Одновременный сдвиг вдоль осей.

Пример 3. Построить график функции $y=x^2+2x+3$.

Решение. Правую часть уравнения можно представить так: $x^2+2x+1+2$. Таким образом, $y=(x+1)^2+2$.

Чтобы построить функцию $y=(x+1)^2$, надо переместить график функции $y=x^2$ вдоль оси абсцисс на -1, а для того чтобы построить график $y=(x+1)^2+2$, надо поднять график $y=(x+1)^2$ на две единицы вверх вдоль оси ординат.

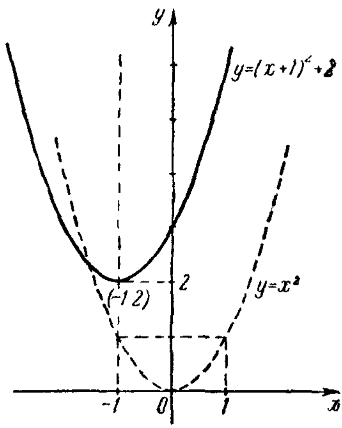

Рис. 32.

Следовательно, для того чтобы из графика функции $y=x^2$ получить график функции $y=(x+1)^2+2$, надо график функции $y=x^2$ сдвинуть на -1 вдоль оси Ox и на $+2$ вдоль оси Oy (рис. 32).

Вообще, если надо построить график функции $y=$ $=f(x+a)+b$, то можно поступить так: построить график функции $y=f(x)$. Затем произвести сдвиг вдоль оси абсцисс на $-a$ и сдвиг вдоль оси ординат на b. Заметим, что можно сначала произвести сдвиг вдоль оси ординат, а затем вдоль оси абсцисс, при этом результат будет такой же. Таким образом, произведенные операции перестановочны. Последнее существенно, так как не всякие геометрические преобразования перестановочны. Например, совершим два последовательных геометрических преобразования плоскости: 1) сдвинем каждую точку A плоскости на отрезок, равный единице, параллельно оси абсцисс и 2) произведем вращение вокруг точки O на угол $\alpha=90^\circ$ (против часовой стрелки). После первого преобразования каждая точка A перейдет в точку A', а после второго преобразования точка A' перейдет в точку A''. Итак, каждая

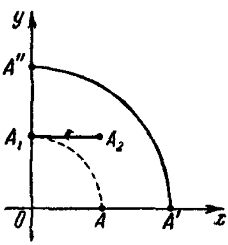

Рис. 33.

точка A плоскости перейдет в точку A''. На рис. 33 в качестве точки A взята точка, лежащая на оси абсцисс.

Проделаем эти преобразования в обратном порядке: 1) произведем сначала вращение плоскости на угол $\alpha = 90°$ вокруг точки O и 2) совершим перенос плоскости параллельно оси абсцисс на отрезок, равный единице. При этом выбранная точка A перейдет сначала в точку A_1, а затем в точку A_2. Ясно видно, что точки A'' и A_2 не совпадают.

Рассмотрим еще один пример. Возьмем прямую $y=x$ и умножим ординату каждой ее точки на 2; получим прямую $y=2x$. Затем сдвинем прямую $y=2x$ вдоль оси ординат на 3, получим прямую $y=2x+3$. Проделаем эти операции в обратном порядке, т. е. сдвинем прямую $y=x$ вдоль оси ординат на 3, получим прямую $y=x+3$; затем, умножив ординату каждой точки прямой $y=x+3$ на 2, получим прямую $y=2x+6$. Таким образом, при перестановке операций мы получили различные прямые: в первом случае получилась прямая $y=2x+3$, а во втором $y=2x+6$.

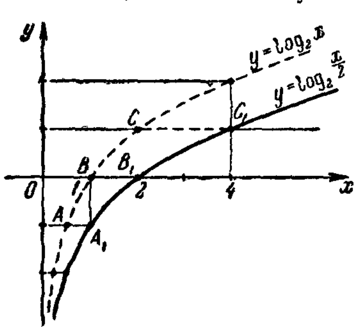

Рис. 34.

Итак, мы убедились, что при перестановке операций мы пришли к различным результатам.

4. Растяжение (или сжатие) в данном отношении вдоль оси абсцисс.

Пример 4. Известен график функции $y=\log_2 x$. Построить график функции $y=\log_2 \frac{x}{2}$.

Решение. Чтобы получить одинаковые значения обеих функций, надо придать аргументу x функции $y=\log_2 \frac{x}{2}$ значения в два раза большие, чем у функции $y=\log_2 x$. Следовательно, чтобы построить график функции $y=\log_2 \frac{x}{2}$, зная график функции $y=\log_2 x$, надо переместить точки графика $y=\log_2 x$ вдоль оси абсцисс на такое расстояние, чтобы абсциссы их стали в два раза больше. На рис. 34 показано, что точка $A\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ перешла в точку $A_1(1, -1)$, точка $B(1, 0)$ — в точку $B_1(2, 0)$, точка $C(2, 1)$ — в точку $C_1(4, 1)$. В этом случае говорят, что мы произвели растяжение графика $y = \log_2 x$ вдоль оси абсцисс в два раза.

Вообще, чтобы получить график функции $y = f\left(\frac{x}{k}\right)$, где $k > 1$, зная график функции $y = f(x)$, достаточно каждую точку $M(x, y)$ графика $y = f(x)$ переместить в положение точки $M_1(kx, y)$, т. е. совершить растяжение графика $y = f(x)$ вдоль оси абсцисс в k раз.

Пример 5. Построить график функции $y = \sin 2x$.

Решение. Чтобы получить одинаковые значения функции $y = \sin 2x$ и $y = \sin x$, надо придать аргументу

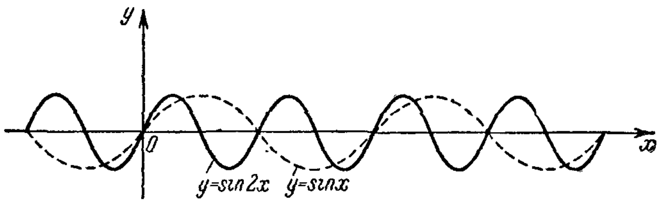

Рис. 35.

функции $y = \sin 2x$ значения в два раза меньшие, чем аргументу функции $y = \sin x$. Следовательно, чтобы построить график функции $y = \sin 2x$, зная график функции $y = \sin x$, перемещают точки графика $y = \sin x$ вдоль оси абсцисс так, чтобы абсциссы этих точек стали в два раза меньше, т. е. сжимают график функции $y = \sin x$ вдоль оси абсцисс в два раза (рис. 35).

Вообще, чтобы из графика функции $y = f(x)$ получить график функции $y = f(kx)$, где $k > 1$, надо произвести сжатие графика $y = f(x)$ вдоль оси абсцисс в k раз, т. е. каждую точку $M(x_1, y_1)$ графика $y = f(x)$ надо переместить в положение точки $M_1\left(\frac{x_1}{k}, y_1\right)$.

5. Растяжение (или сжатие) в данном отношении вдоль оси ординат.

Пример 6. Построить график функции $y = 2x^2$.

Решение. При одних и тех же значениях x функция $y = 2x^2$ в два раза больше значений функции $y = x^2$. Следовательно, для построения графика $y = 2x^2$ достаточно увеличить все ординаты функции $y=x^2$ в два раза (рис. 36). В таком случае говорят, что мы произвели растяжение графика функции $y=x^2$ в два раза вдоль оси ординат.

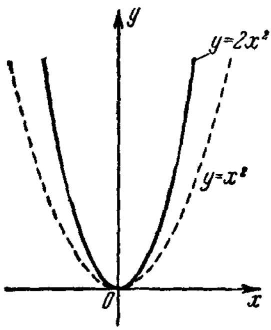

Рис. 36.

Вообще, для того чтобы из графика $y=f(x)$ получить график $y=kf(x)$, надо растянуть график $y=f(x)$ в k раз вдоль оси ординат, если $k>1$, и сжать в $\frac{1}{k}$ раз вдоль той же оси, если $0<k<1$.

6. Построение графика $y=kf(mx)$. Строим сначала график функции $y=f(x)$ и сжимаем его в m раз вдоль оси абсцисс. Получаем график функции $y=f(mx)$. Затем производим растяжение графика функции $y=f(mx)$ вдоль оси ординат в k раз. Полученный, таким образом, график представляет фуикцию $y=kf(mx)$.

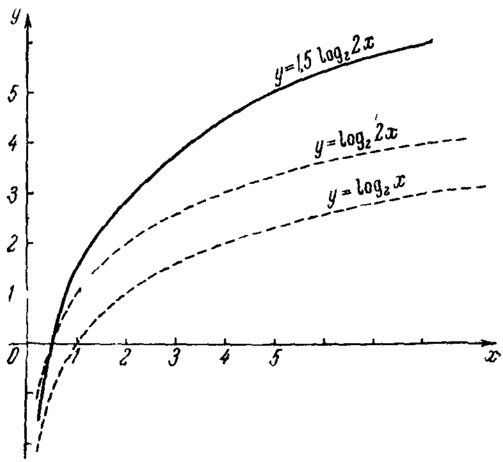

Рис. 37.

Пример 7. Построить график функции $y=1{,}5\log_2 2x$, зная график функции $y=\log_2 x$.

Решение. Строим график функции $y=\log_2 2x$, сжимая график $y=\log_2 x$ вдоль оси абсцисс в 2 раза. Затем растягиваем график $y=\log_2 2x$ вдоль оси ординат в 1,5 раза; в итоге получаем искомый график $y=1,5\log_2 2x$ (рис. 37).

Легко убедиться, что произведенные нами операции перестановочны. Действительно, можно **сначала** растянуть график $y=\log_2 x$ вдоль оси ординат в 1,5 раза, а затем полученный график $y=1,5\log_2 x$ сжать вдоль оси абсцисс в 2 раза.

Пример 8. Построить график функции $y=\frac{1}{4}\,3^{\frac{x}{2}}$, *исходя из графика* $y=3^x$.

Решение. Строим график функции $y=3^{\frac{x}{2}}$, растягивая график $y=3^x$ вдоль оси абсцисс в два раза. Затем сжимаем полученный график $y=3^{\frac{x}{2}}$ вдоль оси ординат в 4 раза (рис. 38).

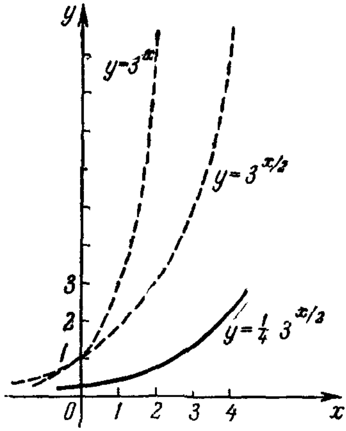

Рис. 38.

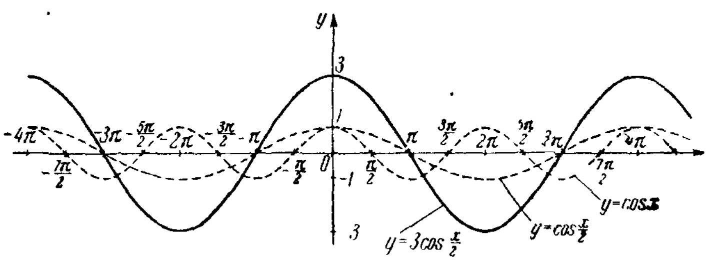

Рис. 39.

Можно поступить иначе: сначала сжимать график $y=3^x$ вдоль оси ординат в 4 раза, а затем полученный график $y=\frac{1}{4}\,3^x$ растянуть вдоль оси абсцисс в 2 раза.

Пример 9. Построить график функции $y=3\cos\frac{x}{2}$, *знаая график* $y=\cos x$.

Решение. Растягивая график функции $y=\cos x$ вдоль оси абсцисс в 2 раза, получим график $y=\cos\frac{x}{2}$. Затем полученный график растягиваем еще раз, но уже вдоль оси ординат в 3 раза; получаем график функции $y=3\cos\frac{x}{2}$ (рис. 39).

ГЛАВА II

ОБЗОР ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Линейная функция

1. Определение. Функция вида $y = kx + b$, где k и b — действительные числа, называется *линейной*. Линейная функция определена для всех действительных значений x.

2. Функция $y = kx$. Если $b = 0$, то функция $y = kx + b$ имеет вид:

$$y = kx.$$

Если $x = 0$, то и $y = 0$. Это значит, что график функции $y = kx$ проходит через начало координат.

Пусть x_1 — произвольное значение аргумента x и y_1, соответствующее ему значение функции, т. е.

$$y_1 = kx_1.$$

Через начало координат и точку $A_1(x_1, y_1)$ проводим прямую. Докажем, что графиком функции $y = kx$ является эта прямая.

Обозначим через φ_1 угол, образованный этой прямой с положительным направлением оси абсцисс (причем угол отсчитывается от этой оси против часовой стрелки). Обозначим точку с абсциссой x_1 на этой оси через B_1, а начало координат буквой O.

Из прямоугольного треугольника OA_1B_1 имеем

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{A_1B_1}{OB_1} = \frac{y_1}{x_1} = \frac{kx_1}{x_1} = k.$$

Придадим теперь аргументу другое значение x_2, а соответствующее ему значение функции пусть будет y_2, т. е.

$$y_2 = kx_2.$$

Докажем, что точка (x_2, y_2) принадлежит построенной нами прямой (OA_1).

Через начало координат (0, 0) и точку $A_2(x_2, y_2)$ проводим прямую OA_2. Пусть эта прямая образует с положительным направлением оси абсцисс угол φ_2. Проекцию точки A_2 на ось абсцисс обозначим через B_2.

Из прямоугольного треугольника OA_2B_2 находим:

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{A_2B_2}{OB_2} = \frac{y_2}{x_2} = k.$$

Таким образом, $\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi_2$, откуда $\varphi_1 = \varphi_2$ (или $\varphi_1 = \varphi_2 \pm \pi$). Отсюда заключаем, что прямые OA_1 и OA_2 представляют одну и ту же прямую, т. е. точка A_2 принадлежит прямой OA_1, что и требовалось доказать.

Следовательно, графиком функции $y = kx$ является ***прямая***, проходящая через начало координат и образующая с положительным направлением оси абсцисс угол φ, тангенс которого равен k.

Поскольку прямая определяется двумя точками, то удобно, кроме начала координат, указать еще одну точку прямой. Если $x = 1$, то $y = k$. Таким образом, прямая $y = kx$ проходит через точки (0, 0) и (1, k).

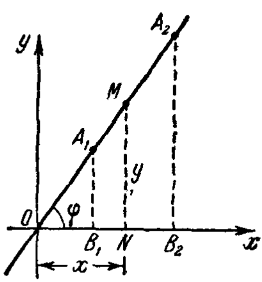

Рис. 40.

Теперь покажем, что уравнение любой прямой, проходящей через начало координат (кроме оси ординат), имеет вид $y = kx$.

Действительно, пусть точка M (рис. 40) принадлежит прямой, проходящей через начало координат O. Обозначим проекцию точки M на ось абсцисс буквой N; $\angle MON = \varphi$. Из прямоугольного треугольника MON находим:

$$y = x \operatorname{tg} \varphi.$$

Если обозначим $\operatorname{tg} \varphi$ через k, то

$$y = kx,$$

что и требовалось доказать.

Если прямая, проходящая через начало координат, есть ось ординат, то $\varphi=90^\circ$ и $\operatorname{tg}\varphi$ не существует. Поэтому уравнение оси ординат не может иметь вид $y=kx$. Поскольку все точки оси ординат имеют абсциссу, равную нулю, то уравнением оси ординат является $x=0$.

3. Функция $y=kx+b$. Докажем, что графиком функции

$$y=kx+b$$

является *прямая*, пересекающая ось ординат в точке $(0, b)$ и образующая с положительным направлением оси абсцисс угол, тангенс которого равен k.

При одном и том же произвольном значении аргумента x значения функций $y=kx$ и $y=kx+b$ отличаются на b, причем значения второй функции больше соответствующих значений первой функции, если $b>0$, и меньше, если $b<0$.

Таким образом, чтобы построить график функции $y=kx+b$, строим прямую $y=kx$, а потом перемещаем ее на b единиц вдоль оси ординат. Причем, если $b>0$, то прямую поднимаем вверх, если же $b<0$, то опускаем вниз. Остается доказать, что всякая прямая (не параллельная оси ординат) имеет уравнение $y=kx+b$.

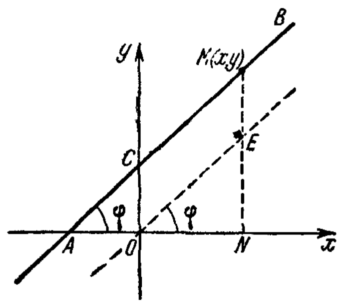

Рис. 41

Пусть прямая AB (рис. 41) образует с осью абсцисс угол φ и пересекает ось ординат в точке C, отстоящей от начала координат на расстояние b. Возьмем произвольную точку $M(x, y)$ на прямой AB, ее проекцию на ось абсцисс обозначим через N. Через начало координат O проводим прямую параллельно прямой AB, пересекающую отрезок MN в точке E. Ясно, что $\angle EON=\varphi$.

Из прямоугольного треугольника OEN находим:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{NE}{ON}=\frac{y-b}{x},$$

откуда $y = x\,\mathrm{tg}\,\varphi + b$. Обозначив $\mathrm{tg}\,\varphi$ через k, получим:

$$y = kx + b,$$

что и требовалось доказать.

4. Приращение линейной функции. *Приращением функции* (Δy) называется величина, на которую изменяется значение функции при переходе от одного значения аргумента к другому.

Когда независимая переменная (аргумент) x получает некоторое приращение Δx, ее функция $y = f(x)$ также получает некоторое приращение: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Очевидно, что приращение функции (вообще говоря) зависит и от приращения аргумента Δx и от начального значения этого аргумента.

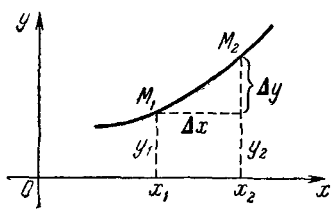

Рис. 42.

На рис. 42 изображен график некоторой функции и на нем точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

Приращение функции $\Delta y = y_2 - y_1$ получилось в результате приращения аргумента $\Delta x = x_2 - x_1$.

Легко усмотреть, что приращение функции Δy может быть положительным, отрицательным и даже нулем.

Заметим, что вообще приращение функции не пропорционально приращению аргумента. Однако можно доказать, что *приращение линейной функции пропорционально приращению аргумента*. Действительно, если x_0 и x — определенные и произвольные значения независимой переменной, а y_0 и y — соответствующие им значения функции, то $y = kx + b$, $y_0 = kx_0 + b$, $y - y_0 = k(x - x_0)$, т. е. приращение $y - y_0$ функции пропорционально приращению $x - x_0$ независимой переменной.

Обратно, если относительно какой-либо функции y известно, что ее приращения $y - y_0$ пропорциональны приращениям $x - x_0$ независимой переменной, т. е. что имеет место равенство

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

где k — некоторое определенное число, то

$$y = kx + y_0 - kx_0.$$

Обозначая число $y_0 - kx_0$ через b, приходим к выводу, что

$$y = kx + b.$$

Таким образом, отношение приращения линейной функции к вызвавшему его приращению независимой переменной сохраняет постоянное значение

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = k,$$

не зависящее от начальной абсциссы x_0, которой сообщается приращение.

Дадим геометрическую иллюстрацию. Из рис. 43 мы находим:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

но так как $\operatorname{tg} \varphi = k$, то

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = k.$$

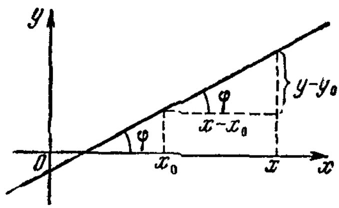

Рис. 43.

Покажем (на примере), что приращение нелинейной функции не пропорционально приращению аргумента.

Действительно, пусть начальное значение аргумента x функции $y = x^2$ равно 4, и пусть $\Delta x = 2$, тогда $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 6^2 - 4^2 = 20$.

Пусть теперь $\Delta x = 4$. Тогда $\Delta y = 8^2 - 4^2 = 48$, и ясно видно, что $\frac{48}{20} \neq \frac{4}{2}$.

Кроме того, если для линейной функции величина приращения Δy при данном значении Δx не зависела от выбранного значения x, то в нашем примере она будет от него зависеть. Так, выбрав в качестве начального значения функции не 2, а 5 и полагая по-прежнему $\Delta x = 2$, получим, что $\Delta y = 7^2 - 5^2 = 24 \neq 20$.

§ 2. Квадратичная функция

1. Определение. Если зависимость между функцией y и аргументом x выражается равенством

$$y = ax^2 + bx + c, \tag{1}$$

то такая функция называется *квадратичной*.

2. Исследование функции $y=ax^2+bx+c$. Для удобства исследования преобразуем правую часть (1):

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left(x^2+2x\cdot\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c=$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{2a^2}\right]+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Итак,

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}. \tag{2}$$

Правая часть равенства (2) есть сумма двух слагаемых, из которых $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ зависит от переменной x, а $\frac{4ac-b^2}{4a}$ не зависит от x и, следовательно, имеет постоянное значение. Поскольку $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geqslant 0$, то возможны два случая:

1) Если $a>0$, то $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geqslant 0$, и следовательно, при этом условии квадратичная функция имеет некоторое наименьшее значение (минимум).

2) Если $a<0$, то $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\leqslant 0$. При этом условии квадратичная функция имеет некоторое наибольшее значение (максимум).

Так как при $x=-\frac{b}{2a}$ функция y имеет значение $\frac{4ac-b^2}{4a}$, то наименьшее значение, которое функция принимает при условии $a>0$, и наибольшее значение, которое она принимает при условии $a<0$, есть $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

3. График квадратичной функции. Сравним графики функций $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ и $y=ax^2$. Чтобы получить график функции $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$, имея график $y=ax^2$, достаточно сдвинуть график $y=ax^2$ вдоль оси абсцисс на отрезок, равный $-\frac{b}{2a}$.

Теперь сравним графики функций $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$ и $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$. Очевидно, чтобы получить график функции $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$, имея график $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$, достаточно произвести над графиком $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ параллельный перенос вдоль оси ординат на величину $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

Итак, чтобы получить график функции $y=ax^2+bx+c$, надо сдвинуть график $y=ax^2$ сначала вдоль оси абсцисс на отрезок $-\frac{b}{2a}$, а затем вдоль оси ординат на $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

Из сказанного следует, что *форма* графиков $y=ax^2+bx+c$ и $y=ax^2$ *одинакова* и что коэффициенты b и c *не влияют* на форму графика.

Функция $y=ax^2$ — четная, так как $a(-x)^2=ax^2=y$. Поэтому ее график симметричен относительно оси ординат.

Если $a>0$, то $ax^2 \geqslant 0$, а следовательно, график функции $y=ax^2$ (при $a>0$) имеет с осью абсцисс только одну общую точку — начало координат, а все остальные точки графика расположены выше оси абсцисс.

Таким образом, график функции $y=ax^2$ при $a>0$ имеет минимум в начале координат и ветви графика (параболы) направлены вверх (рис. 44).

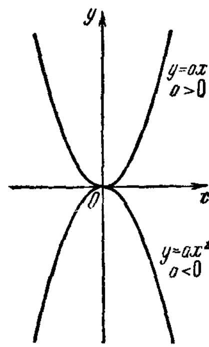

Рис. 44.

Если же $a<0$, то $ax^2 \leqslant 0$, а следовательно, график функции $y=ax^2$ (при $a<0$) имеет с осью абсцисс только одну общую точку — начало координат, а все остальные точки графика расположены ниже оси абсцисс.

Таким образом, график функции $y=ax^2$ при $a<0$ имеет максимум в начале координат и его ветви направлены вниз (рис. 44.)

Выше мы убедились, что график функции $y=ax^2+bx+c$ получается из графика функции $y=ax^2$ параллельным сдвигом графика $y=ax^2$ вдоль оси абсцисс на величину $-\frac{b}{2a}$ и параллельным сдвигом вдоль оси ординат на величину $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

Поэтому график функции $y=ax^2+bx+c$ симметричен относительно прямой $x=-\frac{b}{2a}$ и координатами вершины параболы являются числа $-\frac{b}{2a}$ и $\frac{4ac-b^2}{4a}$ (рис. 45).

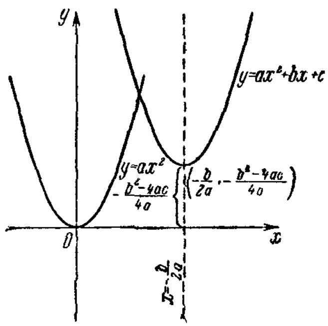

Рис. 45.

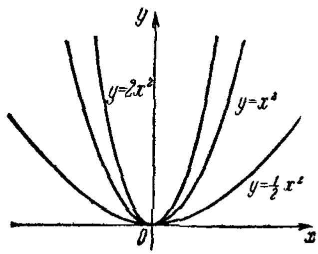

Рис 46.

Коэффициент a, кроме того, влияет и на форму графика функции $y=ax^2$. Чем больше по абсолютиой величине коэффициент a, тем круче ветви графика. На рис. 46 показаны графики функций при $a=1$, $\frac{1}{2}$ и $2\left(y=x^2,\quad y=\frac{1}{2}x^2,\right.$ $\left.y=2x^2\right)$.

Поскольку график функции $y=ax^2+bx+c$ получается путем двойного параллельного сдвига вдоль осей ординат графика функции $y=ax^2$, то можно сказать, что ветви графика функции $y=ax^2+bx+c$ тем круче, чем больше абсолютное значение коэффициента a.

Известно, что если дискриминант b^2-4ac квадратичной функции положителен, то функция имеет два (различных) действительных корня. Это значит, что график функции пересекает ось абсцисс в двух точках, удаленных от начала координат на расстояния, равные корням функции (конечно, с учетом знаков корней).

Приравнивая же x нулю, находим соответствующее ему значение y, т. е. определяем точку пересечения графика с осью ординат. Так как график квадратичной функции симметричен относительно прямой $\left(x=-\frac{b}{2a}\right)$, параллельной оси ординат, то легко найти точку, симметричную точке пересечения графика с осью ординат относительно прямой $x=-\frac{b}{2a}$.

Если $b^2-4ac>0$, то легко определить 5 характерных точек графика (включая вершину параболы).

Если же $b^2-4ac=0$, т. е. корни кратные, то график функции касается оси абсцисс, т. е. график имеет с осью абсцисс только одну общую точку. В этом случае мы легко находим 3 характерные точки графика. И, наконец, если $b^2-4ac<0$, т. е. корни мнимые, то график функции не имеет с осью абсцисс ни одной общей точки. В этом случае мы также имеем 3 характерные точки графика. Для уточнения графика находим еще несколько точек. И в заключение заметим, что так как осью симметрии параболы служит прямая $x=-\frac{b}{2a}$, то положение оси симметрии не зависит от свободного члена (c).

§ 3. Биквадратная функция

1. Определение. Функция вида

$$y=ax^4+bx^2+c \quad (a\neq 0) \tag{1}$$

называется *биквадратной*.

Поскольку

$$a(-x)^4+b(-x)^2+c=ax^4+bx^2+c=y,$$

то функция четная и ее график симметричен относительно оси ординат.

Имеем:

$$y=\frac{b^2}{a}\left(\frac{a^2}{b^2}x^4+\frac{a}{b}x^2\right)+c=\frac{b^2}{a}\left(\frac{x^4}{b^2/a^2}+\frac{x^2}{b/a}\right)+c=$$

$$=\frac{b^2}{a}\left[\left(\frac{x}{\sqrt{\left|\frac{b}{a}\right|}}\right)^4\pm\left(\frac{x}{\sqrt{\left|\frac{b}{a}\right|}}\right)^2\right]+c. \tag{2}$$

Если $b \neq 0$, то из (2) видно, что график функции получается либо из графика функции $y=x^4+x^2$, либо из графика функции $y=x^4-x^2$ при помощи растяжений по направлению обеих осей и параллельного переноса вдоль оси ординат (если a — отрицательное, то еще отражением относительно оси абсцисс). Если в равенстве (1) $b=0$, то график функции $y=ax^4+bx^2+c$ получается из графика $y=x^4$.

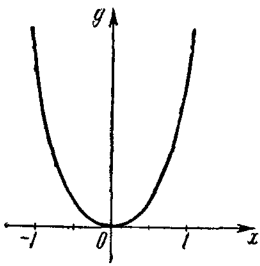

Рис. 47.

2. График функции $y=x^4+x^2$. График функции $y=x^4+x^2$ есть сумма графиков функций $y=x^4$ и $y=x^2$. Поскольку функции x^4 и x^2 при $x>0$ положительные и возрастающие, причем их графики касаются оси абсцисс в точке 0, то и функция $y=x^4+x^2$ обладает теми же свойствами (рис. 47).

3. График функции $y=x^4-x^2$. Если $x=0$, то и $y=0$; следовательно, начало координат принадлежит графику. Поскольку $y=x^2(x+1)(x-1)$, то график проходит через точки $(-1, 0)$ и $(1, 0)$. Очевидно, что если $|x|>1$, то $x^4>x^2$, а потому $y>0$ при $x>1$ или при $x<-1$. Если же $|x|<1$, то $x^4<x^2$, и следовательно, $y<0$ при $-1<x<0$ или при $0<x<1$. Из последнего следует, что в точке 0 функция имеет максимум.

Далее, пусть $x^4-x^2=a$ (постоянная). Решим это уравнение относительно x:

$$x= \pm\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}}.$$

Отсюда видно, что корни будут кратными при $a=-\frac{1}{4}$ или при $a=0$. В первом случае будет две пары кратных корней: $x=+\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ а во втором — одна пара: $x=0$.

Таким образом, функция достигает минимума при $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, а максимума при $x=0$ (точку максимума мы выше уже определили из других соображений).

Итак, функция имеет минимумы, равные $-\frac{1}{4}$, при $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и при $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Из изложенного следует, что при изменении x от $-\infty$ до $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ функция убывает от $+\infty$ до $-\frac{1}{4}$, при изменении x от $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ до 0 функция возрастает от $-\frac{1}{4}$ до 0, при изменении x от 0 до $\frac{\sqrt{2}}{2}$ функция убывает от 0 до $-\frac{1}{4}$ и при изменении x от $\frac{\sqrt{2}}{2}$ до $+\infty$ функция возрастает от $-\frac{1}{4}$ до $+\infty$.

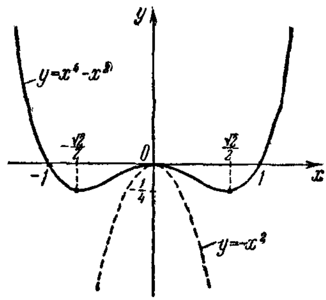

Рис. 48.

Наконец, так как $y=-x^2(1-x^2)$, то график функции в окрестности нуля выше параболы $y=-x^2$.

На рис. 48 график функции $y=x^4-x^2$ показан сплошной линией, а график $y=-x^2$ — пунктирной.

§ 4. Кубическая функция

1. Определение. Функция вида

$$y=ax^3+bx^2+cx+d,$$

где $a \neq 0$, а b, c и d — любые числа, называется *кубической*.

Рассмотрим частные случаи этой функции.

2. Функция $y=x^3$. Если $a=1$, $b=c=d=0$, то функция $y=ax^3+bx^2+cx+d$ имеет вид

$$y=x^3.$$

Эта функция определена для всех действительных значений аргумента x. При $x=0$ функция $y=0$, поэтому график функции проходит через начало координат.

Исследуем функцию $y=f(x)=x^3$ на возрастание и убывание. Пусть x_1 и x_2 — значения аргумента x, причем $x_2>x_1$.

Рассмотрим разность

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)=$$
$$=(x_2-x_1)[(x_1+x_2)^2-x_1x_2]$$

и установим ее знак.

Так как $x_2>x_1$, то $x_2-x_1>0$, а разность $(x_1+x_2)^2-$ $-x_1x_2>0$, поскольку $(x_1+x_2)^2>x_1\cdot x_2$.

Таким образом, разность $f(x_2)-f(x_1)>0$, т. е, $x_2^3>x_1^3$, и следовательно, функция $y=x^3$ всюду возрастает. Отсюда заключаем, что эта функция не имеет ни максимума, ни минимума.

Так как $(-x)^3=-x^3=-y$, то функция нечетная и ее график симметричен относительно начала координат. Далее, поскольку при $x>0$ функция $y>0$, а при $x<0$ функция $y<0$, то график расположен в первом и третьем квадрантах.

Теперь исследуем график функции $f(x)=y=x^3$ на выпуклость и вогнутость. Имеем:

$$f(x_1)=x_1^3,\quad f(x_2)=x_2^3,\quad f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^3.$$

Рассмотрим разность:

$$\frac{f(x_2)+f(x_1)}{2}-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{x_2^3+x_1^3}{2}-\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^3=$$
$$=\frac{4x_2^3+4x_1^3-x_1^3-3x_1^2x_2-3x_1x_2^2-x_2^3}{8}=\frac{3x_1^3+3x_2^3-3x_1^2x_2-3x_1x_2^2}{8}=$$
$$=\frac{3(x_1^3+x_2^3-x_1^2x_2-x_1x_2^2)}{8}=\frac{3[x_2^2(x_2-x_1)-x_1^2(x_2-x_1)]}{8}=$$
$$=\frac{3}{8}(x_2-x_1)(x_2^2-x_1^2)=\frac{3}{8}(x_2+x_1)(x_2-x_1)^2.$$

Таким образом, знак разности определяется знаком сомножителя (x_2+x_1). Если $x_1>0$ и $x_2>0$, то $(x_2+x_1)>0$ и рассматриваемая разность положительна, а график вогнут.

Если $x_1<0$ и $x_2<0$, то $(x_2+x_1)<0$ и рассматриваемая разность отрицательна, а график выпуклый.

Ввиду того, что при $x>0$ график функции вогнут, а при $x<0$ график функции выпуклый, то в точке (0,0) график функции имеет точку перегиба. График функции $y=x^3$ показан на рис. 49.

3. Функция $y=x^3+kx$. Если $a=1$, $c=k\neq 0$, $b=d=0$, то функция $y=ax^3+bx^2+cx+d$ имеет вид:

$$y=x^3+kx.$$

Функция $y=x^3+kx$ определена при всех действительных значениях аргумента x. График функции проходит через начало координат. Поскольку $(-x)^3+k(-x)=-(x^3+kx)=-y$, то функция нечетная и ее график симметричен относительно начала координат.

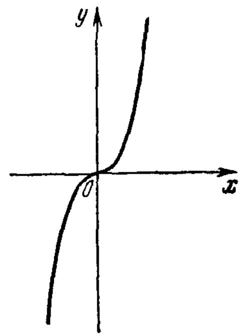

Рис. 49.

Очевидно, что поведение функции различно при $k>0$ и $k<0$. Рассмотрим отдельно эти случаи:

а) Пусть $k>0$. Запишем функцию $y=x^3+kx$ в виде $y=x^3+kx=x(x^2+k)$. Отсюда видно, что корнями функции являются $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{-k}$. Поскольку $k>0$, то корни $x_{2,3}$ — мнимые, а значит, график функции имеет с осью абсцисс только одну общую точку — начало координат.

Ввиду того, что функции x^3 и kx возрастающие, то и функция $y=x^3+kx$ — возрастающая, а поэтому при $k>0$ функция не имеет ни максимума, ни минимума.

Теперь исследуем график функции $y=x^3+kx$ на выпуклость и вогнутость. Рассмотрим разность:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{x_1^3+kx_1+x_2^3+kx_2}{2}-$$

$$-\frac{(x_1+x_2)^3+4k(x_1+x_2)}{8}=\frac{4x_1^3+4x_2^3-(x_1+x_2)^3}{8}=$$

$$=\frac{3}{8}(x_2+x_1)(x_2-x_1)^2.$$

Оказывается, что рассматриваемая разность не зависит от k и выражается такой же формулой, как и для функции $y=x^3$. Значит, график функции $y=x^3+kx$ $(k>0)$ выпуклый и вогнутый при тех же значениях аргумента x, что и график функции $y=x^3$. Вообще следует помнить, что прибавление к любой функции линейной функции (в данном случае $y=kx$) не изменяет ни выпуклости, ни вогнутости графика.

Таким образом, если $k>0$, то кривая $y=x^3+kx$ выпукла при $x<0$ и вогнута при $x>0$, а следовательно, имеет в начале координат точку перегиба.

Ясно, что график функции $y=x^3+kx$ (при $k>0$) проходит круче графика функции $y=x^3$ (см. рис. 50).

б) Если $k<0$, то все три корня функции $y=x^3+kx$ действительны, а следовательно, график функции пересекает ось абсцисс в точках 0, $+\sqrt{-k}$, $-\sqrt{-k}$. Легко установить, что в промежутке $0<x<\sqrt{-k}$ $\left(\text{например, при } x=\frac{\sqrt{-k}}{2}\right)$ функция отрицательна, а при $-\sqrt{-k}<x<0$ положительна. В силу изложенного можно начертить схематично график функции (рис. 51, *а*).

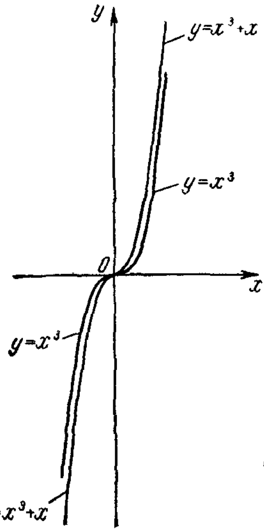

Рис. 50.

Найдем теперь точки экстремума. Пусть точка $A(x_0, y_0)$ принадлежит нашему графику. Проведем через точку A прямую, параллельную оси абсцисс. Могут встретиться три случая:

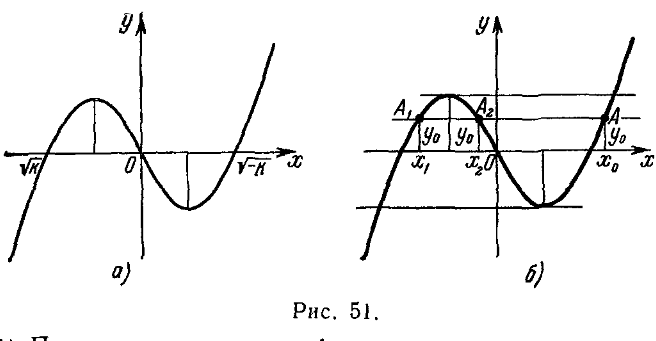

Рис. 51.

1) Прямая пересекает график еще в двух точках, т. е. имеются еще две точки с ординатами y_0, но с абсциссами, отличными от x_0;

2) прямая имеет *еще только одну общую точку* с графиком (случай касания);

3) прямая *не имеет* больше *общих точек* с графиком.

Если прямая пересекает график еще в двух точках A_1 и A_2, как показано на рис. 51, *б*, то ясно, что ординаты точек A_1 и A_2 равны y_0, хотя абсциссы у них разные, отличные от x_0. Найдем абсциссы этих точек, т. е. найдем значения x_1 и x_2 аргумента, отличные от x_0, которым бы соответствовало значение функции, равное y_0. Эти значения аргумента определяются из уравнения

$$x^3 + kx = y_0.$$

Поскольку точка (x_0, y_0) принадлежит графику, то имеет место равенство

$$y_0 = x_0^3 + kx_0.$$

Из последних двух равенств следует, что

$$x^3 + kx = x_0^3 + kx_0,$$

или

$$(x^3 - x_0^3) + k(x - x_0) = 0.$$

Так как мы ищем значения x, отличные от x_0, то $x - x_0 \neq 0$ и мы можем поделить обе части последнего уравнения на $x - x_0$. Получим:

$$x^2 + x_0 x + x_0^2 + k = 0.$$

Решим это уравнение относительно x:

$$x_{1,2} = \frac{-x_0 \pm \sqrt{-4k - 3x_0^2}}{2}.$$

Для того чтобы рассматриваемая прямая пересекала график еще в двух (или хотя бы в одной) точках, необходимо, чтобы удовлетворялось неравенство

$$-4k - 3x_0^2 \geqslant 0,$$

или

$$x_0^2 \leqslant -\frac{4k}{3}, \quad |x_0| \leqslant 2\sqrt{-\frac{k}{3}}.$$

Иначе:

$$-2\sqrt{-\frac{k}{3}} \leqslant x_0 \leqslant 2\sqrt{-\frac{k}{3}}.$$

Итак, если x_0 удовлетворяет последнему соотношению, то прямая или пересекает график еще в двух точках, или касается его. Если прямая имеет с графиком еще только одну общую точку, т. е. она касается графика, то ясно, что ордината y_0 точки касания есть экстремальное значение функции. Этой ординате соответствуют два равных значения аргумента $x_1 = x_2$ (кратные корни). Последнее имеет место при

$$x_0 = 2\sqrt{-\frac{k}{3}} \quad \text{и} \quad x_0 = -2\sqrt{-\frac{k}{3}}.$$

Таким образом, функция имеет максимум при

$$x = -\frac{x_0}{2} = -\frac{2\sqrt{-\frac{k}{3}}}{2} = -\sqrt{-\frac{k}{3}},$$

где $x_0 = 2\sqrt{-\frac{k}{3}} > 0$, и минимум при

$$x = -\frac{x_0}{2} = -\frac{-2\sqrt{-\frac{k}{3}}}{2} = \sqrt{-\frac{k}{3}},$$

где $x_0 = -2\sqrt{-\frac{k}{3}} < 0$.

Вычислим максимум функции:

$$y_{\max} = \left(-\sqrt{-\frac{k}{3}}\right)^3 - k\sqrt{-\frac{k}{3}} = -\frac{2k}{3}\sqrt{-\frac{k}{3}}.$$

В силу симметричности функции относительно начала координат минимум функции равен

$$y_{\min} = \frac{2k}{3}\sqrt{-\frac{k}{3}}.$$

Из изложенного следует, что с изменением аргумента x от $-\infty$ до $-\sqrt{-\frac{k}{3}}$ и от $\sqrt{-\frac{k}{3}}$ до $+\infty$ функция возрастает, а с изменением аргумента x от $-\sqrt{-\frac{k}{3}}$ до $+\sqrt{-\frac{k}{3}}$ функция убывает.

4. Функция $y = x^3 + kx + b$. Значение функции $y = x^3 + kx + b$ отличается от значений функции $y = x^3 + kx$ на постоянное число b. Поэтому для получения графика функции $y = x^3 + kx + b$ достаточно сдвинуть график функции $y = x^3 + kx$ вдоль оси y на отрезок b. Ясно, что при этом абсциссы экстремальных точек (если $k < 0$), а также абсцисса точки перегиба не изменяются.

Очевидно, что при достаточно больших значениях b ($k < 0$, $b > 0$) график пересечет ось абсцисс только в одной точке, с отрицательной абсциссой. А при достаточно большом по абсолютной величине, но отрицательном b график имеет также только одну общую точку с осью абсцисс, причем абсцисса этой точки положительна.

Легко усмотреть, что график функции $y = x^3 + kx + b$ пересекает ось абсцисс только в одной точке при таких значениях b, которые по абсолютной величине больше значений функции $y = x^3 + kx$ в экстремальных точках, т. е. при

$$|b| > \left|\frac{2k}{3}\sqrt{-\frac{k}{3}}\right|,$$

откуда

$$b^2 > -\frac{4}{27}k^3,$$

или

$$\frac{b^2}{4} + \frac{k^3}{27} > 0.$$

Таким образом, мы приходим к заключению, что если $\frac{b^2}{4} + \frac{k^3}{27} > 0$, то график функции $y = x^3 + kx + b$ имеет с осью абсцисс только одну общую точку (рис. 52, *а* и *б*), т. е. эта функция имеет только один действительный корень (два других корня мнимые).

Если $\frac{b^2}{4} + \frac{k^3}{27} < 0$, то график функции $y = x^3 + kx + b$ пересекает ось абсцисс в трех точках (рис. 53), т. е. все три корня этой функции действительны (и различны).

И, наконец, если $\frac{b^2}{4}+\frac{k^3}{27}=0$, то график функции $y=x^3+kx+b$ пересекает ось абсцисс в одной точке, а в другой точке касается этой оси, т. е. все три корня этой функции действительны, но два из них равны (рис. 54).

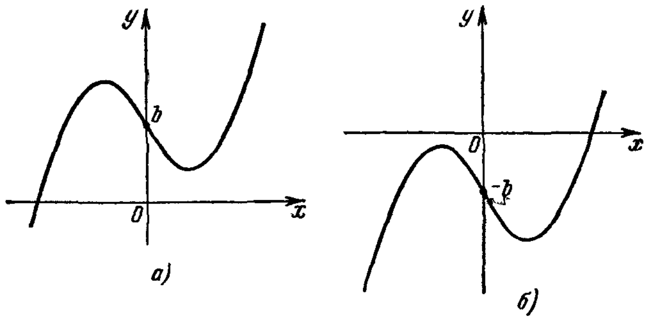

Рис. 52.

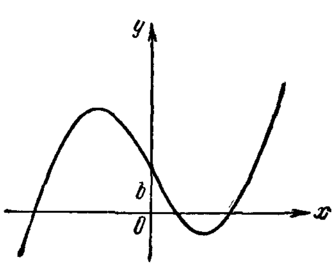

Рис. 53.

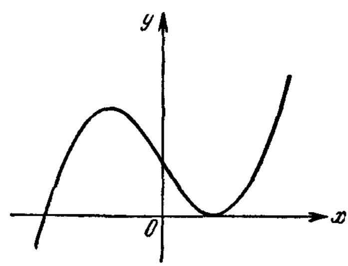

Рис. 54.

Из вышеизложенного следует, что при $k<0$ и $b>0$ функция $y=x^3+kx+b$ имеет всегда один отрицательный корень, расположенный левее точки максимума $x=-\sqrt{-\frac{k}{3}}$.

Если все три корня этой функции действительны и различны, то еще один корень расположен между точками максимума и минимума на интервале $\left(-\sqrt{-\frac{k}{3}},\right.$

$\left.\sqrt{-\frac{k}{3}}\right)$, а третий корень правее точки минимума $x=\sqrt{-\frac{k}{3}}$ (рис. 53).

§ 5. Обратно пропорциональная зависимость

1. Определение. Функция, заданная равенством

$$y=\frac{k}{x},$$

называется *обратно пропорциональной*. Эта функция определена на двух интервалах

$$(-\infty,\ 0),\ (0,\ \infty),$$

поскольку аргумент x может принимать любые значения, кроме нуля.

Функция $y=\frac{k}{x}$ нечетная, так как $\frac{k}{-x}=-\frac{k}{x}$, а следовательно, график ее симметричен относительно начала координат.

Рассмотрим функцию $y=\frac{k}{x}$ отдельно для $k>0$ и для $k<0$.

а) Пусть $k>0$. Если $x\to+\infty$, то функция $y\to 0$, оставаясь положительной, а при $x\to-\infty$ функция $y\to 0$, оставаясь отрицательной. Если $x\to 0$ справа, то $y\to+\infty$, а если $x\to 0$ слева, то $y\to-\infty$.

Следовательно, график функции $y=\frac{k}{x}$ $(k>0)$ состоит из двух ветвей, расположенных в первом и третьем квадрантах (рис. 55).

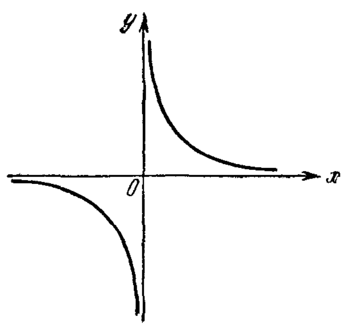

Рис 55.

б) Теперь пусть $k<0$. Если $x\to+\infty$, то функция $y\to 0$, оставаясь отрицательной, а при $x\to-\infty$ функция $y\to 0$, оставаясь положительной; если $x\to 0$ справа, то $y\to-\infty$, а если $x\to 0$ слева, то функция $y\to+\infty$. Таким образом, график функции $y=\frac{k}{x}$ $(k<0)$ состоит также из двух ветвей, расположенных во втором и четвертом квадрантах (рис. 56).

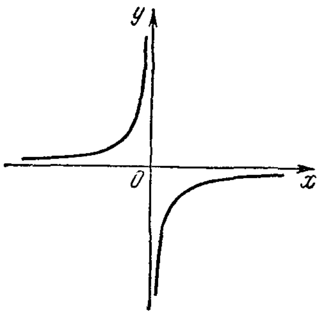

Рис. 56.

Таким образом, оси координат являются асимптотами кривой $y=\frac{k}{x}$. Сама кривая называется *гиперболой*, а точка пересечения асимптот — вершиной гиперболы.

2. Дробно-линейная функция. *Дробно-линейной* функцией называется функция, заданная равенством

$$y=\frac{ax+b}{cx+d},$$

где числитель и знаменатель — линейные функции.

Преобразуем данное уравнение:

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{ax+b}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}=\frac{a\left(x+\frac{d}{c}\right)-\frac{ad}{c}+b}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}=$$

$$=\frac{a\left(x+\frac{d}{c}\right)}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}+\frac{b-\frac{ad}{c}}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2\left(x+\frac{d}{c}\right)}.$$

Из последнего равенства видно, что график дробно-линейной функции — гипербола с асимптотами $x=-\frac{d}{c}$ и $y=\frac{a}{c}$.

Асимптоты дробно-линейной функции можно найти непосредственно, преобразуя y к виду:

$$y=\frac{\frac{ax}{x}+\frac{b}{x}}{\frac{cx}{x}+\frac{d}{x}}=\frac{a+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}}.$$

Мы видим, что если $x\to\pm\infty$, то $y\to\frac{a}{c}$, т. е. прямая $y=\frac{a}{c}$ является горизонтальной асимптотой.

Выразив x через y:

$$x=\frac{b-dy}{cy-a}=\frac{\frac{b}{y}-\frac{dy}{y}}{\frac{cy}{y}-\frac{a}{y}}=\frac{\frac{b}{y}-d}{c-\frac{a}{y}},$$

получим, что при $y\to\pm\infty$, $x\to-\frac{d}{c}$, т. е. прямая $x=-\frac{d}{c}$ является вертикальной асимптотой.

Обычно при исследовании дробно-линейной функции с численными коэффициентами не пользуются результатами исследования в общем виде, а в каждом частном случае производят необходимые преобразования и исследования.

Пример 1. Исследовать и построить график функции

$$y=\frac{3x+4}{x-1}.$$

Решение. Область определения функции находим из условия $x-1\neq 0$. Отсюда следует, что $x<1$ или $x>1$, т. е. функция определена на двух интервалах:

$$(-\infty,\ 1)\ \text{и}\ (1,\ +\infty).$$

Следовательно, прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой.

Преобразуем данное уравнение:

$$y=\frac{3x+4}{x-1}=\frac{x+\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}\left(x-1\right)}=$$

$$=\frac{x-1+\frac{7}{3}}{\frac{1}{3}(x-1)}=3+\frac{7}{x-1}.$$

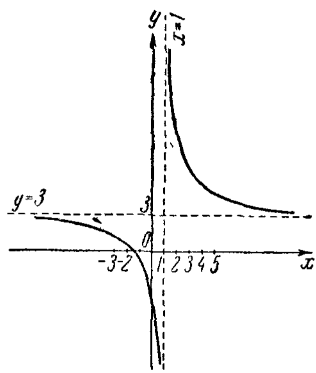

Рис. 57.

Таким образом, для построения графика данной функции надо построить график функции $\frac{7}{x-1}$, а затем сдвинуть его вверх вдоль оси ординат на три единицы.

Если $x\to\pm\infty$, то $\frac{7}{x-1}\to 0$, а следовательно, $y\to 3$, т. е. прямая $y=3$ служит горизонтальной асимптотой.

Легко проверить, что точки $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$, $(0, -4)$, $(2, 10)$, $(3; 6{,}5)$ принадлежат графику функции. График функции дан на рис. 57.

§ 6. Дробно-рациональные функции

1. Определение. В § 5 мы рассмотрели дробно-линейную функцию, которая является частным случаем дробно-рациональной функции.

Дробно-рациональная функция имеет вид:

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}.$$

2. Примеры. Мы ограничимся рассмотрением нескольких примеров.

Пример 1. Построить график функции

$$y = \frac{x}{x^2 - 3x + 2}.$$

Решение. Очевидно, что

$$y = \frac{x}{(x-1)(x-2)}.$$

Теперь видно, что при $x = 1$ и $x = 2$ функция не существует, т. е. область ее определения состоит из трех интервалов: $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$ и $(2, +\infty)$, а график — из трех ветвей. Прямые $x = 1$ и $x = 2$ служат асимптотами графика. Если $x = 0$, то и $y = 0$, т. е. график проходит через начало координат. Далее,

$$y = \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{2}{x^2}} = \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}.$$

Отсюда видно, что если $x \to +\infty$, то $y \to 0$, оставаясь положительным. Если же $x \to -\infty$, то $y \to 0$, оставаясь отрицательным. Таким образом, ось абсцисс является горизонтальной асимптотой графика функции.

Посмотрим, как ведет себя функция вблизи точек $x = 1$ и $x = 2$.

Если $x \to 2$ справа $(x > 2)$, то $x - 2 > 0$, $x - 1 > 0$, $x > 0$, причем $x - 2 \to 0$, $x - 1 \to 1$, $x \to 2$. В силу этого $y \to +\infty$.

Если $x \to 2$ слева, то $x-2<0$, $x-1>0$, $x>0$, причем $x-2\to 0$, $x-1\to 1$, $x\to 2$. Поэтому $y\to -\infty$.

Если $x\to 1$ справа ($x>1$), то $x-1>0$, $x-2<0$, $x>0$, причем $x-2\to -1$, $x-1\to 0$, $x\to 1$, а следовательно, $y\to -\infty$.

Если $x\to 1$ слева, то $x-1<0$, $x-2<0$, $x>0$, причем $x-2\to -1$, $x-1\to 0$, $x\to 1$, а следовательно, $y\to +\infty$.

Остается определить точки максимума и минимума.

Найдем такое число a, чтобы прямая $y=a$ касалась графика. Это значение y и будет экстремальным для данной функции. Зная экстремальные значения функции, мы легко найдем соответствующие им значения аргумента.

Пусть

$$\frac{x}{x^2-3x+2}=a,$$

или

$$ax^2-(3a+1)x+2a=0.$$

Чтобы прямая $y=a$ касалась графика, необходимо, чтобы дискриминант этого квадратного уравнения обращался в нуль:

$$a^2+6a+1=0,$$

откуда

$$a_{1,2}=-3\pm 2\sqrt{2}.$$

Это и есть два экстремальных значения функции. Соответствующие им значения аргумента получаем из равенства

$$x=\frac{3a+1}{2a},$$

откуда

$$x_1=\frac{3(-3+2\sqrt{2})+1}{2(-3+2\sqrt{2})}=-\sqrt{2}\approx -1{,}4,$$

$$x_2=\frac{3(-3-2\sqrt{2})+1}{2(-3-2\sqrt{2})}=+\sqrt{2}\approx 1{,}4.$$

Итак, функция имеет максимум, равный $-3-2\sqrt{2}$, при $x=\sqrt{2}$, а минимум, равный $-3+2\sqrt{2}$, при $x=-\sqrt{2}$.

Легко убедиться, что точки $\left(-1, \frac{1}{6}\right)$ и $\left(-2, \frac{1}{6}\right)$ принадлежат графику функции.

Теперь уже можно построить график этой функции (рис. 58).

Пример 2. Построить график функции $y=\frac{x+1}{x^2+1}$.

Решение. Так как $x^2+1>0$ при любом x, то функция определена на всей числовой оси. Если $x=0$, то $y=1$, т. е. график пересекает ось ординат в точке $(0, 1)$. Если $x=-1$, то $y=0$, т. е. график пересекает ось абсцисс в точке -1.

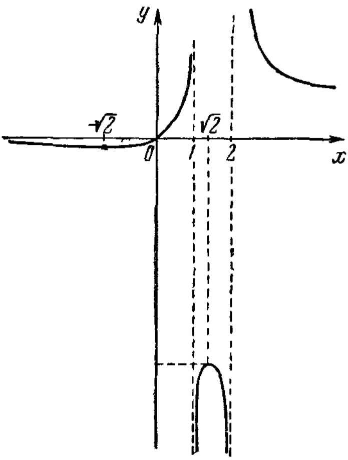

Рис. 58

Далее, если $x \to +\infty$, то $y \to 0$, оставаясь положительным, так как знаменатель «быстрее» стремится к $+\infty$. Если же $x \to -\infty$, то $y \to 0$, оставаясь отрицательным. Таким образом, ось абсцисс служит асимптотой графика функции.

Теперь найдем экстремальные значения функции. Для этого данное уравнение перепишем так:

$$yx^2-x-1+y=0.$$

Экстремальные значения функции определим из условия равенства нулю дискриминанта:

$$1+4y-4y^2=0,$$

откуда

$$y=\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}.$$

Соответствующие им значения аргумента: $(\sqrt{2}-1)$ и $-(\sqrt{2}+1)$.

Таким образом, точки $x=\sqrt{2}-1$ и $x=-\sqrt{2}-1$ являются экстремальными.

Для уточнения графика определим еще несколько точек:

Если $x=1$, то $y=1$; если $x=2$, то $y=0{,}6$; если $x=-2$, то $y=-\frac{1}{5}$. График изображен на рис. 59.

Пример 3. Построить график $y=\frac{x^2+1}{x-1}$.

Решение. Область определения функции состоит из двух интервалов: $(-\infty, 1)$ и $(1, +\infty)$. Таким образом, график функции состоит из двух ветвей. Имеем:

$$y=\frac{x^2-1+2}{x-1}=(x+1)+\frac{2}{x-1}.$$

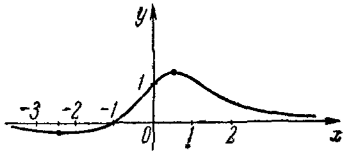

Рис. 59.

Поскольку при $x \to +\infty$ функция $y \to x+1$, то ясно, что прямая $y=x+1$ является наклонной асимптотой. Так как при $x=1$ функция теряет смысл, то прямая $x=1$ служит вертикальной асимптотой.

Найдем точки экстремума. Для этого перепишем данную функциональную зависимость так:

$$x^2-yx+y+1=0.$$

Приравняв нулю дискриминант этого уравнения

$$y^2-4y-4=0,$$

получим экстремальные значения функции

$$y_{1,2}=2(1 \pm \sqrt{2}).$$

Найдем соответствующие им значения аргумента

$$x_{1,2}=1 \pm \sqrt{2}.$$

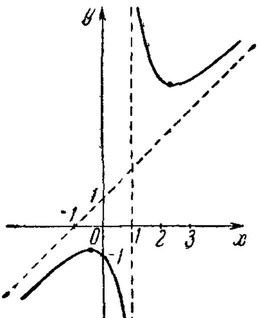

Рис. 60.

Таким образом, функция имеет максимум в точке $x=1+\sqrt{2}$, равный $2+2\sqrt{2}$, а минимум в точке $x=1-\sqrt{2}$, равный $2-2\sqrt{2}$.

Для уточнения графика найдем еще несколько точек: $(0, -1)$, $(-1, -1)$, $\left(-2, -\frac{5}{3}\right)$, $(2, 5)$, $(3, 5)$. График функции изображен на рис. 60.

§ 7. Степенная функция

1. Определение. Функция вида

$$y=x^n,$$

где n — любое действительное число, называется *степенной*.

2. Степенная функция с натуральным показателем. Поскольку по определению степени с натуральным показателем x^n есть произведение n сомножителей, равных x, то областью ее определения является вся числовая ось, т. е. интервал $(-\infty, +\infty)$.

Если n — четное число ($n=2k$), то x^n — четная функция, так как $(-x)^{2k}=x^{2k}$.

Если n — нечетное число ($n=2k-1$), то x^n — нечетная функция, так как $(-x)^{2k-1}=-x^{2k-1}$.

Функция $y=x^n$ (при любом натуральном n) является возрастающей в интервале $(0, +\infty)$.

Действительно, $x_1^n<x_2^n$, если $0<x_1<x_2$. Геометрической иллюстрацией этого служат графики функций $y=x^2$, $y=x^3$ (рис. 61 и 62).

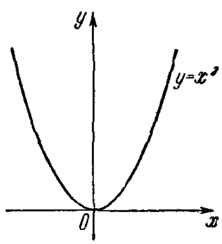

Рис. 61

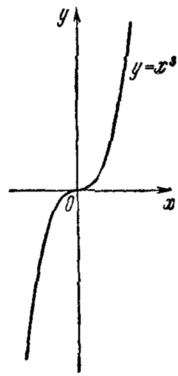

Рис. 62.

Если n четное, то функция $y=x^n$ в интервале $(-\infty, 0)$ убывает (например, $y=x^2$); если же n нечетное, то в интервале $(-\infty, 0)$ функция $y=x^n$ возрастает (например, $y=x^3$). Очевидно, если $x\to+\infty$, то $y=x^n\to+\infty$ при любом натуральном n. Также ясно, что если $x\to-\infty$, то $y=x^n\to+\infty$ при n четном и $y\to-\infty$ при n нечетном.

3. Степенная функция с целым отрицательным показателем. По определению, $y=x^{-n}=\frac{1}{x^n}$.

Ясно, что функция x^{-n} определена при любом значении x, кроме нуля. В интервале $(0, +\infty)$ функция $y=x^{-n}$ убывает. Действительно, так как $y=x^{-n}=\frac{1}{x^n}$, а x^n в интервале $(0, +\infty)$ возрастает, то $x^{-n}=\frac{1}{x^n}$ убывает.

Если n четное, то функция $y=x^{-n}$ четная, так как

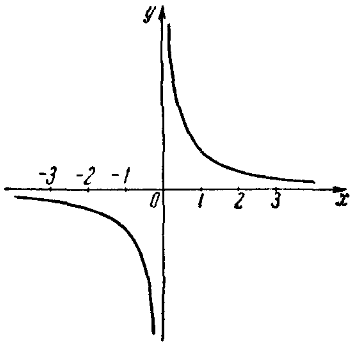

Рис. 63.

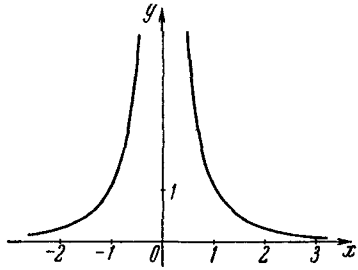

Рис. 64.

$(-x)^{-n}=\frac{1}{(-x)^n}=\frac{1}{x^n}=x^{-n}=y$; если же n нечетное, то функция $y=x^{-n}$ нечетиая, так как $(-x)^{-n}=\frac{1}{(-x)^n}=\frac{1}{-x^n}=-x^{-n}=-y$. Легко убедиться, что в интервале $(-\infty, 0)$ функция $y=x^{-n}$ возрастает, если n четное, и убывает, если n нечетное.

Также очевидно, что в интервале $(-\infty, 0)$ функция $y=x^{-n}$ положительна при n четном и отрицательна при n нечетном.

Теперь убедимся, что если $x \to 0$ справа, т. е. x остается положительным, то $x^{-n} \to +\infty$. Действительно, $x^{-n}=$ $=\frac{1}{x^n} \to +\infty$, так как $x \to 0$ (справа); если же $x \to 0$ слева (т. е. остается отрицательным), то $x^{-n} \to +\infty$ при n четном и $x^{-n} \to -\infty$ при n нечетном. Наконец, заметим, что если $x \to \pm\infty$, то $x^{-n} \to 0$; в самом деле, $x^{-n}=\frac{1}{x^n} \to 0$, если $x \to \pm\infty$.

Геометрической иллюстрацией могут служить графики функций $y=x^{-1}=\frac{1}{x}$ (рис. 63) и $y=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$ (рис. 64).

4. Степенная функция с дробным показателем. Рассмотрим функцию $y=x^{\frac{p}{q}}$, где $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь. Условимся считать, что всегда $q>0$, тогда знак дроби $\frac{p}{q}$ будет определяться знаком числителя p.

По определению, $x^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{x^p}$ для тех x, при которых $\sqrt[q]{x^p}$ существует. В случае четного q берется арифметический корень *).

Рассмотрим отдельно два случая: а) $p>0$ и б) $p<0$.

а) Пусть $p>0$ Тогда мы будем иметь степенную функцию с *дробным положительным показателем.* В этом случае в промежутке $[0, +\infty)$ функция возрастает.

Если q четное, то функция определена на полусегменте $[0, +\infty)$. Если же q нечетное, то функция определена на всей

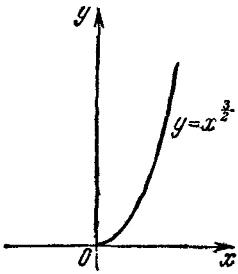

Рис. 65.

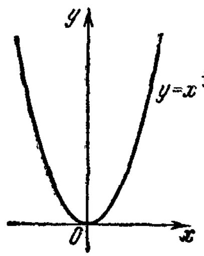

Рис. 66

числовой оси, поскольку из отрицательных чисел можно извлекать корень с нечетным показателем. Например: 1) функция $y=x^{\frac{3}{2}}=\sqrt{x^3}$ (здесь берется арифметический корень) определена только на сегменте $[0, +\infty)$ (рис. 65);

2) функция $y=x^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{x^4}$ определена на всей числовой оси (рис. 66);

---

*) Часто степенную функцию $x^{\frac{p}{q}}$ с дробным показателем определяют только для $x\geqslant 0$. При этом определении функция всегда неотрицательна ($y\geqslant 0$). Геометрически это означает, что график функции $y=x^{\frac{p}{q}}$ целиком расположен в первом квадранте.

3) функция $y=x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x}$ определена при любом x (рис. 67).

Если p и q — нечетные числа, то и функция $y=x^{\frac{p}{q}}$ также нечетная. Действительно,

$$(-x)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{(-x)^p}=\sqrt[q]{-x^p}=-\sqrt[q]{x^p}=-x^{\frac{p}{q}}=-y.$$

Если же p четное, а следовательно, q нечетное, так как $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь, то и функция $y=x^{\frac{p}{q}}$ будет четной. В самом деле,

$$(-x)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{(-x)^p}=\sqrt[q]{x^p}=x^{\frac{p}{q}}=y.$$

Если q нечетное, а p четное, то функция $x^{\frac{p}{q}}$ убывает в интервале $(-\infty, 0)$, что, впрочем, следует из четности функции. Например, функция $y=x^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{x^2}$ (рис. 68).

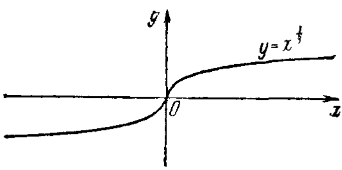

Рис. 67.

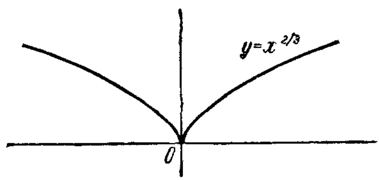

Рис. 68.

Если q и p — нечетные числа, то функция $y=x^{\frac{p}{q}}$. Например, $y=x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x}$ (рис. 67) в интервале $(-\infty, 0)$ возрастает.

Легко заметить, что при любых p и q (натуральных), если $x\to+\infty$, то и $y\to+\infty$.

И, наконец, если q нечетное, а p четное, то если $x\to-\infty$, то $y=x^{\frac{p}{q}}\to+\infty$ (например, $y=x^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{x^2}$; рис. 68).

Если же q и p — нечетные числа, то при $x\to-\infty$ и $y\to-\infty$ (например, $y=x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x}$; рис. 67).

б) Пусть теперь $-p<0$. Мы получим степенную функцию с *дробным отрицательным показателем.* Функция $y=x^{-\frac{p}{q}}$, где p и q — натуральные числа, определяется как $\frac{1}{x^{\frac{p}{q}}}$.

В этом случае $x \neq 0$, поэтому функция определена в нятервале $(0, +\infty)$ при q четном и в интервалах $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ прн q нечетном.

Поскольку функция $x^{\frac{p}{q}}$ возрастает в интервале $(0, +\infty)$, то функция $x^{-\frac{p}{q}}$ убывает на этом же иитервале.

Еслн p н q иечетные, то функция нечетная. Например, $x^{-\frac{8}{5}}=\sqrt[5]{x^{-8}}=\sqrt[5]{\left(\frac{1}{x}\right)^8}$ — нечетная фуикцня.

Если же q нечетное, а p четное, то функция четная. Например, $x^{-\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{x^{-2}}=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x}\right)^2}$ — четная функция.

Очевндно, что если q нечетное, а p четное, то функцня возрастает в интервале $(-\infty, 0)$. Если же q н p нечетные, то в этом же интервале функция убывает.

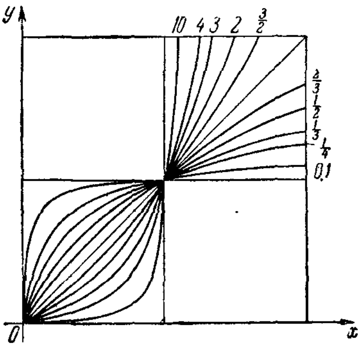

Рис. 69.

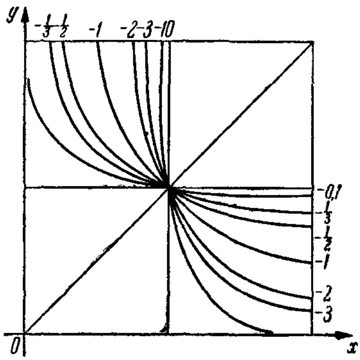

Рис. 70.

Ясно, что при любых натуральных p н q функция $x^{-\frac{p}{q}} \to 0$, если $x \to \infty$.

Если $x>0$ и $x \to 0$, то $x^{-\frac{p}{q}} \to +\infty$ при любых натуральных p и q.

Если q нечетное, а p четное, то при $x<0$ и $x\to 0$ функция $x^{-\frac{p}{q}}\to+\infty$, а если q и p нечетные, то $x^{-\frac{p}{q}}\to-\infty$.

На рис. 69 показаны графики степенных функций с различными положительными показателями, а на рис. 70 — с отрицательными показателями. На обоих рисунках графики построены для $x\geqslant 0$.

§ 8. Показательная функция

1. Определение. Функция вида

$$y=a^x,$$

где a — положительное число, отличное от единицы, называется *показательной.*

2. Свойства функции $y=a^x$. Сначала перечислим основные свойства показательной функции, известные из школьного курса.

1) Показательная функция определена на всей числовой оси.

2) Показательная функция $y=a^x$ положительна при любом действительном значении x, т. е. ее график расположен в верхней полуплоскости.

3) Если $x=0$, то $y=a^0=1$, т. е. график показательной функции пересекает ось ординат в точке $(0, 1)$.

4) Если $a>1$, то $y=a^x>1$ при положительных значениях x и $y=a^x<1$ при отрицательных значениях x.

5) Если $a>1$, то показательная функция возрастает.

6) Если $0<a<1$, то $y=a^x<1$ при положительных значениях x и $y=a^x>1$ при отрицательных значениях x.

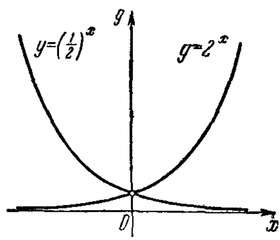

Рис. 71.

7) Если $0<a<1$, то показательная функция убывает.

Эти свойства отлично видны на рис. 71, где показаны графики функций $y=2^x$ $(a>1)$ и $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ $(0<a<1)$.

Поскольку при $x\to-\infty$ функция $a^x\to 0$, если $a>1$, а при $x\to+\infty$ функция $a^x\to 0$, если $a<1$, то ось абсцисс является **асимптотой** показательной функции.

Легко убедиться, что графики функций a^x и $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ симметричны относительно оси ординат.

3. График функции $y=a^{\frac{x}{p}}$. Чтобы построить график функции

$$y=a^{\frac{x}{p}},$$

надо построить график функции $y=a^x$, а затем произвести растяжение последнего в p раз вдоль оси абсцисс. Поскольку

$$y=a^{\frac{x}{p}}=\left(a^{\frac{1}{p}}\right)^x,$$

то можно сразу построить показательную функцию с основанием $a^{\frac{1}{p}}$. Таким образом, растяжение показательной функции $y=a^x$ в p раз вдоль оси абсцисс равносильно переходу от графика показательной функции с основанием a *к графику показательной функции с основанием* $a^{\frac{1}{p}}$.

4. График функции $y=a^{x-c}$. Чтобы построить график функции

$$y=a^{x-c},$$

где c — постоянная величина, надо сначала построить функцию $y=a^x$, а затем произвести перемещение этого графика вдоль оси абсцисс на отрезок, равный c. Но так как

$$y=a^{x-c}=\frac{a^x}{a^c},$$

то можно построить сначала график функции $y=a^x$, а потом произвести растяжение этого графика вдоль оси ординат в $\frac{1}{a^c}$ раз.

Таким образом, перемещение графика функции $y=a^x$ вдоль оси абсцисс на отрезок c равносильно его растяжению вдоль оси ординат в $\frac{1}{a^c}$ раз.

5. График функции $y=a^x\cdot b^x$. Построим произведение графиков функций $y_1=a^x$ и $y_2=b^x$. Имеем:

$$y=y_1\cdot y_2=a^x\cdot b^x=(ab)^x.$$

Таким образом, для того чтобы построить произведение графиков показательных функций с различными основаниями, достаточно построить график функции при основании, равном произведению их оснований.

§ 9. Логарифмическая функция

1. Определение. Функция, определяемая равенством

$$y = \log_a x,$$

где a — положительное, отличное от единицы число, называется *логарифмической* функцией.

Из определения следует, что каждое значение логарифмической функции y есть логарифм некоторого значения переменной x при основании a. Исходя из определения логарифмической функции, усматриваем, что логарифмическая функция обратна показательной. Поэтому график ее симметричен графику показательной функции (при одном и

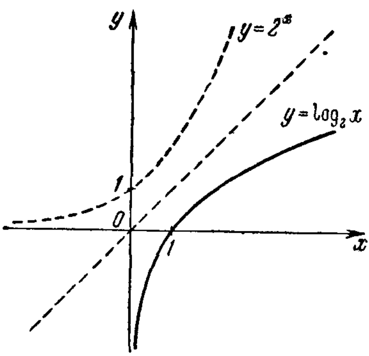

Рис. 72.

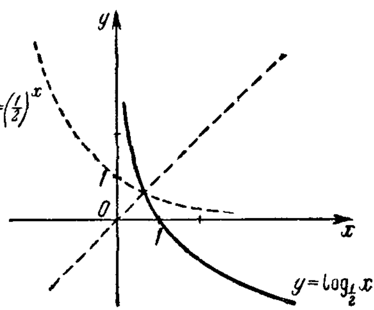

Рис. 73.

том же основании) относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

На рис. 72 показаны графики функций $y = 2^x$ (пунктирная линия) и $y = \log_2 x$ (сплошная линия), а на рис. 73 показаны графики функций $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ и $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

2. Свойства функции $y=\log_a x$. Перечислим свойства логарифмической фуикции (их легко усмотреть из рис. 72 и 73).

1) Логарифмическая фуикция определена только для положительиых чисел ($0<x<+\infty$). Следовательио, график логарифмической функции расположеи правее оси ординат.

2) Если $a>1$, то логарифмическая функция положительна при $x>1$, отрицательна при $0<x<1$ и равиа иулю при $x=1$.

3) При $a>1$ логарифмическая функция является возрастающей.

4) Если $0<a<1$, то логарифмическая функция положительиа при $0<x<1$, отрицательиа при $x>1$ и равна нулю при $x=1$.

5) Если $0<a<1$, то логарифмическая функция является убывающей.

6) Если $a>1$, то график логарифмической фуикции выпуклый.

7) Если $0<a<1$, то график логарифмической функции вогиут.

3. Переход от одного осиования к другому. По определеиию логарифма

$$a^{\log_a x}=x \quad \text{и} \quad b^{\log_b x}=x.$$

Логарифмируя обе части первого равеиства по осиоваиию b, а второго — по осиоваиию a, получим:

$$\log_a x\cdot\log_b a=\log_b x \quad \text{и} \quad \log_b x\cdot\log_a b=\log_a x,$$

откуда

$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a} \quad \text{и} \quad \log_b x=\frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

Эти формулы могут быть использованы при построении графиков функций, связанных с логарифмической. Например, пусть требуется построить график функции

$$y=p\log_a x.$$

Это зиачит, что надо построить график фуикции $y=\log_a x$, а потом произвести растяжеиие последиего в p раз вдоль оси ординат. Но можио поступить иначе. Так как

$$\log_{\sqrt[p]{a}} x=\frac{\log_a x}{\log_a \sqrt[p]{a}}=\frac{\log_a x}{\frac{1}{p}\log_a a}=p\log_a x,$$

то

$$y=\log_{\sqrt[p]{a}} x,$$

и вместо построения графика $y=\log_a x$ с последующим растяжением его в p раз вдоль оси ординат можно строить график

$$y=\log_{\sqrt[p]{a}} x.$$

Пример 1. Построить график функции

$$y=-\log_{\frac{1}{2}} x.$$

Решение. Так как

$$-\log_{\frac{1}{2}} x=-\frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}}=-\frac{\log_2 x}{-1}=\log_2 x,$$

то

$$y=\log_2 x.$$

Очевидно, что построение графика данной функции несколько облегчается.

4. Замена растяжения графика функции параллельным переносом. Пусть требуется построить график функции

$$y=\log_a \frac{x}{p}.$$

Это значит, что надо построить график функции $y=\log_a x$, а затем произвести растяжение его в p раз вдоль оси абсцисс. Но так как

$$y=\log_a x-\log_a p,$$

то можно построить сначала график функции $y=\log_a x$, а затем перенести его вдоль оси ординат на отрезок, равный $-\log_a p$.

Поскольку перенос графика обычно проще, чем растяжение его, то целесообразно, если это возможно, вместо растяжения графика производить перенос на определенный отрезок.

§ 10. Периодические функции. Периодичность тригонометрических функций

1. Определение. Функция $y=f(x)$ называется ***периодической,*** если существует такое постоянное число $T\neq 0$, что от прибавления его к любому (допустимому) значению аргумента значение функции не изменяется:

$$f(x+T)=f(x).$$

Наименьшее положительное число, от прибавления которого к любому (допустимому) значению аргумента значение функции не изменяется, называется *периодом функции.*

2. Периодичность тригонометрических функций. Докажем, что функция $\sin x$ имеет период 2π. Известно, что $\sin(x+2\pi n)=\sin x$, где $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Из этой формулы видно, что от прибавления чисел $2\pi n$ к любому значению аргумента значение функции $\sin x$ не изменяется.

Остается доказать, что других чисел, обладающих этим свойством, не существует. Действительно, пусть таким свойством для $\sin x$ обладает число h, т. е.

$$\sin(x+h)=\sin x$$

при любом значении x. Значит, в частности, это равенство имеет место и при $x=\frac{\pi}{2}$, т. е. должно быть

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$$

С другой стороны, по формуле приведения

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right)=\cos h.$$

Из двух последних равенств следует, что

$$\cos h=1,$$

но это равенство возможно только тогда, когда $h=2\pi n$. Так как наименьшее положительное число из чисел $2\pi n$ есть 2π, то периодом функции $\sin x$ является 2π. Аналогично доказывается, что функция $\cos x$ имеет период 2π.

Теперь докажем, что функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ имеют период π. Известно, что $\operatorname{tg}(x+\pi n)=\operatorname{tg} x$, т. е. от прибавления чисел πn

к любому допустимому значению аргумента значение функции $\operatorname{tg} x$ не изменяется.

Докажем, что других чисел, обладающих этим свойством, не существует. Предположим, что таким свойством обладает число h, т. е. $\operatorname{tg}(x+h)=\operatorname{tg} x$ при любом (допустимом) значении x. Полагая, в частности, $x=0$, получаем:

$$\operatorname{tg} h=\operatorname{tg} 0=0,$$

а это может быть тогда и только тогда, когда

$$h=\pi n.$$

Поскольку $\operatorname{ctg} x=\frac{1}{\operatorname{tg} x}$, если $x \neq \frac{\pi}{2} k$, то и для $\operatorname{ctg} x$ число $h=\pi n$. Так как наименьшее положительное число из чисел πn есть π, то периодом функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ является число π.

Имеются числа, прибавление которых к некоторым значениям аргумента не меняет значения функции, например,

$$\sin\frac{\pi}{3}=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Но $\frac{\pi}{3}$ не является периодом функции $\sin x$, так как, например,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\neq\sin\frac{\pi}{2}.$$

Периодичность тригонометрических функций облегчает их исследование (и построение их графиков). Достаточно исследовать каждую из тригонометрических функций в промежутке, равном периоду функции.

§ 11. Обратные тригонометрические функции

1. Определение. Рассмотрим взаимно обратные функции

$$y=2x+1 \quad \text{и} \quad y=\frac{x-1}{2}.$$

Очевидно, что для нахождения как прямой, так и обратной функций надо произвести над аргументом только алгебраические операции.

Рассмотрим тригонометрическую функцию

$$y=\sin x.$$

В этом случае уже нельзя при помощи алгебраических операций над аргументом x найти функцию y.

Чтобы найти угол (дугу, число) x, синус которого равен y, также невозможно прибегнуть к алгебраическим операциям над y. Чтобы показать, что по значениям синуса угла (дуги, числа) мы находим величину угла, т. е. что угол (дуга, число) является функцией синуса угла, пишут:

$$y = \operatorname{Arcsin} x.$$

Это выражение понимается так: y есть такой угол (дуга, число), синус которого равен x.

Таким образом, функции

$$y = \sin x \quad \text{и} \quad y = \operatorname{Arcsin} x$$

являются взаимно обратными. Существуют еще пары взаимно обратных тригонометрических функций:

$$\begin{array}{lll} y = \cos x & \text{и} & y = \operatorname{Arccos} x, \\ y = \operatorname{tg} x & \text{и} & y = \operatorname{Arctg} x, \\ y = \operatorname{ctg} x & \text{и} & y = \operatorname{Arcctg} x, \\ y = \sec x & \text{и} & y = \operatorname{Arcsec} x, \\ y = \operatorname{cosec} x & \text{и} & y = \operatorname{Arccosec} x. \end{array}$$

Функции

$$y = \operatorname{Arcsin} x, \quad y = \operatorname{Arccos} x, \quad y = \operatorname{Arctg} x,$$
$$y = \operatorname{Arcctg} x, \quad y = \operatorname{Arcsec} x, \quad y = \operatorname{Arccosec} x$$

называются *обратными тригонометрическими функциями.*

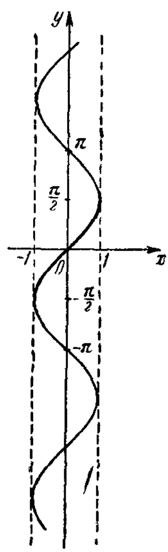

Рис. 74.

2. Функция $y = \operatorname{Arcsin} x$. По определению, функция $y = \operatorname{Arcsin} x$ является обратной к функции $y = \sin x$. Поэтому ее график симметричен графику $y = \sin x$ относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов (рис. 74). Из графика следует, что функция $y = \operatorname{Arcsin} x$ многозначная, так как каждому значению x соответствует бесконечное множество значений функции. Если одну из этих ординат обозначить через y_0, то остальные выражаются формулами $y = 2\pi k + y_0$ и $y = 2\pi k + \pi - y_0$.

Областью определения функции $y = \text{Arcsin}\, x$ является промежуток $[-1, 1]$, так как синус угла по модулю не превышает единицы, т. е. $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Из графика легко усмотреть, что каждому допустимому значению x соответствует только одно (из бесконечного множества) значение $y = \text{Arcsin}\, x$, которое принадлежит промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Это значение y называется ***главным значением*** $\text{Arcsin}\, x$ и обозначается $\arcsin x$ (на рис. 74 эта часть графика выделена жирной линией).

Таким образом, $\arcsin x$, где x — любое число из промежутка $[-1, 1]$, есть такое число (угол, дуга) в промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен x, т. е.

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$$

и

$$\sin(\arcsin x) = x.$$

Ясно, что

$$\text{Arcsin}\, x = (-1)^k \arcsin x + \pi k.$$

Из рисунка легко заметить, что функция $y = \arcsin x$ однозначная и возрастающая; с изменением аргумента x от -1 до $+1$ функция $\arcsin x$ возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$. Поскольку график функции $y = \arcsin x$ симметричен относительно начала координат, то эта функция нечетная, т. е.

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x.$$

В последнем легко убедиться также и на основании определения функции.

Действительно, пусть $y = \arcsin(-x)$, тогда, по определению, имеем $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $\sin y = -x$. Умножив на -1 каждое из этих соотношений, получаем:

$$\frac{\pi}{2} \geqslant -y \geqslant -\frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad -\sin y = x$$

или $\sin(-y) = x$, следовательно, $-y = \arcsin x$, или $y = -\arcsin x$.

Итак, $y = \arcsin(-x)$ и $y = -\arcsin x$, откуда $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, т. е. функция $\arcsin x$ нечетная.

3. Функция $y=\operatorname{Arccos} x$. Эта функция также многозначная. Например, если $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, то $y=\operatorname{Arccos}\frac{\sqrt{3}}{2}=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k$, где $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$

Функция $y=\operatorname{Arccos} x$ определена в промежутке $[-1, +1]$, так как $\cos y$ по абсолютному значению не превышает единицы, т. е. $-1\leqslant x\leqslant 1$.

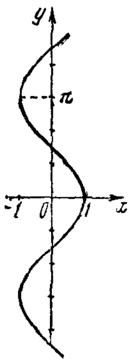

Рис. 75.

График функции $y=\operatorname{Arccos} x$ (рис. 75) получается симметричным отражением графика функции $y=\cos x$ относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Многозначность функции $y=\operatorname{Arccos} x$ хорошо видна из графика. Действительно, любому значению абсциссы x соответствует бесконечное множество различных ординат. Если одну из этих ординат обозначить через y_0, то остальные ординаты выразятся формулой $\pm y_0+2\pi k$.

Из графика легко усмотреть, что каждому допустимому значению x соответствует только одно значение $y=\operatorname{Arccos} x$, принадлежащее промежутку $[0, \pi]$. Это значение y называется главным значением $\operatorname{Arccos} x$ и обозначается $\arccos x$, где x — любое число из промежутка $[-1, +1]$ (на рис. 75 эта часть выделена жирной линией).

Таким образом, $\arccos x$ (главное значение $\operatorname{Arccos} x$), где x — любое число из промежутка $[-1, 1]$, есть такое число (угол, дуга) из промежутка $[0, \pi]$, косинус которого равен x, т. е.

$$0\leqslant \arccos x\leqslant \pi,$$
$$\cos(\arccos x)=x.$$

Очевидно, что все значения $\operatorname{Arccos} x$ связаны с главным ее значением так:

$$\operatorname{Arccos} x=\pm\arccos x+2\pi k.$$

Функция $\arccos x$ принимает только неотрицательные значения, а именно, с изменением аргумента x от -1 до $+1$ функция $\arccos x$ убывает от π до 0.

Поскольку график функции $y=\arccos x$ не симметричен ни относительно оси ординат, ни относительно начала координат, то функция $y=\arccos x$ не принадлежит ни к четным, ни к нечетным функциям.

Далее, из рисунка видим, что график $y=\arccos x$ симметричен относительно точки $\frac{\pi}{2}$ на оси ординат. Это показывает, что имеет место такое свойство:

$$\arccos(-x)+\arccos x=\pi,$$

или

$$\arccos(-x)=\pi-\arccos x.$$

В справедливости последнего можно убедиться другим путем. Пусть

$$y=\arccos(-x),$$

тогда, по определению,

$$-x=\cos y \text{ и } 0\leqslant y\leqslant\pi,$$

откуда

$$x=-\cos y=\cos(\pi-y)$$

и

$$0\leqslant\pi-y\leqslant\pi.$$

Отсюда

$$\pi-y=\arccos x.$$

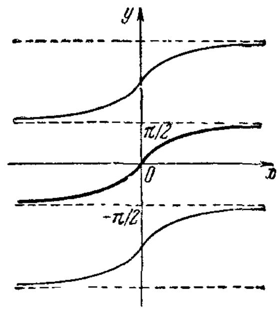

Рис. 76.

Таким образом,

$$\pi=y+\arccos x=\arccos(-x)+\arccos x.$$

Это равенство используется для преобразования арккосинуса отрицательного аргумента.

4. Функция $y=\operatorname{Arctg} x$. Функция $y=\operatorname{Arctg} x$ определена при любом действительном значении x, так как тангенс может принимать любые действительные значения.

График функции $y=\operatorname{Arctg} x$ получается симметричным отражением графика функции $y=\operatorname{tg} x$ относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов (рис. 76). График функции $y=\operatorname{Arctg} x$ состоит из бесконечного множества отдельных ветвей (как и график функции $y=\operatorname{tg} x$).

Многозначность функции $\operatorname{Arctg} x$ наглядно видна из графика; каждому значению абсциссы x соответствует бесконечное множество ординат.

Из графика легко усмотреть, что каждому значению x соответствует одно значение $y = \operatorname{Arctg} x$, которое принадлежит промежутку $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$. Это значение y называется главным значением $\operatorname{Arctg} x$ и обозначается $\operatorname{arctg} x$ (эта однозначная часть графика показана на графике жирной линией).

Таким образом, $\operatorname{arctg} x$ (главное значение $\operatorname{Arctg} x$) есть такое число (угол, дуга) в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен x, т. е.

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$$

и

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x.$$

Очевидно, что функции $\operatorname{Arctg} x$ и $\operatorname{arctg} x$ связаны соотношением

$$\operatorname{Arctg} x = \operatorname{arctg} x + \pi k, \text{ где } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

При изменении аргумента x от $-\infty$ до $+\infty$ функция $y = \operatorname{arctg} x$ изменяется от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$ (исключая $y = \pm\frac{\pi}{2}$). Так как график функции $y = \operatorname{arctg} x$ симметричен относительно начала координат, то функция нечетна. В нечетности функции $\operatorname{arctg} x$ можем убедиться и следующим путем.

Действительно, пусть $y = \operatorname{arctg}(-x)$, тогда, по определению, имеем:

$$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad -x = \operatorname{tg} y.$$

Умножив эти соотношения на -1, получим:

$$\frac{\pi}{2} > -y > -\frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad x = -\operatorname{tg} y$$

или

$$-\frac{\pi}{2} < -y < \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad x = \operatorname{tg}(-y).$$

Отсюда, по определению $\operatorname{arctg} x$, имеем $-y = \operatorname{arctg} x$ или $y = -\operatorname{arctg} x$, т. е. $\operatorname{arctg} x$ является нечетной функцией.

5. Функция $y = \operatorname{Arcctg} x$. Функция $y = \operatorname{Arcctg} x$ многозначная, она определена при любом действительном значении x, так как котангенс может принимать любые действительные значения.

График функции $y = \operatorname{Arcctg} x$ получается симметричным отражением графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов (рис. 77). График функции $y = \operatorname{Arcctg} x$ состоит из бесконечного множества отдельных ветвей (как и график функции $y = \operatorname{ctg} x$). Многозначность функции $y = \operatorname{Arcctg} x$ видна из графика: каждому значению абсциссы x соответствует бесконечное множество ординат.

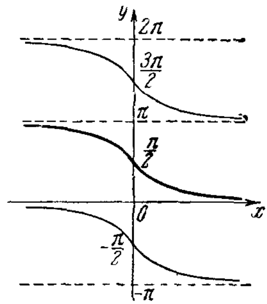

Рис. 77.

Из графика легко усмотреть, что каждому значению x соответствует только одно значение $y = \operatorname{Arcctg} x$, принадлежащее промежутку $(0, \pi)$. Это значение y называется главным значением $\operatorname{Arcctg} x$ и обозначается $\operatorname{arcctg} x$ (эта часть графика показана жирной линией).

Таким образом, $\operatorname{arcctg} x$ (главное значение $\operatorname{Arcctg} x$) есть такое число (угол, дуга) из промежутка $(0, \pi)$, котангенс которого равен x, т. е.

$$0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$$

и

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x.$$

Очевидно, что $\operatorname{Arcctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$ связаны соотношением $\operatorname{Arcctg} x = \operatorname{arcctg} x + \pi k$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Из графика легко усмотреть, что функция $y = \operatorname{arcctg} x$ принимает только положительные значения, а именно, с изменением аргумента x от $-\infty$ до $+\infty$ функция $\operatorname{arcctg} x$ убывает от π до 0 (исключая $y = 0$ и $y = \pi$).

Поскольку график $y = \operatorname{arcctg} x$ не симметричен ни относительно оси ординат, ни относительно начала координат, то функция $y = \operatorname{arcctg} x$ не является ни четной, ни нечетной.

Так как график функции $y = \operatorname{arcctg} x$ симметричен относительно точки $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, то заключаем, что имеет место равенство

$$\operatorname{arcctg}(-x) + \operatorname{arcctg} x = \pi,$$

или

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x.$$

Это равенство используется для преобразования арккотангенса отрицательного аргумента.

ГЛАВА III

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

§ 1. Область определения функции

Найти области определения функций:

1. $y=\frac{\sin x}{1-\cos x}$.

2. $y=\operatorname{ctg}\frac{1}{x^2}$.

3. $y=\sqrt{\sin\frac{1}{x}}$.

4. $y=\sqrt{\sin(\cos x)}$.

5. $y=$
$=\sqrt{\operatorname{tg}^2 x-(\sqrt{3}+1)\operatorname{tg}x+\sqrt{3}}$.

6. $y=\arccos\frac{2}{1-x}$.

7. $y=\arccos\frac{2x}{1+x^2}$.

8. $y=\sqrt{\arcsin(\log_2 x)}$.

9. $y=\arcsin(1+\operatorname{tg}^2\pi x)$.

10. $y=\arcsin(\operatorname{tg}x)$.

11. $y=\arcsin(2x^2+x)$.

12. $y=\frac{1}{x}+2^{\arcsin x}+$
$+\frac{1}{\sqrt{x-2}}$.

13. $y=\log_{\cos x}\sin x$.

14. $y=\log_2(\sin x-\cos x)$.

15. $y=\sqrt{\lg(\cos 2\pi x)}$.

16. $y=\frac{1}{x^3-3x^2+2x}$.

17. $y=\sqrt{-x}+\frac{1}{\sqrt{2+x}}$.

18. $y=\sqrt{3x-x^3}$.

19. $y=\lg\frac{x^2-3x+2}{x+1}$.

20. $y=\frac{\sqrt{x}}{\sin\pi x}$.

21. $y=(2x)!$

22. $y=\operatorname{ctg}\pi x+\arccos(2^x)$.

23. $y=\sqrt{\sin(\sqrt{x})}$.

24. $y=\log_2\log_3\log_4 x$.

25. $y=\sqrt[4]{\lg\operatorname{tg}x}$.

26. $y=\lg[\cos(\lg x)]$.

27. $y=\arcsin\left(\lg\frac{x}{10}\right)$.

28. $|y|=1-x^2$.

29. $|y|=\lg(2-x)$.

30. $y=\lg|4-x^2|$.

31. $y=\lg(3^x-3^{-x})$.

32. $y=\lg(\sqrt{x-3}-2)$.

33. $y=\lg(1-\operatorname{tg}x)$.

34. $y=\frac{\sqrt{\lg\cos x}}{\sin x}$.

35. $f(x, y)=\arcsin(xy)$.

§ 2. Область изменения функции

Найти области изменения функций:

36. $y=\frac{x+2}{x-3}$.

37. $y=\frac{x}{1+x^2}$.

38. $y=\frac{x^2-5}{2x-4}$.

39. $y=\sqrt{-x^2+x+2}$.

40. $y=\frac{x^2+x+2}{x^2-x+2}$.

41. $y=(-1)^x$.

42. $y=\sin x+\cos x$.

43. $y=\lg(1-2\cos x)$.

§ 3. Четные и нечетные функции

Установить четность или нечетность следующих функций:

44. $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

45. $y=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$.

46. $y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$.

47. $y=x^2-\cos x$.

48. $y=x+\operatorname{tg}x$.

49. $y=\sin x+\cos x$.

50. $y=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$.

51. $y=\lg\frac{1+x}{1-x}$.

§ 4. Исследование функций на выпуклость и вогнутость

Исследовать функции на выпуклость и вогнутость:

52. $y=f(x)=x^2$.

53. $y=f(x)=x^3+2x$.

54. $y=f(x)=x^3-4x$.

55. $y=f(x)=\frac{1}{x}$.

56. $y=f(x)=\frac{1}{x^2}$.

57. $y=f(x)=a^x\ (a>0)$.

58. $y=f(x)=\log_a x (a>0)$.

59. $y=f(x)=\sin x$ $(0<x<2\pi)$.

§ 5. Периодичность функций

Найти период функции:

60. $y=\sin 2\pi x$.

61. $y=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x$.

62. $y=\sin(ax+b)$.

63. $y=\operatorname{tg} 3x+5\operatorname{ctg} 2x$.

64. $y=\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}$.

65. $y=\cos^2 x$.

66. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

67. $y=|\cos x|$.

68. $y=\sin 3x+\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x$.

69. $y=\cos 2x+\operatorname{tg} x+\sin 3x+\operatorname{cosec} 5x$.

70. $y=\sin^3 x$.

71. $y=\cos^4 x+\operatorname{tg} x$.

Показать, что следующие функции не являются периодическими:

72. $y=\cos x^2$.

73. $y=x+\sin x$.

74. $y=\sin(\sqrt{2}\,x)+\cos(\sqrt{5}x)$.

§ 6. Функции, связанные с линейной функцией

75. Найти расстояние d между двумя данными точками $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$.

76. Доказать, что если прямые l_1 и l_2, заданные уравнениями $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$, параллельны, то их угловые коэффициенты (k_1 и k_2) равны.

77. Доказать, что если прямые l_1 и l_2 взаимно перпендикулярны, то их угловые коэффициенты (k_1 и k_2) обратны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

78. Доказать, что тангенс угла θ, образованного двумя пересекающимися прямыми l_1 и l_2, заданными уравнениями $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$, определяется по формуле

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}.$$

79. Найти уравнение прямой, проходящей через точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

80. Найти уравнение прямой, отсекающей от оси ординат отрезок b и проходящей через точку (x_1, y_1), не принадлежащую оси ординат $(x \neq 0)$.

81. Найти уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент k и проходящей через точку (x_1, y_1).

Построить графики функций:

82. $y = x$.

83. $y = -x$.

84. $y^2 = x^2$.

85. $y = 0$.

86. $x = 0$.

87. $y = 3$.

88. $x = 2$.

89. $y = |x|$.

90. $y = -|x|$.

91. $y = \frac{|x|}{x}$.

92. $|y| = x - 1$.

93. $y = 0{,}5(x + \sqrt{x^2})$.

94. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{|x - 2|}$.

95. $y = \sqrt{x^2 + 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 9}$.

96. $y = |x| + |x - 1| + |x + 1|$.

97. $y = 0{,}5(|x + 1| - |x - 1|)$.

98. $y = 0{,}5(|x + 1| + |x - 1|)$.

99. $|y| + |x| = 1$.

Показать, где расположены на плоскости точки, координаты которых удовлетворяют зависимостям:

100. $x \leqslant -1$.

101. $x > 1$.

102. $|y| > 2$.

103. $|y| < 2$.

104. $x + y + 2 \geqslant 0$.

105. $y^2 - x^2 < 0$.

106. $|x + y| \leqslant 1$.

107. $|x| + |y| < 1$.

108. $\begin{cases} x + y = 1, \\ y - 2x - 1 > 0. \end{cases}$

109. $\begin{cases} y + 7 > 0, \\ x - y + 1 = 0, \\ 2x - y + 4 < 0. \end{cases}$

110. $\begin{cases} x>0, \\ y>0, \\ y+x<1. \end{cases}$

111. $\begin{cases} x+y>-1, \\ y-2x<1. \end{cases}$

112. $\begin{cases} x>2, \\ y<2, \\ y=x-4. \end{cases}$

113. $\frac{|x|}{x}+\frac{|y|}{y}=2.$

§ 7. Квадратичные функции

Построить графики функций:

114. $y=2x^2+x-1.$

115. $y=-2x^2-x+6.$

116. $|y|=x^2.$

117. $|y|=4-x^2.$

118. $|y|=x^2-2x-3.$

119. $|y|=x^2+|x|-2.$

120. $y=|x^2+x-2|.$

121. $y=(1-x)|x+1|.$

122. $y=x^2-2|x|+1.$

123. $y=x^2+|x|.$

124. $y=(1+|x|)(2-|x|).$

125. $y=(x-1)(2-|x|).$

126. $y=\frac{x^3+x}{|x|}.$

127. $y=\frac{x^3-x^2}{2|x-1|}.$

128 $y=(x-1)|x-2|.$

129. $y=\frac{x^4-1}{|x^2-1|}.$

130. $y=x+x\sqrt{(x-1)^2}.$

131. $\left[x-\frac{|x|}{x}\right]^2+\left[y-\frac{|y|}{y}\right]^2=4.$

§ 8. Функции третьей и четвертой степени

Построить графики функций:

132. $y=(x+1)^3.$

133. $y=|x^3|.$

134. $|y|=x^3.$

135. $|x|=y^3.$

136. $y=x^3-3x.$

137. $|y|=x-x^3.$

138. $y=x^2-x^3.$

139. $y=x^3-3x^2+2.$

140. $y=x^3-x^2-x+1.$

141. $y=x^4-2x^2+2.$

142. $|y|=x^4-4x^2.$

143. $x^4+y^4=x^2+y^2.$

§ 9. Дробно-рациональные функции

Построить графики функций:

144. $y=\frac{1-2x}{x-2}.$

145. $y=\frac{1}{|x|}.$

146. $y=\frac{1}{|x+1|}$.

147. $|y|=\frac{1}{x-1}$.

148. $|y|=\frac{1}{\frac{x-1}{x}}$.

149. $y=x-\frac{1}{x}$.

150. $y=\frac{1}{|x|-1}$.

151. $y=\frac{1}{|x|+1}$.

152. $y=x+\frac{4}{x}$.

153. $y=|x|+\frac{1}{x}$.

154. $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

155. $|y|=\frac{x^2+1}{x^2-1}$.

156. $y=\frac{x^2+3x-1}{x^2-3x+1}$.

157. $y=\frac{2x^2+x-1}{2x^2-x-1}$.

158. $y=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

159. $y^2=\frac{x^4}{x^2-1}$.

160. $y=\frac{x}{(x-1)^2}$.

161. $y=\frac{x^3+x}{x^2-1}$.

162. $y=\frac{x^3}{x-1}$.

163. $y=\frac{2}{(3-x^2)(5-x^2)}$.

164. $|y|=\frac{x^2+|x|}{x^2-1}$.

165. $y=\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x-2}$.

166. $y=\frac{|x+1|-|x-1|}{x}$.

167. $y=\frac{x^2}{x-2}$.

168. $y=\frac{1}{1+x^2}$.

169. $y=\frac{3x-2}{5x^2}$.

170. $y=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}$.

§ 10. Функции, связанные с иррациональными функциями

Построить графики функций:

171. $y=1+\sqrt{x}$.

172. $y=\sqrt{x^2-1}$.

173. $y=\sqrt{x-1}-2$.

174. $y=\frac{1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$.

175. $y=\frac{1-x^2}{2\pm\sqrt{1-x^2}}$.

176. $y=\frac{\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}+\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}}{\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}-\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}}\quad(a\neq 0)$.

177. $y=\frac{2x}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}$.

178. $y=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

179. $y=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$.

180. $y=\sqrt{2(x+|x-2|)}$.

181. $y=\frac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}{2}$.

182. $y=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$.

§ 11. Функции, связанные с показательной функцией

Построить графики функций:

183. $y=2^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

184. $y=2^{2\sqrt{x}}$.

185. $y=2^{\log_3 x}$.

186. $y=2^x+2^{\log_3 x}$.

187. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3 x}$.

188. $y=\frac{4^{\log_3 x}-1}{2^{\log_3 x}-1}$.

189. $y=2^{x^2}$.

190. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$.

191. $y=2^{x-|x|}$.

192. $y=2^x-2^{|x|}$.

193. $y=2^{\frac{x^2}{|x|}}$.

194. $y=2^{|x|+1}$.

195. $y=2^{1-x^2}$.

196. $y=\frac{2^{2x}-4}{|2^x-2|}$.

197. $y=2^{\frac{1}{x}}$.

198. $y=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$.

199. $y=3^{x^2-2}$.

200. $y=2^{x^2-3x+2}$.

201. $y=3^{\sqrt{-x^2+2x+8}}$.

202. $y=2^{\cos x}\ (-2\pi\leqslant x\leqslant 2\pi)$.

203. $y=\frac{x}{2^x}$.

204. $y+\sqrt{y^2+1}=3^x$.

205. $|y|=2^x-1$.

206. $|y|=2^{|x|}-1$.

§ 12. Функции, связанные с логарифмической функцией

Построить графики функций:

207. $y=a^{\log_a x}$.

208. $y=\log_3|x|$.

209. $y=|\log_2 x|$.

210. $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$.

211. $y=\log_x 2$.

212. $y=\log_2\log_2 x$.

213. $y=\log_2(x^2-4)$.

214. $y=\frac{\log_2 x^2}{|\log_2 x|}$.

215. $y=0{,}5\log_2(x-1)^2$.

216. $y=\log_2(1-x^2)$.

217. $|y|=\log_2 x$.

218. $y=\log_2^2 x$.

219. $y=\log_a \operatorname{arctg} x\ (a>1)$.

220. $y=0{,}5\log_2\frac{1+x}{1-x}$.

221. $y=\log_a \sin x\ (a>1)$.

222. $y=\sqrt{\lg \sin x}$.

Где расположены на плоскости точки, координаты которых удовлетворяют системам неравенств:

223. $\begin{cases} y>\log_2 x, \\ y<2? \end{cases}$

224. $\begin{cases} y>\log_2 x, \\ y<4^x, \\ x<1? \end{cases}$

§ 13. Тригонометрические функции

Построить графики функций:

225. $y=$
$=4\left(\cos^4\frac{x}{2}+\sin^4\frac{x}{2}\right)$.

226. $y=\cos x+\sin x$.

227. $y=\operatorname{tg}^2 x-\sec^2 x$.

228. $y=\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x$.

229. $y=\sec x\cdot|\cos x|$.

230. $y=\operatorname{tg} x\cdot\cos x$.

231. $y=\operatorname{ctg} x\cdot|\sin x|$.

232. $y=\operatorname{ctg} x\cdot\sec x$.

233. $y=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$.

234. $y=$
$=\frac{|\sin x|}{\cos x}\left(-\frac{3\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}\right)$.

235. $y=|\sin x|+\sin|x|$.

236. $y=2\sin x\,|\cos x|$.

237. $y=\sin x+|\sin x|$.

238. $y=\dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{\sin^2 x}}$.

239. $y=\dfrac{\sec^2\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$.

240. $y=[0{,}5\sin x]\,(1+|x|)$.

241. $y=\dfrac{1}{3+2\cos x}$.

242. $y=\dfrac{\sin^2 x-\sin 2x}{\cos^2 x}$.

243. $y=|y|\sin x$.

244. $y=\dfrac{1+\cos x}{3-\sin x}$.

245. $y=\dfrac{\cos 2x}{\sin x}$.

246. $|y|=\sin x$.

247. $y=x\sin x$.

248. $y=\sin x^2$.

§ 14. Обратные тригонометрические функции

Построить графики функций:

249. $y=|\arcsin x|$.

250. $y=|\operatorname{arctg} x|$.

251. $y=\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

252. $y=\operatorname{arctg} x-\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$.

253. $y=\operatorname{Arccos}(\cos x)$.

254. $y=\arcsin\sqrt{1-x}+\arcsin\sqrt{x}$.

255. $y=\arcsin(\sin x)$.

256. $y=\arccos(\cos x)$.

257. $y=\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$.

258. $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

259. $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

260. $y=\sin(\arcsin x)-x+1$.

261. $y=\arccos(\cos x)-\arcsin(\sin x)$.

262. $y=x+\arcsin(\sin x)$.

263. $|y|=\operatorname{arcctg} x$.

264. $|y|=\arcsin x$.

265. $|y|=\arccos x$.

266. $|y|=\operatorname{arctg} x$.

267. $y=\arccos x^2$.

268. $y=\arcsin\frac{1}{x}$.

269. $y=\arccos(\arcsin x)$.

270. $y=\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

271. $y=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$.

272. $y=\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$.

273. $y=x-\arcsin x$.

274. $y=x\arcsin(\sin x)$.

§ 15. Разные задачи

275. Исследовать функцию

$$f(x)=x-\sin x$$

на возрастание и убывание в промежутке от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

276. Доказать, что функция

$$y=\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

при $x\geqslant 0$ равна нулю, а при $x<0$

$$y=\pi-2\arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

277. Исследовать функцию

$$f(x)=\frac{x}{1+x^2}$$

на возрастание и убывание.

278. Найти область определения функции

$$y=\lg(\operatorname{tg} x)+\lg(\operatorname{ctg} x).$$

279. Показать, что уравнение

$$\lg x=\sqrt{-x^2-3x-2}$$

не имеет действительных корней.

280. Найти действительные корни уравнения

$$\sqrt{x^2-5x+6}=\sqrt[8]{9x-10-2x^2}.$$

281. Показать, что уравнение

$$\sqrt{-x^2+3x-2}+\sqrt{x^2-4x+3}=\sqrt{2}(1-\sqrt{x})$$

имеет только один действительный корень, равный единице.

282. Исследовать уравнение

$$3\cos x\cos(\alpha-x)=2\sin^2 x \quad (0\leqslant\alpha\leqslant\pi).$$

283. Исследовать уравнение

$$x^2\cos\alpha+2x\sin\alpha-1=0,$$

где $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$.

284. Решить уравнение

$$x+\sqrt{x^2-1}=a$$

и исследовать, при каких значениях a оно имеет решения.

285. Решить уравнение

$$\sin x=\frac{|x|}{x}.$$

286. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\log_y x+\log_x y=\dfrac{5}{2},\\ x+y=a+a^2\end{cases}$$

и исследовать решение в зависимости от a.

287. Исследовать функцию

$$y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x, \text{ где } 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

на возрастание и убывание.

288. Исследовать функцию

$$y = 3^{|x-2|+|x+1|}$$

на возрастание и убывание.

289. Доказать, что функция

$$y = (x^2 - 1)^2$$

в промежутке $(-1, 0)$ возрастает, а в промежутке $(0,1)$ убывает.

290. Показать, что функция

$$f(x) = x^3 + 2x + 1$$

возрастает во всей области ее определения.

291. Исследовать функцию

$$y = 3^{(x^2-1)^3+1}$$

на возрастание и убывание, а также иайти ее минимум.

292. Найти максимум функции

$$y = \frac{2}{\sqrt{2x^2 - 4x + 3}}.$$

293. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{-2\cos^2 x + 3\cos x - 1},$$

а также ее наибольшее и наименьшее значения.

294. Даны n чисел $a_1, a_2, a_2, \ldots, a_n$. Определить, при каком значении x функция

$$y = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \ldots + (x - a_n)^2$$

имеет минимум.

295. Где расположены точки, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x < 0, \\ y \leqslant \frac{1}{x}? \end{cases}$$

296. Где расположены точки, координаты которых удовлетворяют смешанной системе

$$\begin{cases} y=x, \\ x^2+y^2\leqslant 1? \end{cases}$$

297. Где расположены точки плоскости, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} -1<x<1, \\ -\sqrt{1-x^2}<y<\sqrt{1-x^2}? \end{cases}$$

298. Где расположены точки плоскости, координаты которых удовлетворяют одновременно двум равенствам

$$x=k,\ y=l,$$

где k и l — целые числа, т. е. 0, ± 1, ± 2, ± 3, ..?

299. Где расположены точки плоскости, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y>x^2, \\ y<1? \end{cases}$$

300. Где расположены точки плоскости, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y-\cos x>0, \\ y-\sin x<0, \\ 0<x<\frac{\pi}{2}? \end{cases}$$

301. Где расположены на плоскости точки, координаты которых удовлетворяют равенству

$$E(x)=E(y),$$

где $E(\alpha)$ — наибольшее целое, не превышающее α?

302. Где на координатной плоскости расположены точки, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$x+|x|=y+|y|?$$

303. Найти все значения a, при которых трехчлен

$$y=(a^2-1)x^2+2(a-1)x+2$$

будет положителен при всех действительных значениях x.

304. Найти геометрическое место точек (x, y), меньшая координата которых равна 1, т. е. $\min(x, y) = 1$.

305. Найти геометрическое место точек (x, y), большая координата которых равна 1, т. е. $\max(x, y) = 1$.

306. Найти геометрическое место точек (x, y), модуль большей координаты которых равен 1, т. е. $\max(|x|, |y|) = 1$.

307. Найти геометрическое место точек (x, y), квадрат меньшей координаты которых равен 1, т. е. $\min(x^2, y^2) = 1$.

308. Решить графически уравнение

$$x^x = 64 \quad (x > 0).$$

309. Решить графически уравнение

$$4x = 2^x.$$

310. Найти графически все корни уравнения

$$x^4 - 7x^2 + 6x = 0.$$

311. Решить графически уравнение

$$x \cdot 2^{3^x} = 1.$$

312. Решить графически уравнение

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0.$$

313. Решить графически неравенство

$$\left|\frac{x+2}{x+1}\right| > 1.$$

314. Решить графически неравенство

$$|x+2| > |x|.$$

315. Два тела начинают одновременно двигаться равномерно по прямым Ox и Oy, пересекающимся под прямым углом. Первое тело движется со скоростью v по прямой Ox от точки A к точке O, находящейся на расстоянии a от точки A. Второе тело движется со скоростью v_1 по прямой Oy от точки B к точке O, находящейся на расстоянии b от точки B. Найти наименьшее расстояние между этими телами во время движения.

316. Найти наименьшее значение функции

$$\varphi(x) = |x-a| + |x-b| + |x-c| + |x-d|,$$

где $a<b<c<d$ — фиксированные вещественные числа, а x принимает произвольные вещественные значения.

317. Дано уравнение параболы

$$y=x^2+(2m+1)x+m^2-1.$$

Найти координаты вершины параболы и доказать, что если m пробегает все действительные числа, то вершина параболы описывает прямую линию.

Построить графики функций:

318. $y=1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}$.

319. $y=\arccos(2x^2-1)+2\arcsin x$.

320. $|y|=\cos x$.

321. $y=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$.

322. $x^2-\frac{y-1}{y+1}=0$.

323. $(x+|x|)^2+(y+|y|)^2=16$.

324. $|y|=\frac{|x|}{x}-x^2$.

325. $y=\dfrac{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}+1}-\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}-1}}{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}+1}+\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}-1}}$.

326. $x^2y^2-x^2-y^2+1=0$.

327. $x^3+y^2=x^2y+xy$.

328. $\frac{y}{|x|}+1=|xy|+y|y|$.

329. $|xy|-y|y|-x|x|+xy=0$.

330. $x|y|-\log_2 x^x-|y|+\log_2 x=0$.

331. $y^4-(y\log_2 x)^2+(2^x\log_2 x)^2-4^x y^2=0$.

332. $x|y|-x\cdot 2^x+y^2|y|-y^2\cdot 2^x=0$.

333. $\log_2|y|=\log_2(x^2-4)$.

334. $y=\frac{\sqrt{x(x-2)^2}}{x-2}$.

335. $y=0{,}5\left(\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\right)^2$.

336. $|y|+\frac{1}{|y|}=|x|+\frac{1}{|x|}$.

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ

§ 1. Область определения функции

1. Должно быть $1-\cos x \neq 0$, или $\cos x \neq 1$, откуда $x \neq 2\pi k$ где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Отв. $x \neq 2\pi k$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

2. Должно быть $x \neq 0$ и $\frac{1}{x^2} \neq \pi k$.

Отв. Множество всех действительных чисел, исключая $x=0$ и $x=\pm\frac{1}{\sqrt{\pi k}}$, где $k=+1, +2, +3, \ldots$

3. Должно быть $x \neq 0$ и $\sin\frac{1}{x} \geqslant 0$, откуда $2\pi k \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \pi + 2\pi k$.

При $k=0$ имеем $x \geqslant \frac{1}{\pi}$. При $k=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ имеем:

$$\frac{1}{\pi(2k+1)} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2\pi k}.$$

Отв. $x \geqslant \frac{1}{\pi}$ или $\frac{1}{\pi(2k+1)} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2\pi k}$, где $k=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

4. Должно быть $\sin(\cos x) \geqslant 0$, откуда

$$2\pi n \leqslant \cos x \leqslant \pi + 2\pi n, \tag{1}$$

но

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что $0 \leqslant \cos x \leqslant 1$, т. е. аргумент x находится в первом и четвертом квадрантах, включая их границы.

Отв. $-\frac{\pi}{2}+2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}+2\pi k$.

5. Должно быть

$$\operatorname{tg}^2 x-(\sqrt{3}+1)\operatorname{tg} x+\sqrt{3} \geqslant 0. \tag{1}$$

Левая часть неравенства (1) есть квадратный трехчлен относительно $\operatorname{tg} x$, корни которого $\sqrt{3}$ и 1, поэтому неравенство (1) имеет место при

$$\operatorname{tg} x \geqslant \sqrt{3} \tag{2}$$

или при

$$\operatorname{tg} x \leqslant 1. \qquad (3)$$

Из неравенства (2):

$$\pi k + \frac{\pi}{3} \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi k,$$

а из неравенства (3):

$$\pi k - \frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi k + \frac{\pi}{4}.$$

Отв. $\frac{\pi}{3}(3k+1) \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}(2k+1)$ или $\frac{\pi}{2}(2k-1) < x \leqslant \frac{\pi}{4}(4k+1)$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

6. Должно быть $\left|\frac{2}{1-x}\right| \leqslant 1$. Следовательно, $\left|\frac{x-1}{2}\right| \geqslant 1$, т. е. $|x-1| \geqslant 2$, откуда

1) $x-1 \geqslant 2$ и $x \geqslant 3$

или

2) $x-1 \leqslant -2$ и $x \leqslant -1$.

Отв. $x \geqslant 3$ или $x \leqslant -1$.

7. Должно быть

$$-1 \leqslant \frac{2x}{1+x^2} \leqslant 1. \qquad (1)$$

Так как $1+x^2>0$ при любом значении x, то (1) равносильно неравенству $-1-x^2 \leqslant 2x \leqslant 1+x^2$.

Решим каждое неравенство отдельно:

1) $x^2+1 \geqslant 2x$, или $x^2-2x+1 \geqslant 0$, или $(x-1)^2 \geqslant 0$, последнее имеет место при любом x

2) $2x \geqslant -1-x^2$, или $x^2+2x+1 \geqslant 0$, или $(x+1)^2 \geqslant 0$, последнее имеет место при любом x.

Отв. x — любое число.

8. Должно быть $x > 0$, $-1 \leqslant \log_2 x \leqslant 1$, $0 \leqslant \arcsin(\log_2 x) \leqslant \frac{\pi}{2}$. Эти неравенства имеют одновременно место, если $0 \leqslant \log_2 x \leqslant 1$.

Отв. $1 \leqslant x \leqslant 2$.

9. Должно быть

$$|1+\operatorname{tg}^2 \pi x| \leqslant 1. \qquad (1)$$

Поскольку

$$1+\operatorname{tg}^2 \pi x \geqslant 1 \qquad (2)$$

при всех допустимых значениях x, то из (1) и (2) следует, что $\operatorname{tg}^2 \pi x + 1 = 1$. Последнее соотношение возможно, если $\operatorname{tg}^2 \pi x = 0$, т. е. когда $\pi x = \pi k$.

Отв. $x = k$ — любое целое число.

10. Должно быть $-1 \leqslant \operatorname{tg} x \leqslant 1$.

Отв. $\pi k - \frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} + \pi k$.

11. Должно быть $|2x^2+x|\leqslant 1$, т. е. $-1\leqslant 2x^2+x\leqslant 1$. Из неравенства $2x^2+x-1\leqslant 0$ находим, что $-1\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}$, а неравенство $2x^2+x+1\geqslant 0$ имеет место при любом x.

Отв. $-1\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}$.

12. Должно быть $x\neq 0$, $-1\leqslant x\leqslant 1$ и $x>2$. Так как $-1\leqslant x\leqslant 1$ и $x>2$ противоречивы, то функция y не определена ни при каком значении x.

13. Должно быть $\cos x>0$, $\sin x>0$, $\cos x\neq 1$. Из этих неравенств следует: $2\pi k<x<\frac{\pi}{2}+2\pi k$.

Отв. $2\pi k<x<\frac{\pi}{2}(4k+1)$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

14. Должно быть $\sin x-\cos x>0$ или $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x>0$, или $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0$. Отсюда $2\pi k<x-\frac{\pi}{4}<\pi+2\pi k$.

Отв. $\frac{\pi}{4}+2\pi k<x<\frac{5\pi}{4}+2\pi k$.

15. Должно быть $\cos 2\pi x>0$ и $\lg(\cos 2\pi x)\geqslant 0$, откуда $\cos 2\pi x\geqslant 1$. Но $\cos 2\pi x\leqslant 1$, следовательно, $\cos 2\pi x=1$, откуда $2\pi x=2\pi k$.

Отв. $x=k$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

16. Для существования функции необходимо, чтобы имело место неравенство $x^3-3x^2+2x\neq 0$, или $x(x-1)(x-2)\neq 0$. Корнями левой части неравенства являются числа 0, 1, 2.

Отв. Множество всех действительных чисел, кроме 0, 1, 2.

17. Для существования функции $\sqrt{-x}$ необходимо, чтобы имело место неравенство $x\leqslant 0$. Для существования функции $\frac{1}{\sqrt{2+x}}$ должно иметь место неравенство $2+x>0$, откуда $x>-2$.

Отв. $-2<x\leqslant 0$.

18. Для существования функции необходимо, чтобы имело место неравенство $3x-x^3\geqslant 0$, или $x(x^2-3)\leqslant 0$, или $x(x-\sqrt{3})\times$ $\times(x+\sqrt{3})\leqslant 0$. Таким образом, корнями левой части этого неравенства являются числа $-\sqrt{3}$, 0, $\sqrt{3}$.

При $x=1$ левая часть неравенства есть отрицательное число. Отсюда заключаем, что если $0\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$, то левая часть неравенства неположительна. Поскольку при переходе через корень меняется знак функции, то левая часть неравенства неположительна и при $-\infty<x\leqslant-\sqrt{3}$.

Отв. Промежутки $(-\infty, -\sqrt{3}]$ и $[0, \sqrt{3}]$.

19. Для существования функции необходимо, чтобы имело место неравенство $\frac{x^2-3x+2}{x+1}>0$. Если частное двух величин положительно, то и произведение этих величин положительно. Таким образом, $(x^2-3x+2)(x+1)>0$, или $(x-1)(x-2)(x+1)>0$. Легко заметить, что при $x=0$ левая часть неравенства положительна. Отсюда заключаем, что при $-1<x<1$ неравенство справедливо. Поскольку при переходе через корень знак многочлена изменяется, то заключаем, что при $2<x<+\infty$ левая часть неравенства также положительна.

Отв. Два интервала: $(-1,\ 1)$ и $(2,\ +\infty)$.

20. Для существования числителя необходимо, чтобы $x\geqslant 0$. Для того чтобы знаменатель был отличным от нуля, надо, чтобы $\pi x\neq\pi k$, т. е. $x\neq k$, где $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$

Отв. Все нецелые положительные числа.

21. Ясно, что $2x=m$, где m — любое целое положительное число. Таким образом, $x=\frac{m}{2}$.

Отв. $\frac{m}{2}$, где $m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

22. Для существования функции $\operatorname{ctg}\pi x$ необходимо, чтобы $\pi x\neq\pi k$, т. е. $x\neq k$, где $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$ Для существования функции $\arccos(2^x)$ должно быть $-1\leqslant 2^x\leqslant 1$. Неравенство $2^x\geqslant -1$ имеет место при любом x, а неравенство $2^x\leqslant 1$ при $x\leqslant 0$.

Отв. Все нецелые отрицательные числа.

23. Для существования функции $\sqrt{x}$ необходимо, чтобы $x\geqslant 0$. Для существования исследуемой функции должно иметь место $\sin(\sqrt{x})\geqslant 0$, откуда $2\pi k\leqslant\sqrt{x}\leqslant\pi(2k+1)$, или $4\pi^2k^2\leqslant x\leqslant\pi^2(2k+1)^2$.

Отв. Промежутки $4\pi^2k^2\leqslant x\leqslant\pi^2(2k+1)^2$, где $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

24. Для существования функции $\log_4 x$ необходимо, чтобы

$$x>0. \tag{1}$$

Для существования функции $\log_2\log_4 x$ надо, чтобы $\log_4 x>0$, откуда

$$x>1. \tag{2}$$

Для существования функции $\log_2\log_2\log_4 x$ необходимо, чтобы $\log_3\log_4 x>0$, откуда $\log_4 x>1$ и

$$x>4. \tag{3}$$

Из (1), (2), (3) следует, что областью определения функции является интервал $(4,\ +\infty)$.

Отв. Интервал $(4,\ +\infty)$.

25. Для существования функции $\operatorname{tg} x$ необходимо, чтобы

$$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k. \qquad (1)$$

Для существования функции $\lg \operatorname{tg} x$ надо, чтобы $\operatorname{tg} x > 0$, откуда

$$\pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k. \qquad (2)$$

Для существования исследуемой функции должно быть $\lg \operatorname{tg} x \geqslant 0$, откуда $\operatorname{tg} x \geqslant 1$. Отсюда

$$\pi k + \frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi k. \qquad (3)$$

Из (1), (2) и (3) следует, что областью определения функции являются промежутки $\frac{\pi}{4} + \pi k \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Отв. Промежутки $\frac{\pi}{4} + \pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + \pi k$.

26. Для существования функции $\lg x$ необходимо, чтобы имело место

$$x > 0. \qquad (1)$$

Для существования исследуемой функции необходимо, чтобы

$$\cos(\lg x) > 0,$$

откуда

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < \lg x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$

или

$$10^{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k} < x < 10^{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что областью определения функции являются интервалы $10^{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k} < x < 10^{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Отв. Интервалы $10^{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k} < x < 10^{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

27. Должно быть $-1 \leqslant \lg \frac{x}{10} \leqslant 1$, откуда $0{,}1 \leqslant \frac{x}{10} \leqslant 10$ Следовательно, $1 \leqslant x \leqslant 100$.

Отв. $1 \leqslant x \leqslant 100$.

28. Поскольку $|y|$ — неотрицательное число, то должно быть $1 - x^2 \geqslant 0$, или $(x-1)(x+1) \leqslant 0$, откуда $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Отв. Промежуток $[-1, 1]$.

29. Для существования логарифма должно иметь место $2-x>0$, т. е.

$$x<2. \qquad (1)$$

Поскольку $|y|$ — неотрицательное число, то $\lg(2-x)\geqslant 0$, откуда $2-x\geqslant 1$, или

$$x\leqslant 1. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что функция определена в промежутке $(-\infty, 1]$.

Отв. Промежуток $(-\infty, 1]$.

30. Поскольку логарифмировать можно только положительные числа и так как $|4-x^2|\geqslant 0$, то должно быть $4-x^2\neq 0$, или $x^2\neq 4$, или $x\neq\pm 2$.

Таким образом, областью определения функции являются три промежутка: $(-\infty, -2)$, $(-2, +2)$, $(2, +\infty)$.

Отв. Множество всех действительных чисел, кроме -2 и 2.

31. Должно быть $3^x-3^{-x}>0$, или $3^{2x}-1>0$, откуда $2x>0$, т. е. $x>0$.

Отв. $x>0$.

32. Должно быть $x-3\geqslant 0$ и $\sqrt{x-3}>2$. Из первого неравенства имеем $x\geqslant 3$, а из второго $x>7$. Следовательно, $x>7$.

Отв. $x>7$.

33. Должно быть $1-\operatorname{tg} x>0$, или $\operatorname{tg} x<1$.

Отв. Промежутки $-\frac{\pi}{2}+\pi k<x<\frac{\pi}{4}+\pi k$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

34. Знаменатель $\sin x\neq 0$, следовательно,

$$\cos x\neq\pm 1. \qquad (1)$$

Для существования числителя необходимо, чтобы $\cos x>0$ и

$$\lg\cos x\geqslant 0. \qquad (2)$$

Но поскольку $\cos x$ — правильная дробь, то

$$\lg\cos x\leqslant 0. \qquad (3)$$

В силу (2) и (3) $\lg\cos x=0$, откуда

$$\cos x=1. \qquad (4)$$

Таким образом, должны иметь место одновременно соотношения (1) и (4). Но поскольку они противоречивы, то данная функция не определена ни при каких значениях x.

35. Должно быть $|xy| \leqslant 1$, откуда

$$|y| \leqslant \frac{1}{|x|}.$$

Это неравенство распадается на два:

1) если $x > 0$, то

$$-\frac{1}{x} \leqslant y \leqslant \frac{1}{x},$$

и

2) если $x < 0$, то

$$\frac{1}{x} \leqslant y \leqslant -\frac{1}{x}.$$

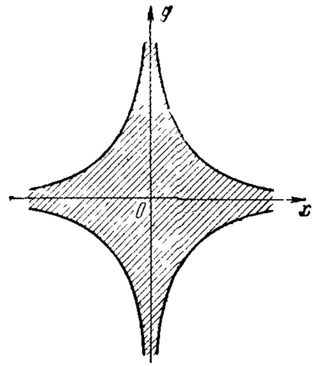

Рис. 78

Из 1) и 2) следует, что искомая область ограничена ветвями двух гипербол (рис. 78).

§ 2. Область изменения функции

36. Первый способ. Представим данную функцию в виде

$$y = \frac{x-3+5}{x-3} = 1 + \frac{5}{x-3}.$$

Поскольку $\frac{5}{x-3}$ может принимать любые значения, отличные от нуля, то y может принимать любые значения, отличные от единицы.

Второй способ. Перепишем данную зависимость в виде $yx - 3y = x + 2$, или $yx - x = 3y + 2$, откуда имеем $x = \frac{3y+2}{y-1}$. Отсюда ясно, что $y \neq 1$.

Отв. $-\infty < y < 1$ или $1 < y < +\infty$.

37. Если $y = 0$, то $x = 0$. Теперь, считая, что $y \neq 0$, представим данную функциональную зависимость в неявном виде:

$$yx^2 - x + y = 0$$

и решая это уравнение относительно x, получаем:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4y^2}}{2y}.$$

Область изменения данной функции определяется неравенством $1 - 4y^2 \geqslant 0$, или $(2y+1)(2y-1) \leqslant 0$, или $4\left(y + \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) \leqslant 0$.

Отсюда легко усмотреть, что

$$-\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}.$$

Отв. Областью изменения исследуемой функции является промежуток $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

38. Представим данную функциональную зависимость в неявном виде $x^2-2yx+4y-5=0$. Решая это уравнение относительно переменной x, находим $x_{1,2}=y \pm \sqrt{y^2-4y+5}$. Область изменения исследуемой функции определяется неравенством

$$y^2-4y+5 \geqslant 0. \qquad (1)$$

Дискриминант левой части соотношения (1)—отрицательное число, а коэффициент при y^2—положительное число. Поэтому $y^2-4y+5>0$ имеет место при любом действительном значении y, т. е. неравенство (1) имеет место при любом значении функции y.

Отв. Областью изменения функции служит промежуток $(-\infty, +\infty)$.

39. Функция $-x^2+x+2$ имеет максимум, равный

$$\frac{4(-1)\cdot 2-1^2}{-4}=\frac{9}{4}.$$

Следовательно, исследуемая функция имеет максимум $\frac{3}{2}$, т. е.

$$y \leqslant \frac{3}{2}. \qquad (1)$$

С другой стороны, поскольку радикал берется арифметический, то

$$y \geqslant 0. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что областью изменения функции является промежуток $0 \leqslant y \leqslant \frac{3}{2}$.

Отв. Промежуток $0 \leqslant y \leqslant \frac{3}{2}$.

40. Представим данную функциональную зависимость в неявном виде:

$$(y-1)x^2-(y+1)x+2(y-1)=0. \qquad (1)$$

Отсюда получаем:

$$x=\frac{y+1 \pm \sqrt{-7y^2+18y-7}}{2(y-1)}.$$

Ясно, что должно иметь место соотношение $7y^2-18y+7 \leqslant 0$, или $\frac{9-4\sqrt{2}}{7} \leqslant y \leqslant \frac{9+4\sqrt{2}}{7}$. Действия были произведены в предположении, что $y \neq 1$. Подставляя в (1) вместо y число 1 убеждаемся, что $x=0$. Следовательно, y может быть равен 1.

Отв. Промежуток $\left[\frac{9-4\sqrt{2}}{7}, \frac{9+4\sqrt{2}}{7}\right]$.

41. Ясно, что в зависимости от x (из области определения функции) y может принимать только два значения 1 и -1.

Отметим, что областью определения функции являются числа $x=\frac{p}{2q+1}$, где p — любое целое, а q — любое целое неотрицательное число.

Отв. Функция принимает значения 1 или -1.

42. Представим данную функциональную зависимость так:

$$y=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right),$$

$$y=\sqrt{2}\left(\cos x\cos\frac{\pi}{4}+\sin x\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$y=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

Поскольку

$$-1 \leqslant \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1,$$

то

$$-\sqrt{2} \leqslant y \leqslant \sqrt{2}.$$

Отв. Промежуток $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

43. Функция $1-2\cos x$ принимает наибольшее значение, равное 3, когда $\cos x=-1$. Следовательно, наибольшее значение исследуемой функции есть $\lg 3$.

Таким образом, областью изменения функции является промежуток $-\infty < y \leqslant \lg 3$.

Отв. Промежуток $(-\infty, \lg 3]$.

§ 3. Четные и нечетные функции

44. Так как

$$\sqrt[3]{(-x+1)^2}+\sqrt[3]{(-x-1)^2}=\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)^2}=y,$$

то функция четная.

45. Так как

$$\sqrt{1-x+(-x)^2}-\sqrt{1-(-x)+(-x)^2}=\sqrt{1-x+x^2}-\sqrt{1+x+x^2}=-y,$$

то функция нечетная.

46. Так как

$$\frac{a^{-x}+a^{-(-x)}}{2}=\frac{a^x+a^{-x}}{2}=y,$$

то функция четная.

47. Так как

$$(-x)^2-\cos(-x)=x^2-\cos x=y,$$

то функция четная.

48. Так как

$$-x+\operatorname{tg}(-x)=-(x+\operatorname{tg} x)=-y,$$

то функция нечетная.

49. Так как

$$\sin(-x)+\cos(-x)=-\sin x+\cos x\neq\pm y,$$

то функция не является ни четной, ни нечетной.

50. Так как

$$\lg(-x+\sqrt{1+x^2})=\lg\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x}=$$

$$=\lg\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x}=\lg\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=-\lg(x+\sqrt{1+x^2})=-y,$$

то функция нечетная.

51. Так как

$$\lg\frac{1-x}{1+x}=\lg(1-x)-\lg(1+x)=-[\lg(1+x)-\lg(1-x)]=$$

$$=-\lg\frac{1+x}{1-x}=-y,$$

то функция нечетная.

§ 4. Исследование функций на выпуклость и вогнутость

52. Пусть x_1 и x_2—произвольные значения аргумента. Тогда

$$y_1=f(x_1)=x_1^2,\ y_2=f(x_2)=x_2^2,\ f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2.$$

Для исследования графика функции $y=x^2$ на выпуклость и вогнутость рассмотрим разность

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

и установим ее знак. Имеем:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{x_1^2+x_2^2}{2}-\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{2x_1^2+2x_2^2-x_1^2-2x_1x_2-x_2^2}{4}=\frac{x_1^2-2x_1x_2+x_2^2}{4}=\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2>0.$$

Поскольку рассматриваемая разность положительна, то график данной функции вогнутый (рис. 79).

53. Пусть x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента, причем x_1 и x_2 имеют один и тот же знак.

Таким образом,

$$f(x_1)=x_1^3+2x_1,\quad f(x_2)=x_2^3+2x_2,$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{(x_1+x_2)^3+8(x_1+x_2)}{8}.$$

Рассмотрим разность

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

и установим ее знак

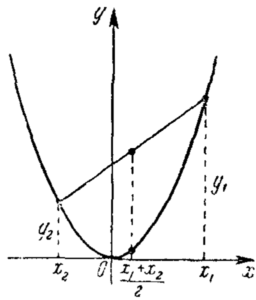

Рис. 79.

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=$$

$$=\frac{x_1^3+2x_1+x_2^3+2x_2}{2}-\frac{(x_1+x_2)^3+8(x_1+x_2)}{8}=$$

$$=\frac{4(x_1^3+x_2^3)-(x_1+x_2)^3}{8}=\frac{(x_1+x_2)(3x_1^2+3x_2^2-6x_1x_2)}{8}=$$

$$=\frac{3}{8}(x_1+x_2)(x_1-x_2)^2.$$

Если $x>0$, то $x_1+x_2>0$, и рассматриваемая разность положительна. Если же $x<0$, то $x_1+x_2<0$, и рассматриваемая разность отрицательна.

Таким образом, при $x>0$ график вогнутый, а при $x<0$ — выпуклый (рис. 80).

54. Пусть x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента, причем x_1 и x_2 имеют один и тот же знак. Тогда

$$f(x_1)=x_1^3-4x_1,\quad f(x_2)=x_2^3-4x_2,$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{(x_1+x_2)^3-16(x_1+x_2)}{8}.$$

Имеем:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=$$

$$=\frac{x_1^3-4x_1+x_2^3-4x_2}{2}-\frac{(x_1+x_2)^3-16(x_1+x_2)}{8}=$$

$$=\frac{4(x_1^3+x_2^3)-16(x_1+x_2)-(x_1+x_2)^3+16(x_1+x_2)}{8}=$$

$$=\frac{3}{8}(x_1+x_2)(x_1-x_2)^2.$$

Если $x>0$, то $x_1+x_2>0$, т. е. рассматриваемая разность положительна, если же $x<0$, то рассматриваемая разность отрицательна.

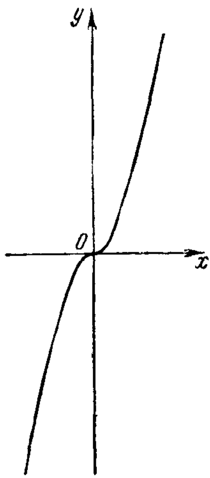

Рис. 80.

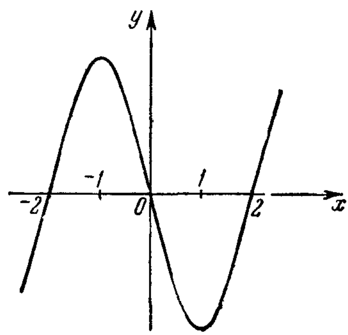

Рис 81

Итак, при $x>0$ график вогнутый, а при $x<0$ — выпуклый (рис. 81).

55. Пусть x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента x, отличные от нуля, причем x_1 и x_2 одного знака.

Итак,

$$f(x_1)=\frac{1}{x_1},\quad f(x_2)=\frac{1}{x_2},\qquad f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{1}{\frac{x_1+x_2}{2}}=\frac{2}{x_1+x_2}.$$

Рассмотрим соответствующую разность

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}{2}-\frac{2}{x_1+x_2}=$$

$$=\frac{x_1+x_2}{2x_1x_2}-\frac{2}{x_1+x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}{2x_1x_2(x_1+x_2)}=\frac{(x_1-x_2)^2}{2x_1x_2(x_1+x_2)}.$$

Если $x_1>0$ и $x_2>0$, то $x_1\cdot x_2>0$ и $x_1+x_2>0$, а поэтому рассматриваемая разность положительна. Если же $x_1<0$ и $x_2<0$, то $x_1x_2>0$, а $x_1+x_2<0$, и рассматриваемая разность отрицательна.

Таким образом, если $x>0$, то график вогнутый, а если $x<0$, то график выпуклый (рис. 82).

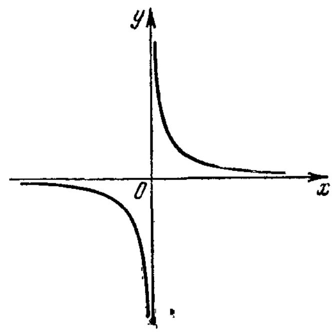

Рис. 82.

56. Пусть x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента, отличные от нуля, имеющие одинаковые знаки. Тогда

$$f(x_1)=\frac{1}{x_1^2},\quad f(x_2)=\frac{1}{x_2^2}$$

и

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{1}{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2}=\frac{4}{(x_1+x_2)^2}.$$

Рассмотрим разность

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

и установим ее знак

$$\frac{x_2^2+x_1^2}{2x_1^2x_2^2}-\frac{4}{(x_1+x_2)^2}=\frac{x_1^4+2x_1^3x_2+2x_1x_2^3+x_2^4-6x_1^2x_2^2}{2x_1^2x_2^2(x_1+x_2)^2}=$$

$$=\frac{(x_1^4-2x_1^2x_2^2+x_2^4)+2x_1^3x_2+2x_1x_2^3-4x_1^2x_2^2}{2x_1^2x_2^2(x_1+x_2)^2}=$$

$$=\frac{(x_1^2-x_2^2)^2+2x_1x_2(x_1^2-2x_1x_2+x_2^2)}{2x_1^2x_2^2(x_1+x_2)^2}=\frac{(x_1^2-x_2^2)^2+2x_1x_2(x_1-x_2)^2}{2x_1^2x_2^2(x_1+x_2)^2}=$$

$$=\frac{(x_1-x_2)^2(x_1^2+4x_1x_2+x_2^2)}{2x_1^2x_2^2(x_1+x_2)^2}>0,$$

если $x_1>0$ и $x_2>0$, а также если $x_1<0$ и $x_2<0$.

Итак, график функции вогнут как при $x>0$, так и при $x<0$ (рис. 83).

57. Пусть x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента x. Тогда

$$f(x_1)=a^{x_1},\quad f(x_2)=a^{x_2},\quad f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=a^{\frac{x_1+x_2}{2}}.$$

Рассмотрим разность

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

и установим ее знак

$$\frac{a^{x_1}+a^{x_2}}{2}-a^{\frac{x_1+x_2}{2}}=\frac{a^{x_1}+a^{x_2}-2a^{\frac{x_1+x_2}{2}}}{2}=\frac{\left(a^{\frac{x_1}{2}}-a^{\frac{x_2}{2}}\right)^2}{2}>0.$$

Следовательно, график функции вогнутый (рис. 84).

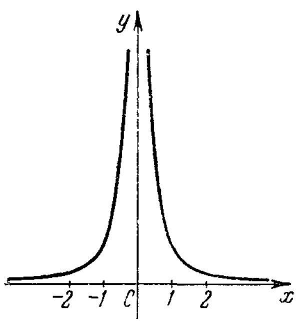

Рис. 83.

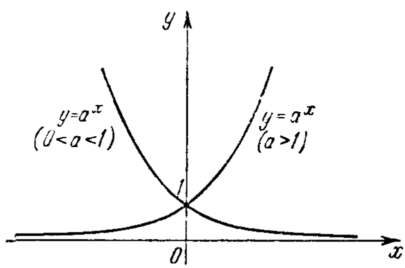

Рис. 84.

58. Пусть x_1 и x_2 — произвольные (положительные) значения аргумента x. Тогда

$$\log_a x_1+\log_a x_2=\log_a x_1x_2,$$

или

$$\frac{\log_a x_1+\log_a x_2}{2}=\log_a \sqrt{x_1x_2}. \qquad (1)$$

Известно, что $\sqrt{x_1x_2}<\frac{x_1+x_2}{2}$, если $x_1\neq x_2$ и $x_1>0$, $x_2>0$. Функция $\log_a x$ возрастает, если $a>1$, и убывает, если $0<a<1$. Поэтому

$$\log_a\frac{x_1+x_2}{2}>\log_a\sqrt{x_1x_2},\quad \text{если}\quad a>1,$$

и

$$\log_a \frac{x_1+x_2}{2} < \log_a \sqrt{x_1 x_2}, \quad \text{если } 0 < a < 1.$$

Заменяя правую часть равенства (1) выражением $\log_a \frac{x_1+x_2}{2}$, получаем:

$$\frac{\log_a x_1 + \log_a x_2}{2} < \log_a \frac{x_1+x_2}{2}, \quad \text{если } a > 1,$$

и

$$\frac{\log_a x_1 + \log_a x_2}{2} > \log_a \frac{x_1+x_2}{2}, \quad \text{если } 0 < a < 1.$$

Итак, если $a > 1$, то график данной функции выпуклый, а если $0 < a < 1$ — вогнутый (рис. 85).

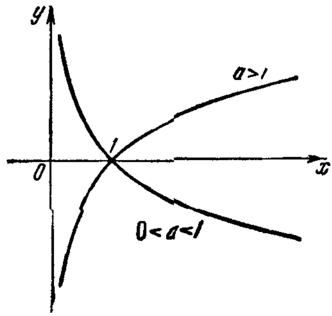

Рис 85.

59. Пусть x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента x, причем оба принадлежат промежутку $(0, \pi)$ или промежутку $(\pi, 2\pi)$. Имеем:

$$f(x_1) = \sin x_1, \quad f(x_2) = \sin x_2,$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \sin\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

Рассмотрим разность

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \frac{\sin x_1 + \sin x_2}{2} - \sin\frac{x_1+x_2}{2} =$$

$$= \sin\frac{x_1+x_2}{2}\cos\frac{x_1-x_2}{2} - \sin\frac{x_1+x_2}{2} = \sin\frac{x_1+x_2}{2}\left(\cos\frac{x_1-x_2}{2} - 1\right).$$

Поскольку $|\cos\alpha| \leqslant 1$, то выражение $\cos\frac{x_1-x_2}{2} - 1$ или отрицательно, или равно нулю. Так как $0 < x < 2\pi$, то $\cos\frac{x_1-x_2}{2} - 1 < 0$.

Если $0 < x_1 < \pi$, $0 < x_2 < \pi$, то и $0 < \frac{x_1+x_2}{2} < \pi$, а следовательно, $\sin\frac{x_1+x_2}{2} > 0$ Итак, если x_1 и x_2 принадлежат промежутку $(0, \pi)$, то произведение

$$\sin\frac{x_1+x_2}{2}\left(\cos\frac{x_1-x_2}{2} - 1\right) < 0,$$

т. е. рассматриваемая разность отрицательна. Таким образом, в интервале $(0, \pi)$ график функции выпуклый.

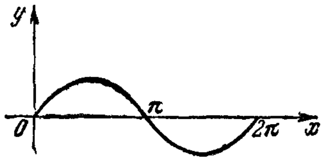

Рис. 86.

Если $\pi < x_1 < 2\pi$, $\pi < x_2 < 2\pi$, то и $\pi < \frac{x_1+x_2}{2} < 2\pi$, а следовательно, $\sin\frac{x_1+x_2}{2} < 0$ и произведение

$$\sin\frac{x_1+x_2}{2}\left(\cos\frac{x_1-x_2}{2}-1\right) > 0,$$

т. е. рассматриваемая разность положительна. Таким образом, в интервале $(\pi, 2\pi)$ график функции вогнутый (рис. 86).

§ 5. Периодичность функций

60. Так как $\sin 2\pi x = \sin(2\pi x + 2\pi) = \sin[2\pi(x+1)]$, то период равен 1.

Отв. Период равен 1.

61. Обозначим период функции через p, тогда

$$A\cos\lambda(x+p) + B\sin\lambda(x+p) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x,$$

$$A[\cos\lambda(x+p) - \cos\lambda x] + B[\sin\lambda(x+p) - \sin\lambda x] = 0,$$

$$-2A\sin\left(\lambda x + \frac{\lambda p}{2}\right)\sin\frac{\lambda p}{2} + 2B\cos\left(\lambda x + \frac{\lambda p}{2}\right)\sin\frac{\lambda p}{2} = 0,$$

$$\sin\frac{\lambda p}{2}\left[B\cos\left(\lambda x + \frac{\lambda p}{2}\right) - A\sin\left(\lambda x + \frac{\lambda p}{2}\right)\right] = 0.$$

Поскольку выражение в квадратных скобках не при всех значениях x равно нулю, то $\sin\frac{\lambda p}{2} = 0$ при любом значении x. Следовательно, $\frac{\lambda p}{2} = \pi$ или $p = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Отв. Период равен $\frac{2\pi}{\lambda}$.

62. Если период данной функции равен p, то имеет место равенство

$$\sin(ax+b) = \sin[a(x+p)+b].$$

На основании условий равенства двух синусов имеем:

1) $ax + ap + b + ax + b = \pi(2k+1)$,

2) $ax + ap + b - ax - b = 2\pi k$.

Из условия 1) находим:

$$p=\frac{\pi(2k+1)-2ax-2b}{a}.$$

Это p зависит от переменной x, а следовательно, не может быть периодом.

Из условия 2) получаем:

$$p=\frac{2\pi k}{a}.$$

Наименьшее положительное значение p равно $\frac{2\pi}{a}$ при $k=1$. Заметим, что число b не влияет на величину периода.

Отв. Период равен $\frac{2\pi}{a}$.

63*). Период функции $\operatorname{tg} 3x$ равен $\frac{\pi}{3}$, а период $\operatorname{ctg} 2x$ равен $\frac{\pi}{2}$; наименьшее кратное чисел $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{2}$ равно π, поэтому период функции y равен π.

Отв. Период равен π.

64. Имеем: $y=\frac{1}{2}2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\sin x\,\frac{1+\cos x}{2}=$ $=\frac{1}{4}\sin x+\frac{1}{4}\sin x\cos x=\frac{1}{4}\sin x+\frac{1}{8}\sin 2x$. Так как период $\sin x$ равен 2π, а период $\sin 2x$ равен π, то период функции y есть 2π.

Отв. Период равен 2π.

65. Имеем: $y=\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{1+\cos(2\pi+2x)}{2}=\frac{1+\cos 2(\pi+x)}{2}$.

Отв. Период равен π.

66. Имеем: $y=\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=$ $=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=1-\frac{1}{4}(1-\cos 4x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

Отв. Период равен $\frac{\pi}{2}$.

67. Имеем: $y=|\cos x|=\sqrt{\cos^2 x}=\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}$. Так как функция $\cos 2x$ имеет период π, то и функция y имеет период π.

Отв. Период равен π.

---

*) В примере 63 и в других наименьшим периодом является наименьшее кратное периодов слагаемых. В этом можно убедиться хотя бы графически. Но, например, для $y=\sin x+\sin(\pi+x)$ бессмысленно говорить о наименьшем периоде.

68. Функция $\operatorname{tg} x$ имеет период π; функция $\sin 3x$ имеет период $\frac{2\pi}{3}$, так как $\sin 3x = \sin(3x + 2\pi) = \sin\left[3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right]$, функция $\operatorname{tg} 2x$ имеет период $\frac{\pi}{2}$, так как $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(2x + \pi) = \operatorname{tg}\left[2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]$. Таким образом, период исследуемой функции 2π, поскольку наименьшее кратное чисел π, $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{2}$ равно 2π.

Отв. Период равен 2π.

69. Функция $\cos 2x$ имеет период π, так как $\cos 2x = \cos(2x + 2\pi) = \cos[2(x + \pi)]$; функция $\operatorname{tg} x$ имеет период π; функция $\sin 3x$ имеет период $\frac{2\pi}{3}$, так как $\sin 3x = \sin(3x + 2\pi) = \sin\left[3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right]$, и наконец, функция $\operatorname{cosec} 5x$ имеет период $\frac{2\pi}{5}$, так как $\operatorname{cosec} 5x = \operatorname{cosec}(5x + 2\pi) = \operatorname{cosec}\left[5\left(x + \frac{2\pi}{5}\right)\right]$.

Таким образом, исследуемая функция имеет период 2π, так как наименьшее кратное чисел π, $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{5}$ равно 2π.

Отв. Период равен 2π.

70. Известно, что $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, отсюда $\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$. Поскольку функция $3\sin x$ имеет период 2π, а функция $\sin 3x$ — период $\frac{2\pi}{3}$, то периодом исследуемой функции является 2π.

Отв. Период равен 2π.

71. Имеем: $\cos^4 x = \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) = \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{3}{2}\right)$.

Функция $\cos 2x$ имеет период π, а функция $\cos 4x$ — период $\frac{\pi}{2}$.

Поскольку наименьшее кратное чисел π и $\frac{\pi}{2}$ равно π, то период функции $\cos^4 x$ равен π. Но так как и функция $\operatorname{tg} x$ имеет период π, то и исследуемая функция имеет период π.

Отв. Период равен π.

72. Предположим, что функция $y = \cos x^2$ имеет период p, тогда $\cos(x + p)^2 = \cos x^2$ при любом значении переменной x. На основании условий равенства двух косинусов имеем:

1) $x^2+2px+p^2+x^2=2\pi k$

или

2) $x^2+2px+p^2-x^2=2\pi k$.

Из условия 1)

$$p=-x\pm\sqrt{-x^2+2\pi k},$$

а из условия 2)

$$p=-x\pm\sqrt{x^2+2\pi k},$$

т. е. в обоих случаях p зависит от переменной x, поэтому p не может быть периодом функции.

Отв. $\cos x^2$ не является периодической функцией.

73. Предположим, что y является периодической функцией с периодом T, тогда

$$x+T+\sin(x+T)=x+\sin x,$$

или

$$\sin(x+T)-\sin x=-T,$$

или

$$2\sin\frac{T}{2}\cos\left(x+\frac{T}{2}\right)=-T,$$

откуда

$$\cos\left(x+\frac{T}{2}\right)=-\frac{T}{2\sin\frac{T}{2}}.$$

Правая часть последнего равенства есть постоянная величина, а левая — является функцией x. Поэтому не существует числа T, при котором последнее равенство выполнялось бы при любом значении x.

Отв. Функция не является периодической.

74. Так как $\sin\sqrt{2}x=\sin(\sqrt{2}x+2\pi)$, а $\cos\sqrt{5}x=\cos(\sqrt{5}x+2\pi)$, то период функции $\sin\sqrt{2}x$ равен $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$, а период функции $\cos\sqrt{5}x$ равен $\frac{2\pi}{\sqrt{5}}$.

Если T — период функции $y=\sin\sqrt{2}x+\cos\sqrt{5}x$, то $\frac{T}{\frac{2\pi}{\sqrt{2}}}=k$ и $\frac{T}{\frac{2\pi}{\sqrt{5}}}=l$, где k и l — целые числа. Тогда

$$\frac{2k\pi}{\sqrt{2}}=\frac{2l\pi}{\sqrt{5}},\quad \text{или}\quad \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{l}{k},$$

что невозможно, поскольку $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ — иррациональное число, а $\dfrac{l}{k}$ — рациональное.

Итак, мы пришли к противоречию, допустив, что функция y имеет период T.

Отв. Функция не является периодической.

§ 6. Функции, связанные с линейной функцией

75. Из рис. 87 видно, что искомый отрезок является гипотенузой прямоугольного треугольника A_1A_2B. Следовательно, $d = \sqrt{A_1B^2 + A_2B^2}$. Но $A_1B = x_2 - x_1$, $A_2B = y_2 - y_1$, поэтому

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

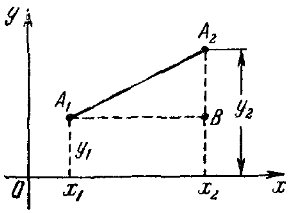

Рис. 87.

Эта формула имеет место при любом расположении точек A_1 и A_2 на координатной плоскости.

76. Если прямые l_1 и l_2 параллельны (рис. 88), то $\varphi_1 = \varphi_2$ и $\operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}\varphi_2$. Но $\operatorname{tg}\varphi_1 = k_1$ и $\operatorname{tg}\varphi_2 = k_2$, поэтому $k_1 = k_2$.

Верно и обратное утверждение: если угловые коэффициенты двух прямых равны, то прямые параллельны.

77. Пусть прямые l_1 и l_2 (рис. 89) образуют с положительным направлением оси абсцисс (считая от оси против часовой стрелки)

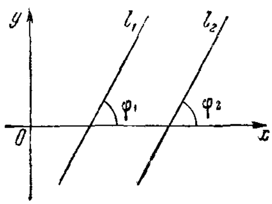

Рис. 88.

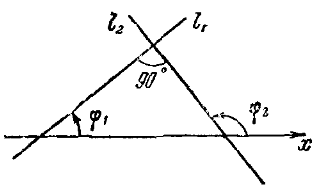

Рис 89

соответственно углы φ_1 и φ_2. Из рисунка видим, что угол φ_2 является внешним по отношению к треугольнику, образованному прямыми l_1, l_2 и осью абсцисс. Поэтому $\varphi_2 = 90° + \varphi_1$ и $k_2 = \operatorname{tg}\varphi_2 = \operatorname{tg}(90° + \varphi_1) = -\operatorname{ctg}\varphi_1 = -\dfrac{1}{\operatorname{tg}\varphi_1} = -\dfrac{1}{k_1}$. Итак,

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}.$$

78. Пусть прямая l_1 образует с положительным направлением оси абсцисс угол φ_1, а прямая l_2—угол φ_2 (рис. 90). Из рисунка видим, что $\varphi_2=\theta+\varphi_1$, отсюда $\theta=\varphi_2-\varphi_1$, а поэтому

$$\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{\operatorname{tg}\varphi_2-\operatorname{tg}\varphi_1}{1+\operatorname{tg}\varphi_1\operatorname{tg}\varphi_2}=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}.$$

79. Запишем уравнение искомой прямой в общем виде:

$$y=kx+b. \qquad (1)$$

Но эта прямая проходит через точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Следовательно,

$$y_1=kx_1+b, \quad y_2=kx_2+b.$$

Отсюда последовательно находим:

$$y_2-y_1=k(x_2-x_1), \quad k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, \quad b=y_1-kx_1.$$

Подставляя значения k и b в (1), получаем:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1),$$

или

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

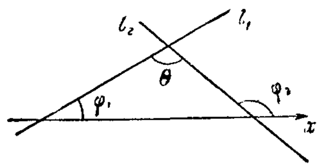

Рис. 90.

80. Пусть прямая имеет угловой коэффициент k. Тогда ее уравнение может быть записано в виде:

$$y=kx+b. \qquad (1)$$

Но эта прямая проходит через точку (x_1, y_1); следовательно, $y_1=kx_1+b$. Отсюда

$$k=\frac{y_1-b}{x_1}.$$

Подставляя значение k в (1), получаем:

$$y=\frac{y_1-b}{x_1}x+b, \quad \text{или} \quad \frac{y-b}{y_1-b}=\frac{x}{x_1},$$

где $x_1\neq 0$ и, следовательно, $y_1\neq b$.

81. Пусть прямая отсекает на оси ординат отрезок b. Тогда ее уравнение может быть записано в виде:

$$y=kx+b \qquad (1)$$

Но эта прямая проходит через точку (x_1, y_1), следовательно, $y_1=kx_1+b$. Откуда

$$b=y_1-kx_1.$$

Подставляя значение b в (1), получаем:

$$y = kx + y_1 - kx_1,$$

или

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

82. Это — частиый случай функции $y = kx$, когда $k = 1$, т. е. когда $\operatorname{tg}\varphi = 1$ и $\varphi = 45°$. Графиком данной функции является биссектриса первого и третьего координатных углов (рис. 91).

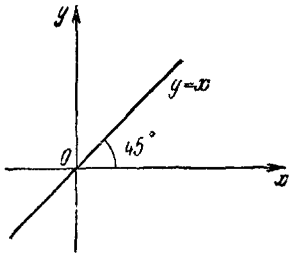

Рис. 91.

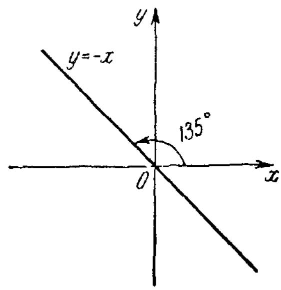

Рис. 92.

83. Это — частный случай функции $y = kx$, когда $k = -1$, т. е. $\operatorname{tg}\varphi = -1$ и $\varphi = 135°$. График — биссектриса второго и четвертого координатных углов (рис. 92).

84. Функция определена на всей числовой оси.

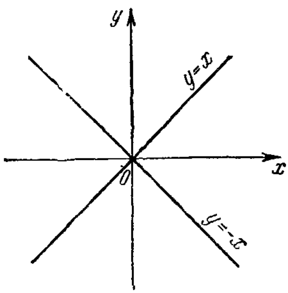

Рис. 93.

Представим даниую функцию в виде:

$$y^2 - x^2 = 0,$$

или

$$(y - x)(y + x) = 0.$$

Это уравнение разбивается на два

$$y = x \text{ и } y = -x.$$

Таким образом, график данной функции состоит из двух прямых — биссектрис координатных углов (рис. 93).

85. Это равенство означает, что при любом значении аргумента x функция равна нулю. Этим свойством обладают только точки, принадлежащие оси абсцисс. Итак, графиком данной функции является ось абсцисс.

86. Это равенство означает, что $x = 0$ при любом значении переменной y. Таким свойством обладают только точки, принадлежащие оси ординат. Таким образом, графиком зависимости $x = 0$ является ось ординат.

87. Это равенство надо понимать так: каково бы ни было значение x, функция y всегда принимает одно и то же значение, равное трем. Таким образом, графиком функции $y=3$ является прямая, параллельная оси абсцисс и отстоящая от нее на расстояние, равное трем единицам (рис. 94).

88. Это равенство надо понимать так: x принимает одно и то же значение, равное двум, при любом значении переменной y.

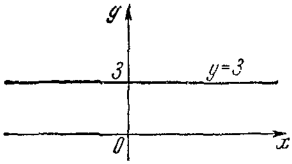

Рис. 94

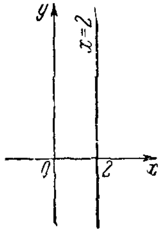

Рис 95.

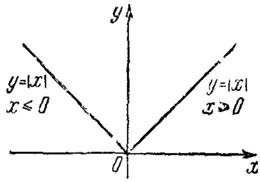

Рис. 96.

Таким образом, графиком зависимости $x=2$ является прямая, параллельная оси ординат и отстоящая от нее на расстояние, равное двум единицам (рис. 95).

89. Это уравнение распадается на два:

если $x \geqslant 0$, то $y=x$, а если $x \leqslant 0$, то $y=-x$. График изображен на рис. 96.

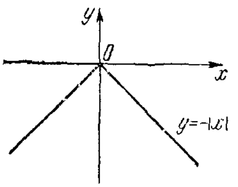

Рис 97.

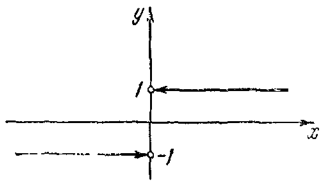

Рис. 98.

90. Это уравнение разбивается на два: если $x \geqslant 0$, то $y=-x$, если же $x \leqslant 0$, то $y=x$. График изображен на рис. 97.

91. Функция определена для всех действительных значений x, кроме $x=0$. Уравнение $y=\frac{|x|}{x}$ распадается на два: если $x>0$, то $y=\frac{x}{x}=1$, а если $x<0$, то $y=\frac{-x}{x}=-1$. График показан на рис. 98.

92. Область определения находим из неравенства $x-1 \geqslant 0$, так как $|y|$ — неотрицательная величина. Таким образом, функция определена при $x \geqslant 1$. Данное уравнение разбивается на два: если

$y \geqslant 0$, то $y = x - 1$, если же $y \leqslant 0$, то $y = -x + 1$. Отсюда и построение (рис 99).

93. Если $x \geqslant 0$, то $y = x$. Следовательно, график есть биссектриса первого координатного угла. Если же $x \leqslant 0$, то $y = 0$, а график есть отрицательная полуось абсцисс. Весь график показан на рис. 100 жирной линией.

94. При $x = 2$ функция не определена. Если $x > 2$, то $y = \frac{(x-1)(x-2)}{x-2} = x - 1$, а если $x < 2$, то $y = \frac{(x-1)(x-2)}{-(x-2)} = -x + 1$.

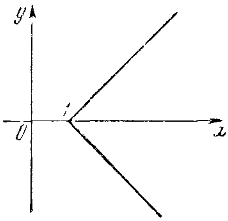

Рис. 99.

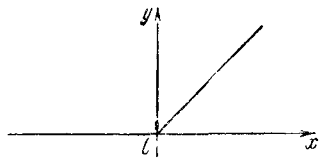

Рис. 100.

Таким образом, при $x > 2$ графиком функции служит часть прямой $y = x - 1$, расположенная правее прямой $x = 2$, а при $x < 2$ — часть прямой $y = -x + 1$, расположенная левее прямой $x = 2$. В обоих случаях точка $x = 2$ исключается График показан на рис. 101 сплошными линиями.

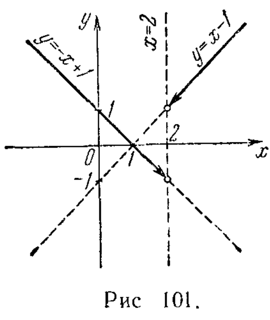

Рис 101.

95. Имеем: $y = \sqrt{(x+2)^2} + \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x-3)^2}$,

или

$$y = |x+2| + |x-1| + |x-3|.$$

1) Если $x \leqslant -2$, то $x + 2 \leqslant 0$, $x - 1 < 0$, $x - 3 < 0$. Следовательно,

$$|x+2| = -(x+2) = -x-2,$$
$$|x-1| = -(x-1) = -x+1,$$
$$|x-3| = -(x-3) = -x+3,$$

а потому

$$y = -x-2-x+1-x+3 = -3x+2$$

2) Если $-2 \leqslant x \leqslant 1$, то $x + 2 \geqslant 0$, $x - 1 \leqslant 0$, $x - 3 < 0$. Следовательно,

$$y = x+2-x+1-x+3 = -x+6$$

3) Если $1 \leqslant x \leqslant 3$, то $x + 2 > 0$, $x - 1 \geqslant 0$, $x - 3 \leqslant 0$. Следовательно,

$$y = x+2+x-1-x+3 = x+4.$$

4) Если $x \geqslant 3$, то $x+2>0$, $x-1>0$, $x-3 \geqslant 0$. Следовательно,

$$y = x+2+x-1+x-3 = 3x-2$$

Итак,

$$y = \begin{cases} -3x+2 \text{ при } & x \leqslant -2, \\ -\ x+6 \text{ при } & -2 \leqslant x \leqslant 1, \\ x+4 \text{ при } & 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ 3x-2 \text{ при } & x \geqslant 3. \end{cases}$$

Теперь легко построить график данной функции (рис. 102).

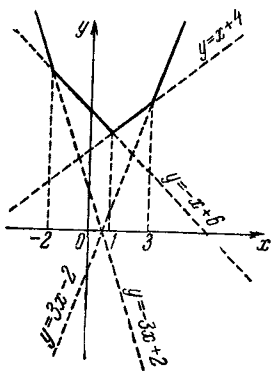

Рис. 102.

96. Функция четная, поэтому достаточно построить правую часть графика, а левая часть получится зеркальным отражением правой относительно оси ординат.

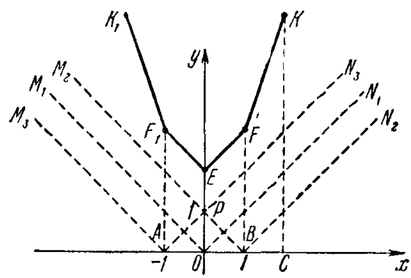

Рис. 103.

Строим:

$$\begin{array}{ll} y_1 = |x| & (\text{луч } ON_1), \\ y_2 = |x-1| & (\text{луч } BN_2), \\ y_3 = |x+1| & (\text{луч } PN_3) \end{array}$$

Складывая ординаты этих лучей, соответствующие абсциссам точек O, B, C, получаем точки E, F, K искомого графика.

Так как сумма линейных функций есть линейная функция, то правая часть графика есть ломаная EFK. Весь график — ломаная K_1F_1EFK (рис. 103).

97. Рассуждая, как в задаче 95, имеем:

$$y = \begin{cases} -1, \text{ если } x < -1, \\ x, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, \text{ если } x > 1. \end{cases}$$

График показан на рис. 104.

98. Рассуждая, как в задаче 95, получим:

$$y=\begin{cases} -x, \text{ если } & x<-1, \\ 1, \text{ если } & -1\leqslant x\leqslant 1, \\ x, \text{ если } & x>1. \end{cases}$$

График представлен на рис. 105.

99. Поскольку $|-x|=|x|$, то функция четная. Следовательно, график симметричен относительно оси ординат. Так как $|-y|=|y|$, то график функции также симметричен относительно оси абсцисс.

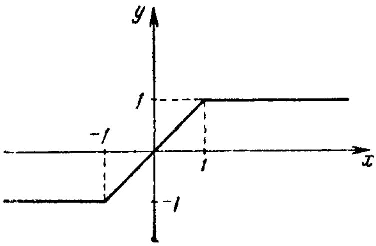

Рис. 104.

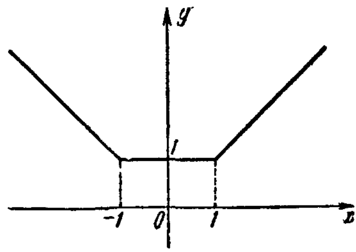

Рис. 105.

Такнм образом, достаточно рассмотреть функцию для $x\geqslant 0$ и $y\geqslant 0$, т. е. в первом квадранте. В этом случае заданная зависимость принимает вид $x+y=1$. График последней есть прямая, проходящая через точки (1, 0) и (0, 1). Часть этой прямой, иаходящаяся в первом квадранте, прииадлежит искомому графику. В остальных трех квадрантах график достраивается симметрично отиосительно обеих осей координат (рис. 106).

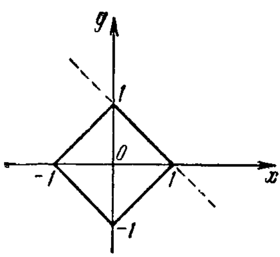

Рис. 106.

100. Все точки плоскости, лежащие левее прямой $x=-1$, включая точки этой прямой (рис. 107).

101. Все точки плоскости, лежащие правее прямой $x=1$ (рис. 108).

102. Все точки плоскости, лежащие выше прямой $y=2$ или ниже прямой $y=-2$ (рис. 109).

103. Все точки заключены внутри полосы, образованной прямыми $y=2$ и $y=-2$ (рис. 110).

104. Все точки плоскости, расположенные выше прямой $y=-x-2$, включая точки этой прямой (рис. 111).

105. Данное неравенство равносильно неравенству $y^2<x^2$ или $|y|<|x|$. Следовательно, точки расположены в правом и левом вертикальных углах, образованных прямыми $y=x$ и $y=-x$ (рис. 112).

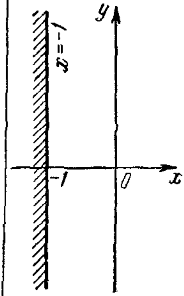

Рис. 107.

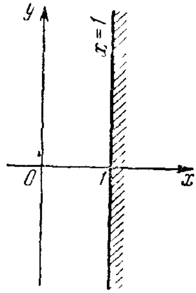

Рис. 108.

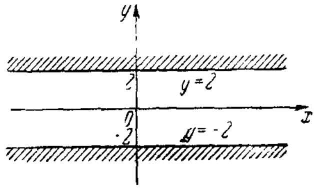

Рис. 109.

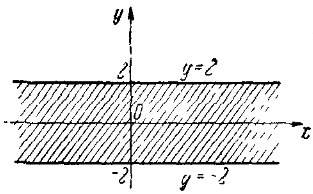

Рис. 110.

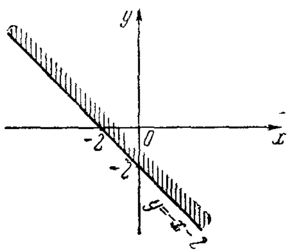

Рис. 111.

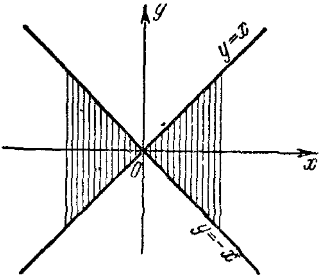

Рис. 112.

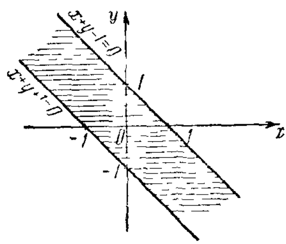

Рис. 113.

106. Заданное неравенство равносильно неравенству

$$-1 \leqslant x+y \leqslant 1.$$

Поэтому точки расположены выше прямой $x+y+1=0$ и ниже прямой $x+y-1=0$, включая эти прямые, т. е. в полосе, заключенной между этими прямыми, включая и сами прямые (рис. 113).

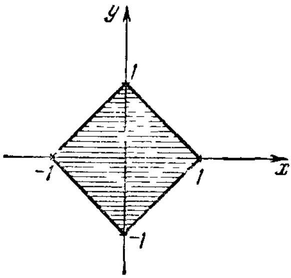

Рис. 114.

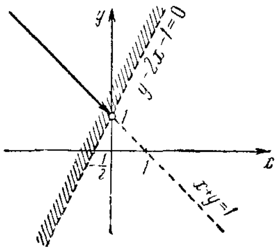

Рис. 115.

107. Все точки расположены внутри квадрата, образованного прямыми $x+y+1=0$, $y+x-1=0$, $x-y+1=0$ и $x-y-1=0$ (рис. 114).

108. Искомые точки должны находиться выше прямой $y-2x-1=0$ и одновременно принадлежать прямой $x+y=1$. Следовательно, искомые точки представляют полупрямую (часть прямой $x+y=1$), исходящую из точки (0, 1) и лежащую выше прямой $y-2x-1=$ $=0$ (рис. 115). Точка (0, 1) не принадлежит искомому множеству.

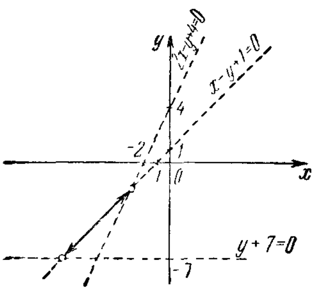

Рис. 116

109. Искомые точки должны находиться выше прямых $2x-y+4=0$ и $y+7=0$ и одновременно должны принадлежать прямой $x-y+1=0$. Следовательно, искомые точки — отрезок прямой $x-y+1=0$, концами которого являются точки пересечения прямых:

1) $x-y+1=0$ и $2x-y+4=0$;
2) $x-y+1=0$ и $y+7=0$.

Концы отрезка не принадлежат искомому множеству точек (рис. 116).

110. Искомые точки находятся в первом квадранте ниже прямой $y+x=1$, т. е. во внутренней области прямоугольного равнобедренного треугольника, у которого вершина прямого угла совпадает с началом координат, а катеты равны единице (рис. 117).

Заметим, что контур треугольника не принадлежит искомому множеству точек.

111. Точки расположены выше прямой $x+y=-1$ и одновременно ниже прямой $y-2x=1$ (рис. 118).

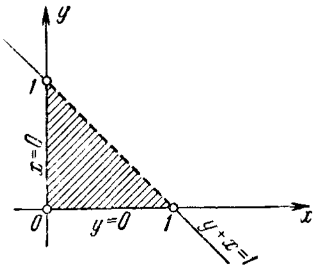

Рис. 117

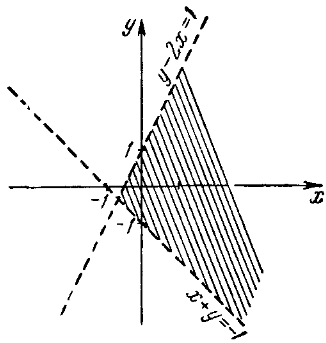

Рис. 118.

112. Искомые точки должны принадлежать прямой $y=x-4$ и одновременно должны быть расположены ниже прямой $y=2$ и правее прямой $x=2$.

Следовательно, искомые точки представляют отрезок AB, лежащий на прямой $y=x-4$ и упирающийся своими концами в прямые $x=2$ и $y=2$ (рис. 119). Концы отрезка AB не принадлежат искомому множеству точек.

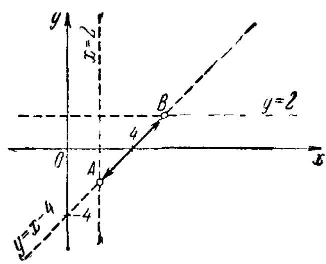

Рис. 119.

113. Вначале заметим, что на осях координат нет точек, координаты которых удовлетворяли бы данному уравнению.

Действительно, любая точка оси ординат имеет абсциссу $x=0$, а при $x=0$ теряет смысл $\frac{|x|}{x}$; любая точка оси абсцисс имеет ординату $y=0$, а при $y=0$ теряет смысл $\frac{|y|}{y}$. Рассмотрим точки, расположенные в каждом из четырех квадрантов. Пусть P — произвольная точка первого квадрата, т. е. $x>0$ и $y>0$.

Тогда

$$\frac{x}{x}+\frac{y}{y}=2, \quad \text{или} \quad 2=2.$$

Итак, координаты любой точки первого квадранта (исключая точки осей координат) удовлетворяют данному уравнению.

Если P принадлежит второму квадранту, т. е. $x < 0$, $y > 0$, то

$$-\frac{x}{x}+\frac{y}{y}=-1+1=0 \neq 2.$$

Следовательно, во втором квадранте нет искомых точек.

Если P принадлежит третьему квадранту, т. е. $x < 0$, $y < 0$, то

$$-\frac{x}{x}+\frac{-y}{y}=-2 \neq 2.$$

Следовательно, в третьем квадранте нет искомых точек.

Наконец, если точка P принадлежит четвертому квадранту, т. е. $x > 0$, $y < 0$, то имеем:

$$\frac{x}{x}+\frac{-y}{y}=1-1=0 \neq 2.$$

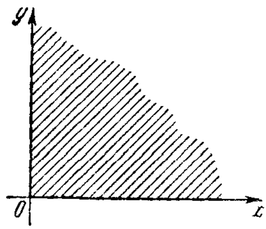

Рис. 120.

Следовательно, и в четвертом квадранте нет точек, координаты которых удовлетворяют данному уравнению.

График функции показан на рис. 120.

§ 7. Квадратичные функции

114. Функция определена для любых значений x. Корнями функции являются числа $\frac{1}{2}$ и -1, т. е. график (парабола) пересекает ось абсцисс в точках $\frac{1}{2}$ и -1. Если $x=0$, то $y=-1$, следовательно, график пересекает ось ординат в точке $(0, -1)$. Ветви параболы направлены вверх, так как $a=2>0$. Координаты вершины параболы:

$$x_0=-\frac{1}{2\cdot 2}=-\frac{1}{4}, \qquad y_0=\frac{4\cdot 2(-1)-1^2}{4\cdot 2}=-\frac{9}{8}.$$

Осью симметрии является прямая $x=-\frac{1}{4}$. Для уточнения графика определим еще одну точку: если $x=1$, то $y=2$.

С изменением аргумента от $-\infty$ до $-\frac{1}{4}$ функция убывает от $+\infty$ до $-\frac{9}{8}$, а с изменением аргумента от $-\frac{1}{4}$ до $+\infty$ функция возрастает от $-\frac{9}{8}$ до $+\infty$. График функции показан на рис. 121.

115. Функции определена дли любых значений x. Корнями (нулями) функции ивлиются числа $\frac{3}{2}$ и -2, т. е. график (парабола) фуикции пересекает ось абсцисс в точках -2 и $\frac{3}{2}$. Если $x=0$, то $y=6$, т. е. графнк пересекает ось ординат в точке $(0,\ 6)$. Ветви параболы иаправлены вниз, так как $a=-2<0$. Координаты вершииы параболы:

$$x_0=-\frac{-1}{2\cdot(-2)}=-\frac{1}{4},\qquad y_0=\frac{4\cdot(-2)\cdot 6-(-1)^2}{4(-2)}=\frac{49}{8}.$$

Отсюда заключаем, что с изменением аргумеита от $-\infty$ до $-\frac{1}{4}$ функция возрастает от $-\infty$ до $\frac{49}{8}$, а с изменением аргумента от $-\frac{1}{4}$ до $+\infty$ функция убывает от $\frac{49}{8}$ до $-\infty$. Осью симметрии

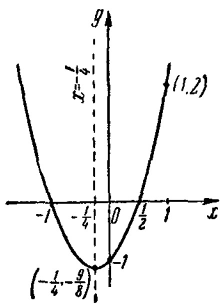

Рис. 121.

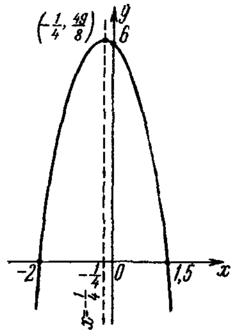

Рис. 122.

графика является прямая $x=-\frac{1}{4}$. Для уточнения графика определим еще одну точку: если $x=1$, то $y=3$. График функции дан на рис. 122.

116. Функция определена на всей числовой оси. Так как $|-y|=|y|$ и $|-x|^2=x^2$, то график симметричен относительно обеих осей координат.

Если $y\geqslant 0$, то $y=x^2$, и график функции есть парабола, вершина которой находится в начале координат, а ветви направлены вверх.

Если же $y\leqslant 0$, то $y=-x^2$ и график симметричен графику функции $y=x^2$ относительно оси абсцисс.

Таким образом, график данной функции состоит из двух парабол $y=x^2$ и $y=-x^2$ (рис. 123).

117. Заданная зависимость четиа как относительно переменной x, так и относительно переменной y. Поэтому ее график симметричен относительно обеих осей координат.

Так как $|y| \geqslant 0$, то область определения находим из неравенства $4-x^2 \geqslant 0$, т. е. $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Таким образом, функция определена на сегменте $[-2, +2]$.

Вначале строим график функции $y=-x^2+4$. Так как числа -2 и 2 являются корнями этой функции, то ее график пересекает ось абсцисс в точках -2 и 2. Эта функция имеет максимум, равный 4 при $x=0$. Для уточнения графика найдем еще пару точек.

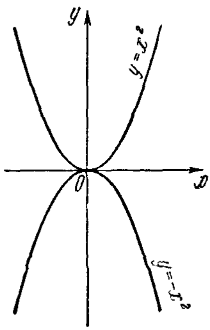

Рис. 123.

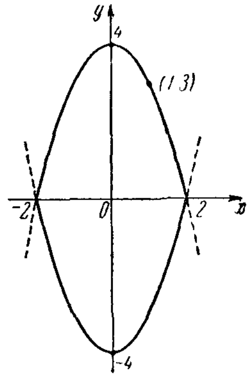

Рис. 124.

Если $x=\pm 1$, то $y=3$ (рис. 124). Часть этой параболы, расположенная выше оси абсцисс, прииадлежит графику функции $|y|=4-x^2$. Вторая часть графика, расположенная ниже оси абсцисс, симметрична верхней части относительно оси абсцисс. Весь график исследуемой зависимости показан на рис. 124 сплошной линией.

118. Поскольку $|-y|=|y|$, то график данной функции симметричен относительно оси абсцисс.

Область определения функции находим из иеравенства $x^2-2x-3 \geqslant 0$, так как $|y| \geqslant 0$. Кориими функции x^2-2x-3 являются числа -1 и 3. Поскольку коэффициент при x^2 положителеи и кории квадратиого трехчлена действительны, то должно быть $x \geqslant 3$ или $x \leqslant -1$. Таким образом, функция определеиа иа двух промежутках:

$$(-\infty, -1] \text{ и } [3, +\infty).$$

Сначала строим график функции $y_1=x^2-2x-3$. Ои пересекает ось абсцисс в точках -1 и 3. Так как при $x=0$ функция $y_1=-3$, то график пересекает ось ординат в точке -3. Координаты вершины параболы:

$$x_0=-\frac{-2}{2\cdot 1}=1,$$

$$y_0=1^2-2\cdot 1-3=-4.$$

Осью симметрии параболы служит прямая $x=1$. Ветви параболы направлены вверх, поскольку коэффициент при x^2 положителен. В силу изложенного легко построить график функции $y_1=x^2-2x-3$ (рис. 125). Частью графика заданной зависимости являются куски построенной параболы, расположенные в верхней полуплоскости. Для получения части графика, расположенной в нижней полуплоскости, отражаем верхнюю часть относительно оси абсцисс. Весь график заданной функции показан на рис. 125 сплошными линиями.

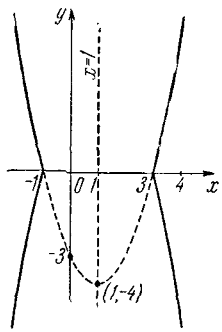

Рис. 125.

119. Поскольку $|-y|=|y|$ и $(-x)^2+|-x|-2=x^2+|x|-2$, то график функции симметричен относительно обеих осей координат. Поэтому достаточно построить часть графика, принадлежащую первому квадранту. Затем путем отражения этой части относительно оси ординат получим часть графика, расположенную во втором квадранте. Наконец, отражением уже построенных частей относительно оси абсцисс получаем ту часть графика, которая расположена под осью абсцисс.

В первом квадранте $y\geqslant 0$ и $x\geqslant 0$, т. е. функция имеет вид $y=x^2+x-2$, ее корнями (нулями) служат числа 1 и -2 (пока нас интересует только положительный корень).

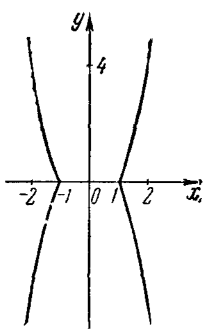

Рис. 126.

Если $x=2$, то $y=4$, а если $x=2{,}5$, то $y=6{,}75$. Этих данных достаточно для построения части графика, расположенной в первом квадранте. Весь график заданной функции показан на рис. 126.

120. Функция определена на всей числовой оси. Сначала строим график функции

$$y_1=x^2+x-2.$$

Нулями функции y_1 являются числа 1 и -2, т. е. график проходит через точки $(1,\ 0)$ и $(-2,\ 0)$.

Если $x=0$, то $y_1=-2$ $(y=2)$, т. е. график функции y_1 пересекает ось ординат в точке $(0,\ -2)$, а следовательно, график функции y пересекает ось ординат в точке $(0,\ 2)$. Координаты вершины параболы $y_1=x^2+x-2$:

$$x_0=-\frac{+1}{2\cdot 1}=-\frac{1}{2}\quad\left(\text{ось симметрии прямая } x=-\frac{1}{2}\right),$$

$$y_0=\frac{4\cdot 1\cdot(-2)-1^2}{4\cdot 1}=-\frac{9}{4}.$$

Ветви параболы направлены вверх, так как $a=1>0$. График функции $y_1=x^2+x-2$ построен (рис. 127).

Поскольку $y=|x^2+x-2|$, то ту часть графика функции y_1, которая расположена под осью абсцисс, отражаем относительно оси абсцисс (график функции y показан на рисунке сплошной линией).

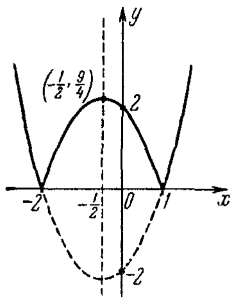

Рис. 127.

Таким образом, исследуемая функция имеет максимум, равный $\frac{9}{4}$ при $x=-\frac{1}{2}$. С изменением аргумента от $-\infty$ до -2 и от $-\frac{1}{2}$ до 1 функция убывает, а с изменением аргумента от -2 до $-\frac{1}{2}$ и от 1 до $+\infty$ функция возрастает.

121. Если $x \geqslant -1$, то $|x+1|=x+1$, и функция имеет вид $y=-x^2+1$ и ее график — парабола, проходящая через точки $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$. Часть этой параболы, расположенная правее точки $(-1, 0)$, является графиком данной функции при $x \geqslant -1$.

Если же $x < -1$, то $|x+1|=-(x+1)$, и функция имеет вид $y=x^2-1$. Ее график — парабола, проходящая через точки $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$. Часть этой параболы, расположенная левее точки $(-1, 0)$, является графиком данной функции при $x < -1$.

Весь график функции $y=(1-x)|x+1|$ показан на рис. 128 сплошной линией.

122. Поскольку $(-x)^2-2|-x|+1=x^2-2|x|+1=y$, то функция четная и график ее симметричен относительно оси ординат. Корнями функции являются числа 1 и -1, т. е. точки оси абсцисс 1 и -1 принадлежат графику. Так как при $x=0$ $y=1$, то график пересекает ось ординат в точке $(0, 1)$. При $x=-\frac{-2}{2}=1$ функция имеет минимум. В силу четности функция имеет минимум и при $x=-1$. При любых значениях x функция

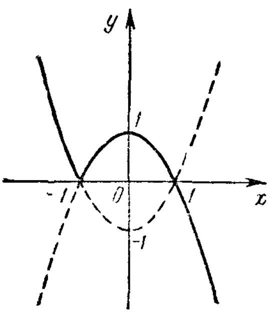

Рис. 128

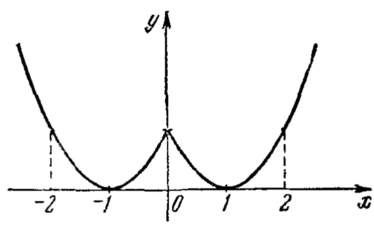

Рис. 129.

неотрицательна, так как $y=(|x|-1)^2$. График показан на рис. 129.

123. Поскольку $(-x)^2+|-x|=x^2+|x|=y$, то функция четная, а поэтому ее график симметричен относительно оси ординат. При любом значении x функция неотрицательна. График проходит через начало координат. Наименьшее значение функции равно нулю при $x=0$. На рис. 130 график показан сплошной линией.

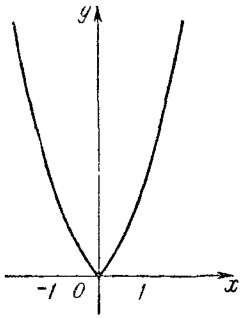

Рис. 130.

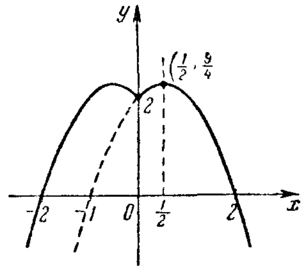

Рис. 131.

124. Так как $f(-x)=(1+|-x|)(2-|-x|)=(1+|x|)(2-|x|)=$ $=f(x)$, то функция $f(x)$ четная, а следовательно, график ее симметричен относительно оси ординат.

При $x \geqslant 0$ функция $y=(1+x)(2-x)$. Корнями этой функции являются числа -1 и 2. Координаты вершины параболы:

$$x_0=\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2},$$

$$y_0=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{4}.$$

При $x=0$ функция $y=2$. Часть параболы $y=(1+x)(2-x)$, расположенная правее оси ординат, составляет лишь часть графика данной функции. Другая часть (при $x<0$) симметрична первой относительно оси ординат.

Весь график показан сплошной линией на рис. 131.

125. Если $x \geqslant 0$, то $y=(x-1)(2-x)=-x^2+3x-2$. Корнями этой функции являются числа 1 и 2, т. е. график пересекает ось абсцисс в точках 1 и 2. Так как при $x=0$ $y=-2$, то парабола пересекает ось ординат в точке $(0, -2)$. Координаты вершины параболы:

$$x_0=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2},$$

$$y_0=\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(2-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$

Следовательно, осью параболы является прямая $x=\frac{3}{2}$.

Итак, график заданной функции при $x \geqslant 0$ есть часть этой параболы, расположенная правее оси ординат.

Если же $x < 0$, то $y = (x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$. Корнями этой функции являются числа 1 и -2. При $x = 0$ $y = -2$. Координаты вершины параболы:

$$x_0 = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$y_0 = \left(-\frac{1}{2} - 1\right)\left(-\frac{1}{2} + 2\right) = -\frac{9}{4}.$$

Итак, график заданной функции при $x < 0$ есть часть параболы $y^2 = x^2 + x - 2$, расположенная левее оси ординат. Весь график функции $y = (x-1)(2-|x|)$ показан на рис. 132 сплошной линией.

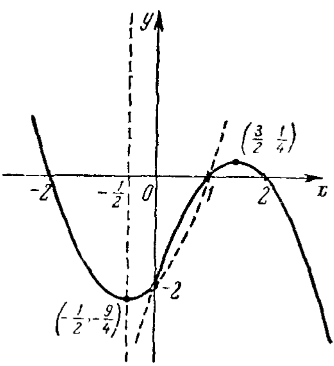

Рис 132.

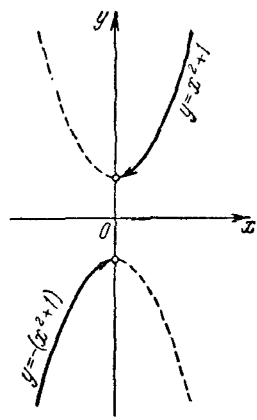

Рис. 133.

126. Функция определена на всей числовой оси, кроме нуля. Поскольку

$$\frac{(-x)^3 + (-x)}{|-x|} = -\frac{x^3 + x}{|x|} = -y,$$

то функция нечетная, и ее график симметричен относительно начала координат.

Если $x > 0$, то $|x| = x$ и $y = x^2 + 1$, а если $x < 0$, то $|x| = -x$ и $y = -(x^2 + 1)$.

Таким образом, при $x > 0$ графиком служит правая часть параболы $y = x^2 + 1$, а если $x < 0$, то — левая часть параболы $y = -(x^2 + 1)$. Заметим, что в том и другом случаях точки с абсциссой, равной нулю, исключаются. График показан на рис. 133 сплошными линиями.

127. Функция определена на всей числовой оси, кроме $x=1$. Если $x>1$, то $y=\frac{x^2}{2}$. Если же $x<1$, то $y=-\frac{x^2}{2}$. Функция имеет максимум, равный нулю, в точке 0. С изменением x от $-\infty$ до 0 функция возрастает от $-\infty$ до 0; с изменением x от 0 до $+1$ функция убывает от 0 до $-\frac{1}{2}$, а при изменении x от 1 до $+\infty$ функция возрастает от $\frac{1}{2}$ до $+\infty$. График показан на рис. 134 сплошной линией.

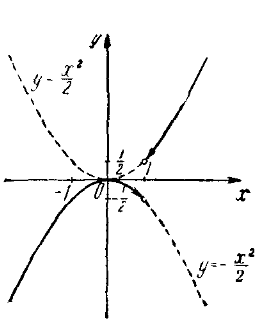

Рис. 134.

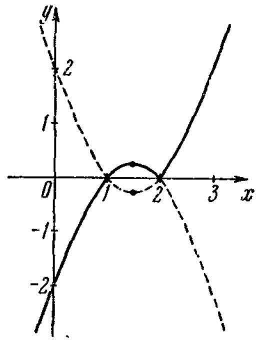

Рис. 135.

128. Если $x-2\geqslant 0$, то $y=(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$, а если $x-2\leqslant 0$, то $y=(x-1)(2-x)=-x^2+3x-2$.

Таким образом, если $x\geqslant 2$, то графиком функции служит часть параболы $y=x^2-3x+2$, а при $x\leqslant 2$ — часть параболы $y=-x^2+3x-2$. Координаты вершины параболы $y=x^2-3x+2$:

$$x_0=-\frac{-3}{2}=1,5, \qquad y_0=(1,5-1)(1,5-2)=-0,25.$$

Очевидно, что координатами вершины параболы $y=-(x^2-3x+2)$ являются числа 1,5 и 0,25.

Так как корнями данной функции служат числа 1 и 2, то график пересекает ось абсцисс в точках 1 и 2

График показан на рис. 135 сплошными линиями.

129. Так как $x^2\neq 1$, то областью определения функции являются три интервала: $(-\infty, -1)$, $(-1, +1)$, $(1, +\infty)$. Функция четная, следовательно, график симметричен относительно оси ординат.

Если $x^2-1>0$, т. е. $x>1$ или $x<-1$, то

$$y=x^2+1;$$

если $x^2-1<0$, т. е. $-1<x<1$, то

$$y=-(x^2+1).$$

Таким образом, в интервалах $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$ графиком являются части параболы $y=x^2+1$, а в интервале $(-1, 1)$ часть параболы $y=-(x^2+1)$. В том и другом случаях точки с абсциссами -1 и 1 исключаются. График исследуемой функции показан на рис. 136 сплошными лининями.

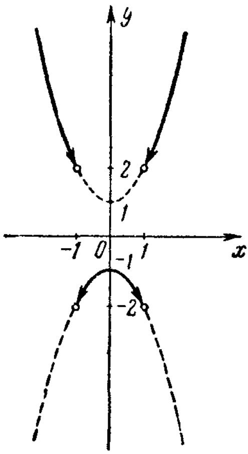

Рис. 136.

130. Если $x>1$, то $y=x+x(x-1)=x^2$. Поэтому график заданной функции при $x>1$ есть часть параболы $y=x^2$, расположенная правее прямой $x=1$. Если же $x\leqslant 1$, то

$$y=x+x(1-x)=-x^2+2x.$$

График заданной функции при $x\leqslant 1$ есть часть параболы $y=-x^2+2x$, расположенная левее прямой $x=1$, включая точку $(1, 1)$. Весь график фуикции $y=x+x\sqrt{(x-1)^2}$ изображен иа рис. 137 сплошной линией.

131. В первой четверти ($x>0$, $y>0$, $|x|=x$, $|y|=y$) данное уравнение имеет вид:

$$(x-1)^2+(y-1)^2=4.$$

Это — уравнение окружности с радиусом, равным 2, с центром в точке C_1 $(1, 1)$. Мы берем ту ее дугу, которая принадлежит первому квадранту.

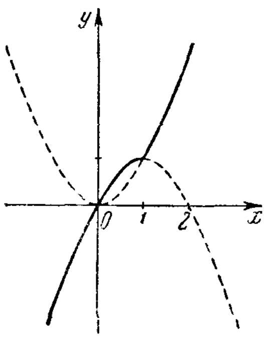

Рис. 137.

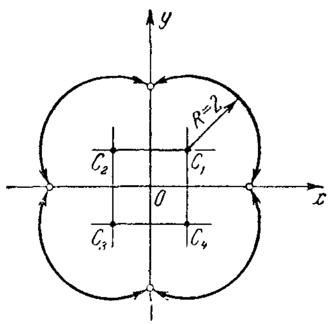

Рис 138.

Во второй четверти ($x<0$, $y>0$, $|x|=-x$, $|y|=y$) данное уравнение принимает вид:

$$(x+1)^2+(y-1)^2=4.$$

Это — уравнение окружности радиуса 2 с центром в точке C_2 $(-1, 1)$.

Для третьей и четвертой четвертей имеем соответственно уравнения:

$$(x+1)^2+(y+1)^2=4$$

и

$$(x-1)^2+(y+1)^2=4,$$

т. е. тоже уравнения окружностей радиуса 2 с центрами в точках C_3 $(-1, -1)$ и C_4 $(1, -1)$.

Наконец, заметим, что к найденным дугам не принадлежат точки осей координат, так как при $x=0$ или $y=0$ уравнение теряет смысл. График функции изображен на рис. 138.

§ 8. Функции третьей и четвертой степени

132. Область определения функции — вся числовая ось. График пересекает ось абсцисс в точке $x=-1$, так как при $x=-1$ функция $y=0$. График пересекает ось ординат в точке $(0, 1)$, так как при $x=0$ функция $y=1$. Так как функция $y=x^3$ нечетная, то ее график симметричен относительно начала координат. Поэтому график функции $y=(x+1)^3$ симметричен относительно точки $(-1, 0)$. График функции показан на рис. 139.

Вообще график заданной функции можно построить так: вначале строят кубическую параболу $y=x^3$, а потом сдвигают ее вдоль оси абсцисс на -1.

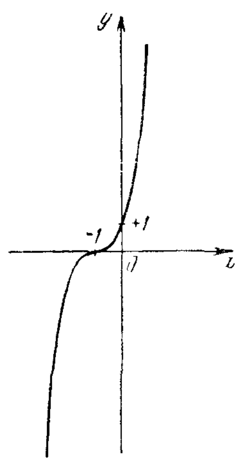

Рис. 139.

133. Функция определена на всей числовой оси. Так как $|(-x)^3|=|-x^3|=|x^3|=y$, то функция четная и ее график симметричен относительно оси ординат. Наименьшее значение (минимум) функции $y=0$ при $x=0$. Для уточнения графика определим еще две пары точек: если $x=\pm 1$, то $y=1$; если $x=\pm 2$, то $y=8$. График показан на рис. 140. Этот график можно было построить и так: строят $y=x^3$, а затем нижнюю часть графика отражают относительно оси абсцисс.

134. Функция определена при $x\geqslant 0$, так как $|y|\geqslant 0$. Если $y\geqslant 0$, то $y=x^3$, а если $y\leqslant 0$, то $y=-x^3$.

Таким образом, график расположен правее оси ординат и состоит из частей графиков функций $y=x^3$ и $y=-x^3$. График показан на рис. 141 сплошными линиями.

135. Функция определена на всей числовой оси. Функция y изменяется от 0 до $+\infty$, так как $|x|\geqslant 0$.

Таким образом, график расположен в верхней полуплоскости (над осью абсцисс) и состоит из частей графиков $x=y^3$ и $x=-y^3$. График показан на рис. 142 сплошными линиями.

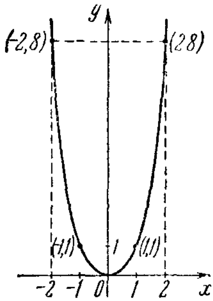

Рис. 140.

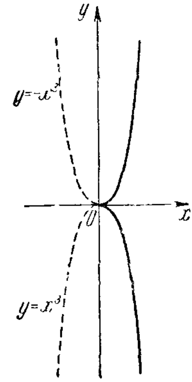

Рис. 141.

136. Представим исследуемую функцию так:

$$y=x^3-3x=x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}).$$

Ясно, что график функции пересекает ось абсцисс в точках $-\sqrt{3}$, 0, $\sqrt{3}$.

Рассматриваемая функция есть частный случай функции вида $y=x^3+kx$ (см. стр. 58).

Так как в исследуемой функции $k=-3<0$, то при $x=-1$ функция имеет максимум, равный 2, а при $x=1$ — минимум, равный -2. Таким образом, с изменением x от $-\infty$ до -1 и от 1 до $+\infty$ функция возрастает,

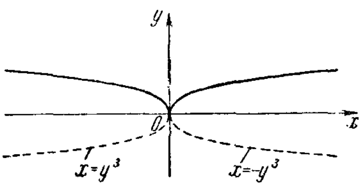

Рис. 142.

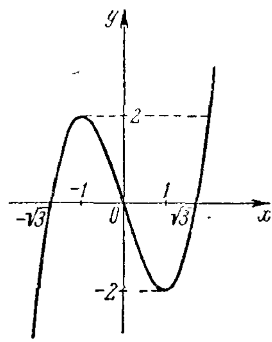

Рис. 143.

а с изменением x от -1 до $+1$ функция убывает. На основании изложенного строим график функции (рис. 143).

137. Построение графика заданной функции разобьем на три этапа.

1) Строим график функции $y_1 = x^3 - x$.

2) Строим график функции $y_2 = -y_1 = x - x^3$ путем отражения графика функции y_1 относительно оси абсцисс. Та часть графика функции y_2, которая расположена над осью абсцисс, принадлежит графику заданной функции.

3) Отражая уже построенную часть графика данной функции относительно оси абсцисс, получаем вторую часть графика (рис. 144). Вспомогательные графики на рисунке не показаны.

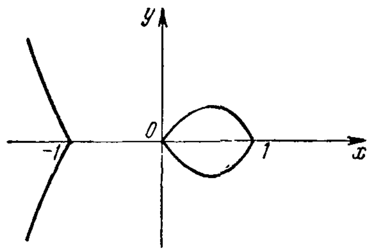

Рис. 144.

138. Нулями функции являются числа 0 и 1. При $x < 0$ и $0 < x < 1$ функция положительна, а при $x > 1$ функция отрицательна. Если $x = 0$, то и функция $y = 0$.

Поскольку вблизи точки 0 справа и слева функция положительна, то в точке 0 функция имеет минимум.

Найдем точку максимума. Для этого возьмем на графике левее точки O точку (x_0, y_0). Будем искать на графике еще точки с ординатами, равными y_0.

Так как точка (x_0, y_0) принадлежит графику функции, то имеет место равенство

$$y_0 = x_0^2 - x_0^3.$$

Значения x, которым соответствуют ординаты, равные y_0, определятся из уравнения

$$x^2 - x^3 = y_0,$$

или

$$x^2 - x^3 = x_0^2 - x_0^3,$$

или

$$(x^2 - x_0^2) - (x^3 - x_0^3) = 0.$$

Так как мы ищем значения x, отличные от x_0, то $x - x_0 \neq 0$, а следовательно, уравнение можно разделить на разность $x - x_0$. Итак, имеем:

$$x + x_0 - (x^2 + xx_0 + x_0^2) = 0,$$

или

$$x^2 - (1 - x_0)x + x_0^2 - x_0 = 0,$$

откуда

$$x_{1,2} = \frac{1 - x_0 \pm \sqrt{-3x_0^2 + 2x_0 + 1}}{2}.$$

В точке экстремума должно быть $x_1 = x_2$, поэтому необходимо, чтобы имело место равенство

$$3x_0^2 - 2x_0 - 1 = 0,$$

откуда

$$x_0' = 1, \quad x_0'' = -\frac{1}{3}.$$

Таким образом, $x_1 = 0$, $x_2 = +\frac{2}{3}$.

Соответствующие им значения функции суть $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{4}{27}$.

Итак,

$$y_{\max} = \frac{4}{27} \text{ при } x = \frac{2}{3},$$

а

$$y_{\min} = 0 \text{ при } x = 0.$$

С изменением аргумента от $-\infty$ до 0 и от $\frac{2}{3}$ до $+\infty$ функция убывает, а с изменением аргумента от 0 до $\frac{2}{3}$ функция возрастает. На основании изложенного нетрудно построить график (рис. 145).

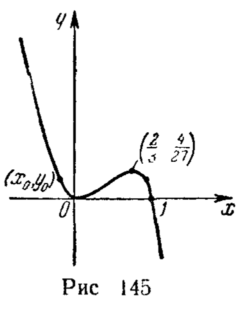

Рис 145

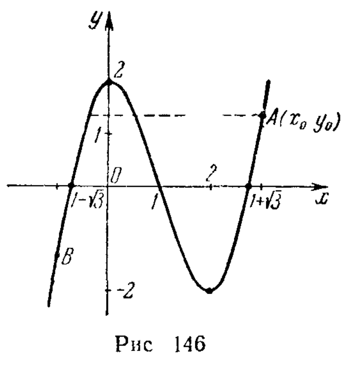

Рис 146

139. Имеем: $y = x^3 - 1 - 3x^2 + 3 = x^3 - 1 - 3(x^2 - 1) = (x - 1) \times$ $\times (x^2 - 2x - 2) = (x - 1)\left[x - (1 + \sqrt{3})\right]\left[x - (1 - \sqrt{3})\right]$. Следовательно, нулями функции являются числа 1, $1 + \sqrt{3}$ и $1 - \sqrt{3}$

В интервалах $(-\infty, 1 - \sqrt{3})$ и $(1, 1 + \sqrt{3})$ функция отрицательна, а в интервалах $(1 - \sqrt{3}, 1)$ и $(1 + \sqrt{3}, +\infty)$ — положительна.

Теперь можно построить схематичный график данной функции (рис. 146). Для уточнения графика найдем точки максимума и минимума.

Пусть координатами точки A, как показано на рисунке, являются числа x_0, y_0. Следовательно,

$$y_0 = x_0^3 - 3x_0^2 + 2.$$

Проведем через точку (x_0, y_0) прямую, параллельную оси x. Эта прямая может пересечь график еще в двух точках, иметь с графиком еще лишь одну общую точку (случай касания) или вообще не иметь больше общих точек с ним.

Будем искать те значения x, при которых эта прямая будет пересекать график. Эти значения определятся из уравнения

$$x^3 - 3x^2 + 2 = y_0,$$

или

$$x^3 - 3x^2 + 2 = x_0^3 - 3x_0^2 + 2,$$

или

$$x^3 - x_0^3 - 3\left(x^2 - x_0^2\right) = 0.$$

Поскольку мы ищем точки, абсциссы которых отличны от x_0, то $x - x_0 \neq 0$, поэтому последнее уравнение можно сократить на $x - x_0$:

$$x^2 + x_0 x + x_0^2 - 3x - 3x_0 = 0,$$

$$x^2 - (3 - x_0)\,x + x_0^2 - 3x_0 = 0,$$

откуда

$$x_{1,2} = \frac{3 - x_0 \pm \sqrt{-3x_0^2 + 6x_0 + 9}}{2}.$$

В точке экстремума должно быть $x_1 = x_2$, а потому необходимо, чтобы $-3x_0^2 + 6x_0 + 9 = 0$, откуда $x_0' = 3$, $x_0'' = -1$. Таким образом,

$$x_1 = \frac{3 - x_0'}{2} = \frac{3-3}{2} = 0,$$

$$x_2 = \frac{3+1}{2} = 2.$$

Значение $x_1 = 0$ получается, когда точка (x_0, y_0) есть A, а значение $x_2 = 2$, когда точка (x_0, y_0) есть B.

Если $x = 0$, то $y = 2$, а если $x = 2$, то $y = -2$.

Итак, график имеет максимум, равный 2, при $x = 0$, а минимум, равный -2, при $x = 2$.

С изменением x от $-\infty$ до 0 и от 2 до $+\infty$ функция возрастает, а с изменением x от 0 до 2 функция убывает.

140. Функция определена на всей числовой оси. Имеем:

$$y = x^2(x-1) - (x-1) = (x-1)^2(x+1).$$

Отсюда видно, что точки оси абсцисс 1 и -1 принадлежат графику. Ось y кривая пересекает в точке $(0, 1)$; при $x=2$ функция $y=3$, при $x=-\frac{3}{2}$ функция $y=-3\frac{1}{8}$. Так как график функции имеет с осью абсцисс только две общие точки 1 и -1 и $x=1$ является кратным корнем, то ясно, что функция имеет минимум, равный нулю, при $x=1$.

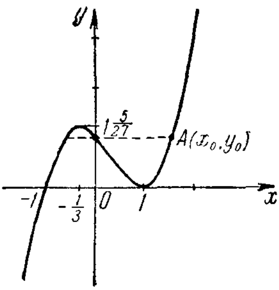

Рис. 147.

Пусть точка $A(x_0, y_0)$ также принадлежит графику (рис. 147). Если через точку A провести прямую, параллельную оси абсцисс, то она может не иметь с графиком больше ни одной точки или иметь с ним еще две общие точки или только одну.

Будем искать такие значения x_0, чтобы эта прямая имела с графиком хотя бы еще одну общую точку.

Так как точка (x_0, y_0) принадлежит графику, то

$$y_0 = x_0^3 - x_0^2 - x_0 + 1.$$

Если прямая пересекает график в точках, отличных от A, то эти точки также имеют ординаты, равные y_0, а абсциссы, отличные от x_0. Выразим эти абсциссы через x_0. Имеем:

$$x^3 - x^2 - x + 1 = y_0,$$

или

$$x^3 - x^2 - x + 1 = x_0^3 - x_0^2 - x_0 + 1,$$

или

$$\left(x^3 - x_0^3\right) - \left(x^2 - x_0^2\right) - (x - x_0) = 0.$$

Так как мы ищем значения x, отличные от x_0, то $x - x_0 \neq 0$, поэтому уравнение можно сократить на $x - x_0$. Итак,

$$x^2 + x_0 x + x_0^2 - x - x_0 - 1 = 0,$$

или

$$x^2 - (1 - x_0)\,x + x_0^2 - x_0 - 1 = 0,$$

откуда

$$x_{1,2} = \frac{1 - x_0 \pm \sqrt{-3x_0^2 + 2x_0 + 5}}{2}.$$

Для существования x необходимо, чтобы дискриминант был неотрицательным, т. е. $-3x_0^2 + 2x_0 + 5 \geqslant 0$, откуда

$$-1 \leqslant x_0 \leqslant \frac{5}{3}.$$

Таким образом, если x_0 удовлетворяет этим неравенствам, то рассматриваемая прямая имеет общие точки с графиком, отличные от A.

Функция достигает экстремума, если $x_0'=-1$ или $x_0''=\frac{5}{3}$.

Точка минимума:

$$x_1=\frac{1-x_0'}{2}=\frac{1+1}{2}=1.$$

Соответствующая ей ордината $y_{\min}=0$.

Выше мы определили минимум функции из других соображений.

Точка максимума:

$$x_2=\frac{1-x_0''}{2}=\frac{1-\frac{5}{3}}{2}=-\frac{1}{3}.$$

Соответствующая ей ордината $y_{\max}=1\frac{5}{27}$.

Очевидно, что в интервалах $\left(-\infty,\ -\frac{1}{3}\right)$ и $(1,\ +\infty)$ функция возрастает, а в интервале $\left(-\frac{1}{3},\ 1\right)$ функция убывает.

141. Имеем: $y=x^4-2x^2+1+1=(x^2-1)^2+1$. Функция четная, а следовательно, график ее симметричен относительно оси ординат.

Функция достигает минимума, равного 1, при $x=-1$ и при $x=1$. Так как $(x^2-1)^2\geqslant 0$, то $y=(x^2-1)^2+1\geqslant 1$, а следовательно, график расположен не ниже прямой $y=1$. При $x=0$ функция $y=2$.

Поскольку при $0\leqslant|x|\leqslant 1$ функция $x^4-2x^2\leqslant 0$, то данная функция достигает максимума, равного 2, при $x=0$. На основании изложенного заключаем, что в интервалах $(-\infty,\ -1)$ и $(0, 1)$ функция убывает, а в интервалах $(-1,\ 0)$ и $(1,\ +\infty)$ функция возрастает.

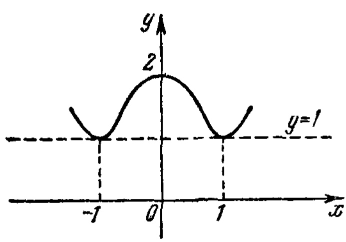

Рис. 148.

По полученным данным легко построить график функции (рис. 148).

142. Так как $|y|\geqslant 0$, то область определения функции находится из неравенства

$$x^4-4x^2\geqslant 0,$$

или

$$x^2(x^2-4)\geqslant 0.$$

Легко видеть, что это соотношение имеет место при $x=0$, или при $x\geqslant 2$, или при $x\leqslant -2$.

Таким образом, область определения состоит из двух промежутков $(-\infty, -2]$, $[2, +\infty)$ и изолированной точки нуль.

Поскольку

$$|-y|=|y| \text{ и } (-x)^4-4(-x)^2=x^4-4x^2,$$

то график функции симметричен как относительно оси абсцисс, так и относительно оси ординат.

Если $y>0$, то $y=x^4-4x^2$. Будем придавать аргументу x такие положительные значения, чтобы y был неотрицателен. Если $x=2$, то $y=0$; если $x=2{,}1$, то $y\approx 1{,}8$; если $x=2{,}5$, то $y\approx 14$.

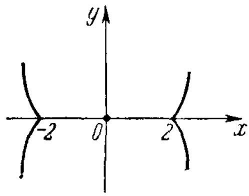

Рис. 149

Этих данных достаточно, чтобы построить ту часть графика, которая расположена в первом квадранте. Отразив эту часть графика относительно оси ординат, получим ту часть графика, которая расположена во втором квадранте. Наконец, отразив уже построенные части графика относительно оси абсцисс, получим остальные части графика.

Напомним, что к графику функции относится также изолированная точка (начало координат).

На рис. 149 дана лишь схема графика.

143. Зависимость четная как относительно x, так и относительно y, т. е. график симметричен относительно обеих осей координат, а следовательно, и относительно биссектрис координатных углов. Поэтому достаточно исследовать график для восьмой части плоскости, например для второй половины первого квадранта, т. е. для случая, когда

$$0\leqslant x\leqslant y. \qquad (1)$$

Учитывая условие (1), решим заданное уравнение относительно y:

$$y=\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}}.$$

Здесь оба радикала взяты в арифметическом смысле. Очевидно, что мы должны рассмотреть функцию при $x\leqslant 1$, так как при $x>1$ получаем:

$$\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}<\frac{1}{2},$$

а следовательно, $y<1$, что противоречит условию (1), т. е. $x\leqslant y$.

Ясно, что при возрастании x от 0 до 1 изменение y зависит от изменения выражения

$$z=\frac{1}{4}+x^2-x^4=\frac{1}{2}-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2.$$

Величина z не превышает $\frac{1}{2}$ и равна $\frac{1}{2}$ только при $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Таким образом, y не превышает $\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}$ и принимает наибольшее возможное значение только при $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Итак, при возрастании x от 0 до $\frac{\sqrt{2}}{2}$ величина $\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2$ убывает от $\frac{1}{4}$ до 0, значит z возрастает от $\frac{1}{4}$ до $\frac{1}{2}$, а y возрастает от 1 до $\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}$, при возрастании x от $\frac{\sqrt{2}}{2}$ до 1 выражение $\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2$ возрастает от 0 до $\frac{1}{4}$, следовательно, z убывает от $\frac{1}{2}$ до $\frac{1}{4}$, а y убывает от $\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}$ до 1.

Таким образом, при соблюдении условия (1) функция имеет минимум, равный 1, при $x=0$, и максимум, равный $\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}$ при $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Наконец, легко заметить, что

$$y=\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}}\leqslant x^2+1,$$

поэтому график функции в рассматриваемом промежутке не выше параболы $y=x^2+1$.

На основании изложенного легко построить график заданной зависимости. График заключен в квадрате, ограниченном прямыми

$$x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}$$

и

$$y=\pm\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}.$$

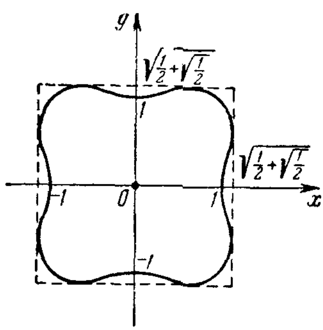

Рис 150

График состоит из замкнутой линии и изолированной точки (0,0), так как если $x=0$, то и $y=0$.

График показан на рис. 150.

§ 9. Дробно-рациональные функции

144. Так как $x \neq 2$, то функция определена в двух интервалах: $(-\infty, 2)$ и $(2, +\infty)$, а следовательио, график состоит из двух ветвей. Имеем:

$$y=\frac{1-2x}{x-2}=\frac{1-2x+3-3}{x-2}=\frac{-2(x-2)-3}{x-2}=\frac{3}{2-x}-2.$$

Ясио, что фуикция имеет две асимптоты: горизонтальную $y=-2$ и вертикальную $x=2$.

Если $x \to 2$ (оставаясь меньше 2), то $y \to +\infty$, а если $x \to -\infty$, то $y \to -2$ (оставаясь больше -2). График пересекает ось абсцисс в точке $\frac{1}{2}$, а ось ординат в точке $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$. Отсюда и построение левой ветви графика. Правая ветвь графика строится симметрично относительно точки пересечения асимптот $x=2$ и $y=-2$ (рис. 151).

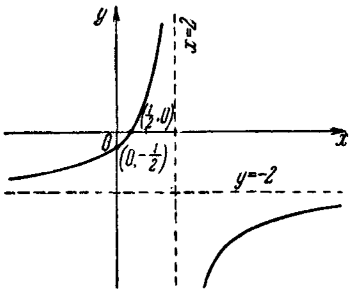

Рис. 151.

145. Функция определена на двух иитервалах: $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$, а следовательио, ее график состоит из двух ветвей. Функция четная, так как

$$\frac{1}{|-x|}=\frac{1}{|x|}=y.$$

Ее график симметрнчен относительно оси ординат.

Если $x=\pm 1$, то $y=1$, т. е. точки $(1, 1)$ и $(-1, 1)$ прииадлежат графику. Если $x \to \pm\infty$, то $y \to 0$ $(y>0)$; если $x \to 0$ (справа и слева), то $y \to +\infty$. Этих даиных достаточно, чтобы построить график функции (рис. 152).

146. Функция определеиа на двух иитервалах: $(-\infty, -1)$ и $(-1, +\infty)$, а следовательно, ее график состоит из двух ветвей. Горизонтальной асимптотой является ось абсцисс, а вертикальиой прямая $x=-1$. График симметричен относительно прямой $x=-1$. При $x=0$ $y=1$. Если $x \to -1$ справа, оставаясь больше чем -1, то функцня y неограниченно возрастает $(y \to +\infty)$, а при иеограииченном увеличеиии x $(x \to +\infty)$ фуикция y приближается к иулю. Отсюда и построеиие правой части графика (рнс. 153). Левая часть графика строится симметрично правой относительно прямой $x=-1$.

147. Так как $|y| \geqslant 0$ и $\frac{1}{x-1} \neq 0$, то $x-1>0$, т. е. областью определения фуикции является иитервал $(1, +\infty)$. График симметричен относительио осн абсцисс, так как $|-y|=|y|$.

Прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой графика. Если $x \to +\infty$, то $\frac{1}{x-1} \to 0$, т. е. ось абсцисс является горизон-

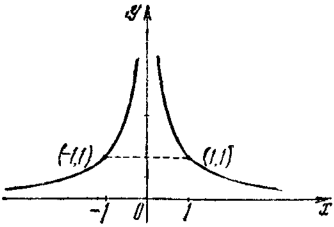

Рис. 152.

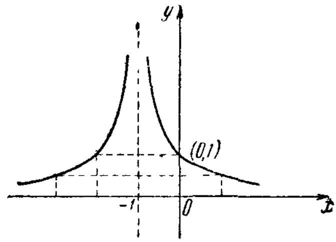

Рис. 153.

тальной асимптотой. Если $x \to 1$ справа, то $\frac{1}{x-1} \to +\infty$. Легко убедиться, что точка (2,1) принадлежит графику. В силу изложенного строим ветвь графика функции для случая $y > 0$. Для случая $y < 0$ получаем ветвь графика, симметричную ранее построенной, относительно оси абсцисс (рис. 154).

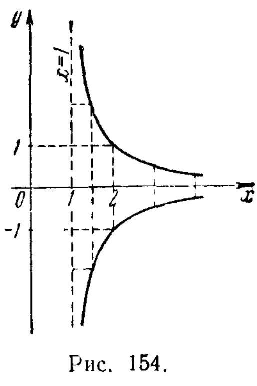

Рис. 154.

148. Поскольку $|-y| = |y|$, то график симметричен относительно оси абсцисс. Так как $|y| \geqslant 0$, то $\frac{x}{x-1} \geqslant 0$, или $x(x-1) \geqslant 0$. Но $x \neq 1$ и $x \neq 0$, поэтому $x(x-1) > 0$ при $x < 0$ или при $x > 1$.

Таким образом, функция определена на двух промежутках: $(-\infty, 0)$ и $(1, +\infty)$.

Так как $x \neq 1$, то прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой графика. Сначала построим ветвь графика, соответствующую $y > 0$, т. е. график функции $y_1 = \frac{x}{x-1}$.

Имеем:

$$y_1 = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}.$$

Отсюда заключаем, что прямая $y=1$ является горизонтальной асимптотой. Если $x=2$, то $y_1=2$, т. е. точка (2, 2) принадлежит графику функции. Если $x \to 1$ справа, то $y_1 \to +\infty$.

Если $x \to +\infty$, то $y_1 \to +1$ (оставаясь больше 1). Если $x \to -\infty$, то $y_1 \to +1$ (оставаясь меньше 1). Если $x \to 0$ слева, то $y_1 \to 0$ (оставаясь больше нуля).

Определим еще одну точку: если $x=-\frac{1}{2}$, то $y_1=\frac{1}{3}$.

Выше мы исследовали функцию $y_1=\frac{x}{x-1}$ только в области определения заданной функции. В силу изложенного легко построить график функции $y_1=\frac{x}{x-1}$ $(y>0)$. Для получения графика данной функции при $y<0$, т. е. графика функции $y_2=-\frac{x}{x-1}$, мы отражаем график функции $y_1=\frac{x}{x-1}$ $(y>0)$ относительно оси абсцисс. График заданной функции показан на рис. 155.

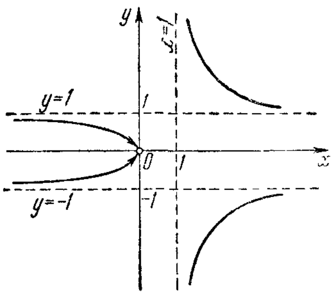

Рис 155.

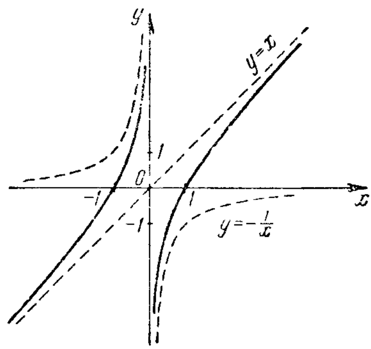

Рис. 156.

149. Так как $x\neq 0$, то функция определена в двух интервалах: $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$, а следовательно, график состоит из двух ветвей. Если $x=\pm 1$, то $y=0$, т. е. график пересекает ось абсцисс в точках 1 и -1.

Функция нечетная, так как $-x-\frac{1}{-x}=-y$.

Когда $x\to 0$ слева, то $y\to+\infty$, а если $x\to 0$ справа, то $y\to-\infty$.

Таким образом, ось ординат является вертикальной асимптотой.

Поскольку $y\to x$, если $x\to\pm\infty$, то прямая $y=x$ является наклонной асимптотой.

Так как функция нечетная, то ветви графика симметричны относительно начала координат.

График строится как сумма двух графиков $y_1=x$ и $y_2=-\frac{1}{x}$. Эти графики даны на рис. 156 пунктиром. График данной функции показан сплошными линиями.

150. Так как $x \neq \pm 1$, то функция определена на трех интервалах: $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ и $(1, +\infty)$, а прямые $x=1$ и $x=-1$ являются вертикальными асимптотами. Функция четная, так как $\frac{1}{|-x|-1}=\frac{1}{|x|-1}$; следовательно, график симметричен относительно оси ординат. Поскольку $y \to 0$, если $x \to \pm\infty$, то ось абсцисс является горизонтальной асимптотой. Если $x>1$ или $x<-1$, то $y>0$, а потому в интервалах $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$ ветви графика расположены над осью абсцисс. Если же $-1<x<1$, то $y<0$, а потому в интервале $(-1, 1)$ график расположен под осью абсцисс. Если $x \to 1$ справа или $x \to -1$ слева, то $y \to +\infty$. Если $x \to -1$ справа или $x \to 1$ слева, то $y \to -\infty$. Для уточнения графика заметим, что точки $(-2, 1)$ $\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$, $(0, -1)$, $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$, $(2, 1)$ принадлежит графику. График показан на рис. 157.

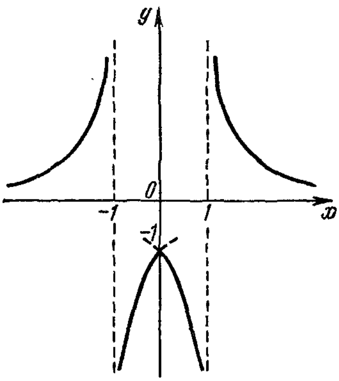

Рис. 157.

151. Функция определена на всей числовой оси.

Функция четная, так как

$$\frac{1}{|-x|+1}=\frac{1}{|x|+1}=y,$$

следовательно, график симметричен

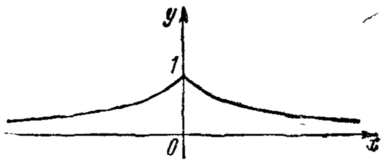

Рис. 158.

относительно оси ординат. Поскольку $|x|+1>0$ при любом значении x, то $y>0$, а следовательно, график расположен выше оси абсцисс.

Если $x \to \pm\infty$, то $y \to 0$. Отсюда заключаем, что ось абсцисс является асимптотой графика.

Если $x=0$, то $y=1$, т. е. точка $(0, 1)$ принадлежит графику. Если $x=\pm 1$, то $y=\frac{1}{2}$. График функции показан на рис. 158.

152. Область определения функции состоит из двух интервалов: $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. Поскольку $(-x)+\frac{4}{(-x)}=-\left(x+\frac{4}{x}\right)=$ $=-y$, то функция нечетная. Следовательно, достаточно построить график для $x>0$, а левая часть графика (для $x<0$) симметрична правой относительно начала координат.

Найдем точки максимума и минимума. Если $x>0$, то $x+\frac{4}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4$, т. е. минимум функции $x+\frac{4}{x}$ получим при x, равном положительному корню уравнения $x+\frac{4}{x}=4$, т. е. при $x=2$.

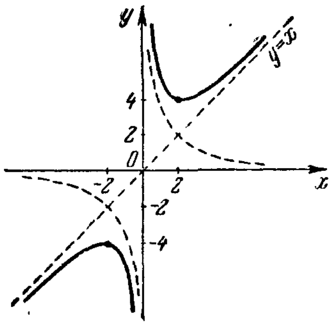

Рис. 159.

Итак, при $x=2$ функция достигает минимума $y=4$. В силу нечетности функции заключаем, что функция при $x=-2$ имеет максимум, равный -4.

График строится, как сумма графиков $y_1=x$ и $y_2=\frac{4}{x}$. Эти графики даны на рис. 159 пунктиром. Асимптотой графика является прямая $y=x$, так как при $x\to\pm\infty$ функция $y\to x$. График данной функции показан на рисунке сплошными линиями.

153. Областью определения функции является вся числовая ось, кроме $x=0$. Следовательно, график имеет две ветви.

Если $x>0$, то $y=x+\frac{1}{x}$, а если $x<0$, то $y=\frac{1}{x}-x$. В интервале $(0,+\infty)$ функция имеет минимум, равный 2, при $x=1$. Если $x\to 0$ справа, то $y\to+\infty$, а если $x\to+\infty$, то $y\to+\infty$. Асимптотами правой части графика являются ось ординат и прямая $y=x$, так как $y\to x$, если $x\to\infty$.

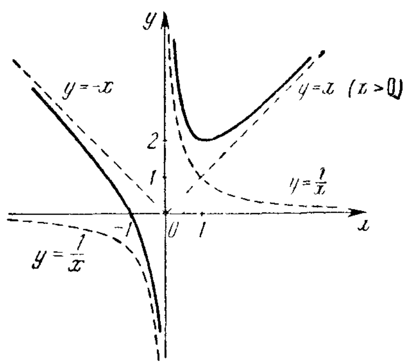

Рис. 160.

Если $x\to 0$ слева, то $y\to-\infty$, а если $x\to-\infty$, то $y\to+\infty$. Асимптотами левой части графика (при $x<0$) являются ось ординат и прямая $y=-x$, так как $y\to -x$, если $x\to-\infty$ График пересекает ось абсцисс в точке -1, так как если $x=-1$, то $y=0$.

С изменением x от $-\infty$ до 0 функция убывает от $+\infty$ до $-\infty$; при возрастании x от 0 до 1 функция убывает от $+\infty$ до 2, а при возрастании x от 1 до $+\infty$ функция возрастает от 2 до $+\infty$.

Другие точки графика определяются графическим сложением функций $y_1=|x|$ и $y_2=1/x$. На рис. 160 графики y_1 и y_2 даны штриховыми линиями, а график данной функции — сплошными.

154. Функция определена на всей числовой оси. Функция четная, а поэтому график ее симметричен относительно оси ординат.

Когда $x=\pm 1$, то $y=0$. Следовательно, график пересекает ось абсцисс в точках -1 и $+1$, а ось ординат в точке $(0, -1)$, так как при $x=0$ функция $y=-1$.

Найдем асимптоту. Для этого представим данную функцию так:

$$y=\frac{x^2+1-2}{x^2+1}=1-\frac{2}{x^2+1}.$$

Отсюда видно, что если $x\to\pm\infty$, то $y\to 1$, т. е. прямая $y=1$ является горизонтальной асимптотой.

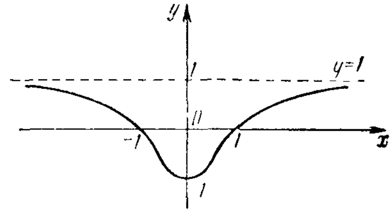

Рис. 161.

Если $x=0$, то выражение $\frac{2}{x^2+1}$ достигает максимума, равного 2, а следовательно, функция $y=1-\frac{2}{x^2+1}$ при $x=0$ достигает минимума, равного -1.

Таким образом, при изменении x от $-\infty$ до 0 функция убывает от 1 $(y\neq 1)$ до -1, а при изменении x от 0 до $+\infty$ функция возрастает от -1 до $+1$ $(y\neq 1)$. График функции показан на рис. 161.

155. Так как $x^2-1\neq 0$ и $x^2+1>0$, то область определения функции находим из неравенства $x^2-1>0$, откуда $x>1$ или $x<-1$. Поскольку $x^2-1\neq 0$, то прямые $x=1$ и $x=-1$ являются вертикальными асимптотами графика функции. Ясно, что зависимость четна как относительно переменной y, так и относительно переменной x. Поэтому график функции симметричен относительно обеих осей координат, а следовательно, и относительно начала координат. Таким образом, нам достаточно построить ветвь графика, находящуюся в первом квадранте.

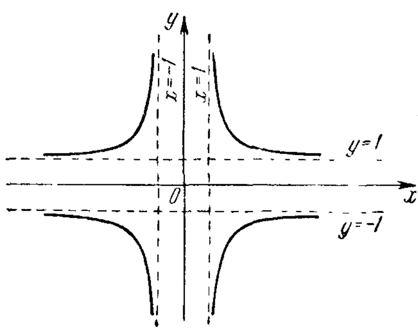

Рис. 162.

В первом квадранте имеем:

$$y=\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}.$$

Отсюда видно, что если $x\to\infty$, то $y\to 1$, т. е. прямая $y=1$ является горизонтальной асимптотой. Если $x=2$, то $y=\frac{5}{3}$. В силу изложенного можно построить график данной функции (рис. 162).

156. Корнями знаменателя x^2-3x+1 являются действительные числа $0,5\,(3-\sqrt{5})$ и $0,5\,(3+\sqrt{5})$. Поэтому асимптотами графика служат прямые $x=0,5\,(3-\sqrt{5})\approx 0,4$ и $x=0,5\,(3+\sqrt{5})\approx 2,6$. Корнями числителя x^2+3x-1 являются числа $-0,5\,(3+\sqrt{13})$ и $+0,5\,(\sqrt{13}-3)$, т. е. график функции пересекает ось абсцисс в точках $-0,5\,(3+\sqrt{13})$ и $0,5\,(\sqrt{13}-3)$.

Имеем:

$$y=\frac{x^2\left(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}.$$

Отсюда видно, что если $x\to\pm\infty$, то $y=1$. Следовательно, прямая $y=1$ является горизонтальной асимптотой.

Перепишем данную функцию в виде:

$$y=\frac{[x+0,5\,(3+\sqrt{13})]\,[x-0,5\,(\sqrt{13}-3)]}{[x-0,5\,(3-\sqrt{5})]\,[x-0,5\,(3+\sqrt{5})]}.$$

Если $x\to 0,5\,(3-\sqrt{5})$ слева, то числитель и разность $x-0,5\,(3+\sqrt{5})$ являются ограниченными величинами, причем числитель положителен, а выражение $[x-0,5\,(3+\sqrt{5})]$ отрицательно, и так как при этом $[x-0,5\,(3-\sqrt{5})]\to 0$, оставаясь отрицательным, то $y\to+\infty$.

Рассуждая аналогично, заключаем, что когда $x\to 0,5\,(3-\sqrt{5})\approx 0,4$ справа, то $y\to-\infty$; когда $x\to 0,5\,(3+\sqrt{5})\approx 2,6$ слева, то $y\to-\infty$, и наконец, если $x\to 0,5\,(3+\sqrt{5})\approx 2,6$ справа, то $y\to+\infty$.

Теперь определим точки экстремума. Пусть

$$\frac{x^2+3x-1}{x^2-3x+1}=a\quad (a — \text{постоянная}),$$

или

$$(a-1)\,x^2-3\,(a+1)\,x+(a+1)=0.$$

В точках экстремума корни этого уравнения должны быть равны, т. е. дискриминант

$$9\,(a+1)^2-4\,(a^2-1)=0,$$

или

$$5a^2+18a+13=0.$$

Решая это уравнение, находим:

$$a_1=-1,\quad a_2=-2,6.$$

Соответствующие им значения аргумента x:

$$x_1=0,\quad x_2=\frac{2}{3}.$$

Таким образом, функция имеет минимум, равный -1, при $x=0$ и максимум, равный $-2{,}6$, при $x=\frac{2}{3}$. В силу изложенного строим график функции (рис. 163). Для наглядности часть графика функции левее точки максимума искажена.

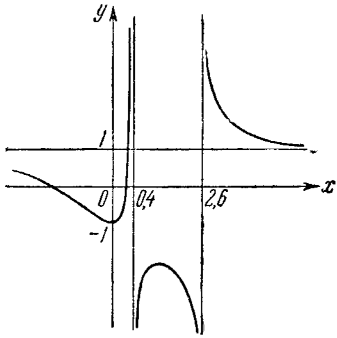

Рис. 163.

157. Корнями знаменателя являются числа 1 и $-\frac{1}{2}$, **значит,** имеют место вертикальные асимптоты: $x=1$ и $x=-\frac{1}{2}$. Корнями числителя являются числа -1 и $\frac{1}{2}$, т. е. график функции пересекает ось абсцисс в точках -1 и $\frac{1}{2}$. Имеем:

$$y=\frac{x^2\left(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}.$$

Отсюда видно, что если $x\to\pm\infty$, то $y\to 1$. Значит, прямая $y=1$ является горизонтальной асимптотой. Если $x=0$, то $y=1$, т. е. график пересекает ось ординат в точке $(0,1)$.

Представим данную функцию в виде:

$$y=\frac{(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)}.$$

Если $x\to-\frac{1}{2}$ слева, то $\left(x+\frac{1}{2}\right)\to 0$, оставаясь отрицательиой;

$(x+1)$—ограниченная положительная величина; $\left(x-\frac{1}{2}\right)$ и $(x-1)$ — ограниченные отрицательные величины.

Таким образом, если $x\to-\frac{1}{2}$ слева, то $y\to-\infty$. Если же $x\to-\frac{1}{2}$ справа, то, рассуждая аналогично, получим, что $y\to+\infty$. Далее, когда $x\to 1$ слева, то $y\to-\infty$, а если $x\to 1$ справа, то $y\to+\infty$.

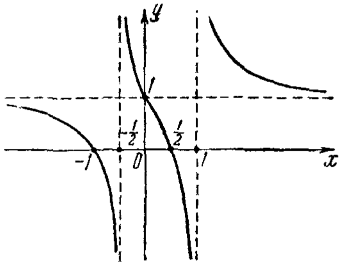

Рис. 164.

В силу изложенного строим график функции (рис. 164).

158. Так как корни числителя и знаменателя мнимые, то дробь положительна, а значит, функция положительна при любом значении x, и график ее расположен над осью абсцисс. Имеем:

$$y=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}.$$

Отсюда видно, что если $x\to\pm\infty$, то $y=\to 1$. Поэтому прямая $y=1$ является асимптотой графика. Если $x=0$, то $y=1$, т. е. точка $(0,1)$ принадлежит графику.

Представим данную функцию так:

$$y=\frac{x^2-x+1+2x}{x^2-x+1}=1+\frac{2x}{x^2-x+1}=1+\frac{2}{-1+\left(x+\frac{1}{x}\right)}.$$

Если $x>0$, то, как известно, выражение $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$, т. е. $x+\frac{1}{x}$ достигает минимума, равного 2, при $x=1$. Если же $x<0$, то $x+\frac{1}{x}\leqslant-2$, т. е. $x+\frac{1}{x}$ достигает максимума, равного -2, при $x=-1$. Следовательно, данная функция имеет максимум, равный 3, при $x=1$, и минимум, равный $\frac{1}{3}$, при $x=-1$.

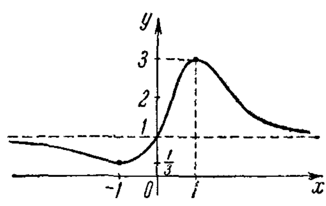

Рис. 165

Итак, при изменении x от $-\infty$ до -1 функция убывает от 1 ($y\neq 1$) до $\frac{1}{3}$; при возрастании x от -1 до $+1$ функция возрастает от $\frac{1}{3}$ до 3 и, наконец, при изменении x от 1 до $+\infty$ функция убывает от 3 до 1 ($y \neq 1$). График функции показан на рис. 165.

159. Функция определена в интервалах $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$ и в точке 0. Так как при замене x на $-x$ или y на $-y$ зависимость сохраняется, то график симметричен как относительно оси абсцисс, так и относительно оси ординат. В силу этого достаточно построить ветвь графика в первом квадранте. Вторую ветвь получим симметричным отражением построенной ветви относительно оси абсцисс; две левые—симметричным отражением правых относительно оси ординат.

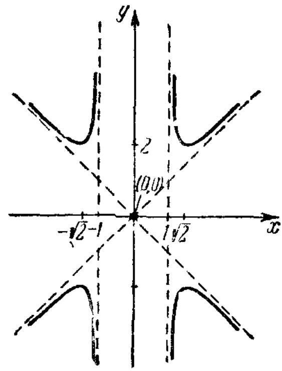

Рис. 166.

Поскольку $x^2-1 \neq 0$, заключаем, что прямые $x=1$ и $x=-1$ являются вертикальными асимптотами.

Имеем:

$$\frac{y^2}{x^2}=\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}.$$

Отсюда замечаем, что если $x \to \pm\infty$, то $\frac{y^2}{x^2} \to 1$ и $\frac{y}{x} \to \pm 1$, или $y \to \pm x$, т. е. прямые $y=x$ и $y=-x$ являются наклонными асимптотами.

Найдем точки экстремума. Пусть

$$\frac{x^4}{x^2-1}=a \quad (a\text{—постоянная}). \tag{1}$$

В точках экстремума прямая $y=a$ должна быть касательной к графику, т. е. уравнения

$$y^2=a \quad \text{и} \quad y^2=\frac{x^4}{x^2-1}$$

должны иметь одно решение (мы рассматриваем функцию только в первом квадранте). Уравнение (1) перепишем так:

$$x^4-ax^2+a=0. \tag{2}$$

Дискриминант уравнения (2) должен быть равен нулю, т. е. $a^2-4a=0$, откуда $a=4$. Следовательно, $x=+\sqrt{2}$. Так как $a=y^2$, то $y=2$. Итак (в первом квадранте), функция имеет минимум, равный 2, при $x=\sqrt{2}$.

Наконец, когда $x \to 1$ справа, то $y \to +\infty$. В силу симметрии графика исследуемой функции относительно осей координат заключаем, что функция имеет еще минимум, равный 2, при $x=-\sqrt{2}$, а максимумы, равные -2, при $x=\sqrt{2}$ и при $x=-\sqrt{2}$.

В нашем изложении мы «упустили» случай, когда $x=0$. Если $x=0$, то и $y=0$, а значит, точка $(0, 0)$ принадлежит нашему графику.

Итак, график состоит из четырех ветвей и одной изолированной точки $(0, 0)$. График показан на рис. 166.

160. Функция определена в двух интервалах: $(-\infty, 1)$ и $(1, +\infty)$. Поэтому график состоит из двух ветвей. При $x=1$ функция претерпевает разрыв, т. е. прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой графика. Если $x=0$, то $y=0$, т. е. график проходит через начало координат. Когда $x \to 1$ справа или слева, то $y \to +\infty$. Если $x \to +\infty$, то $y \to 0$, причем $y > 0$. Когда $x \to -\infty$, то $y \to 0$, причем $y < 0$.

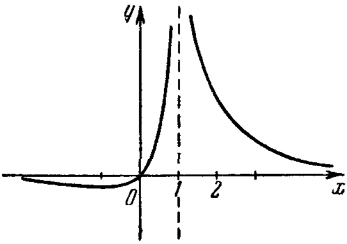

Рис. 167.

Заметим, что если $x \to \pm\infty$, то числитель и знаменатель функции по модулю неограниченно возрастают, но так как числитель — линейная функция, а знаменатель — квадратичная, то знаменатель возрастает «быстрее», а поэтому дробь стремится к нулю.

Теперь определим экстремум функции. Пусть

$$\frac{x}{(x-1)^2}=a \qquad (a \text{ — константа}),$$

тогда

$$ax^2-(2a+1)x+a=0. \qquad (1)$$

Приравняем нулю дискриминант уравнения (1):

$$(2a+1)^2-4a^2=0,$$

откуда

$$a=-\frac{1}{4}.$$

Подставляя значение $a=-\frac{1}{4}$ в уравнение (1), находим $x=-1$.

Итак, при $x=-1$ функция имеет минимум, равный $-\frac{1}{4}$. График изображен на рис. 167.

161. Очевидно, что функция теряет смысл при $x=\pm 1$. Область определении функции состоит из трех интервалов: $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$, а график из трех ветвей. Таким образом, прямые $x=1$ и $x=-1$ являются вертикальными асимптотами. Поскольку

$$\frac{(-x)^3+(-x)}{(-x)^2-1}=-\frac{x^3+x}{x^2-1}=-y,$$

то функция нечетная, а следовательно, график ее симметричен относительно начала координат.

Перепишем данное уравнение так:

$$y=\frac{x^3-x+2x}{x^2-1},$$

$$y=\frac{x(x^2-1)+2x}{x^2-1},$$

$$y=x+\frac{2x}{x^2-1}.$$

Если $x\to\infty$, то $y_2=\frac{2x}{x^2-1}\to 0$, следовательно, если $x\to\infty$, то $y\to x$. Отсюда заключаем, что прямая $y=x$ является наклонной асимптотой графика. График заданной функции строится как сумма графиков $y_1=x$ и $y_2=\frac{2x}{x^2-1}$. График исследуемой функции показан на рис. 168.

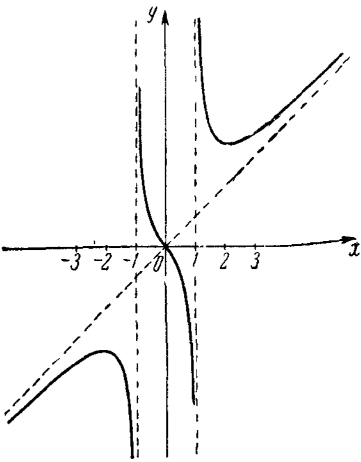

Рис. 168.

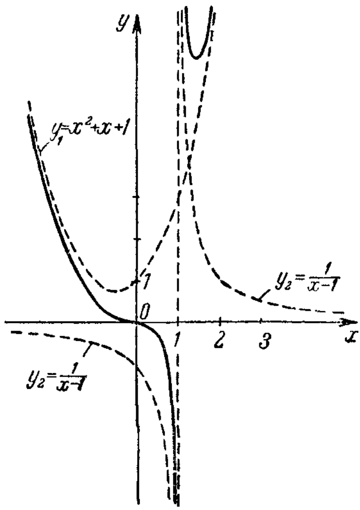

Рис. 169.

162. Имеем:

$$y=\frac{x^3-1+1}{x-1}=(x^2+x+1)+\frac{1}{x-1}.$$

Строим параболу $y_1=x^2+x+1$ и гиперболу $y_2=\frac{1}{x-1}$, потом, складывая ординаты этих графиков при одинаковых значениях x, получим точки искомого графика. Асимптотой графика служит прямая $x=1$. На рис. 169 вспомогательные графики показаны штриховыми линиями, а график данной функции — сплошными.

163. Очевидно, что функция не пересекает ось абсцисс. Функция четная, поэтому ее график симметричен относительно оси ординат. Асимптотами являются прямые:

$$x=-\sqrt{5},\quad x=-\sqrt{3},\quad x=\sqrt{3},\quad x=\sqrt{5}.$$

При $x=0$ $y=\frac{2}{15}$, т. е. точка $\left(0, \frac{2}{15}\right)$ принадлежит графику.

Если $x\to\sqrt{3}$ слева, то $y\to+\infty$; если $x\to-\sqrt{3}$ справа, то $y\to+\infty$. Если $x=\pm1$, то $y=\frac{1}{4}$. В силу изложенного ясно поведение функции в интервале $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Если $x\to-\sqrt{3}$ слева, или $x\to-\sqrt{5}$ справа, или $x\to\sqrt{3}$ справа, или $x\to\sqrt{5}$ слева, то $y\to-\infty$. Если $x\to\sqrt{5}$ справа или $x\to-\sqrt{5}$ слева, то $y\to+\infty$. Если же $x\to\pm\infty$, то $y\to0$.

Остается определить экстремальные значения функции. Пусть $y=a$, т. е. $\frac{2}{(3-x^2)(5-x^2)}=a$, или

$$ax^4-8ax^2-(2-15a)=0,$$

откуда

$$x_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{\frac{4a\pm\sqrt{a^2+2a}}{a}}.$$

Корни могут быть кратными в двух случаях:

1) Если $a^2+2a=0$ или 2) $4a=\sqrt{a^2+2a}$. Из 1) получаем: $a=0$ или $a=-2$. Но a не может быть равно нулю, так как в этом случае и $y=0$, что невозможно. Таким образом, из 1) следует, что $a=-2$. Из 2) находим: $a=\frac{2}{15}$.

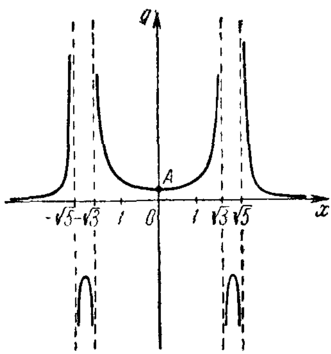

Рис. 170.

Итак, функция принимает экстремальные значения $y=-2$ и $y=\frac{2}{15}$.

Если $y=-2$, то $x=\pm2$; если $y=\frac{2}{15}$, то $x=0$. Таким образом, при $x=0$ функция имеет минимум, равный $\frac{2}{15}$. Функция имеет два максимума, равные -2, при $x=2$ и $x=-2$. График показан на рис. 170.

164. Область существования функции определяется из системы неравенств

$$\begin{cases} x^2-1\neq0, \\ \dfrac{x^2+|x|}{x^2-1}\geqslant0. \end{cases}\qquad (1)$$

Второе неравенство должно иметь место, поскольку $|y| \geqslant 0$. Из системы (1) следует, что $x^2-1>0$ или $x=0$, откуда $x>1$, или $x<-1$, или $x=0$. Таким образом, функция определена на двух интервалах: $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$ и в точке $x=0$.

Поскольку исследуемая зависимость четна как относительно x, так и относительно y, то график ее симметричен относительно обеих осей координат, а следовательно, и относительно начала координат. В силу этого достаточно построить ветвь графика, расположенную в первом квадранте, т. е. при условии $x>0$ и $y>0$.

Если $x>0$ и $y>0$, то имеем:

$$y=\frac{x^2+x}{x^2-1}=\frac{x}{x-1}.$$

Отсюда следует, что прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой графика. Разрешив уравнение $y=\frac{x}{x-1}$ относительно x, получим уравнение

$$x=\frac{y}{y-1},$$

из которого следует, что прямая $y=1$ служит горизонтальной асимптотой графика. В силу симметрии графика относительно обеих осей прямые $x=-1$ и $y=-1$ также являются асимптотами.

График состоит из четырех ветвей и одной изолированной точки (0, 0) (рис. 171).

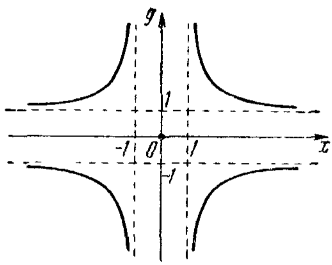

Рис 171.

165. Так как $x \neq 1$ и $x \neq 2$, то функция определена на трех интервалах: $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$, $(2, +\infty)$.

Ясно, что прямые $x=1$ и $x=2$ являются вертикальными асимптотами.

Если $x=0$, то и $y=0$, т. е. график проходит через начало координат.

1) Если $x \to 1$ слева, то $\frac{1}{x-1} \to -\infty$, а $\frac{-2}{x-2}$ — ограниченная величина. Поэтому при $x \to 1$ слева $y \to -\infty$.

2) Если $x \to 1$ справа, то $\frac{-2}{x-2}$ — ограниченная величина, а $\frac{1}{x-1} \to +\infty$.

В силу 1) и 2) заключаем, что график асимптотически приближается к прямой $x=1$ слева и справа.

3) Если $x \to 2$ слева, то $-\frac{2}{x-2} \to +\infty$, а $\frac{1}{x-1}$ — ограниченная величина, поэтому при $x \to 2$ слева $y \to +\infty$.

4) Если $x \to 2$ справа, то $\frac{-2}{x-2} \to -\infty$, а $\frac{1}{x-1}$ — ограниченная величина, поэтому при $x \to 2$ справа $y \to -\infty$.

В силу 3) и 4) заключаем, что график асимптотически приближается к прямой $x=2$ слева и справа.

Теперь найдем точки экстремума. Имеем:

$$y=\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x-2},$$

или

$$yx^2-(3y-1)\,x+2y=0.$$

В точках экстремума корни функции должны быть кратными, т. е.

$$(3y-1)^2-8y^2=0,$$

откуда

$$y^2-6y+1=0.$$

Это равенство имеет место при $y=3+2\sqrt{2}$ или при $y=3-2\sqrt{2}$.

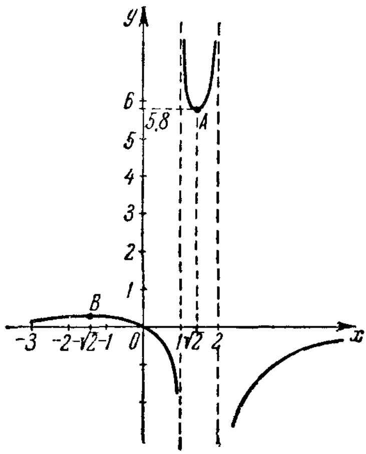

Рис. 172.

Если $y=3+2\sqrt{2}$, то $x=\sqrt{2}$, а если $y=3-2\sqrt{2}$, то $x=-\sqrt{2}$.

Итак,

$$y_{\min}=3+2\sqrt{2} \quad \text{при} \quad x=\sqrt{2},$$

$$y_{\max}=3-2\sqrt{2} \quad \text{при} \quad x=-\sqrt{2}.$$

Заметим еще, что если $x \to \pm\infty$, то $y \to 0$. Следовательно, ось абсцисс является горизонтальной асимптотой. И, наконец, замечаем, что при $x=-1$ и при $x=-2$ $y=\frac{1}{6}$.

На основании проведенного исследования легко построить график (рис. 172).

166. При $x=0$ функция теряет смысл. Функция четная, так как

$$\frac{|-x+1|-|-x-1|}{-x}=\frac{-(|x+1|-|x-1|)}{-x}=\frac{|x+1|-|x-1|}{x}=y,$$

а следовательно, график ее симметричен относительно оси ординат.

Имеем:

$$y=\begin{cases} -\dfrac{2}{x}, & \text{если} \quad x<-1, \\ 2, & \text{если} \quad -1\leqslant x\leqslant 1, \quad \text{но} \quad x\neq 0, \\ \dfrac{2}{x}, & \text{если} \quad x>1. \end{cases}$$

График показан на рис. 173.

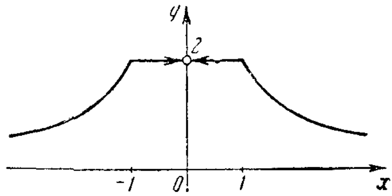

Рис. 173.

167. Областью определения служат два интервала: $(-\infty, 2)$ и $(2, +\infty)$. Прямая $x=2$ является вертикальной асимптотой графика. Если $x\to 2$ справа, то $x-2\to 0$ и $x-2>0$, а $x^2\to 4$, поэтому $y\to+\infty$. Если $x\to 2$ слева, то $x-2\to 0$ и $x-2<0$, а $x^2\to 4$, поэтому $y\to-\infty$.

Если $x\to+\infty$, то $y=\dfrac{x^2}{x-2}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}\to+\infty$, так как $\dfrac{2}{x^2}\to 0$ «быстрее», чем $\dfrac{1}{x}\to 0$. Если $x\to-\infty$, то $y\to-\infty$.

Найдем экстремальные значения функции. Пусть

$$y=\frac{x^2}{x-2}=a \qquad (a\text{ — константа}).$$

В точках экстремума прямая $y=a$ должна касаться графика, т. е. мы должны найти такое значение a, чтобы уравнение

$$\frac{x^2}{x-2}=a \tag{1}$$

имело кратные корни. Уравнение (1) перепишем так:

$$x^2-ax+2a=0. \tag{2}$$

Корни уравнения (2) будут кратными, если дискриминант уравнения будет равен нулю, т. е.

$$a^2-8a=0.$$

Отсюда $a_1=0$, $a_2=8$. Подставляя найденные значения a в уравнение (2), находим $x_1=0$, $x_2=4$.

Итак, при $x=0$ функция имеет максимум, равный 0, а при $x=4$ — минимум, равный 8. Так как $y=2+x+\frac{4}{x-2}\to 2+x$, если $x\to\pm\infty$, то $y=x+2$ — наклонная асимптота. График показан на рис. 174.

168. Функция четная. Область определения — все действительные числа. При $x=0$ функция достигает максимума $y_{\max}=1$

График показан на рис. 175

169. Область определения — два промежутка: $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$. Если $x\to 0$ слева, то $y\to-\infty$; если $x\to 0$ справа, то также $y\to-\infty$. График имеет вертикальную асимптоту — ось ординат.

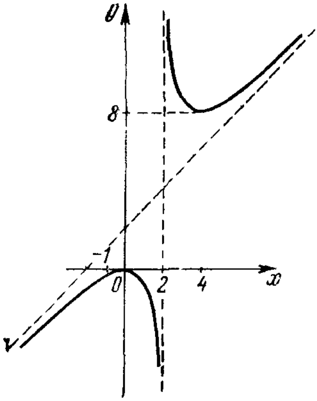

Рис. 174.

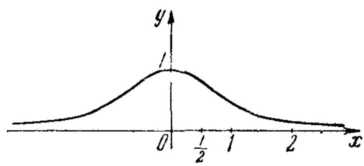

Рис. 175.

Если $x\to-\infty$, то $y\to 0$ $(y<0)$, т. е. ось абсцисс служит горизонтальной асимптотой.

Если $y=0$, то $x=\frac{2}{3}$. Следовательно, график пересекает ось абсцисс в точке $\frac{2}{3}$.

Если $x\to+\infty$, то $y\to 0$ $(y>0)$. Следовательно, и правая часть графика асимптотически приближается к оси абсцисс.

Теперь определим максимум функции. Имеем:

$$y=\frac{3x-2}{5x^2},\quad \text{или}\quad 5yx^2-3x+2=0.$$

Приравняв нулю дискриминант этого уравнения, получим: $y=\frac{9}{40}$. При этом значении y абсцисса $x=\frac{4}{3}$. Итак, $y_{\max}=\frac{9}{40}$ при $x=\frac{4}{3}$.

Наконец, заметим, что при $x=1$ и $x=2$ функция $y=\frac{1}{5}$.

График показан на рис. 176.

170. Функция определена на трех интервалах: $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$ и $(2, +\infty)$. Следовательно, функция имеет две вертикальные асимптоты: $x=1$ и $x=2$.

1) Если $x \to 1$ слева, то $\frac{1}{x-1} \to -\infty$, а $-\frac{1}{x-2}$ ограничена, поэтому $y \to -\infty$.

2) Если $x \to 1$ справа, то $\frac{1}{x-1} \to +\infty$, а $-\frac{1}{x-2}$ ограничена, поэтому $y \to +\infty$.

3) Если $x \to 2$ слева, то $-\frac{1}{x-2} \to +\infty$, а $\frac{1}{x-1}$ ограничена, поэтому $y \to +\infty$.

4) Если $x \to 2$ справа, то $-\frac{1}{x-2} \to -\infty$, а $\frac{1}{x-1}$ ограничена, поэтому $y \to -\infty$.

График функции не пересекает ось абсцисс, так как если $y=0$, то $x-1=x-2$, что невозможно.

Если $x=0$, то $y=-\frac{1}{2}$, т. е. график пересекает ось ординат в точке $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.

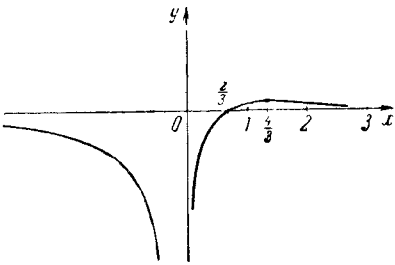

Рис. 176.

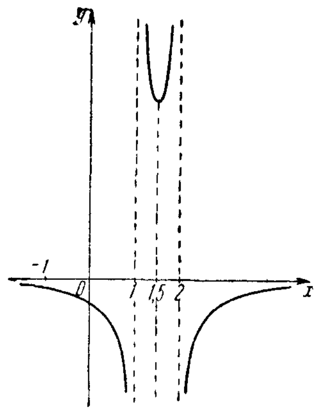

Рис. 177.

Теперь найдем точки экстремума. Имеем:

$$y=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{x^2-3x+2},$$

или

$$yx^2-3yx+(2y+1)=0.$$

Для того чтобы корни этого уравнения (относительно x) были кратными, необходимо и достаточно, чтобы равнялся нулю дискриминант, т. е. $9y^2-4y(2y+1)=0$, откуда $y_1=0$, $y_2=4$. Но мы уже установили, что $y \neq 0$. Следовательно, функция имеет только один экстремум $y=4$. При этом значении y абсцисса $x=\frac{3}{2}$.

Если $x \to \pm\infty$, то $y \to 0$, следовательно, ось абсцисс является горизонтальной асимптотой. На основании изложенного можно построить график функции (рис. 177).

§ 10. Функции, связанные с иррациональными функциями

171. Областью определения функции являются все неотрицательные числа.

Чертим график функции $\sqrt{x}$ (разрывная линия). Затем перемещаем этот график вверх на 1 (рис. 178).

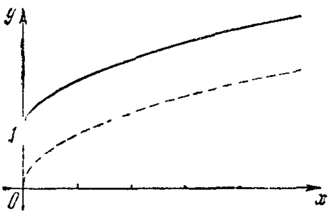

Рис. 178.

172. Так как $\sqrt{(-x)^2-1}=\sqrt{x^2-1}=y$, то функция четная, а график ее симметричен относительно оси ординат. Область определения находим из соотношения $x^2-1\geqslant 0$, откуда $x\geqslant 1$ или $x\leqslant -1$, т. е. график расположен правее прямой $x=1$ и левее прямой $x=-1$.

Если $x=\pm 1$, то $y=0$; если $x=\pm\sqrt{5}$, то $y=2$; если же $x\to\pm\infty$, то $y\to+\infty$. График показан на рис. 179.

173. Область определения находим из условия $x-1\geqslant 0$, т. е. $x\geqslant 1$.

Если $y=0$, то $\sqrt{x-1}=2$, откуда $x=5$, т. е. график пересекает ось абсцисс в точке 5.

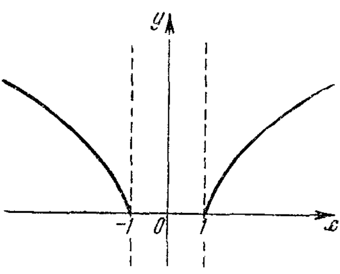

Рис. 179.

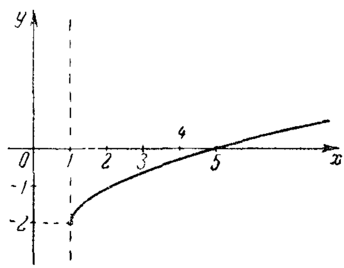

Рис. 180.

Построение проводим так: строим график $y=\sqrt{x}$, потом сдвигаем его вправо на 1 и опускаем вниз на 2 (рис. 180).

174. Очевидно, что $x\neq 0$, так как если $x=0$, то знаменатель обращается в нуль. Поэтому ось ординат является вертикальной асимптотой. График симметричен относительно начала координат, так как функция нечетная.

Поскольку должно быть $1+x\geqslant 0$ и $1-x\geqslant 0$, а также $x\neq 0$, то областью определения функции являются промежутки $-1\leqslant x<0$ и $0<x\leqslant 1$. Следовательно, график состоит из двух ветвей. По-

смотрим, что происходит с кривой на концах интервалов:

если $x=-1$, то $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

если $x=1$, то $y=+\frac{\sqrt{2}}{2}$;

если $x\to 0$ слева, то разность $(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})\to 0$, оставаясь отрицательным числом, и, следовательно, $y\to-\infty$;

если $x\to 0$ справа, то разность $(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})\to 0$, оставаясь положительным числом, и поэтому $y\to+\infty$. График показан на рис. 181.

175. Поскольку $\frac{1-(-x)^2}{2\pm\sqrt{1-(-x)^2}}=\frac{1-x^2}{2\pm\sqrt{1-x^2}}=y$, то функция четная, а следовательно, график симметричен относительно оси ординат.

Функция существует, когда $1-x^2\geqslant 0$, или $x^2\leqslant 1$, откуда $-1\leqslant x\leqslant 1$. Таким образом, график расположен между прямыми $x=-1$ и $x=1$.

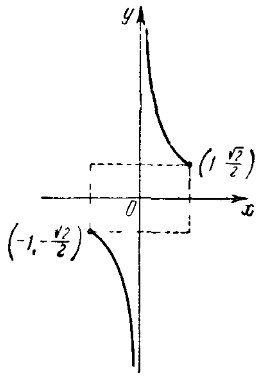

Рис. 181.

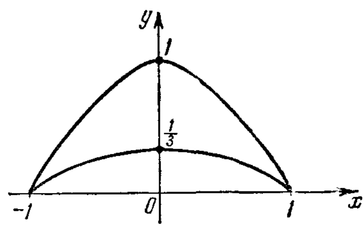

Рис. 182.

Когда $x=0$, функция принимает значения $\frac{1}{3}$ и 1. Если $x=\pm 1$, то $y=0$.

Так как $|x|\leqslant 1$, то знаменатель функции положителен, а числитель неотрицателен. Поэтому график данной функции расположен в верхней полуплоскости, включая точки -1 и $+1$ оси абсцисс (рис. 182).

176. Корни действительны, если выполняются неравенства:

$$\frac{a+x}{a-x}\geqslant 0 \quad \text{и} \quad \frac{a-x}{a+x}\geqslant 0. \tag{1}$$

Из этих неравенств следует, что $x\neq\pm a$.

Условия (1) приводят к двум системам строгих неравенств:

$$\begin{cases} a+x>0, \\ a-x>0 \end{cases} \qquad (2)$$

или

$$\begin{cases} a+x<0, \\ a-x<0. \end{cases} \qquad (3)$$

Если $a>0$, то из (2) находим, что

$$-a<x<a, \qquad (4)$$

а система (3) решений не имеет.

Если $a<0$, то из (3) находим, что

$$a<x<-a, \qquad (5)$$

а система (2) решений не имеет.

Из (4) и (5) следует, что корни действительны, если имеет место соотношение:

$$-|a|<x<|a| \qquad (6)$$

Для существования функции необходимо еще, чтобы

$$\frac{a+x}{a-x} \neq \frac{a-x}{a+x}, \qquad (7)$$

откуда $x \neq 0$.

Из условий (6) и (7) заключаем, что областью определения заданиой функции являются интервалы:

$$-|a|<x<0 \quad \text{и} \quad 0<x<|a|.$$

Теперь упростим заданную функцию. Умножаем числитель и знаменатель на выражение $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$. Тогда

$$y=\frac{\frac{a+x}{a-x}+1}{\frac{a+x}{a-x}-1}=\frac{a}{x}.$$

Теперь построим график данной функции Графиком функции является часть гиперболы $y=\frac{a}{x}$, заключенная в полосе, ограниченной прямыми $x=\pm|a|$. Если $a<0$, то график имеет вид, показанный на рис. 183, *а*), а если $a>0$, то—на рис. 183, *б*)

177. Область определения находим из условия

$$1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2>0,$$

или $\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}>0$, или $x^2>0$. Отсюда ясно, что $x \neq 0$. Итак, областью определения функции являются интервалы: $-\infty < x < 0$ и $0 < x < +\infty$. После преобразований функция принимает вид:

$$y = \frac{x(1+x^2)}{|x|}.$$

Отсюда:

$$1)\ y = -(1+x^2),\quad \text{если}\quad x < 0,$$
$$2)\ y = 1+x^2,\quad \text{если}\quad x > 0.$$

Из 1) чертится левая часть графика, а из 2) — правая (рис. 184).

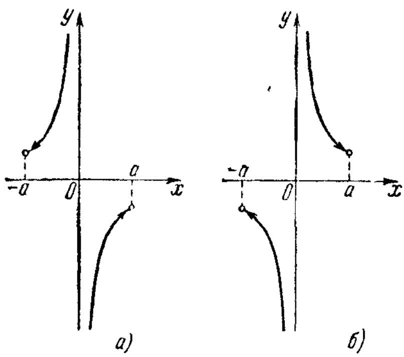

Рис. 183.

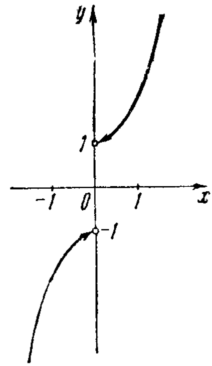

Рис 184

Вообще достаточно начертить правую часть графика, а левую получить симметричным отражением правой части относительно начала координат, так как функция нечетная.

178. Ясно, что $x \neq -1$, поэтому прямая $x = -1$ является вертикальной асимптотой.

Условием существования функции является неравенство

$$\frac{x-1}{x+1} \geqslant 0,$$

откуда устанавливаем, что областью определения являются промежутки $-\infty < x < -1$ и $1 \leqslant x < \infty$.

Имеем:

$$y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \sqrt{1 - \frac{2}{x+1}}.$$

В промежутке $1 \leqslant x < \infty$ выражение $\frac{2}{x+1}$ убывает от 1 до 0, а следовательно, y возрастает от 0 до 1. Следовательно, прямая $y = 1$ является горизонтальной асимптотой.

В промежутке $-\infty < x < -1$ выражение $\frac{2}{x+1}$ убывает от 0 до $-\infty$, а следовательно, y возрастает от 1 до $+\infty$.

Теперь построение графика очевидно (рис. 185).

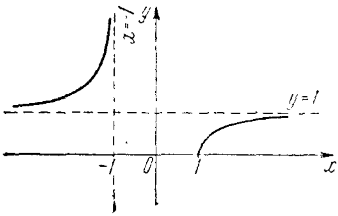

Рис. 185.

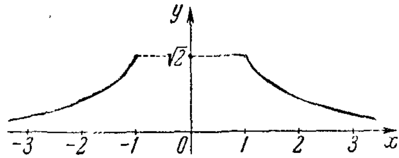

Рис. 186.

179. Область определения находим из неравенства $x^2-1 \geqslant 0$, т. е. $x \geqslant 1$ или $x \leqslant -1$. Имеем:

$$y=\frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}},$$

или

$$y=\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}.$$

Если $x=\pm 1$, то $y=+\sqrt{2}$, а если $x \to \pm\infty$, то $y \to 0$.

И, наконец, докажем, что график находится не выше $\sqrt{2}$, т. е. требуется доказать, что $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1} \leqslant \sqrt{2}$, или

$$2x^2-2\sqrt{x^4-1} \leqslant 2,$$

или

$$\sqrt{x^4-1} \geqslant x^2-1.$$

Так как $|x| \geqslant 1$, то

$$x^4-1 \geqslant x^4-2x+1,$$

т. е.

$$x \geqslant 1,$$

что входит в область определения данной функции. График показан на рис. 186.

180. Рассмотрим два случая:

1) если $x \geqslant 2$, то

$$y=\sqrt{2(x+x-2)}=2\sqrt{x-1};$$

2) если $x \leqslant 2$, то

$$y=\sqrt{2(x-x+2)}=2.$$

Из 1) и 2) следует, что график функции состоит из полупрямой и части параболы. На рис. 187 график показан сплошной линией.

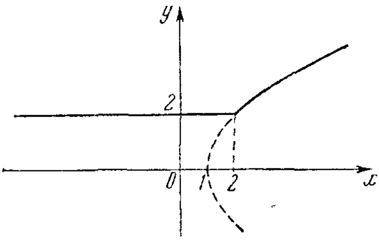

Рис. 187.

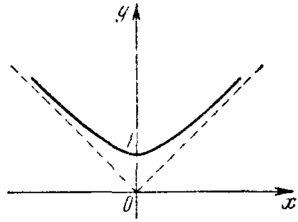

Рис. 188.

181. Так как подкоренные выражения имеют мнимые корни, то они положительны при любых значениях аргумента x; следовательно, функция определена на всей числовой оси.

Если $x=0$, то $y=1$, следовательно, график проходит через точку $(0,1)$.

Так как $f(x)=f(-x)$, то функция четная, и график симметричен относительио оси y. Поэтому достаточно начертить правую часть графика (для $x \geqslant 0$), а левую часть достроить симметрично правой относительно оси y. Если $x \neq 0$ $(x>0)$, то нмеем:

$$y=\frac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}{2}=$$

$$=\frac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}{2}.$$

Отсюда видим, что если $x \to +\infty$, то $y \to x$, т. е. прямая $y=x$ является наклонной асимптотой правой части графика (асимптотой левой части графика является прямая $y=-x$). График показан иа рис. 188.

182. Если $x=0$, то и $y=0$. Следовательно, график проходит через начало координат. Функция нечетная, так как $f(-x)=-f(x)$, поэтому левая часть графика будет симметрична правой относительно начала координат. Рассмотрим функцию при $x \geqslant 0$. Имеем:

$$y=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}=$$

$$=\frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}.$$

Если $x \neq 0$, то имеем:

$$\frac{y}{x}=\frac{2}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}.$$

Ясно, что если $x \to 0$, то $\frac{y}{x} \to 1$, т. е. прямая $y=x$ является касательной к графику в точке $(0, 0)$.

Далее,

$$y=\frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}.$$

Отсюда видно, что если $x \to +\infty$, то $y \to 1$, а потому прямая $y=1$ является горизонтальной асимптотой графика. В силу симметрии

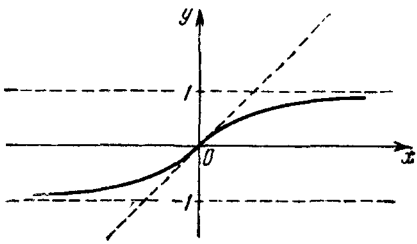

Рис. 189.

графика относительно начала координат прямая $y=-1$ также является асимптотой (рис. 189).

§ 11. Функции, связанные с показательной функцией

183. Функция определена при любых значениях аргумента x. Функция четная, так как

$$2^{-x}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+2^{x}=y.$$

Поэтому график симметричен относительно оси ординат. Известно, что $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$, если $a>0$. Так как $2^x>0$ и $\left(\frac{1}{2}\right)^x>0$ при любом значении x, то $2^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x\geqslant 2$. Таким образом, функция имеет минимум, равный 2. С изменением x от $-\infty$ до 0 функция убывает от $+\infty$ до 2, а с изменением x от 0 до $+\infty$ функция возрастает от 2 до $+\infty$.

Построение можно произвести так: строим графики функций 2^x и $\left(\frac{1}{2}\right)^x$, а потом складываем ординаты точек этих графиков при одинаковых значениях аргумента x. На рис. 190 графики функций 2^x и $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ показаны штриховыми линиями, а заданной функции — сплошной.

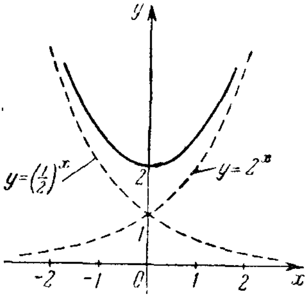

Рис 190.

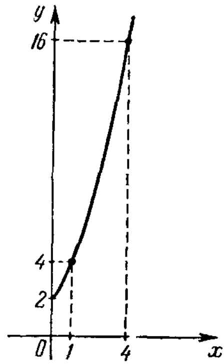

Рис. 191.

184. Функция определена только для $x \geqslant 0$, поэтому график функции расположен в первом квадранте, так как показательная функция положительна при любом значении показателя степени. С изменением аргумента x от 0 до $+\infty$ функция возрастает от 2 до $+\infty$, причем функция возрастает «быстрее» аргумента. График показан на рис. 191.

185. Функция определена для положительных значений аргумента x, так как $\log_3 x$ существует только при $x > 0$, а данная функция положительна при любом значении x (как любая показательная функция). Таким образом, график расположен в первом квадранте.

При $x = 1$ функция $y = 2^{\log_3 1} = 2^0 = 1$, т. е. точка (1,1) принадлежит графику функции; при $x = 3$ функция $y = 2^{\log_3 3} = 2^1 = 2$, т. е. точка (3, 2) также принадлежит графику. Функция возрастает во всей области определения.

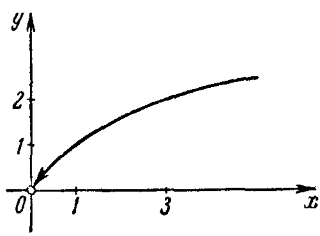

Рис. 192.

Так как $x \neq 0$ (при $x \to 0$ и $y \to 0$), то начало координат не принадлежит графику.

График функции показан на рис. 192.

186. Функция 2^x определена при любых значениях x, а функция $2^{\log_3 x}$ определена при $x > 0$. Таким образом, функция y определена только при положительных значениях аргумента.

Строим графики функций 2^x и $2^{\log_3 x}$ (в первом квадранте), а затем складываем ординаты точек этих графиков при одинаковых значениях аргумента x. Для уточнения графика заметим, что точка (1,3) принадлежит ему.

На рис. 193 графики функций 2^x и $2^{\log_3 x}$ показаны штриховыми линиями, а функции y—сплошной линией.

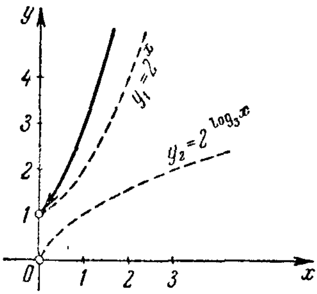

Рис. 193.

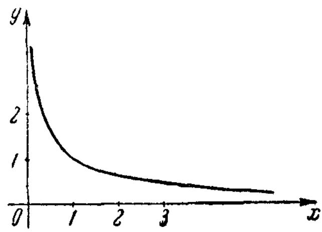

Рис. 194.

187. Функция определена для всех положительных значений аргумента x, так как $\log_3 x$ существует только при $x > 0$. Функция положительна при любых допустимых значениях аргумента x.

Таким образом, график расположен в первом квадранте.

Точки $\left(\frac{1}{3}, 2\right)$, $(1, 1)$, $\left(3, \frac{1}{2}\right)$ принадлежат графику функции. Легко убедиться, что если $x \to 0$ (справа), то $y \to +\infty$, а если $x \to +\infty$, то $y \to 0$, т. е. оси координат являются асимптотами графика функции.

Теперь легко построить график функции (рис. 194).

188. Область определения функции находим из неравенств $2^{\log_3 x} \neq 1$ и $x > 0$. Из первого неравенства следует, что $x \neq 1$.

Таким образом, функция определена в двух интервалах: $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$. Имеем:

$$y = \frac{4^{\log_3 x} - 1}{2^{\log_3 x} - 1} = \frac{\left(2^{\log_3 x}\right)^2 - 1}{2^{\log_3 x} - 1} = 2^{\log_3 x} + 1.$$

Строим график функции $y = 2^{\log_3 x}$ с исключенной точкой $(1, 1)$ и поднимаем его вверх вдоль оси ординат на 1. На рис. 195 график функции $2^{\log_3 x}$ показан штриховой линией, а данной функции—сплошной.

189. Функция определена при всех значениях аргумента x. Так как $2^{(-x)^2}=2^{x^2}$, то функция четная. Поэтому ее график симметричен относительно оси ординат. При $x=0$ функция достигает минимума, равного 1. С изменением x от $-\infty$ до 0 функция убывает

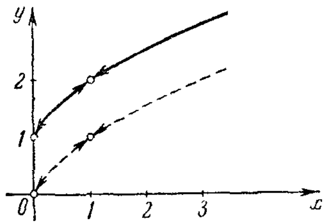

Рис. 195.

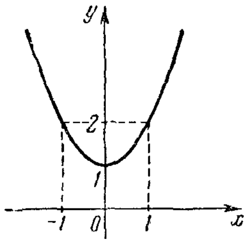

Рис. 196.

от $+\infty$ до 1, а с изменением x от 0 до $+\infty$ функция возрастает от 1 до $+\infty$. График показан на рис. 196.

190. Функция определена для любых значений аргумента x. Функция четная, так как $\left(\frac{1}{2}\right)^{|-x|}=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}=y$. Поэтому ее график симметричен относительно оси ординат. Так как $y>0$ при любом значении x, то график расположен над осью абсцисс. Поскольку при $x\to\pm\infty$ функция $y\to 0$, то ось абсцисс является асимптотой графика функции. Наибольшее значение функции есть 1 при $x=0$. С изменением аргумента x от $-\infty$ до 0 функция возрастает от 0 до 1, а с изменением аргумента от 0 до $+\infty$ функция убывает от 1 до 0. При $x=\pm 1$ функция $y=\frac{1}{2}$, а при $x=\pm 2$ функция $y=\frac{1}{4}$ (рис. 197).

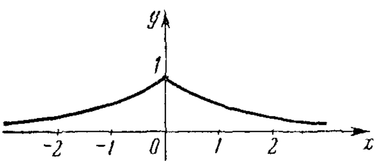

Рис. 197.

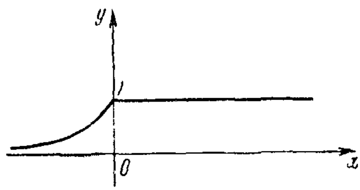

Рис. 198.

191. Функция определена для любых значений x. Если $x\geqslant 0$, то $y=1$, а если $x<0$, то $y=2^{2x}$. Так как при любом значении x функция $y>0$, то график расположен над осью абсцисс.

Таким образом, с изменением аргумента x от $-\infty$ до 0 функция y возрастает от 0 до 1, а при $x\geqslant 0$ функция имеет постоянное значение, равное 1 (рис. 198.)

192. Функция определена при любых значениях аргумента x. Если $x \geqslant 0$, то $y = 2^x - 2^x = 0$, т. е. при неотрицательном значении x графиком функции служит правая полуось абсцисс.

Если $x < 0$, то $y = 2^x - 2^{-x} = 2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Строим (при $x < 0$) графики функций 2^x и $-\left(\frac{1}{2}\right)^x$, затем складываем ординаты точек этих графиков при одинаковых значениях x.

На рис. 199 графики функций 2^x и $-\left(\frac{1}{2}\right)^x$ показаны штриховыми линиями, а график функции $y = 2^x - 2^{|x|}$ — сплошной.

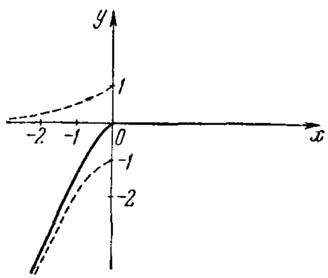

Рис. 199.

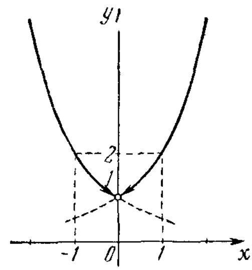

Рис. 200

193. Областью определения функции являются все действительные числа, кроме нуля. Так как при любых допустимых значениях x функция положительна, то график функции расположен над осью абсцисс.

Если $x > 0$, то $y = 2^{\frac{x^2}{x}} = 2^x$, и следовательно, правой ветвью графика данной функции является правая часть графика $y = 2^x$ с исключенной точкой (0, 1).

Если же $x < 0$, то $y = 2^{\frac{x^2}{-x}} = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, и следовательно, левой ветвью графика данной функции является левая часть графика функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ с исключенной точкой (0, 1). Впрочем, левую часть графика мы могли бы получить симметричным отражением правой относительно оси ординат, так как заданная функция четная.

С изменением x от $-\infty$ до 0 функция убывает от $+\infty$ до 1 (исключая 1), а с возрастанием x от 0 до $+\infty$ функция возрастает от 1 (исключая 1) до $+\infty$ (рис. 200).

194. Областью определения функции является множество всех действительных чисел. Функция четная, поэтому сначала строим правую часть (при $x \geqslant 0$) графика, а затем (при $x < 0$) — левую, симметричную правой относительно оси ординат. Так как при любых значениях x функция положительна, то график расположен над осью абсцисс.

Если $x=0$, то $y=2$, т. е. точка $(0, 2)$ принадлежит графику. При $x=1$ значение $y=4$.

Если $x \to \pm\infty$, то $y \to +\infty$, причем $|y|$ растет быстрее, чем $|x|$, т. е. кривая вогнута (рис. 201).

195. Областью определения является вся числовая ось. Известно, что если $a>0$, то $a^x>0$ при любом значении x. Следовательно, график расположен над осью абсцисс. Поскольку $2^{1-(-x)^2}=2^{1-x^2}$, то функция четная, а следовательно, ее график симметричен относительно оси ординат.

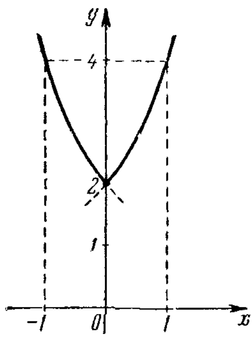

Рис. 201.

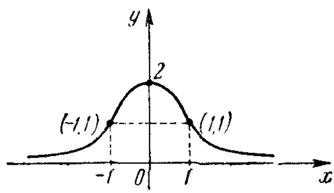

Рис. 202.

Если $x \to \pm\infty$, то $y \to 0$, т. е. ось абсцисс является асимптотой графика.

Если $x=\pm 1$, то $y=1$; следовательно, точки $(1, 1)$ и $(-1, 1)$ принадлежат графику.

При $x=0$ функция достигает максимума, равного 2. При изменении x от 0 до $\pm\infty$ функция убывает. График функции показан на рис. 202.

196. Область определения находим из неравенства $2^x-2 \neq 0$, откуда $x \neq 1$. Итак, функция определена в двух промежутках $-\infty < x < 1$ и $1 < x < +\infty$.

Если $2^x-2>0$, т. е. $x>1$, то функция $y=2^x+2$; если же $2^x-2<0$, т. е. $x<1$, то функция $y=-2^x-2$.

Асимптотами являются прямые $y=2$ и $y=-2$, соответственно для функций $y=2^x+2$ и $y=2^x-2$. График показан на рис. 203.

197. Область определения состоит из двух интервалов: $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$, так как при $x=0$ функция теряет смысл. Следовательно, график имеет две ветви.

Если $x \to 0$ слева, то $y \to 0$, причем $y>0$; если же $x \to 0$ справа, то $y \to +\infty$.

Если $x \to -\infty$, то $y \to 1$, причем $y<1$; если же $x \to +\infty$, то $y \to 1$, причем $y>1$.

Значит, прямая $y=1$ является асимптотой.

График показан на рис. 204.

198. Область определения состоит из двух интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$, так как при $x=0$ функция $2^{\frac{1}{x}}$ теряет смысл.

Если $x \to 0$ справа, то $y \to 0$; если же $x \to 0$ слева, то $y \to +1$.

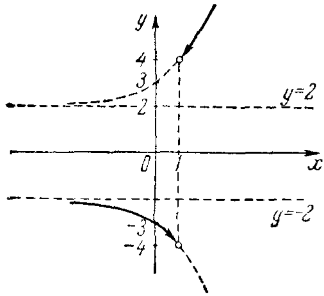

Рис. 203.

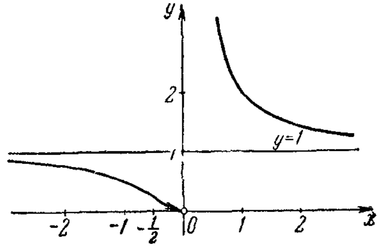

Рис. 204.

Если $x \to +\infty$, то $y \to \frac{1}{2}$, оставаясь меньше $\frac{1}{2}$; если же $x \to -\infty$, то $y \to \frac{1}{2}$, оставаясь больше $\frac{1}{2}$. Отсюда заключаем, что прямая $y=\frac{1}{2}$ является асимптотой графика. График показан на рис. 205.

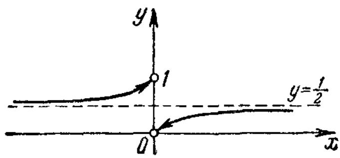

Рис. 205.

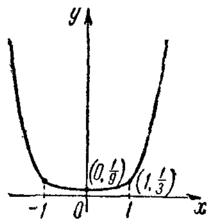

Рис. 206.

199. Функция определена на всей числовой оси.

Поскольку $3^{(-x)^2-2}=3^{x^2-2}$, то функция четная, а следовательно, график симметричен относительно оси ординат.

Найдем точки экстремума. Так как при $a>1$ функция a^x возрастает и поскольку x^2-2 имеет минимум при $x=0$, то и данная функция имеет минимум при $x=0$, равный $3^{-2}=\frac{1}{9}$.

Если $x \to \pm\infty$, то $y \to +\infty$. Для уточнения графика возьмем еще точки $\left(\pm 1, \frac{1}{3}\right)$. График дан на рис. 206.

200. Рассмотрим функцию $y_1 = x^2 - 3x + 2$. Она имеет минимум, равный $-\frac{1}{4}$, при $x = \frac{3}{2}$; следовательно, y_1 убывает при изменении x от $-\infty$ до $3/2$ и возрастает при изменении x от $3/2$ до $+\infty$.

Так как 2^α возрастает с возрастанием α, то заданная функция y убывает в интервале $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ и возрастает в интервале $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$. Поскольку минимум функции y_1 равен $-1/4$, то заданная функция имеет минимум, равный $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$. Если $x=0$, то $y=4$.

График функции показан на рис. 207.

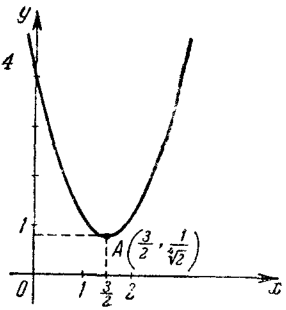

Рис 207.

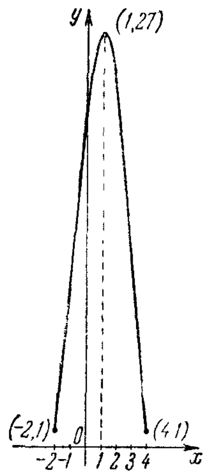

Рис. 208.

201. Для существования функции необходимо, чтобы $y_1 = -x^2 + 2x + 8 \geqslant 0$, откуда $-2 \leqslant x \leqslant 4$. Таким образом, областью существования данной функции является сегмент $[-2, 4]$. Функция y_1 имеет максимум, равный 9, при $x=1$. Следовательно, максимум функции $\sqrt{y_1}$ равен 3, а потому максимум данной функции есть 27.

Функция y_1 на сегменте $[-2, 4]$ (т. е. в области определения данной функции) имеет наименьшее значение, равное нулю. Поэтому наименьшее значение данной функции равно 1.

Итак, данная функция возрастает в интервале $(-2, 1)$ и убывает в интервале $(1, 4)$.

График данной функции показан на рис. 208.

202. Так как функция $\cos x$ определена на всей числовой оси, то и данная функция определена на всей оси.

Поскольку функция $\cos x$ на сегменте $0 \leqslant x \leqslant \pi$ убывает от 1 до -1, то данная функция y на этом же сегменте убывает от 2 до $\frac{1}{2}$. Далее, функция $\cos x$ на сегменте $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$ возрастает от

—1 до 1, поэтому функция y на этом же сегменте возрастает от $\frac{1}{2}$ до 2.

Если x равен $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$, то $y=1$, а если $x=2\pi$, то $y=2$. Достаточно построить график функции на сегменте $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. В силу

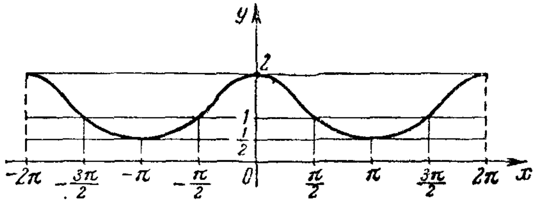

Рис. 209.

четности функции ее график на сегменте $-2\pi \leqslant x \leqslant 0$ строится симметрично правой части относительно оси ординат. На рис. 209 показан график данной функции.

203. Функция определена на всей числовой оси. Строим два вспомогательных графика $y_1=x$ и $y_2=2^x$. Затем делим ординаты графика $y_1=x$ на ординаты графика $y_2=2^x$ при одинаковых значениях абсцисс. По полученным частным строим график данной функции.

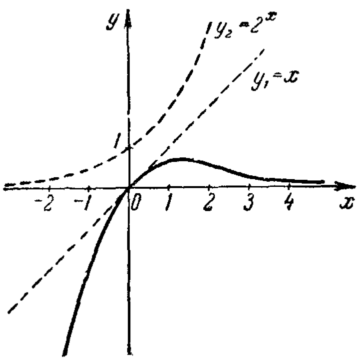

Рис. 210.

Если $x \to +\infty$, то $y_2=2^x$ возрастает «быстрее», чем $y_1=x$, а поэтому $y \to 0$ при $x \to +\infty$, т. е ось абсцисс является асимптотой графика. Для уточнения графика заметим, что точки $(0,\ 0)$, $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$ принадлежат ему.

На рис. 210 вспомогательные графики показаны разрывными линиями, а график данной функции — сплошной.

204. Умножив обе части заданного равенства на $y-\sqrt{y^2+1}$, получим:

$$y^2-y^2-1=3^x\left(y-\sqrt{y^2+1}\right),$$

или

$$3^x\left(y-\sqrt{y^2+1}\right)=-1,$$

откуда

$$y-\sqrt{y^2+1}=-3^{-x}.$$

Сложив это равенство с заданным, получим:

$$2y=3^x-3^{-x},$$

или

$$y=\frac{3^x-3^{-x}}{2}.$$

Строим графики функций $\frac{3^x}{2}$ и $-\frac{3^{-x}}{2}$, потом суммируем (в алгебраическом смысле) ординаты точек этих графиков при одних и тех же значениях абсцисс. По полученным суммам строим график заданной функции. Для уточнения графика заметим, что точки $\left(-1, -1\frac{1}{3}\right)$, $(0, 0)$, $\left(1, 1\frac{1}{3}\right)$ принадлежат графику.

На рис. 211 вспомогательные графики показаны штриховыми линиями, а график заданной функции—сплошной линией.

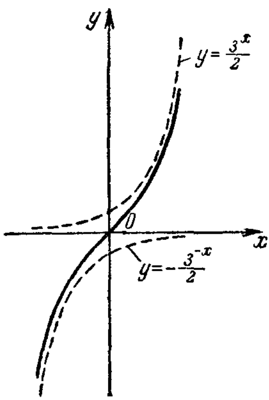

Рис 211.

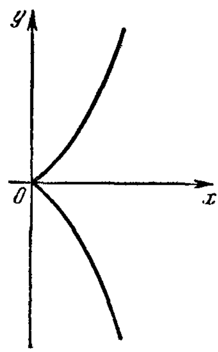

Рис. 212.

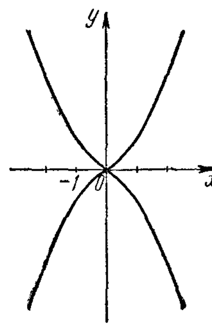

Рис. 213.

205. График функции симметричен относительно оси абсцисс, так как $|-y|=y$.

Область определении функции находим из неравенства $2^x-1\geqslant 0$, откуда $x\geqslant 0$. Таким образом, функция определена в промежутке $[0, +\infty)$.

Строим график функции $y=2^x-1$ (для $y\geqslant 0$) в промежутке $[0, +\infty)$, а для $y=-(2^x-1)$ $(y\leqslant 0)$ отражаем ранее построенную ветвь относительно оси абсцисс (рис. 212).

206. Функция определена на всей числовой оси. Зависимость четна как относительно переменной y, так и относительно переменной x, поэтому график функции симметричен относительно обеих осей, а следовательно, и относительно начала координат.

Таким образом, достаточно построить часть графика функции при $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$, т. е. в первом квадранте. Остальные части графика получим, отразив симметрично относительно осей и начала координат уже построенную часть (рис. 213).

§ 12. Функции, связанные с логарифмической функцией

207. Область определения функции — интервал $(0, +\infty)$. Так как, по определению логарифма, $a^{\log_a x} = x$, то $y = x$, где $x > 0$. График показан на рис. 214.

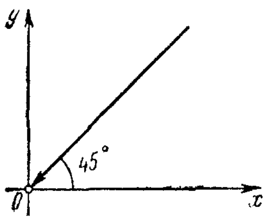

Рис. 214.

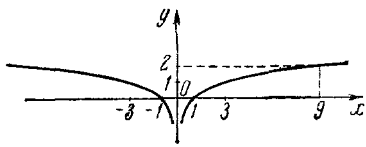

Рис. 215.

208. Областью определения функции являются все действительные числа, кроме нуля ($x \neq 0$). Строим график функции $y = \log_3 x$. Таким образом, мы получаем правую часть графика. Так как $y = \log_3 |x|$ — четная функция, то левая часть графика получается отражением правой части относительно оси ординат (рис. 215).

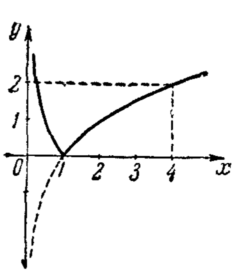

Рис. 216.

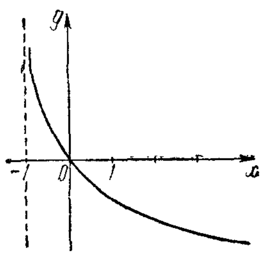

Рис. 217.

209. Строим функцию $y = \log_2 x$, затем ту часть графика, которая расположена под осью абсцисс, отражаем относительно оси абсцисс. На рис. 216 график показан сплошной линией.

210. Область определения функции находится из условия $x + 1 > 0$, откуда $x > -1$.

Когда $x \to -1$, $y \to \infty$. Отсюда заключаем, что прямая $x = -1$ является вертикальной асимптотой. График проходит через начало координат, так как если $x=0$, то и $y=0$. Отсюда и построение (рис. 217).

211. Функция определена на двух интервалах $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$, так как $x > 0$ и $x \neq 1$. Следовательно, график состоит из двух ветвей. В области определения данная функция равносильна функции

$$y = \frac{1}{\log_2 x}.$$

Если $x \to 0$ справа, то $y \to 0$. Если $x \to 1$ слева, то $y \to -\infty$; если $x \to 1$ справа, то $y \to +\infty$, и наконец, если $x \to +\infty$, то $y \to 0$. На основании изложенного заключаем, что прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой, а ось абсцисс — горизонтальной (рис. 218).

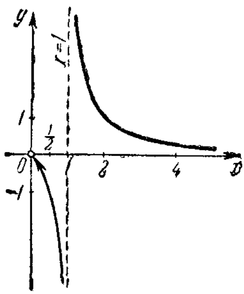

Рис. 218.

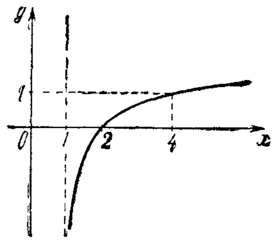

Рис. 219.

212. Для существования $\log_2 x$ должно быть $x > 0$, а для существования $\log_2 \log_2 x$ необходимо, чтобы $\log_2 x > 0$, т. е. $x > 1$, и прямая $x=1$ является асимптотой графика.

Если $\log_2 x = 1$, т. е. если $x=2$, то $y=0$. Следовательно, график пересекает ось абсцисс в точке 2.

Если $x \to 1$, то $y \to -\infty$, а если $x \to \infty$, то $y \to \infty$, причем x увеличивается «быстрее», чем y. При $x=4$ функция $y=1$. На основании изложенного строим график (рис. 219).

213. Так как $\log_2 [(-x)^2 - 4] = \log_2 (x^2 - 4) = y$, то функция четная, а следовательно, график ее симметричен относительно оси ординат. Так как неположительные числа не имеют логарифмов, то должно быть $x^2 - 4 > 0$, откуда $x > 2$ или $x < -2$. Поэтому ветви графика расположены правее прямой $x=2$ и левее прямой $x=-2$.

Если $x \to 2$ справа или $x \to -2$ слева, то $y \to -\infty$, а потому прямые $x=2$ и $x=-2$ являются асимптотами графика.

Когда $x=\pm\sqrt{5}$, то $y=0$, т. е. график пересекает ось абсцисс в точках $-\sqrt{5}$ и $\sqrt{5}$.

Если $x\to\pm\infty$, то $y\to+\infty$. И, наконец, заметим, что точки $(-2\sqrt{5}, 4)$ и $(2\sqrt{5}, 4)$ принадлежат графику (рис. 220).

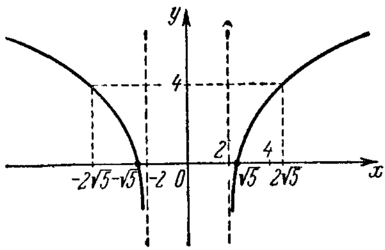

Рис. 220.

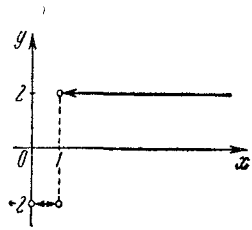

Рис. 221.

214. Должно быть $x>0$ и $\log_2 x\neq 0$, т. е. $x\neq 1$. Исследуемая функция $y=\dfrac{2\log_2 x}{\log_2 x}=2$ при $x>1$ и $y=-2$ при $0<x<1$.

Таким образом, график функции состоит из части прямой $y=2$, находящейся правее точки $(1, 2)$, и отрезка прямой $y=-2$, заключенного между точками $(0, -2)$ и $(1, -2)$ (рис. 221). Точки $(0, -2)$, $(1, -2)$ и $(1, 2)$ не принадлежат графику.

215. Областью определения функции являются все действительные числа, кроме единицы ($x\neq 1$).

Если $x>1$, то $y=\log_2(x-1)$, а если $x<1$, то $y=\log_2(1-x)$.

Так как $x\neq 1$, то асимптотой графика функции служит прямая $x=1$.

График функции $y=\log_2(x-1)$ (при $x>1$) получим, сдвигая график функции $y=\log_2 x$ вдоль оси абсцисс на $+1$.

Поскольку $y=\log_2(1-x)=\log_2[-(x-1)]$, то график функции $y=\log_2(1-x)$ (при $x<1$) симметричен графику $y=\log_2(x-1)$ относительно прямой $x=1$.

Таким образом, с изменением x от $-\infty$ до 1 функция убывает от $+\infty$ до $-\infty$, а при изменении x от 1 до $+\infty$ функция возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. График показан на рис. 222.

216. Функция четная. При $x=0$ функция y имеет максимум, равный 0.

Так как $1-x^2>0$, т. е. $x^2<1$, откуда $-1<x<1$. Поэтому график расположен в полосе, ограниченной прямыми $x=1$ и $x=-1$.

Поскольку $(1-x^2)$ — правильная дробь, а основание логарифма больше единицы $(2>1)$, то $y\leqslant 0$, т. е. график расположен под осью абсцисс.

Если $x\to 1$ слева или $x\to -1$ справа, то $y\to-\infty$, поэтому прямые $x=1$ и $x=-1$ являются асимптотами графика. График изображен на рис. 223.

217. Поскольку $|y|\geqslant 0$, то $\log_2 x\geqslant 0$. Следовательно, функция определена в промежутке $+1\leqslant x<+\infty$. При $y\geqslant 0$ имеем $y=\log_2 x$. Строим график этой функции (верхняя часть графика). Нижняя часть графика симметрична верхней части относительно оси абсцисс (рис. 224).

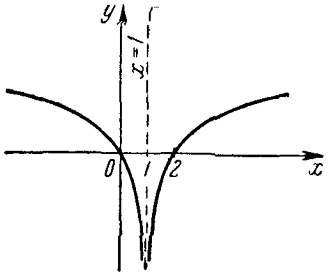

Рис. 222.

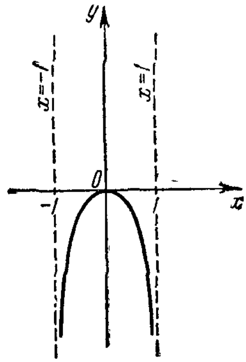

Рис. 223.

218. Функция определена на интервале $(0, +\infty)$.

Если $0<x\leqslant 1$, то $\log_2 x$ возрастает от $-\infty$ до 0, а y убывает от $+\infty$ до 0.

Если $1\leqslant x<+\infty$, то $\log_2 x$ возрастает от 0 до $+\infty$, а y также возрастает от 0 до $+\infty$. График показан на рис. 225.

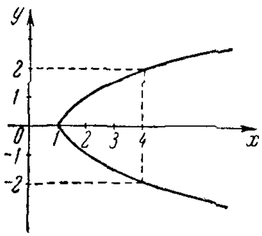

Рис. 224.

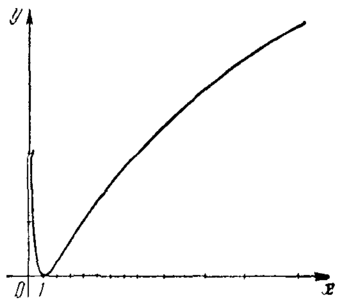

Рис. 225.

219. *Из условия следует, что* $\operatorname{arctg} x>0$, *откуда заключаем,* что областью определения исследуемой функции является интервал $0<x<+\infty$. В этом интервале $\operatorname{arctg} x$ возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$, а $y=\log_a \operatorname{arctg} x$ возрастает от $-\infty$ до $\log_a\frac{\pi}{2}$.

Из изложенного следует, что график функции имеет две асимптоты: вертикальную $x=0$ и горизонтальную $y=\log_a \frac{\pi}{2}$.

Найдем точку на оси абсцисс, которая принадлежит графику функции. Должно быть $\log_a \operatorname{arctg} x=0$, откуда $\operatorname{arctg} x=1$, т. е. $x=\frac{\pi}{4}$. График показан на рис. 226.

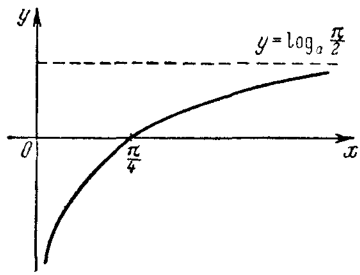

Рис. 226.

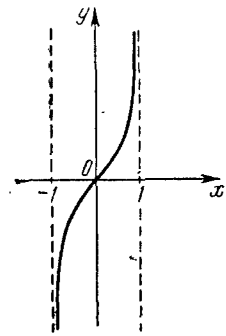

Рис. 227.

220. Область определения находим из неравенства

$$\frac{1+x}{1-x}>0,$$

которое равносильно неравенству $(x+1)(x-1)<0$, откуда $-1<x<1$.

Следовательно, график расположен в полосе, ограниченной прямыми $x=1$ и $x=-1$. Прямые $x=1$ и $x=-1$ являются асимптотами графика, так как при $x \to -1$ справа $y \to -\infty$, а при $x \to 1$ слева $y \to +\infty$. Поскольку

$$\frac{1}{2}\log_2\frac{1-x}{1+x}=\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}=-\frac{1}{2}\log_2\frac{1+x}{1-x},$$

то функция нечетная, а следовательно, график симметричен относительно начала координат. Так как при $x=0$ и $y=0$, то график проходит через начало координат (рис. 227).

221. Область определения состоит из бесконечного множества интервалов $(2k\pi, (2k+1)\pi)$. Функция периодическая с периодом 2π, поэтому достаточно исследовать ее в интервале (в котором она имеет смысл) в пределах одного периода. В полуинтервале $0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$ синус возрастает от 0 до 1, а $\log_a \sin x$ возрастает от $-\infty$ до 0. На полусегменте $\frac{\pi}{2}\leqslant x<\pi$ синус убывает от 1 до 0, а $\log_a \sin x$ убывает от 0 до $-\infty$. Из яеравенства $\sin x \leqslant 1$ следует, что $y \leqslant 0$ и что $y = 0$ $\left(\text{при } x = \frac{\pi}{2}\right)$ есть наибольшее значение функции (рис. 228).

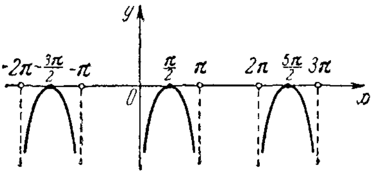

Рис. 228.

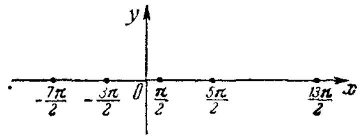

Рис. 229.

222. Для существования функции необходимо, чтобы имело место неравенство $\sin x > 0$, так как логарифм определен только для положнтельных чнсел. Поскольку корень четной степени

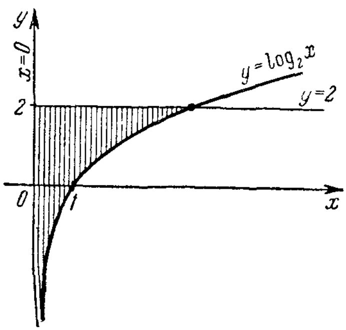

Рис. 230.

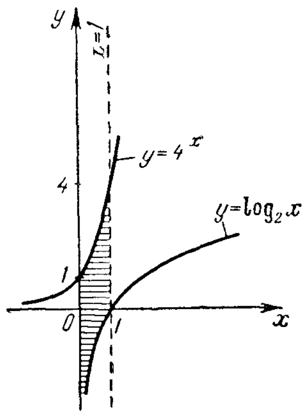

Рис. 231.

определен только для неотрицательных чисел, то

$$\lg \sin x \geqslant 0. \tag{1}$$

Но поскольку $\sin x$ — правильная дробь, то

$$\lg \sin x \leqslant 0. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что

$$\lg \sin x = 0,$$

т. е. $\sin x = 1$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Таким образом, график данной функции состоит из отдельных точек оси абсцисс (рис. 229).

223. Правая часть первого неравенства определена для $x>0$. Следовательно, надо найти на плоскости точки, координаты которых удовлетворяют одновременно трем неравенствам: $x>0$, $y>\log_2 x$ и $y<2$

Искомые точки находятся правее прямой $x=0$ (ось ординат), ниже прямой $y=2$ и выше кривой $y=\log_2 x$ (рис. 230).

224. Должно быть $x>0$, так как правая часть первого неравенства определена для $x>0$.

Итак, координаты искомых точек должны удовлетворять системе неравенств:

$$\begin{cases} 0<x<1, \\ y>\log_2 x, \\ y<4^x. \end{cases}$$

Искомые точки находятся одновременно правее оси ординат, левее прямой $x=1$, ниже кривой $y=4^x$ и выше кривой $y=\log_2 x$ (рис. 231).

§ 13. Тригонометрические функции

225. Функция определена на всей числовой оси. Имеем:

$$y=4\left(\cos^4\frac{x}{2}+2\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}+\sin^4\frac{x}{2}-2\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}\right)=$$

$$=4\left[\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\cdot 4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}\right]=$$

$$=4\left[1-\frac{1}{2}\sin^2 x\right]=4-2\sin^2 x=4-(1-\cos 2x)=3+\cos 2x.$$

Итак, строим график функции $\cos 2x$, а затем сдвигаем его вдоль оси ординат на три единицы вверх (рис. 232).

226. Функция определена на всей числовой оси. Имеем:

$$y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

Так как $\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|\leqslant 1$, то $\sqrt{2}$ есть максимум функции, а $-\sqrt{2}$ — минимум функции. Период функции $T=2\pi$. Нули функции находятся в точках $x=\pi k-\frac{\pi}{4}$.

График получается растяжением синусоиды $y=\sin x$ в $\sqrt{2}$ раз вдоль оси ординат и сдвигом влево на $\frac{\pi}{4}$. В интервалах

$\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ \frac{\pi}{4}+2\pi k\right)$ функция возрастает, а в интервалах $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ \frac{5\pi}{4}+2\pi k\right)$ — убывает. Функция имеет максимум $(\sqrt{2})$ при $x=\frac{\pi}{4}+2\pi k$, а минимум $(-\sqrt{2})$ при $x=\frac{5\pi}{4}+2\pi k$. График показан на рис. 233.

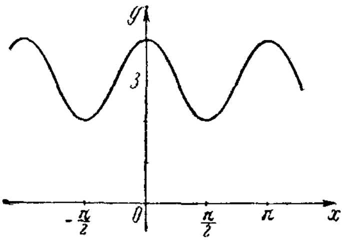

Рис. 232.

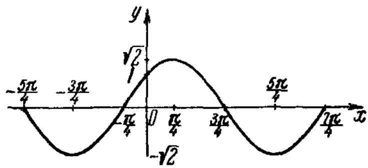

Рис. 233.

227. $\operatorname{tg} x$ и $\sec x$ теряют смысл, когда $\cos x=0$, поэтому $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$ Если $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, то $y=-1$.

Таким образом, графиком данной функции является прямая $y=-1$ с исключенными точками, соответствующими значениям $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, где $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$ (рис. 234).

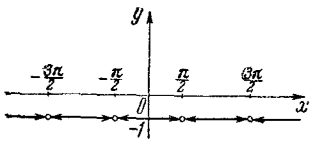

Рис. 234.

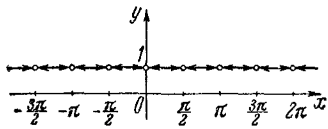

Рис. 235.

228. Так как $\operatorname{tg} x$ теряет смысл, когда $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, а $\operatorname{ctg} x$ теряет смысл при $x=\pi k$, то данная функция не определена, когда $x=\frac{\pi}{2}k$, где $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$

Если $x\neq\frac{\pi}{2}k$, то $y=1$. Таким образом, графиком функции $y=\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x$ является прямая $y=1$, у которой исключены точки $\ldots,\ -\frac{3\pi}{2},\ -\pi,\ -\frac{\pi}{2},\ 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \ldots$ (рис. 235).

229. $\sec x$ теряет смысл, если $\cos x = 0$, поэтому $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$. Если $\cos x > 0$, то $y = 1$, а если $\cos x < 0$, то $y = -1$.

Поскольку $\cos x > 0$ в интервалах $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ и $\cos x < 0$ в интервалах $\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, то элементами графика в интервалах $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ служат отрезки прямой $y = 1$ с исключенными концами, а в интервалах $\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$ — отрезки прямой $y = -1$ также с исключенными концами (рис. 236).

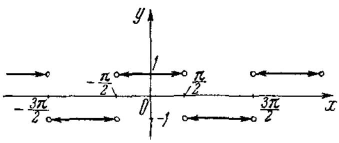

Рис. 236.

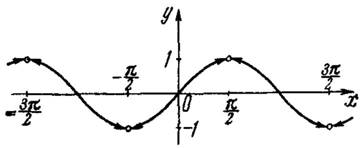

Рис. 237.

230. Так как $\operatorname{tg} x$ теряет смысл, когда $\cos x = 0$, то $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$. Если $\cos x \neq 0$, то $y = \sin x$. Таким образом, графиком данной функции является синусоида с исключенными точками, соответствующими $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (рис. 237).

231. Так как $\operatorname{ctg} x$ теряет смысл, когда $\sin x = 0$, то $x \neq \pi k$. Рассмотрим два случая.

1) если $\sin x > 0$, то $y = \cos x$; 2) если $\sin x < 0$, то $y = -\cos x$.

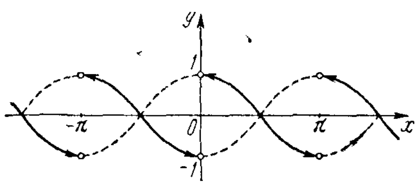

Рис. 238.

Так как $\sin x > 0$ в интервалах $2\pi k < x < \pi + 2\pi k$ и $\sin x < 0$ в интервалах $\pi + 2\pi k < x < 2\pi(k+1)$, то элементами графика функции в интервалах $2\pi k < x < \pi + 2\pi k$ являются куски графика $y = \cos x$, а в интервалах $\pi + 2\pi k < x < 2\pi(k+1)$ — куски графика $y = -\cos x$. График показан на рис. 238 сплошными линиями, причем концы этих линий не принадлежат графику.

232. Так как $\operatorname{ctg} x$ теряет смысл при $x=\pi k$, а $\sec x$ при $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, то данная функция не определена в точках $x=\frac{\pi}{2}k$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Если $x \neq \frac{\pi}{2}k$, то

$$y=\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\sin x}=\operatorname{cosec} x.$$

Таким образом, графиком данной функции служит обычная косекансоида с исключенными вершинами (рис. 239).

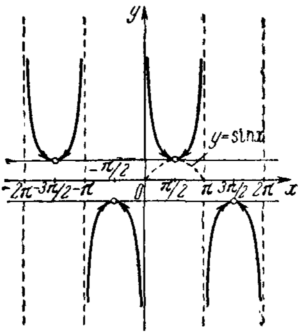

Рис. 239.

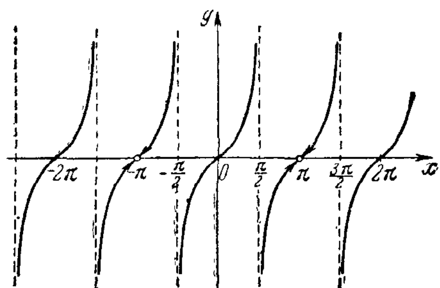

Рис. 240.

233. Даиная функция определена, если $\frac{x}{2}\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, т. е. $x\neq\pi+2\pi k$, или если $\frac{x}{2}\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$, т. е. $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$. При соблюдеиии этих двух условий $y=\operatorname{tg} x$.

Таким образом, графиком данной функции является обычная таигеисоида с исключенными точками: ..., $(-3\pi, 0)$, $(-\pi, 0)$, $(\pi, 0)$, $(3\pi, 0)$, ... (рис. 240).

234. Так как $\cos x\neq 0$, т. е. $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, то прямые $x=-\frac{3\pi}{2}$, $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3\pi}{2}$ являются асимптотами.

Если $\sin x=0$, то $y=0$ и, следовательно, точки $(-\pi, 0)$, $(0, 0)$ и $(\pi, 0)$ принадлежат графику.

Пусть $\sin x\geqslant 0$, тогда $y=\operatorname{tg} x$, т. е. в промежутках $\left(-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right]$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, в которых $\sin x\geqslant 0$, график представляет обычные части ветвей таигенсоиды.

Теперь пусть $\sin x \leqslant 0$, тогда $y = -\operatorname{tg} x$, т. е. в промежутках $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, в которых $\sin x \leqslant 0$, график представляет куски кривой $y = -\operatorname{tg} x$.

График показан на рис. 241 сплошными линиями.

235. Поскольку $|\sin(-x)| + \sin|-x| = |-\sin x| + \sin|x| = |\sin x| + \sin|x| = y$, то данная функция четная, а следовательно, ее график симметричен относительно оси ординат.

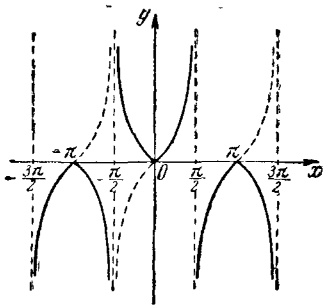

Рис. 241.

Если $x \geqslant 0$, то функция периодическая с периодом 2π. Поэтому достаточно рассмотреть функцию на сегменте $[0, 2\pi]$. Когда $0 \leqslant x \leqslant \pi$, то $y = 2\sin x$, т. е. на этом отрезке графиком функции служит часть синусоиды $y = \sin x$, растянутая вдоль оси ординат в 2 раза.

Когда $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$, то $y = 0$, т. е. на этом промежутке графиком функции является отрезок оси абсцисс. В силу периодичности (для $x \geqslant 0$) получаем всю правую часть графика. В силу четности функции левая часть графика строится симметрично правой относительно оси ординат (рис. 242).

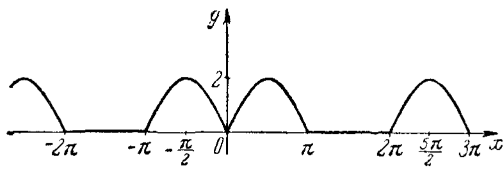

Рис. 242.

236. Если $\cos x \geqslant 0$, т. е. если $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, то $y = \sin 2x$, а если $\cos x \leqslant 0$, т. е. если $\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, то $y = -\sin 2x$.

Таким образом, графиком данной функции являются части синусоиды $y = \sin 2x$, в промежутках $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, и части кривой $y = -\sin 2x$, в промежутках $\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$.

График показан на рис. 243 сплошными линиями.

237. Функция периодическая с периодом 2π.

Если $\sin x \geqslant 0$, т. е. если имеет место соотношение

$$2\pi k \leqslant x \leqslant \pi + 2\pi k, \tag{1}$$

то

$$y = \sin x + \sin x = 2 \sin x.$$

Если $\sin x \leqslant 0$, т. е. если имеет место соотношение

$$\pi + 2\pi k \leqslant x \leqslant 2\pi (k+1), \tag{2}$$

то

$$y = \sin x - \sin x = 0.$$

Таким образом, если x удовлетворяет условию (1), то графиком функции служат участки синусоиды $y = \sin x$, растянутые вдоль

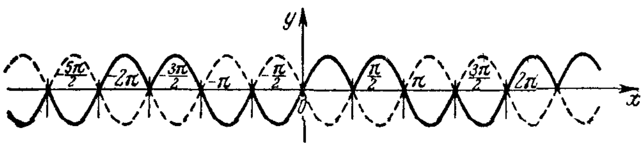

Рис. 243.

оси ординат в два раза; если же x удовлетворяет условию (2), то графиком функции служат отрезки оси абсцисс. Весь график показан на рис. 244.

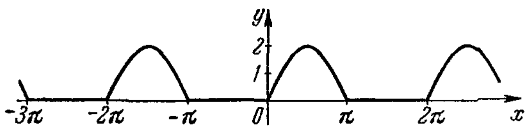

Рис. 244.

238. Данная функция определена, если $\sin x \neq 0$, т. е. $x \neq \pi k$. Следовательно, область определения данной функции состоит из бесконечного числа интервалов ..., $(-3\pi, -2\pi)$, $(-2\pi, -\pi)$, $(-\pi, 0)$, $(0, \pi)$, ... Функция четная, поэтому ее график симметричен относительно оси ординат.

Пусть $\sin x > 0$, тогда $y = \sin x$. В этом случае график состоит из кусков синусоиды, расположенных выше оси абсцисс и заключенных в интервалах ..., $(-2\pi, -\pi)$, $(0, \pi)$, $(2\pi, 3\pi)$, ...

Теперь пусть $\sin x < 0$, тогда $y = -\sin x$. В этом случае график состоит из кусков кривой $y = -\sin x$, расположенных также над осью абсцисс и заключенных в интервалах ..., $(-\pi, 0)$,

$(\pi, 2\pi)$, ... Точки ..., -3π, -2π, $-\pi$, 0, π, ... не принадлежат графику. Весь график данной функции показан на рис. 245.

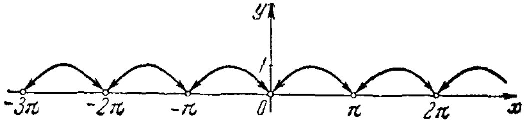

Рис. 245.

239. Данная функция определена, если $\cos\frac{x}{2}\neq 0$ и $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\neq 1$, т. е. если $\frac{x}{2}\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$ и $\frac{x}{2}\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$. Таким образом, функция определена, если соблюдаются условия $x\neq\pi+2\pi k$, $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$.

При соблюдении этих условий

$$y=\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\sec x.$$

Ветви графика, расположенные над осью абсцисс, такие же, как у обычной секансоиды, а ветви, расположенные под осью абсцисс, являются ветвями обычной секансоиды с исключенными вершинами (рис. 246).

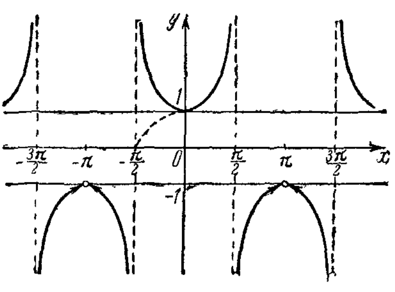

Рис. 246.

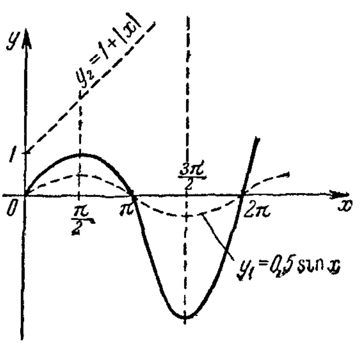

Рис. 247.

240. Данная функция нечетная, так как $[0{,}5\sin(-x)](1+|-x|)=[-0{,}5\sin x](1+|x|)=-y$. Поэтому достаточно построить график для $x\geqslant 0$, т. е. правую часть, а левую часть графика можно получить отражением правой части относительно начала координат.

Строим отдельно графики $y_1=0{,}5\sin x$ и $y_2=1+|x|$, потом перемножаем ординаты точек при одинаковых абсциссах. На рис. 247 правая часть графика показана сплошной линией.

241. Данная функция определена на всей числовой оси, так как она могла бы быть неопределенной при $\cos x=-\frac{3}{2}$, но это исключается, поскольку $|\cos x|\leqslant 1$. Данная функция четная, так как $\cos x$ — четная функция. Следовательно, график ее симметричен относительно оси ординат. Функция периодическая с периодом 2π. Поэтому достаточно рассмотреть график в промежутке $[-\pi,\ \pi]$. В силу периодичности и четности функции мы можем ограничиться ее исследованием в промежутке $[0,\ \pi]$.

Функция имеет максимум, когда $\cos x$ достигает минимума, т. е. когда $\cos x=-1$ и $x=\pi$; и наоборот, функция имеет минимум, когда $\cos x$ достигает максимума, т. е. при $\cos x=1$ и $x=0$. Таким образом, $y_{\max}=\frac{1}{3-2}=1$, $y_{\min}=\frac{1}{3+2}=\frac{1}{5}$. При $x=\frac{\pi}{2}$, т. е. при $\cos x=0$, функция $y=\frac{1}{3}$.

Итак, с изменением x от 0 до π функция возрастает от $\frac{1}{5}$ до 1 (рис. 248).

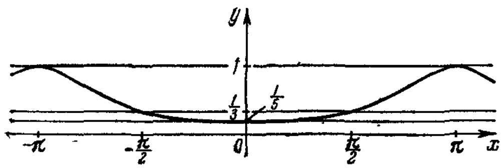

Рис. 248.

242. Поскольку функции $\sin^2 x$, $\sin 2x$ и $\cos^2 x$ имеют период π, то данная функция тоже периодическая с периодом π. Преобразуем данную функцию:

$$y=\frac{\sin^2 x-2\sin x\cos x}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x}=$$
$$=\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg} x=(\operatorname{tg} x-1)^2-1.$$

При $\operatorname{tg} x=1$, т. е. при $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, функция имеет минимум, равный -1.

При $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ функция не существует (так как при этих значениях x функция $\operatorname{tg} x$ теряет смысл), поэтому прямые $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ являются асимптотами графика.

График пересекает ось абсцисс в точках πk и $\operatorname{arc\,tg} 2+\pi k$ ($x \approx 63{,}5° + 180° n$).

В пределах одного периода $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ поведение функции таково: с возрастанием x от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{4}$ функция убывает от $+\infty$ до -1, а при возрастании x от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{2}$ функция возрастает от -1 до $+\infty$ (рис. 249).

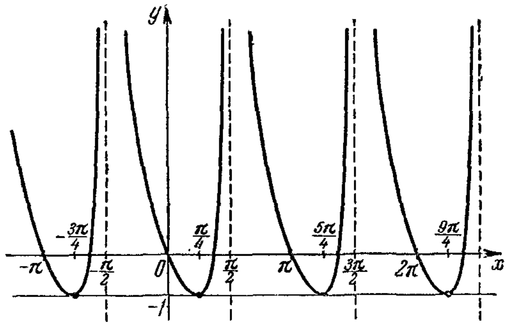

Рис. 249.

243. Если $y=0$, то при любом значении x данное уравнение удовлетворяется, т. е. вся ось абсцисс принадлежит графику.

Если y — любое положительное число, то данное уравнение имеет вид $\sin x = 1$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$,

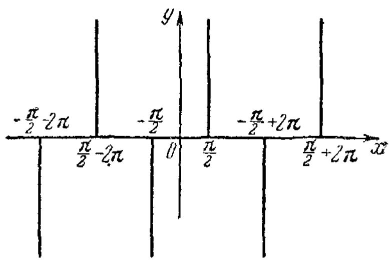

Рис. 250.

т. е. полупрямые, перпендикулярные к оси абсцисс, исходящие из точек $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} \pm 2\pi$, $\frac{\pi}{2} \pm 4\pi$, ... и лежащие над осью абсцисс, принадлежат графику.

И, наконец, если $y<0$, то данное уравнение имеет вид $\sin x=-1$, откуда $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, т. е. полупрямые, перпендикулярные к оси абсцисс, исходящие из точек $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}\pm\pm 2\pi$, $-\frac{\pi}{2}\pm 4\pi$, ... и лежащие под осью абсцисс, также принадлежат искомому графику. График показан на рис. 250.

244. Функция периодическая с периодом 2π. Поэтому достаточно рассмотреть ее на сегменте $[-\pi, \pi]$. Так как

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \qquad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

то

$$y=\frac{2}{3-2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2}{3}\,\frac{1}{\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{9}}.$$

Отсюда видно, что знаменатель достигает минимума, если $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{3}$, т. е. $\frac{x}{2}=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, а следовательно, данная функция достигает максимума, равного 3/4, при $x=2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. При $x=\pm\pi$ функция $y=0$.

Таким образом, с возрастанием x от $-\pi$ до $2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$ функция возрастает от 0 до 3/4, а с изменением x от $2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$ до π функция убывает от 3/4 до 0.

Найдем несколько точек графика в промежутке $[-\pi, \pi]$: если $x=0$, $\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}$, то значения y равны соответственно $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$. График функции показан на рис. 251.

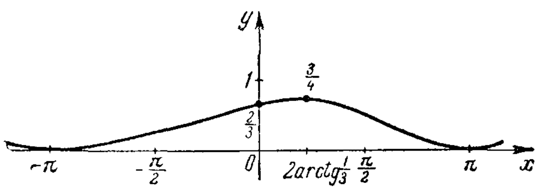

Рис. 251.

245. Данная функция не существует при $\sin x=0$, т. е. при $x=\pi k$; поэтому прямые $x=\pi k$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ являются вертикальными асимптотами графика. Функция периодическая с периодом 2π, поскольку $\cos 2x$ имеет период π, а $\sin x$ — период 2π. Так как $\cos 2x$ — четная функция, а $\sin x$ — нечетная функция, то исследуемая функция нечетная. Поэтому график ее симметричен относительно начала координат. В силу периодичности и нечетности функции достаточно рассмотреть ее график в промежутке, равном половине периода $(0, \pi)$.

Для удобства преобразуем данную функцию:

$$y=\frac{1-2\sin^2 x}{\sin x}=\frac{1}{\sin x}-2\sin x.$$

Отсюда видно, что с изменением x от 0 $(x \neq 0)$ до $\frac{\pi}{2}$ функция y убывает от $+\infty$ до -1, а с изменением x от $\frac{\pi}{2}$ до π $(x \neq \pi)$ функция возрастает от -1 до $+\infty$. В промежутке $(0, \pi)$ функция имеет минимум, равный -1, при $x=\frac{\pi}{2}$. Функция $y=0$ при $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, т. е. график пересекает ось абсцисс в точках $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$. График данной функции показан на рис. 252.

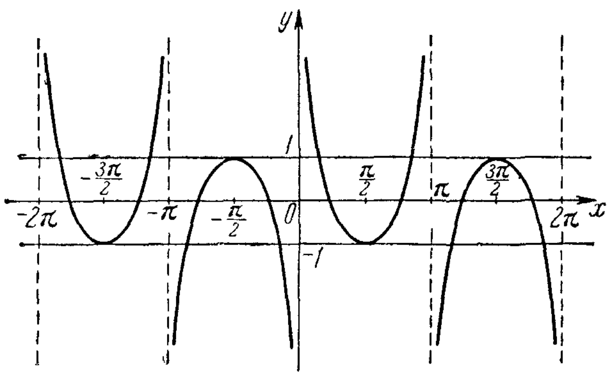

Рис. 252.

246. Для существования функции необходимо, чтобы $\sin x$ удовлетворял неравенству

$$0 \leqslant \sin x \leqslant 1$$

Левый предел объясняется тем, что $|y| \geqslant 0$, т. е. $\sin x$ — величина неотрицательная. Следовательно, областью определения функции являются промежутки

$$2\pi n \leqslant x \leqslant \pi(2n+1).$$

Сначала строим верхнюю часть графика, т. е. график функции $y=\sin x$ в пределах найденной выше области определения функции (для $\sin x \geqslant 0$). Нижняя часть графика симметрична верхней относительно оси абсцисс (рис. 253).

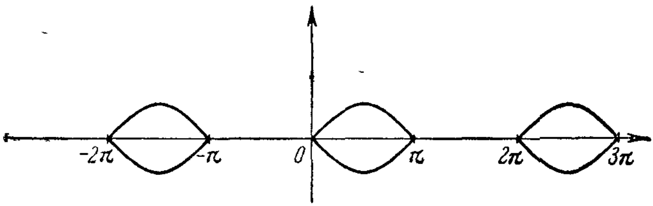

Рис. 253.

247. Область определения — интервал $(-\infty, +\infty)$. Функция четная, поэтому достаточно исследовать ее при $x \geqslant 0$. Неравенства $-x \leqslant x \sin x \leqslant x$ показывают, что линия заключена между прямыми $y = \pm x$ — биссектрисами координатных углов. При этом точки линии, соответствующие значениям $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, в которых $\sin x = 1$, лежат на биссектрисе $y = x$, а точки, соответствующие значениям $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ — на биссектрисе $y = -x$. При $x > 0$ значение y положительно (отрицательно) в тех же интервалах, в которых синус положителен (отрицателен). В точках $x = k\pi$ график пересекает ось абсцисс. Так как $x \sin x < x^2$, то в окрестности начала координат линия расположена между параболой $y=x^2$ и осью абсцисс. График представлен на рис. 254 (парабола не показана на рисунке).

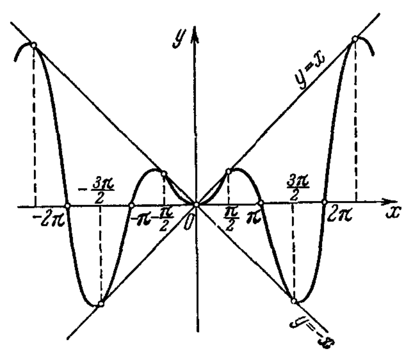

Рис. 254.

248. Функция четная. Поэтому достаточно построить правую часть графика в промежутке $0 \leqslant x < +\infty$, а левая часть получится зеркальным отражением правой части относительно оси ординат. Поскольку $|\sin x^2| \leqslant 1$, то график расположен в полосе между прямыми $y=1$ и $y=-1$. График пересекает ось абсцисс в точках, в которых $x^2 = \pi k$, откуда $x = \sqrt{\pi k}$.

Докажем, что последовательность расстояний между соседними точками пересечения графика с осью абсцисс уменьшается по мере удаления от начала координат.

Действительно, промежуток

$$z=\sqrt{(k+1)\pi}-\sqrt{k\pi}=\frac{\pi}{\sqrt{(k+1)\pi}+\sqrt{k\pi}}$$

при $k\longrightarrow\infty$ стремится к нулю. Этим мы доказали наше утверждение.

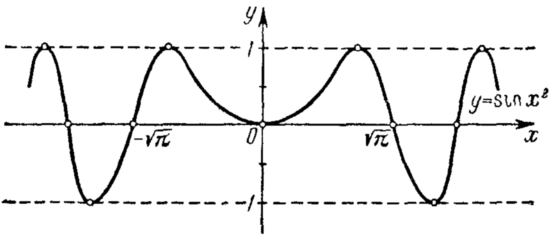

Рис. 255.

Наконец, поскольку $|\sin x^2|\leqslant x^2$, то в окрестности начала координат график расположен между параболой $y=x^2$ и осью абсцисс (рис. 255) (парабола не показана на рисунке).

§ 14. Обратные тригонометрические функции

249. Функция определена на сегменте $[-1, 1]$. Строим график функции $y_1=\arcsin x$, а затем часть графика с отрицательными ординатами отражаем относительно оси абсцисс.

График функции показан на рис. 256 сплошной линией.

250. Функция определена на всей числовой оси. Область изменения

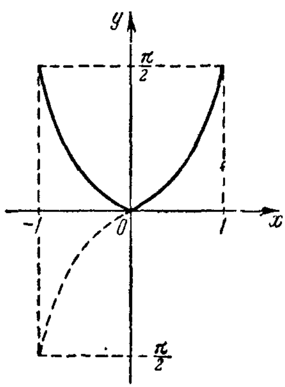

Рис. 256.

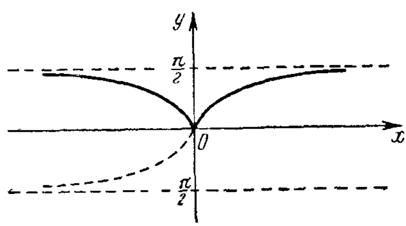

Рис. 257.

функции — промежуток $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$. Строим график функции $y_1=\operatorname{arctg} x$, а затем часть графика с отрицательными ординатами отражаем относительно оси абсцисс. Прямая $y=\frac{\pi}{2}$ является горизонтальной асимптотой.

График функции показан на рис. 257 сплошными линиями.

251. Исследуемая функция существует при всех значениях x, кроме $x=0$, т. е. функция определена в двух интервалах: $(-\infty,\ 0)$ и $(0,\ +\infty)$. Так как $\operatorname{arctg}(-x)+\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{-x}\right)=-\left(\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)=-y$, то функция нечетная.

Исследуем функцию в интервале $(0,\ +\infty)$, т. е. при $x>0$. В этом случае $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\operatorname{arcctg} x$. Таким образом, при $x>0$ имеем:

$$y=\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x=\frac{\pi}{2}.$$

Итак, график функции при $x>0$ есть часть прямой $y=\frac{\pi}{2}$, расположенная правее оси ординат, причем точка $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ не принадлежит графику. В силу нечетности функции вторая часть графика есть часть прямой $y=-\frac{\pi}{2}$, расположенная левее оси ординат причем точка $\left(0,\ -\frac{\pi}{2}\right)$ не принадлежит графику. График функции показан на рис. 258.

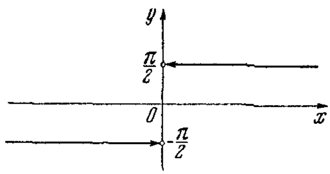

Рис. 258.

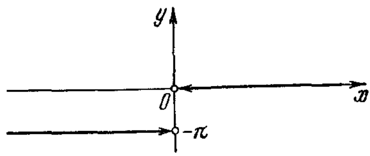

Рис. 259.

252. *Область определения — множество всех действительных чисел, кроме нуля.*

1) Если $x>0$, то

$$y=\operatorname{arctg} x-\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}-\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}+\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0.$$

2) Если $x<0$, то

$$y=\operatorname{arctg} x-\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}-\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}+\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}\right)=$$

$$=-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=-\pi.$$

Таким образом, график данной функции состоит из положительной полуоси абсцисс (при $x>0$) и луча, параллельного оси абсцисс и отстоящего от нее на расстояние, равное $-\pi$ (при $x<0$).

Точки $(0,\ 0)$ и $(0,\ -\pi)$ графику не принадлежат (рис. 259).

253. Равенство $y = \operatorname{Arccos}(\cos x)$ равносильно равенству $\cos x = \cos y$. Следовательно, $y = \pm x + 2\pi k$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ Отсюда усматриваем, что данная функция многозначна. Графиком функции $y = x + 2\pi k$ является бесконечное множество параллельных прямых, образующих углы в 45° с осью абсцисс, а графиком функции $y = -x + 2\pi k$ — бесконечное множество параллельных прямых, образующих углы в 135° с осью абсцисс. Расстояния между последовательными параллельными прямыми в обоих случаях равны $\pi\sqrt{2}$. График функции показан на рис. 260.

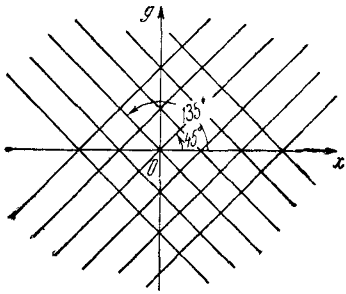

Рис. 260.

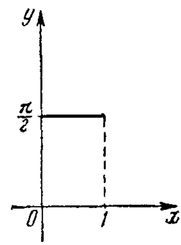

Рис. 261.

254. Должно быть $0 \leqslant 1 - x \leqslant 1$ и $0 \leqslant x \leqslant 1$. Значит, функция определена на сегменте $0 \leqslant x \leqslant 1$. Имеем:

$$\arcsin\sqrt{1-x} = \arccos\sqrt{1-(1-x)} = \arccos\sqrt{x}.$$

Поэтому

$$y = \arccos\sqrt{x} + \arcsin\sqrt{x} = \frac{\pi}{2},$$

т. е. исследуемая функция в области определения есть постоянная величина (рис. 261).

255. Поскольку функция $\sin x$ имеет период 2π, то и функция $\arcsin(\sin x)$ является периодической с тем же периодом. В силу этого достаточно исследовать данную функцию на сегменте величиной 2π. По определению функции $y = \arcsin x$, y есть дуга, заключенная в сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, и тогда

$$\sin y = \sin x.$$

Когда значения x заключены в сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, то $y = x$, и следовательно, на этом сегменте графиком данной функции является отрезок биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Если значения x заключены в сегменте $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, то значения $\pi-x$ заключены в сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, а так как $\sin(\pi-x)=\sin x$, то $y=\pi-x$. Поэтому на сегменте $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ график функции совпадает с отрезком прямой $y=\pi-x$. Вообще можно показать, что если

$$-\frac{\pi}{2}+2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}+2\pi k,$$

то

$$y=x-2\pi k,$$

а если

$$\frac{\pi}{2}+2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}+2\pi k,$$

то

$$y=(\pi-x)+2\pi k.$$

В силу изложенного легко построить график данной функции (рис. 262).

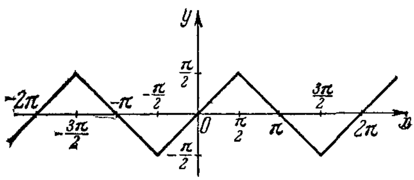

Рис. 262.

256. Поскольку функция $\cos x$ имеет период 2π, то и функция $\arccos(\cos x)$ является периодической с тем же периодом. В силу этого достаточно исследовать данную функцию на сегменте величиной 2π.

В силу определения главного значения арккосинуса, y есть дуга, заключенная в сегменте $[0, \pi]$, и тогда

$$\cos y = \cos x.$$

Когда значения x заключены в сегменте $[0, \pi]$, то $y=x$, и следовательно, на этом сегменте график данной функции есть отрезок биссектрисы первого координатного угла.

Если значения x заключены в сегменте $[\pi, 2\pi]$, то значения $2\pi-x$ заключены в сегменте $[0, \pi]$ и $\cos(2\pi-x)=\cos x$. Поэтому в сегменте $[\pi, 2\pi]$

$$y=\arccos(\cos x)=2\pi-x.$$

Вообще можно показать, что если

$$2\pi k \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi,$$

то

$$y = x - 2k\pi,$$

а если

$$(2k-1)\pi \leqslant x \leqslant 2k\pi,$$

то

$$y = -x + 2k\pi.$$

Теперь легко построить график данной функции (рис. 263).

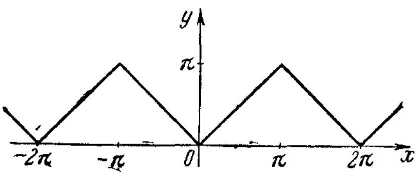

Рис. 263.

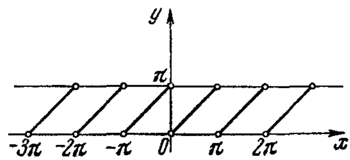

Рис. 264.

257. Функция не определена в точках $x = \pi k$. Поскольку $\operatorname{ctg} x$ имеет период π, то и функция $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$ является периодической с периодом π. Поэтому данную функцию достаточно исследовать в интервале величиной π.

В силу определения функции $y = \operatorname{arctg} x$, y есть дуга, взятая в интервале $(0, \pi)$, и тогда

$$\operatorname{ctg} y = \operatorname{ctg} x.$$

Если значения x заключены в интервале $(0, \pi)$, то

$$y = x,$$

т. е. графиком функции в этом интервале является отрезок биссектрисы первого координатного угла В силу периодичности строятся остальные участки графика (рис. 264). Заметим, что конечные точки отрезков графика исключаются.

258. Функция не определена в точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$. Поскольку функция $\operatorname{tg} x$ имеет период π, то и функция $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ является периодической с периодом π. В силу этого достаточно исследовать данную функцию в интервале величиной π.

На основании определения исследуемая функция есть дуга, взятая в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, и тогда справедливо равенство

$$\operatorname{tg} y = \operatorname{tg} x$$

Если значения x заключены в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, то $y = x$.

В силу изложенного, учитывая периодичность рассматриваемой функции, легко построить ее график (рис. 265).

Заметим, что точки с абсциссами $\frac{\pi}{2}+\pi k$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, не принадлежат графику.

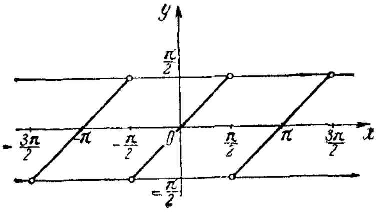

Рис. 265.

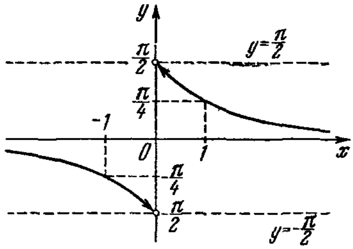

Рис. 266.

259. Функция существует при любом значении x, кроме $x=0$. Таким образом, функция определена в двух промежутках: $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$, а следовательно, ее график состоит из двух ветвей. Функция нечетная, так как

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{-x}\right)=-\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=-y.$$

Поэтому ее график симметричен относительно начала координат. Поскольку, по определению, $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg} m<\frac{\pi}{2}$, то весь график заключен в полосе между прямыми $y=-\frac{\pi}{2}$ и $y=\frac{\pi}{2}$.

Если $x \to 0$ справа, то $\frac{1}{x} \to +\infty$ и $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x} \to \frac{\pi}{2}$. Если $x \to +\infty$, то $\frac{1}{x} \to 0$, причем, $\frac{1}{x}>0$ и $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x} \to 0\ (y>0)$. Отсюда заключаем, что ось абсцисс является асимптотой графика функции. Точка $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ принадлежит графику. Этих данных достаточно для построения правой части графика, т. е. при $x>0$. В силу нечетности функции вторую ветвь графика получаем симметричным отражением уже построенной ветви относительно начала координат (рис. 266).

260. Функция $1-x$ определена при любом значении x, поэтому область определения исследуемой функции та же, что у функции $\arcsin x$, т. е. $-1 \leqslant x \leqslant 1$. В этом сегменте $\sin(\arcsin x)=x$, и поэтому данная функция будет иметь вид:

$$y=x-x+1=1,$$

т. е. графиком функции служит отрезок прямой (включая его концы) $y=1$, заключенный между прямыми $x=-1$ и $x=1$ (рис. 267).

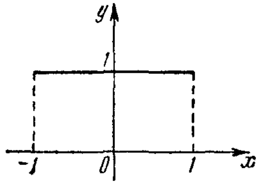

Рис. 267.

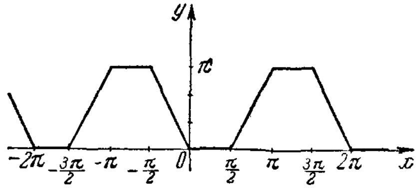

Рис. 268.

261. Строим вспомогательные графики $y_1=\arccos(\cos x)$ и $y_2=\arcsin(\sin x)$ [см. задачи 255 и 256], затем вычитаем ординаты этих графиков при одних и тех же значениях x. Получаем график данной функции (рис. 268).

262. Функция нечетная, так как $-x+\arcsin[\sin(-x)]=$ $=-[x+\arcsin(\sin x)]=-y$. Поэтому достаточно построить график для $x\geqslant 0$; левая часть графика получается при симметричном отражении правой части относительно начала координат.

Строим два вспомогательных графика $y_1=x$ и $y_2=\arcsin(\sin x)$, затем складываем ординаты характерных точек при одних и тех же значениях x.

На рис. 269 вспомогательные графики показаны штриховыми линиями, а данная функция — сплошной линией.

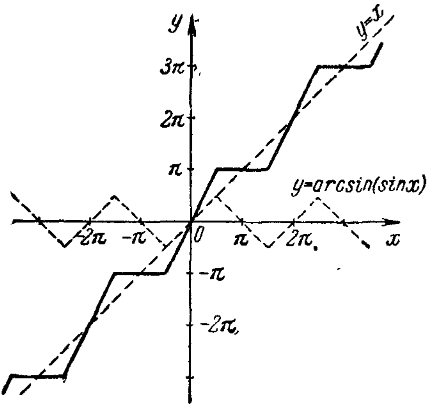

Рис. 269.

263. Поскольку $|-y|=|y|$, то график симметричен относительно оси абсцисс.

Функция $\operatorname{arcctg} x$ определена на всей числовой оси, поэтому и заданная функция определена на всей числовой оси.

Строим график функции $y_1 = \operatorname{arcctg} x$ (он проходит выше оси абсцисс). Это будет верхняя часть графика функции $y = |\operatorname{arcctg} x|$. Для получения нижней части графика отражаем построенную часть относительно оси абсцисс (рис. 270).

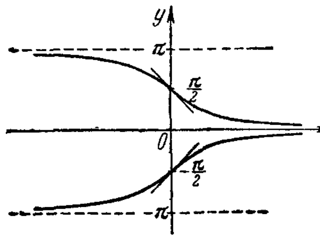

Рис. 270.

264. График функции симметричен относительно оси абсцисс, так как $|-y| = |y|$.

Область определения функции находим из неравенства $\arcsin x \geqslant 0$. Поскольку вообще функция $\arcsin x$ определена на сегменте $-1 \leqslant x \leqslant 1$, то $\arcsin x \geqslant 0$ имеет место при $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Вначале строим график функции $y_1 = \arcsin x$ (рис. 271). Часть этого графика, расположенная в первом квадранте, принадлежит графику функции $|y| = \arcsin x$. Так как график заданной функции симметричен относительно оси абсцисс, то для получения нижней части графика отражаем построенную часть относительно оси абсцисс.

График исследуемой функции показан на рисунке сплошными линиями.

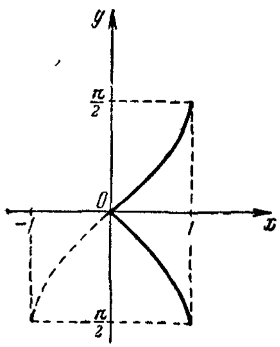

Рис. 271.

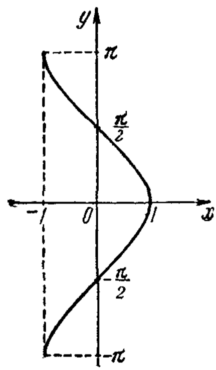

Рис. 272.

265. Поскольку $|-y| = |y|$, то график симметричен относительно оси абсцисс.

Так как $\arccos x \geqslant 0$ во всей области определения $[-1, +1]$, то и заданная функция определена на сегменте $[-1, 1]$.

Строим график функции $y_1 = \arccos x$ (рис. 272). Это будет верхняя часть графика данной функции, для получения нижней части графика отражаем построенную часть относительно оси абсцисс.

266. Поскольку $|-y|=|y|$, то график симметричен относительно оси абсцисс.

Область определения функции находим из неравенства $\operatorname{arctg} x \geqslant 0$.

Так как вообще функция $\operatorname{arctg} x$ определена на всей числовой оси, то неравенство $\operatorname{arctg} x \geqslant 0$ имеет место при $x \geqslant 0$.

Сначала строим график функции $y_1=\operatorname{arctg} x$ (рис. 273). Часть этого графика, расположенная в первом квадранте, принадлежит графику $|y|=\operatorname{arctg} x$. Поскольку график заданной функции симметричен относительно оси абсцисс, то для получения остальной части графика (в четвертом квадранте) отражаем построенную часть относительно оси абсцисс.

График исследуемой функции показан на рис. 265 сплошными линиями.

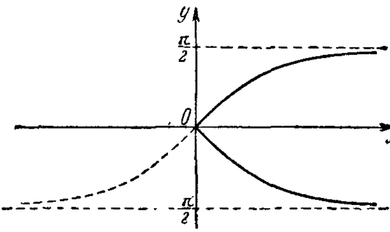

Рис. 273.

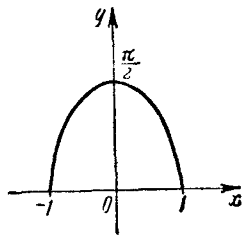

Рис. 274.

267. Функции четная, так как $\arccos(-x)^2=\arccos x^2$, следовательно, график ее симметричен относительно оси ординат. Область определения — сегмент $-1 \leqslant x \leqslant 1$. На сегменте $0 \leqslant x \leqslant 1$ функция убывает от $\frac{\pi}{2}$ до 0, а на сегменте $-1 \leqslant x \leqslant 0$ — возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Найдем еще две точки: если $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, то $y=\frac{\pi}{3}$. График функции изображен на рис. 274.

268. Из условия следует, что $\sin y=\frac{1}{x}$, поэтому область определения находим из соотношения $\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant 1$, или $|x| \geqslant 1$. Таким образом, функция определена в двух промежутках $-\infty < x \leqslant -1$ и $1 \leqslant x < +\infty$. Следовательно, график состоит из двух ветвей. Функция нечетная, так как $\arcsin\left(\frac{1}{-x}\right)=$ $=-\arcsin\frac{1}{x}=-y$, поэтому график функции симметричен относительно начала координат, а потому достаточно построить правую часть графика, а для получения левой отражаем правую относительно начала координат. На полусегменте $1 \leqslant x < +\infty$ функция убывает от $\frac{\pi}{2}$ до 0, а в промежутке $-\infty < x \leqslant -1$ функция убывает от 0 до $-\frac{\pi}{2}$, следовательно, ось абсцисс служит асимптотой графика. График фуикции показаи на рис. 275.

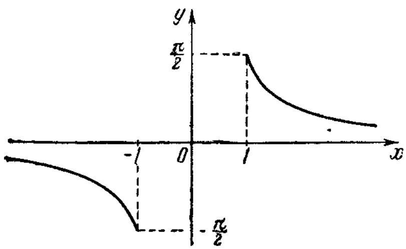

Рис. 275.

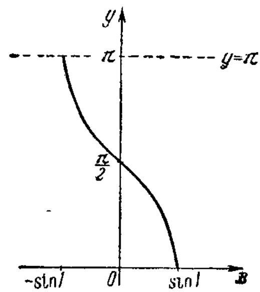

Рис. 276.

269. Должио быть

$$-1 \leqslant \arcsin x \leqslant 1$$

(так как если $y = \arccos m$, то m измеияется от 1 до -1), откуда

$$-\sin 1 \leqslant x \leqslant \sin 1.$$

Таким образом, график расположеи в полосе, ограиичеиной прямыми $x = -\sin 1$ и $x = \sin 1$.

Так как (по определеиию) $0 \leqslant \arccos m \leqslant \pi$, то график расположен в полосе, ограиичеиной прямыми $y = 0$ (ось абсцисс) и $y = \pi$.

Поскольку на сегменте $[-\sin 1, \sin 1]$ фуикция (промежуточный аргумент) $\arcsin x$ возрастает от -1 до 1, то даниая фуикция y убывает от π до 0 (рис. 276).

270. Чтобы фуикция имела смысл, должно быть $\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| \leqslant 1$. Но это соотношеиие справедливо для всех x, следовательно, фуикция определеиа на множестве всех действительных чисел.

Так как фуикция четная, то рассмотрим ее только для $x \geqslant 0$. Из заданного равенства следует:

$$\cos y = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

Для удобства иаходим значение $\operatorname{tg}\frac{y}{2}$:

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos y}{1+\cos y}} = \sqrt{x^2} = x. \qquad (1)$$

Поскольку $0 \leqslant y < \pi$, $0 \leqslant \frac{y}{2} < \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg}\frac{y}{2} \geqslant 0$. Поэтому в равенстве (1) берем знак плюс перед корнем. Из (1) получаем:

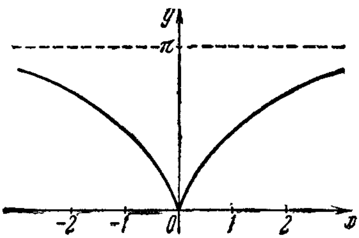

Рис. 277.

$$\frac{y}{2} = \operatorname{arctg} x,$$

или

$$y = 2 \operatorname{arctg} x.$$

Итак, график данной функции (рис. 277) в промежутке $0 \leqslant x < +\infty$ получается из графика $y = \operatorname{arctg} x$ удвоением ординат последнего. Левая часть графика симметрична правой относительно оси ординат.

271. Функция нечетная, так как

$$\arcsin \frac{2(-x)}{1+(-x)^2} = \arcsin\left(-\frac{2x}{1+x^2}\right) = -\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = -y.$$

Должно быть

$$\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \leqslant 1,$$

или

$$-1 \leqslant \frac{2x}{1+x^2} \leqslant 1.$$

Поскольку $1+x^2 > 0$ при любом значении x, то последнее соотношение равносильно соотношению

$$-1-x^2 \leqslant 2x \leqslant 1+x^2.$$

Левое неравенство можно записать так:

$$x^2+2x+1 \geqslant 0, \qquad \text{или } (x+1)^2 \geqslant 0.$$

Это неравенство имеет место при любом значении x. Правое же неравенство перепишем так:

$$x^2-2x+1 \geqslant 0, \qquad \text{или } (x-1)^2 \geqslant 0.$$

Это неравенство также имеет место при любом значении x.

Итак, исследуемая функция определена на всей числовой оси.

Поскольку функция нечетная, то достаточно построить график для $x \geqslant 0$, левая часть графика получится отражением построенной правой части относительно начала координат.

Если $x = 0$, то $y = \arcsin 0 = 0$, т. е. график проходит через начало координат.

Если $x \to +\infty$, то

$$\frac{2x}{1+x^2}=\frac{2/x}{\frac{1}{x^2}+1}\to 0.$$

Следовательно, ось абсцисс является асимптотой графика.

Наибольшее значение функции равно $\frac{\pi}{2}$ при $\frac{2x}{1+x^2}=1$, или при $x=1$. В силу нечетности функции наименьшее значение функции равно $-\frac{\pi}{2}$ при $x=-1$.

С изменением x от $-\infty$ до -1 функция убывает от 0 до $-\frac{\pi}{2}$; с изменением x от -1 до $+1$ функция возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$ и с изменением x от 1 до $+\infty$ функция убывает от $\frac{\pi}{2}$ до 0.

Так как

$$\sin y=\frac{2x}{1+x^2}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{y}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}}=\frac{2\operatorname{ctg}\frac{y}{2}}{1+\operatorname{ctg}^2\frac{y}{2}}$$

то ясно, что $x=\operatorname{tg}\frac{y}{2}$ или $x=\operatorname{ctg}\frac{y}{2}$, т. е.

$$y=2\operatorname{arctg} x \quad \text{или} \quad y=2\operatorname{arcctg} x.$$

Следовательно, в промежутке $0\leqslant x\leqslant 1$ частью графика исследуемой функции является часть графика $y=2\operatorname{arctg} x$, а в промежутке

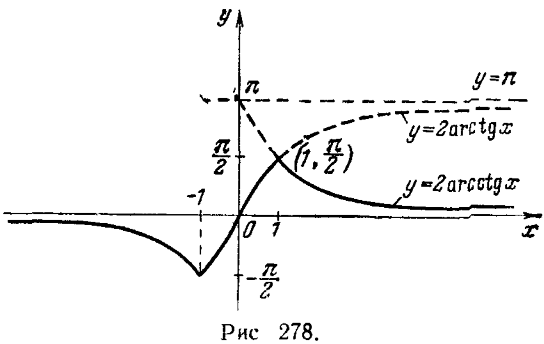

Рис 278.

$1\leqslant x<+\infty$ — часть графика $y=2\operatorname{arcctg} x$. График исследуемой функции показан на рис. 278 сплошной линией.

272. Область определения находим из неравенства $x+1\neq 0$. Таким образом, функция определена на двух промежутках: $(-\infty, -1)$ и $(-1, +\infty)$. Взяв тангенс от обеих частей данного уравнения, получим:

$$\operatorname{tg} y=\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}\right)=$$
$$=\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)+\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}\right)}{1-\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}\right)}=\frac{x+\frac{1-x}{1+x}}{1-x\frac{1-x}{1+x}}=1.$$

Отсюда следует, что

$$y=\frac{\pi}{4}+\pi k. \tag{1}$$

Так как, по определению, $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg} m<\frac{\pi}{2}$, то

$$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg} x<\frac{\pi}{2} \text{ и } -\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}<\frac{\pi}{2}.$$

Сложив почленно эти два неравенства, получим:

$$-\pi<\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}<\pi, \text{ т. е. } -\pi<y<\pi.$$

Отсюда заключаем, что в (1) k может принимать значение только 0 или -1. Следовательно, $y=\frac{\pi}{4}$ или $y=-\frac{3\pi}{4}$. Остается установить, при каких значениях аргумента x функция y равна $\frac{\pi}{4}$, а при каких она равна $-\frac{3\pi}{4}$.

1) Если $x<-1$, то $\frac{1-x}{1+x}<0$, а поэтому $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg} x<0$ и $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}<0$. Сложив почленно эти два неравенства, получим:

$$-\pi<y<0.$$

Теперь ясно, что при $x<-1$ функция $y=-\frac{3\pi}{4}$, а ее график есть часть прямой $y=-\frac{3\pi}{4}$, расположенная левее прямой $x=-1$, причем точка $\left(-1, -\frac{3\pi}{4}\right)$ не принадлежит графику.

2) Если $-1 < x < 0$, то $\operatorname{arctg} x < 0$, а $\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x} > 0$, а следовательно, их сумма (y) заключена между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$, а потому в интервале $(-1, 0)$ функции $y=\frac{\pi}{4}$.

3) Если $0 \leqslant x \leqslant 1$, то $\operatorname{arctg} x \geqslant 0$ и $\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x} > 0$, а следовательно, их сумма (y) положительна, и поэтому на сегменте $[0, 1]$ функция $y=\frac{\pi}{4}$.

4) Если $1 < x < +\infty$, то $\operatorname{arctg} x > 0$, а $\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x} < 0$, а следовательно, их сумма (y) заключена между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$, и потому в интервале $(1, +\infty)$ функции $y=\frac{\pi}{4}$.

Итак, если $-1 < x < +\infty$, то $y=\frac{\pi}{4}$, а график ее — часть прямой $y=\frac{\pi}{4}$, расположенная правее прямой $x=-1$. Весь график данной функции показан на рис. 279.

273. Поскольку функция $y_1 = x$ определена на всей числовой оси, а функция $y_2 = \arcsin x$ — на сегменте $[-1, 1]$, то и исследуемая функция определена на сегменте $[-1, 1]$. Данная функция

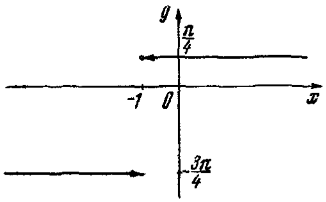

Рис. 279.

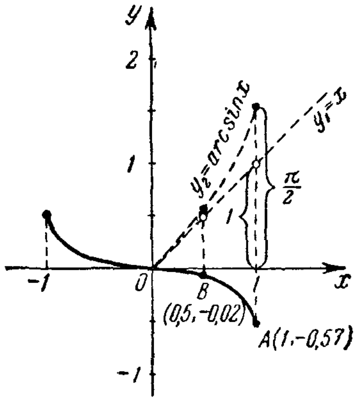

Рис. 280.

нечетная, так как $(-x)-\arcsin(-x) = -(x-\arcsin x) = -y$. Поэтому достаточно построить правую часть графика при $x \geqslant 0$, а левую часть получим симметричным отражением правой относительно начала координат. Строим два вспомогательных графика $y_1 = x$ и $y_2 = \arcsin x$, затем вычитаем ординаты этих графиков при одинаковых значениях аргумента x. Ординатами точек графика данной функции являются эти разности. Для уточнения графика определяем еще точки (0, 0), A (1; —0,57), B (0,5; —0,02). На рис. 280 вспомогательные графики показаны штриховыми линиями, а график заданной функции — сплошной.

274. Если x заключен в интервалах

$$-\frac{\pi}{2}+2\pi k\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}+2\pi k, \tag{1}$$

то

$$y=x(x-2\pi k), \tag{2}$$

если же

$$\frac{\pi}{2}+2\pi k\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}+2\pi k, \tag{3}$$

то

$$y=x[(2k+1)\pi-x]. \tag{4}$$

Придавая k в (1) и (2) одинаковые значения, получим:

если $k=0$, то $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ и $y=x^2$;

если $k=1$, то $\frac{3\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{2}$ и $y=x^2-2\pi x$, и т. д.

Придавая k в (3) и (4) одинаковые значения, получим:

если $k=0$, то $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$ и $y=-x^2+\pi x$;

если $k=1$, то $\frac{5\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{2}$ и $y=-x^2+3\pi x$, и т. д.

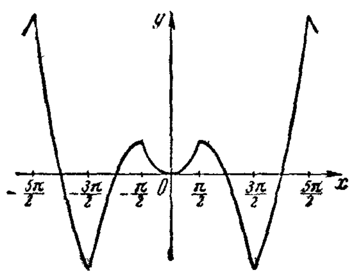

Рис 281.

Таким образом, графиком данной функции служит линия, состоящая из частей различных парабол (рис. 281).

§ 15. Разные задачи

275. Пусть аргумент x получил приращение $\Delta x > 0$, тогда

$$f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)-\sin(x+\Delta x).$$

Рассмотрим разность

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta x-\sin(x+\Delta x)+\sin x=$$
$$=\Delta x-2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=2\left[\frac{\Delta x}{2}-\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right].$$

Если x и $x+\Delta x$ принадлежат промежутку $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ и $\Delta x > 0$, то выражение, заключенное в квадратных скобках, положительно, поскольку

$$\frac{\Delta x}{2}>\sin\frac{\Delta x}{2},\ \text{а}\ \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)<1.$$

Таким образом, если $\Delta x > 0$, то

$$f(x+\Delta x)>f(x),$$

т. е. заданная функция возрастает в промежутке $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$.

276. Поскольку

$$0<\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\leqslant 1\quad\text{и}\quad -1<\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}<1,$$

то исследуемая функция определена для любых значений x.

Так как

$$\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\arccos\sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}=\arccos\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}=$$
$$=\arccos\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}},$$

то

$$y=\arccos\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}-\arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Если $x\geqslant 0$, то

$$\arccos\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}=\arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ \text{и, значит,}\ y=0.$$

Если $x<0$, то

$$\arccos\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}=\pi-\arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

и

$$y=\pi-2\arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

277. Область определения функции $(-\infty, +\infty)$. Возьмем два произвольных значения аргумента x_1 и x_2 такие, что $x_2>x_1$, тогда

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{x_2}{1+x_2^2}-\frac{x_1}{1+x_1^2}=\frac{(x_2-x_1)(1-x_1x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}.$$

Если $0<x_1<x_2<1$ или $-1<x_1<x_2<0$, то $1-x_1x_2>0$. В силу этого заключаем, что $f(x_2)-f(x_1)>0$.

Таким образом, в промежутке $(-1, +1)$ функция возрастает от $-\frac{1}{2}$ до $\frac{1}{2}$.

Если же $x_1<x_2<-1$ или $1<x_1<x_2$, то $1-x_1x_2<0$ и $f(x_2)-f(x_1)<0$.

Итак, в промежутках $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$ функция убывает.

278. Во-первых, $x\neq\frac{\pi}{2}k$, так как при $k=2m$ не существует $\operatorname{ctg}x$, а при $k=2m-1$ не существует $\operatorname{tg}x$.

Во-вторых, должно быть $\operatorname{tg}x>0$ и $\operatorname{ctg}x>0$, поскольку в противном случае не существовали бы логарифмы. Поэтому необходимо, чтобы имело место соотношение

$$2k\frac{\pi}{2}<x<(2k+1)\frac{\pi}{2}.$$

Так как последнее соотношение не противоречит неравенству $x\neq\frac{\pi}{2}k$, то функция определена при

$$2k\frac{\pi}{2}<x<(2k+1)\frac{\pi}{2}.$$

279. Для существования левой части уравнения должно быть

$$x>0. \qquad (1)$$

Для существования правой части необходимо, чтобы имело место

$$-x^2-3x-2\geqslant 0,$$

или

$$x^2+3x+2\leqslant 0.$$

Корнями левой части этого неравенства являются числа -1 и -2. Таким образом, для существования последнего неравенства, а следовательно, и правой части заданного уравнения необходимо, чтобы x удовлетворяло неравенству

$$-2\leqslant x\leqslant -1. \qquad (2)$$

Так как соотношения (1) и (2) противоречивы, то заданное уравнение решений не имеет.

280. Для существования левой части уравнения необходимо, чтобы имело место неравенство

$$x^2-5x+6\geqslant 0.$$

Числа 2 и 3 являются корнями левой части этого неравенства. Следовательно, это неравенство справедливо

$$\text{при } x\geqslant 3 \text{ или при } x\leqslant 2. \tag{1}$$

Для существования правой части уравнения необходимо, чтобы было

$$9x-10-2x^2\geqslant 0,$$

или

$$2x^2-9x+10\leqslant 0.$$

Числа 2 и 2,5 являются корнями левой части этого неравенства. Следовательно, это неравенство имеет место при

$$2\leqslant x\leqslant 2{,}5. \tag{2}$$

Из (1) и (2) заключаем, что обе части данного уравнения существуют одновременно только при $x=2$. Число два является решением уравнения, так как при $x=2$ обе части уравнения превращаются в нуль.

281. Подставив $x=1$ в уравнение, убеждаемся, что единица является корнем уравнения. Остается доказать, что, кроме 1, это уравнение не имеет действительных корней.

Для существования радикалов должно быть

$$-x^2+3x-2\geqslant 0, \tag{1}$$
$$x^2-4x+3\geqslant 0, \tag{2}$$
$$x\geqslant 0.$$

Корни левой части неравенства (1) суть 1 и 2, поэтому из (1) имеем:

$$1\leqslant x\leqslant 2.$$

Корнями левой части неравенства (2) являются числа 1 и 3, поэтому из (2) следует, что

$$x\geqslant 3 \quad \text{или } x\leqslant 1.$$

Итак, имеем две системы неравенств:

$$\begin{cases} 1\leqslant x\leqslant 2, \\ x\geqslant 3, \\ x\geqslant 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} 1\leqslant x\leqslant 2, \\ x\leqslant 1, \\ x\geqslant 0. \end{cases}$$

Первая система не имеет решений, а вторая имеет место только при $x=1$.

Таким образом, данное уравнение имеет единственный корень, равный единице.

282. Данное уравнение перепишем в виде:

$$3\cos\alpha\cos^2 x+3\sin\alpha\sin x\cos x=2\sin^2 x.$$

Это уравнение однородно относительно $\sin x$ и $\cos x$. Поскольку в данном случае $\cos x\neq 0$, то, разделив все члены уравнения на $\cos^2 x$, приходим к уравнению

$$2\operatorname{tg}^2 x-3\sin\alpha\operatorname{tg} x-3\cos\alpha=0,$$

равносильному данному.

Рассмотрим следующие случаи:

а) Если $0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$, то $\frac{-3\cos\alpha}{2}<0$, дискриминант уравнения положителен, а корни имеют противоположные знаки. Поэтому уравнение сводится к совокупности двух уравнений $\operatorname{tg} x=a$, где $a<0$, и $\operatorname{tg} x=b$, где $b>0$.

б) Если $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, то $\frac{-3\cos\alpha}{2}>0$. В данном случае для существования решений необходимо, чтобы дискриминант уравнения был неотрицательным, т. е.

$$9\sin^2\alpha+24\cos\alpha\geqslant 0.$$

Но так как $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$, то последнее неравенство перепишется так:

$$9\cos^2\alpha-24\cos\alpha-9\leqslant 0.$$

Корнями левой части этого соотношения являются числа 3 и $-\frac{1}{3}$. Поэтому для того, чтобы неравенство имело место, должно быть

$$-\frac{1}{3}\leqslant\cos\alpha\leqslant 3.$$

Но поскольку $\cos\alpha<0$ (в данном случае), то

$$-\frac{1}{3}\leqslant\cos\alpha<0.$$

Далее, заметим, что $\frac{3\sin\alpha}{2}>0$. На основании изложенного можно заключить, что при условиях

$$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi \text{ и } -\frac{1}{3}\leqslant\cos\alpha<0$$

уравнение сводится к совокупности уравнений $\operatorname{tg} x=c$, где $c>0$, и $\operatorname{tg} x=d$, где $d>0$.

в) Если $\alpha=\frac{\pi}{2}$, то уравнение принимает вид

$$2\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg} x=0,$$

т. е. сводится к совокупности уравнений

$$\operatorname{tg} x=0 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} x=\frac{3}{2}.$$

г) Если $\alpha=\pi$, то уравнение принимает вид

$$2\operatorname{tg}^2 x=-3$$

и действительных корней не имеет.

283. а) Если $0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$, то $-\frac{1}{\cos\alpha}<0$, и дискриминант уравнения больше нуля; следовательно, корни уравнения действительные и различные, причем один из них положительный, а другой отрицательный.

б) Если $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, то $-\frac{1}{\cos\alpha}>0$. Исследуем дискриминант уравнения:

$$D=\sin^2\alpha+\cos\alpha.$$

Уравнение будет иметь решение, если

$$\sin^2\alpha+\cos\alpha\geqslant 0,$$

или

$$\cos^2\alpha-\cos\alpha-1\leqslant 0.$$

Корнями левой части этого соотношения являются числа $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ и $-\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Следовательно, последнее неравенство имеет место при условии

$$-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\leqslant\cos\alpha\leqslant\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Но так как в данном случае $\cos\alpha<0$, то в последнем соотношении верхнюю границу надо заменить нулем.

Итак,

$$-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\leqslant\cos\alpha<0.$$

Далее, выражение

$$-\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}=-2\operatorname{tg}\alpha>0.$$

На основании изложенного заключаем, что если выполняются условия $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ и $-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\leqslant\cos\alpha<0$, то данное уравнение имеет два положительных корня.

в) Если $\alpha=\frac{\pi}{2}$, то заданное уравнение принимает вид $2x-1=0$, корень которого равен $1/2$.

г) Если $a=\pi$, то данное уравнение принимает вид $x^2+1=0$, которое не имеет ни одного действительного корня.

284. Обозначив $\sqrt{x^2-1}$ через y, получим систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=a, \\ x^2-y^2=1. \end{cases}$$

Очевидно, что если $a=0$, то система не имеет корней. Если $a\neq 0$, то, разделив почленно второе уравнение на первое, получим:

$$x-y=\frac{1}{a}.$$

Теперь, решая систему

$$\begin{cases} x+y=a, \\ x-y=\dfrac{1}{a}, \end{cases}$$

находим:

$$x=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right), \quad y=\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right).$$

Ясно, что $x=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$ является корнем данного уравнения тогда и только тогда, когда y неотрицателен ($+\sqrt{x^2-1}\geqslant 0$), т. е. должно быть

$$a-\frac{1}{a}\geqslant 0,$$

$$\frac{(a-1)(a+1)}{a}\geqslant 0,$$

$$(a+1)\,a\,(a-1)\geqslant 0.$$

Из последнего легко усмотреть, что

$$-1\leqslant a<0 \quad \text{или} \quad a\geqslant 1.$$

Таким образом, только при этих условиях уравнение имеет решения; если же a не удовлетворяет ни одному из этих условий, то уравнение решений не имеет.

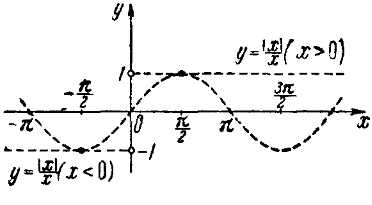

Рис. 282.

285. Для решения этого уравнения удобно прибегнуть к графическому изображению функций $y=\sin x$ и $y=\frac{|x|}{x}$. Из рис. 282 видно, что графики $y=\sin x$ и $y=\frac{|x|}{x}$ при $x>0$ имеют общие точки, когда $x=\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$, а при $x<0$, когда $x=-\frac{\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, \ldots$

Очевидно, что все корни уравнения выражаются двумя формулами:

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, \quad \text{где} \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

и

$$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi l, \quad \text{где} \quad l=0,\ -1,\ -2,\ \ldots$$

286. Чтобы первое уравнение системы имело смысл, должно быть $x>0$, $y>0$, $x\neq 1$, $y\neq 1$. Поэтому мы будем искать только положительные решения, отличные от единицы. Положим $z=\log_y x$, тогда $\log_x y=\frac{1}{z}$ и первое уравнение примет вид:

$$z+\frac{1}{z}=\frac{5}{2}=2+\frac{1}{2},$$

откуда

$$z_1=2, \quad z_2=\frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$\log_y x=2 \quad \text{или} \quad \log_y x=\frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$x=y^2 \text{ или } y=x^2.$$

Второе уравнение системы при $y=x^2$ принимает вид:

$$x^2+x-a-a^2=0. \tag{1}$$

Решая это уравнение, получаем:

$$x_1=a, \quad x_2=-(a+1).$$

Если $a>0$, $a\neq 1$, то $x=a$, $y=a^2$ — решение данной системы, а $x=-(a+1)$ решения не дает.

Если $-(a+1)>0$, $-(a+1)\neq 1$, т. е. $a<-1$, но $a\neq -2$, то $x=-(a+1)$, $y=(a+1)^2$ — решение данной системы, а $x=a$ решения не дает. Если $-1\leqslant a\leqslant 0$, то $x=a$ и $x=-(a+1)$ также не дают решения данной системы.

До сих пор мы исходили из того, что $y=x^2$. Если же $x=y^2$, то второе уравнение системы принимает вид:

$$y^2+y-a-a^2=0,$$

т. е. мы пришли к уравнению вида (1), только вместо x в этом уравнении стоит y.

Итак, если $a>0$, $a\neq 1$, то система имеет два решения: $x=a$, $y=a^2$ и $x=a^2$, $y=a$.

Если $a<-1$, но $a\neq -2$, то система имеет также два решения: $x=-(a+1)$, $y=(a+1)^2$ и $x=(a+1)^2$, $y=-(a+1)$.

Если же $-1\leqslant a<0$, то система решений не имеет.

287. Эта функция в промежутке $0 < x \leqslant \frac{\pi}{4}$ убывает от $+\infty$ до 2, а в промежутке $\frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{\pi}{2}$ возрастает от 2 до $+\infty$. Действительно,

$$y = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sin 2x}.$$

В промежутке $0 < x \leqslant \frac{\pi}{4}$ аргумент $2x$ возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$, знаменатель $\sin 2x$ возрастает от 0 до 1, а y убывает от $+\infty$ до 2. Для промежутка $\frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{\pi}{2}$ рассуждения аналогичные.

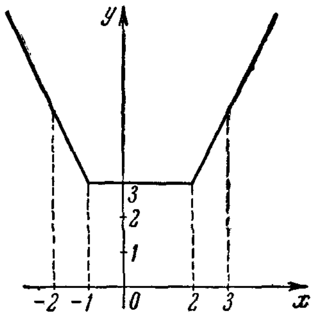

Рис. 283.

288. Рассмотрим сначала функцию $y_1 = |x-2| + |x+1|$. Она убывает в интервале $(-\infty, -1)$, постоянна и равна 3 в интервале $(-1, 2)$, возрастает в интервале $(2, +\infty)$. График функции y_1 показан на рис. 283.

Так как 3^α возрастает (убывает) вместе с α, то в интервале $(-\infty, -1)$, заданная функция убывает, в интервале $(-1, 2)$ функция постоянна и равна 27, а в интервале $(2, +\infty)$ функция возрастает.

289. Сначала докажем, что заданная функция возрастает в промежутке $(-1, 0)$. Пусть $-1 < x_1 < x_2 < 0$, где x_1 и x_2 — любые числа, удовлетворяющие этим неравенствам. Требуется доказать, что

$$(x_2^2 - 1)^2 > (x_1^2 - 1)^2,$$

или

$$(x_2^2 - 1)^2 - (x_1^2 - 1)^2 > 0.$$

Имеем:

$$(x_2^2 - 1)^2 - (x_1^2 - 1)^2 = (x_2^2 + x_1^2 - 2)(x_2^2 - x_1^2) =$$
$$= (x_2^2 + x_1^2 - 2)(x_2 - x_1)(x_2 + x_1).$$

Учитывая ограничения, наложенные на x_1 и x_2, будем иметь:

$$0 < x_2^2 < 1, \quad 0 < x_1^2 < 1.$$

Итак, $\quad x_2^2 + x_1^2 - 2 < 0, \quad x_2 - x_1 > 0, \quad x_2 + x_1 < 0.$

Следовательно, произведение

$$(x_2^2 + x_1^2 - 2)(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0.$$

Таким образом, функция $y = (x^2 - 1)^2$ в промежутке $(-1, 0)$ возрастает.

Теперь докажем, что эта функция убывает в промежутке (0, 1). Пусть $0 < x_1 < x_2 < 1$. Имеем:

$$(x_2^2-1)^2-(x_1^2-1)^2=(x_2^2+x_1^2-2)(x_2-x_1)(x_2+x_1).$$

Учитывая ограничения, наложенные на x_1 и x_2, будем иметь: $0 < x_2^2 < 1$, $0 < x_1^2 < 1$. Итак,

$$x_2^2+x_1^2-2 < 0, \quad x_2-x_1 > 0 \quad \text{и} \quad x_2+x_1 > 0.$$

Следовательно, произведение

$$(x_2^2+x_1^2-2)(x_2-x_1)(x_2+x_1) < 0,$$

а это значит, что в промежутке (0, 1) функция $y=(x^2-1)^2$ убывает.

290. Область определения функции $(-\infty, +\infty)$.

Возьмем произвольные числа x_1 и x_2. Для определенности пусть $x_2 > x_1$. Рассмотрим разность

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2^3+2x_2+1)-(x_1^3+2x_1+1)=$$
$$=(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2+2)=$$
$$=(x_2-x_1)\left[\left(x_1+\frac{1}{2}x_2\right)^2+2+\frac{3}{4}x_2^2\right]>0.$$

Таким образом, если $x_2 > x_1$, то и $f(x_2) > f(x_1)$. Следовательно, функция возрастает во всей области ее определения.

291. Имеем:

$$y_1=(x^2-1)^3+1=x^6-3x^4+3x^2=$$
$$=x^2(x^4-3x^2+3)=x^2\left[(x^2-1{,}5)^2+\frac{3}{4}\right].$$

Очевидно, что функция y_1 неотрицательна и при $x=0$ имеет минимум, равный нулю. Поэтому заданная функция y имеет минимум $3^0=1$ и убывает в интервале $(-\infty, 0)$, а в интервале $(0, +\infty)$ возрастает.

292. Для существования функции необходимо, чтобы функция $y_1=2x^2-4x+3>0$. Поскольку коэффициент при x^2 положителен, то функция $y_1=2x^2-4x+3$ имеет минимум

$$y_{1\,min}=\frac{4\cdot2\cdot3-(-4)^2}{4\cdot2}=1 \quad \text{при} \quad x=-\frac{-4}{4}=1.$$

Значит данная функция $y=\frac{1}{\sqrt{y_1}}$ имеет максимум, равный 2.

293. Чтобы функция существовала, должно быть

$$-2\cos^2 x+3\cos x-1 \geqslant 0, \tag{1}$$

откуда

$$\frac{1}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1. \tag{2}$$

В силу (1) заключаем, что наименьшее значение функции равно нулю. Наибольшее значение функции равно

$$\sqrt{\frac{4\cdot(-2)(-1)-3^2}{4\cdot(-2)}}=\sqrt{\frac{1}{8}}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Из (2) следует, что функция определена в промежутках

$$-\frac{\pi}{3}+2\pi k\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \text{где } k=0,\ \pm 1,\ \pm 2\ldots$$

294. После преобразований заданное равенство принимает вид:

$$y=nx^2-2(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)x+\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right).$$

Известно, что функция $y=ax^2+bx+c$ имеет минимум при $x=-\frac{b}{2a}$, где $a>0$.

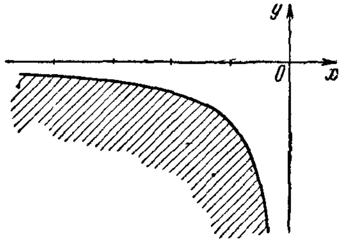

Рис. 284.

Таким образом, в нашей задаче функция достигает минимума при

$$x=\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}.$$

295. Искомые точки находятся в третьем квадранте ниже ветви гиперболы $y=\frac{1}{x}$, включая точки самой гиперболы (рис. 284).

296. Точки, координаты которых удовлетворяют неравенству $x^2+y^2\leqslant 1$, составляют круг радиуса 1 с центром в начале координат, включая точки окружности, а $y=x$ — биссектриса первого и третьего координатных углов. Следовательно, искомые точки — отрезок биссектрисы $y=x$, заключенный внутри круга $x^2+y^2=1$, включая его концы (рис. 285).

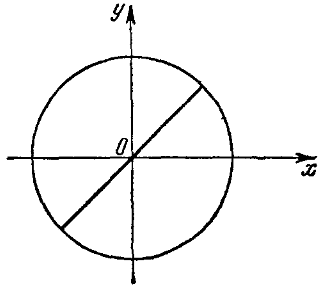

Рис. 285.

297. Поскольку уравнение верхней полуокружности с центром в начале координат радиуса 1 есть $y=\sqrt{1-x^2}$, а нижней полуокружности $y=-\sqrt{1-x^2}$, то искомые точки находятся ниже верхней полуокружности и выше нижней полуокружности, т. е. множество точек, лежащих внутри окружности $x^2+y^2=1$, удовлетворяют данным условиям (рис. 286).

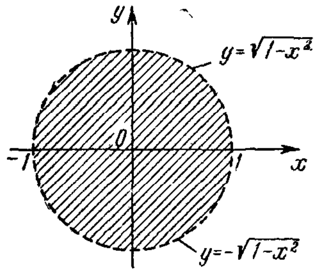

Рис. 286.

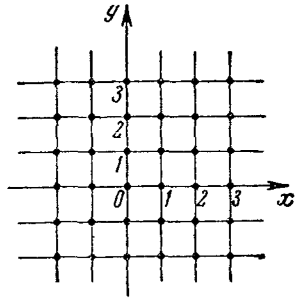

Рис. 287.

298. График $x=k$ (где $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$) — множество прямых, параллельных оси ординат, включая саму ось, и отстоящих друг от друга на единицу, а график $y=l$ — такие же прямые, но параллельные оси абсцисс. Следовательно, искомые точки — вершины образовавшихся квадратов (рис. 287).

299. Точки расположены внутри сегмента, отсекаемого от параболы $y=x^2$ прямой $y=1$ (рис. 288).

300. Точки расположены выше кривой $y=\cos x$, ниже кривой $y=\sin x$, левее прямой $x=\frac{\pi}{2}$ и правее прямой $x=0$ (на рис. 289 эта область заштрихована).

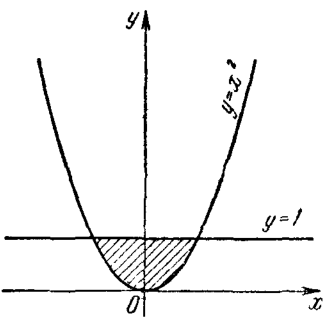

Рис. 288.

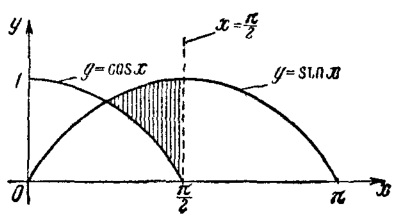

Рис. 289.

301. Фигура, определяемая данным уравнением, состоит из бесконечного множества квадратов с их внутренними областями, но без верхних и правых сторон. Сторона каждого из этих квадратов равна единице (рис. 290). Точки (0, 0), (1, 0), (0,1) — вершины одного квадрата, а остальные квадраты получаются из этого последовательным сдвигом на $\sqrt{2}$ вдоль прямой $y=x$ в обе стороны.

В самом деле, если x и y — произвольные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$n \leqslant x < n+1, \quad n \leqslant y < n+1,$$

где n — целое число, то $E(x)=E(y)=n$.

Легко убедиться, что если $n \leqslant x < n+1$ и $m \leqslant y < m+1$, где $m \neq n$, то x и y не удовлетворяют уравнению $E(x)=E(y)$.

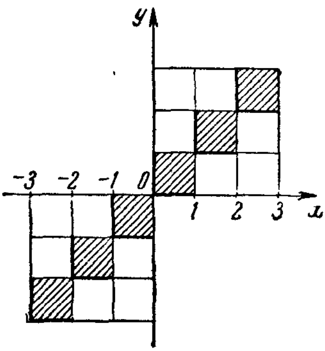

Рис. 290.

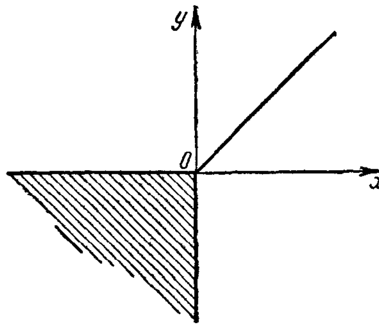

Рис. 291.

302. Во-первых, заметим, что x и y не могут иметь противоположных знаков. Действительно, пусть $x>0$, тогда $x+|x|=$ $=2x>0$. Следовательно, и $y+|y|>0$, что невозможно при $y<0$, так как если $y<0$, то $y+|y|=y-y=0$.

Таким образом, надо рассмотреть только два случая:

1) Если $x>0$ и $y>0$, то $x+x=y+y$, или $y=x$, т. е. все точки, принадлежащие биссектрисе первого координатного угла, удовлетворяют данной зависимости.

2) Если $x \leqslant 0$ и $y \leqslant 0$, то все точки, принадлежащие третьему квадранту, включая и координатные полуоси, удовлетворяют данной зависимости, так как в этом случае обе части равенства равны нулю (рис. 291).

303. Если $a=1$, то $y=2>0$. Теперь пусть $a^2-1>0$. В этом случае трехчлен будет положительным при любом значении x, если удовлетворяется система неравенств

$$\begin{cases} a^2-1>0, \\ (a-1)^2-2(a^2-1)<0. \end{cases}$$

Из первого неравенства следует, что $a>1$ или $a<-1$, а из второго, что $a>1$ или $a<-3$. Итак, $a>1$ или $a<-3$.

Так как мы установили, что и $a=1$ удовлетворяет условию задачи, то окончательно имеем:

$$a \geqslant 1 \quad \text{или} \quad a < -3.$$

304. Искомое геометрическое место состоит из двух лучей, исходящих из точки (1, 1), параллельных осям координат и одинаково с ними направленных (рис. 292). Действительно, например, точка A имеет ординату, равную 1, а абсциссу, бо́льшую 1, а точка B имеет абсциссу, равную 1, а ординату, бо́льшую 1. Легко убедиться, что точки, не принадлежащие этим лучам, не обладают свойством, указанным в условии задачи.

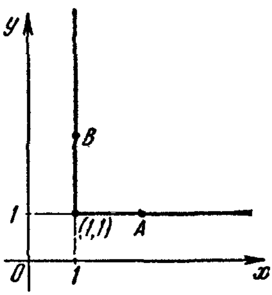

Рис. 292.

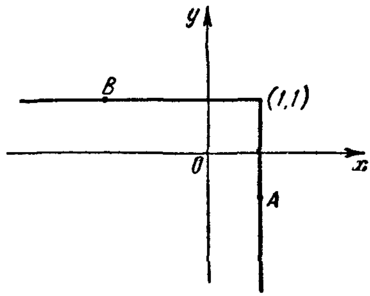

Рис. 293

305. Искомое геометрическое место точек состоит из двух лучей, исходящих из точки (1,1), параллельных осям координат и имеющих с ними противоположные направления (рис. 293). Действительно, точка A, например, имеет абсциссу, равную 1, а ординату, меньшую 1, а точка B имеет ординату, равную 1, а абсциссу, меньшую 1. Легко убедиться, что точки, не принадлежащие этим лучам, не обладают свойством, указанным в условии задачи.

306. Искомое геометрическое место точек есть контур квадрата, вершинами которого являются точки (1, 1), (—1, 1), (—1, —1), (1, —1) (рис. 294). Например, модули абсцисс точек B, C, K, F равны 1, а модули ординат меньше 1; модули ординат точек A, D, E, L равны 1, а модули абсцисс меньше 1. Легко убедиться, что точки, не принадлежащие этому контуру, не удовлетворяют условию задачи.

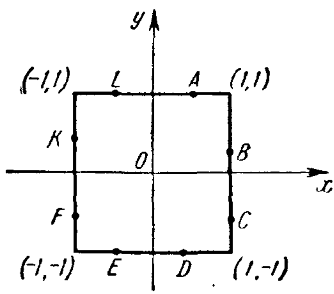

Рис. 294.

307. Искомое геометрическое место есть стороны четырех прямых углов, вершинамн которых являются точки (1, 1), (—1, 1), (—1, —1), (1, —1). Стороны каждого из углов параллельны осям координат и расположены, как показано на рис. 295.

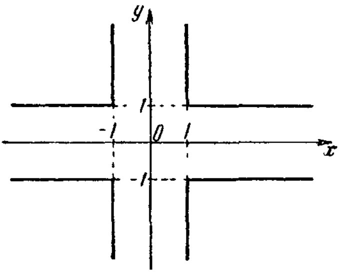

Рис. 295.

308. Так как $x > 0$, то, логарифмируя обе части уравнения по основанию 2, приходим к уравнению

$$x \log_2 x = 6,$$

равносильному данному, или

$$\log_2 x = \frac{6}{x}.$$

Поскольку $x > 0$, то график (гипербола) функции $6/x$ расположен только в первом квадранте. Поэтому достаточно начертнть только ту часть графнка $\log_2 x$, которая расположена в первом квадранте (рис. 296). Графнки пересекаются в точке, абсцнсса которой равна приближенио 3,4. Это число и является приближеныим решением данного уравнения.

309. Строим прямую $y = 4x$ и кривую $y = 2^x$ (рис. 297). Абсцнссы точек пересечения этих лнний являются корнями данного уравнения.

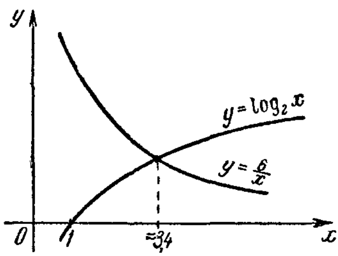

Рис. 296.

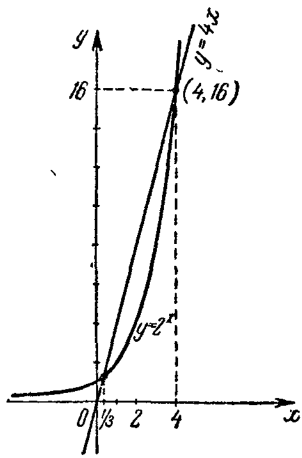

Рис. 297.

На рисунке видно, что абсциссы точек пересечения этих графиков $x_1 = 4$ и $x_2 \approx \frac{1}{3}$. Таким образом, данпое уравнеиие имеет два кория. В том, что даиное уравненне не может иметь больше двух корней, можно убедиться из следующих соображеиий: график $y = 2^x$ есть вогнутая кривая, а прямая может иметь с такой кривой либо две общие точки, либо одну общую точку, либо ни одной.

310. Данное уравнение преобразуем так:

$$x^4-7x^2+(x+3)^2-x^2-9=0,$$
$$x^4-8x^2+(x+3)^2-9=0,$$
$$(x^2-4)^2+(x+3)^2-25=0.$$

Введем второе неизвестное $y=x^2$.

Таким образом, задача сводится к графическому решению системы

$$\begin{cases} y=x^2, \\ (x+3)^2+(y-4)^2=25. \end{cases}$$

Первое уравнение системы — уравнение параболы, проходящей через начало координат, а второе — уравнение окружности радиуса 5 с центром в точке (—3, 4). Из рис. 298 усматриваем, что парабола и окружность пересекаются в точках (—3, 9), (0, 0), (1, 1), (2, 4). Следовательно, числа —3, 0, 1, 2 являются корнями данного уравнения.

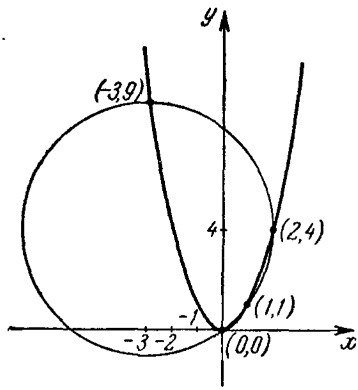

Рис. 298.

311. Так как при всех действительных значениях x функция 3^x положительна, то $2^{3^x}>1$ (свойство показательной функции при основании, большем единицы, и положительном показателе). Перепишем данное уравнение в виде

$$x=\frac{1}{2^{3^x}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3^x}.$$

Так как 2^{3^x} положительно, то $x>0$. Логарифмируя обе части уравнения $x=\left(\frac{1}{2}\right)^{3^x}$ по основанию $\frac{1}{2}$, получаем уравнение $\log_{\frac{1}{2}} x=3^x$, равносильное данному.

Строим графики функций $\log_{\frac{1}{2}} x$ и 3^x (рис. 299). Абсцисса точки пересечения этих графиков является решением данного уравнения. Из рисунка усматриваем, что корень уравнения $x\approx\frac{1}{3}$.

312. Перепишем данное уравнение так:

$$x(x^2-3x-1)+3=0.$$

Введем еще одно неизвестное

$$y=x^2-3x-1.$$

Таким образом, задача сводится к решению системы

$$\begin{cases} y=x^2-3x-1, \\ y=-\dfrac{3}{x}. \end{cases}$$

Первое уравнение системы есть уравнение параболы с вершиной в точке $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{13}{4}\right)$. Осью параболы является прямая $x=1,5$. Парабола пересекает ось ординат в точке $(0, -1)$.

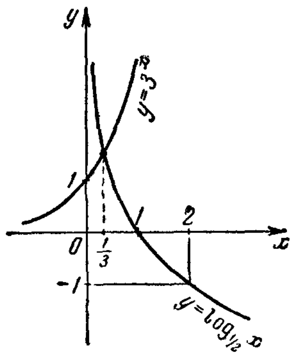

Рис. 299.

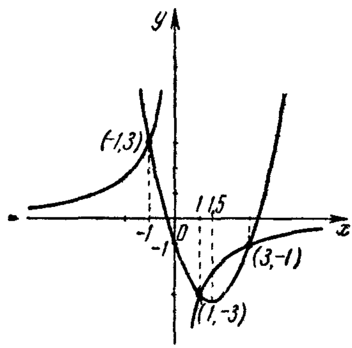

Рис. 300.

Второе уравнение есть уравнение гиперболы, ветви которой расположены во втором и четвертом квадрантах.

Для нахождения корней данного уравнения строим параболу $y=x^2-3x-1$ и гиперболу $y=-\frac{3}{x}$ (рис. 300). Абсциссы точек пересечения этих графиков служат корнями данного уравнения. Из рисунка видно, что парабола пересекается с гиперболой в трех точках, абсциссы которых равны -1, 1 и 3. Итак, все три корня уравнения действительны

313. Если $x=-1$, то левая часть неравенства не определена. Когда $x\neq-1$, то $|x+1|>0$, поэтому данное неравенство можно записать так:

$$|x+2|>|x+1|.$$

Построим графики функций $y_1=|x+2|$ и $y_2=|x+1|$ (рис. 301).

Из рисунка видим, что при всех значениях x, лежащих правее точки $x=-1,5$, ординаты графика y_1 больше соответствующих ординат графика y_2.

Таким образом, $y_1 > y_2$, если $x > -1{,}5$. Но так как $x \neq -1$, то $-1{,}5 < x < -1$ или $x > -1$.

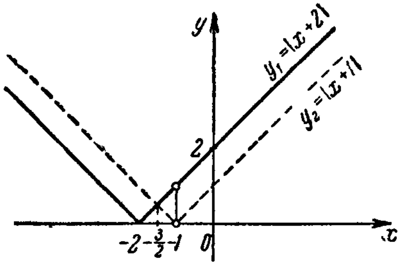

Рис. 301.

314. Строим графики функций $y_1 = |x+2|$ и $y_2 = |x|$ (рис. 302). Из рисунка видим, что при $x > -1$ ординаты графика y_1 больше соответствующих ординат графика y_2. Следовательно, решениями

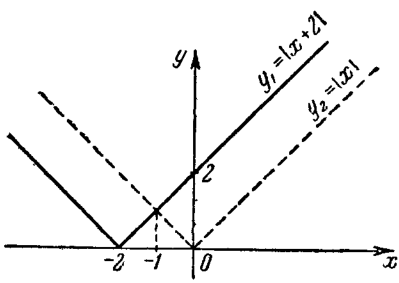

Рис. 302.

данного неравенства являются все числа, удовлетворяющие неравенству $x > -1$.

315. Через x единиц времени первое тело будет находиться на расстоянии $a - xv$, а второе тело — на расстоянии $b - xv_1$ от точки O (рис. 303). На основании теоремы Пифагора расстояние между телами через x единиц времени равно

$$d = \sqrt{(a - xv)^2 + (b - xv_1)^2}. \qquad (1)$$

Так как d принимает наименьшее значение одновременно с подкоренным выражением, то задача сводится к нахождению наименьшего значения выражения

$$(a - xv)^2 + (b - xv_1)^2,$$

или выражения

$$\left(v^2+v_1^2\right)x^2-2\,(av+bv_1)\,x+(a^2+b^2).$$

Так как $v_1^2+v^2>0$, то последнее выражение имеет минимум

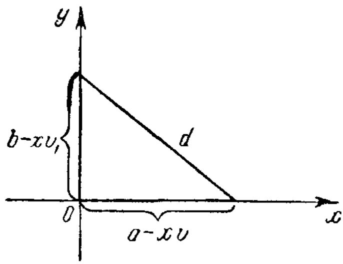

Рис. 303.

при $x=\dfrac{av+bv_1}{v^2+v_1^2}$. Подставляя это значение в (1), получим:

$$d\ \text{(наименьшее)}=\sqrt{\frac{(bv-av_1)^2}{v^2+v_1^2}}=\frac{|\,bv-av_1\,|}{\sqrt{v^2+v_1^2}}.$$

316. Возьмем числовую ось и отметим на ней точки A, B, C, D, соответствующие числам a, b, c и d. Точку с переменной абс-

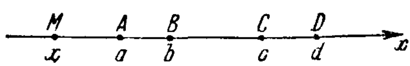

Рис. 304.

циссой x обозначим через M (рис. 304). Рассмотрим следующие пять случаев:

1) Если $x\leqslant a$, то

$$\varphi(x)=MA+MB+MC+MD=AB+2MB+2BC+CD.$$

Отсюда следует, что $\varphi(x)$ будет принимать наименьшее значение в том случае, когда точка M совпадает с точкой A, и что это значение равно

$$3AB+2BC+CD. \qquad (1)$$

2) Если $a<x\leqslant b$, то

$$\varphi(x)=AM+MB+MC+MD=AB+2MB+2BC+CD.$$

В этом случае функция $\varphi(x)$ принимает наименьшее значение, когда точка M совпадает с точкой B; это значение равно

$$AB+2BC+CD. \qquad (2)$$

3) Если $b \leqslant x \leqslant c$, то функция $\varphi(x)$ постоянна и равна

$$AB+2BC+CD. \qquad (3)$$

4) Если $c \leqslant x < d$, то функция $\varphi(x)$ принимает наименьшее значение при $x=c$ и равна также

$$AB+2BC+CD. \qquad (4)$$

5) Если $x \geqslant d$, то фуикция $\varphi(x)$ принимает наименьшее значение, равное

$$AB+2BC+3CD. \qquad (5)$$

Сравнивая полученные результаты: (1), (2), (3), (4) и (5), видим, что наименьшее значение функции $\varphi(x)$ равно $AB+2BC+CD$, или

$$b-a+2(c-b)+d-c=d+c-b-a.$$

Это значение функция $\varphi(x)$ принимает при условии, что $b \leqslant x \leqslant c$.

317. Известно, что координаты вершины параболы $y=ax^2+$ $+bx+c$ определяются по формулам

$$x_0=-\frac{b}{2a}, \quad y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}. \qquad (1)$$

В нашей задаче $a=1$, $b=2m+1$, $c=m^2-1$. Подставляя значеиия a, b и c в (1), получим:

$$x_0=-m-\frac{1}{2}, \quad y_0=-m-\frac{5}{4}.$$

Ясно, что, меняя m, мы будем получать различные x и y, т. е. x и y являются функциями m:

$$x=-m-\frac{1}{2}, \qquad y=-m-\frac{5}{4}.$$

Вычтя почлеино из второго равенства первое, получим:

$$y-x=-\frac{3}{4},$$

или

$$y=x-\frac{3}{4}.$$

Оказывается, что при любых значениях m координаты (x, y) вершиины параболы связаны уравнением первой степени, значит, вершина параболы описывает прямую линию.

318. Функция определена в двух интервалах: $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$, поэтому ее график состоит из двух ветвей. Поскольку $x \neq 0$, то ось ординат является вертикальной асимптотой. Если $x \to \pm\infty$, то $y \to 1$, и следовательно, примая $y=1$ является горизонтальиой асимптотой. Если $x \to +\infty$, то $y \to 1$ $(y > 1)$, а если $x \to -\infty$, то $y \to 1$ $(y < 1)$. Если $x \to 0$ справа или слева, то функция $y \to -\infty$. При $x=-1 \pm \sqrt{2}$ фуикции $y=0$, т. е. график пересекает ось абсцисс в точках $-1-\sqrt{2}$ н $-1+\sqrt{2}$.

Определим максимум функции. Представим данное уравнение в таком виде:

$$(y-1)x^2-2x+1=0.$$

Разрешив это уравнение относительно x, получим:

$$x=\frac{1\pm\sqrt{2-y}}{y-1}.$$

Отсюда ясно, что функция достигает максимума $y_{max}=2$ при $x=1$.

Если x изменяется от $-\infty$ до 0 и от 1 до $+\infty$, то функция убывает, а если x изменяется от 0 до 1, то функция возрастает. На основании изложенного строим график данной функции (рис. 305).

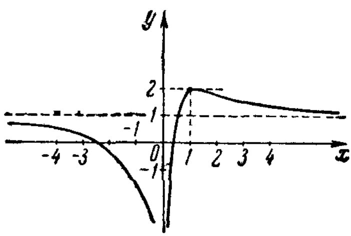

Рис. 305.

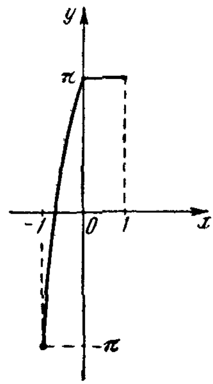

Рис. 306.

319. Функция определена на сегменте $[-1,1]$. Введем обозначение $z=\arccos(2x^2-1)$, отсюда $\cos z=2x^2-1$, причем $0\leqslant z\leqslant\pi$. Имеем:

$$\cos\frac{z}{2}=+\sqrt{\frac{1+\cos z}{2}}=\sqrt{\frac{1+2x^2-1}{2}}=\sqrt{x^2}=|x|.$$

Таким образом, $z=2\arccos x$, если $x\geqslant 0$, и $z=2\arccos(-x)$, если $x\leqslant 0$. Итак, если $x\geqslant 0$, то $y=2\arccos x+2\arcsin x=\pi$; если же $x\leqslant 0$, то $y=2\arccos(-x)+2\arcsin x=2\left[\frac{\pi}{2}-\arcsin(-x)\right]+$ $+2\arcsin x=\pi+2\arcsin x+2\arcsin x=\pi+4\arcsin x$.

При $x\geqslant 0$ графиком функции является отрезок с концами $(0,\pi)$ и $(1,\pi)$. При $x\leqslant 0$ график получается из графика $y=\arcsin x$, если его ординаты увеличить в 4 раза, а затем полученную кривую поднять вверх (вдоль оси ординат) на π. Легко убедиться, что график функции пересекает ось абсцисс в точке $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. График показан на рис. 306.

320. Так как $|-y|=|y|$, то график симметричен относительно оси абсцисс. Поскольку $|y|\geqslant 0$, то и $\cos x\geqslant 0$, а следовательно,

$$-\frac{\pi}{2}+2\pi k\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}+2\pi k,$$

где $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$

Таким образом, вычерчиваем только те части косинусоиды, которые удовлетворяют последнему соотношению, а для получения недостающих частей графика отражаем начерченные части относительно оси абсцисс (рис. 307).

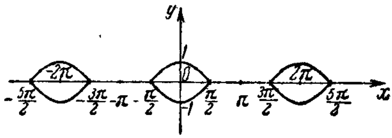

Рис. 307.

321. Функция существует при всех значениях x, кроме $x=0$, т. е. функция определена в двух интервалах: $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. Таким образом, график состоит из двух ветвей.

В интервале $(0, +\infty)$, т. е. для $x>0$, $y=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}=\operatorname{arctg} x$.

Следовательно, прямая $y=\frac{\pi}{2}$ является асимптотой графика. В интервале $(-\infty, 0)$, т. е. для $x<0$, функция принимает вид:

$$y=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}=\pi-\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{x}\right)=\pi-\operatorname{arctg}(-x)=\pi+\operatorname{arctg} x.$$

Таким образом, вторая ветвь графика получается сдвигом части графика $y=\operatorname{arctg} x$ (для $x<0$) вдоль оси ординат на π. График данной функции показан на рис. 308 сплошными линиями.

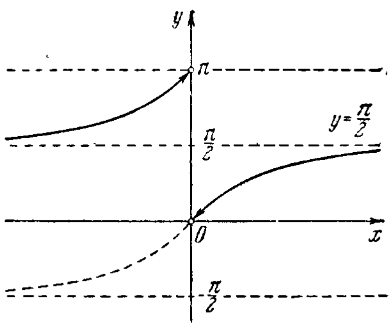

Рис. 308.

322. Ясно, что $y\neq-1$, поэтому прямая $y=-1$ является горизонтальной асимптотой. Функция четная, следовательно, график ее симметричен относительно оси ординат. Разрешим данное уравнение относительно y. Имеем:

$$x^2y+x^2-y+1=0,$$

или

$$y(x^2-1)=-(x^2+1),$$

откуда

$$y=\frac{1+x^2}{1-x^2}.$$

Отсюда видно, что прямые $x=1$ и $x=-1$ являются вертикальными асимптотами графика. Очевидно, что функция имеет минимум, равный 1, при $x=0$.

Если $x\to 1$ справа, то $y\to-\infty$, а если $x\to 1$ слева, то $y\to+\infty$. Если $x\to-1$ справа, то $y\to+\infty$, а если $x\to-1$ слева, то $y\to-\infty$.

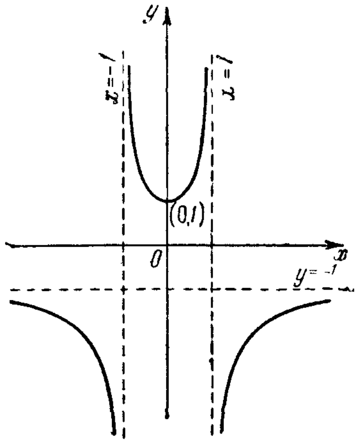

Рис. 309.

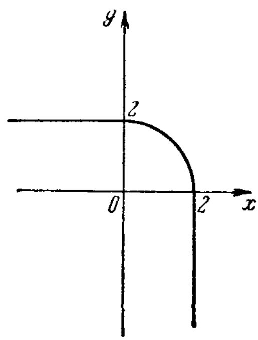

Рис. 310.

Если $x\to\pm\infty$, то $y\to-1$, что мы установили выше из других соображений. В силу изложенного легко построить график (рис. 309).

323. 1. Если $x\geqslant 0$ и $y\geqslant 0$, то данная зависимость принимает вид: $x^2+y^2=4$, т. е. часть графика, лежащая в первом квадранте, есть четверть окружности радиуса 2 с центром в начале координат.

2. Если $x\leqslant 0$ и $y\geqslant 0$, то данное уравнение принимает вид $y=2$, т. е. во втором квадранте графиком является луч, параллельный оси абсцисс и отстоящий от нее на расстояние 2.

3. Если $x\geqslant 0$ и $y\leqslant 0$, то данное уравнение прииимает вид $x=2$, т. е. в четвертом квадранте графиком является луч, параллельный оси ординат и отстоящий от нее на расстояние 2.

4. Если $x<0$ и $y<0$, то получаем $0=16$, что невозможно, т. е. в третьем квадранте нет элементов графика.

Весь график данной функции показан на рис. 310.

324. Так как $|y|\geqslant 0$, а $-x^2<0$, то должно быть $\frac{|x|}{x}>0$, а следовательно, $x>0$. Таким образом, данная функция принимает вид:

$$|y| = 1 - x^2.$$

Учитывая, что $|y| \geqslant 0$, имеем $1 - x^2 \geqslant 0$, или $-1 \leqslant x \leqslant 1$, но поскольку $x > 0$, то функция определена на полусегменте $(0, 1]$. Если $y \geqslant 0$, то графиком служит часть параболы $y = 1 - x^2$, расположенная над осью абсцисс и заключенная между прямыми $x = 0$ и $x = 1$. Для получения части графика при $y \leqslant 0$ отражаем уже построенную часть (при $y \geqslant 0$) относительно оси абсцисс. Весь график показан на рис. 311 сплошной линией.

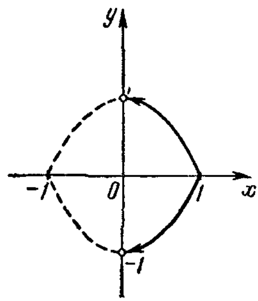

Рис. 311.

325. Область определения функции находим из системы неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{1+x^2}{2x} + 1 \geqslant 0, \\ \dfrac{1+x^2}{2x} - 1 \geqslant 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{(x+1)^2}{2x} \geqslant 0, \\ \dfrac{(x-1)^2}{2x} \geqslant 0. \end{cases}$$

Отсюда видно, что $x > 0$. Перепишем данную функцию в виде:

$$y = \frac{\sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{(x-1)^2}}{\sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{(x-1)^2}} = \frac{|x+1| - |x-1|}{|x+1| + |x-1|}.$$

Если $0 < x < 1$, то $y = x$, а если $x \geqslant 1$, то $y = \dfrac{1}{x}$. График показан на рис. 312 сплошной линией.

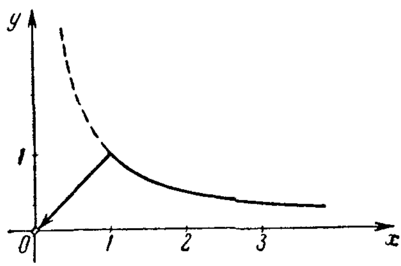

Рис. 312.

326. Функция определена на всей числовой оси. Данная зависимость четна относительно обеих переменных. Следовательно, ее график симметричен относительно обеих осей координат. Преобразуем уравнение так:

$$(y^2 - 1)\,x^2 - (y^2 - 1) = 0,$$

или

$$(y-1)(y+1)(x-1)(x+1)=0.$$

Отсюда видно, что данное уравнение равносильно совокупности четырех уравнений:

$$y=1, \quad y=-1, \quad x=1, \quad x=-1.$$

Таким образом, график данной функции состоит из четырех прямых: $y=1$, $y=-1$, $x=1$, $x=-1$ (рис. 313).

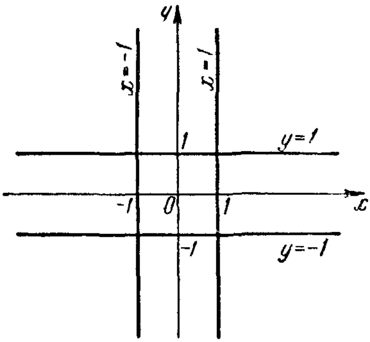

Рис. 313.

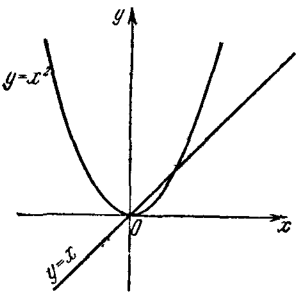

Рис. 314.

327. Функция определена на всей числовой оси. Преобразуем данное уравнение к виду:

$$(y-x)(y-x^2)=0.$$

Отсюда усматриваем, что данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$y-x=0 \quad \text{и} \quad y-x^2=0.$$

Таким образом, график данной функции состоит из прямой $y=x$ и параболы $y=x^2$ (рис 314).

328. Функция определена на всей числовой оси, кроме нуля. Зависимость четна относительно переменной x, поэтому ее график симметричен относительно оси ординат. Перепишем данное уравнение так:

$$y\,|y|-\frac{y}{|x|}+|xy|-1=0,$$

$$y\left(|y|-\frac{1}{|x|}\right)+|x|\left(|y|-\frac{1}{|x|}\right)=0,$$

$$(y+|x|)\left(|y|-\frac{1}{|x|}\right)=0.$$

Следовательно, данное уравнение при $x \neq 0$ равносильно совокупности двух соотношений

$$y+|x|=0 \quad \text{и} \quad |y|-\frac{1}{|x|}=0.$$

Таким образом, график данной функции состоит из биссектрис третьего и четвертого координатных углов, исключая начало координат, и из двух гипербол: $y=\frac{1}{x}$ и $y=-\frac{1}{x}$. График показан на рис. 315.

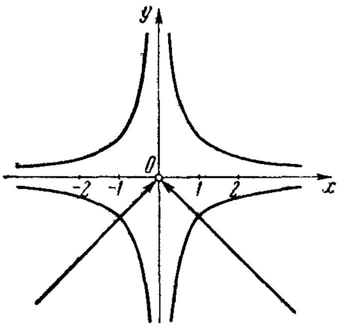

Рис. 315.

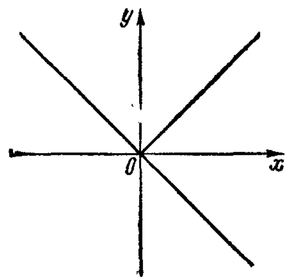

Рис. 316.

329. Функция определена на всей числовой оси. Преобразуем данное уравнение так:

$$|y|(|x|-y)-x(|x|-y)=0,$$

или

$$(|y|-x)(|x|-y)=0.$$

Таким образом, имеем:

$$y=|x| \quad \text{или} \quad x=|y|.$$

Теперь ясно, что график данной функции состоит из прямой $y=-x$ и биссектрисы первого координатного угла (рис. 316).

330. Функция определена на полусегменте $[1, +\infty)$. Представим данное уравнение в виде:

$$(x-1)(|y|-\log_2 x)=0.$$

Отсюда усматриваем, что на полусегменте $[1, +\infty)$ оно равносильно двум уравнениям:

$$x-1=0 \quad \text{и} \quad |y|-\log_2 x=0.$$

Зависимость $|y|=\log_2 x$ четна относительно переменной y, поэтому ее график симметричен относительно оси абсцисс.

Сначала строим график функции $y=\log_2 x$ $(y>0)$, а для получения ветви при $y<0$ отражаем построенную ветвь относительно оси абсцисс. К графику данной функции относится также прямая $x=1$. График показан на рис. 317 сплошными линиями.

331. Область определения фуикцин — все положительные числа. Зависимость четиа относительно переменной y, поэтому ее график симметричен отиосительно оси абсцисс. Данное уравнение можно представить так:

$$(y-\log_2 x)(y+\log_2 x)(y-2^x)(y+2^x)=0.$$

Таким образом, данное уравнение при $x>0$ равносильно совокупности четырех уравнений:

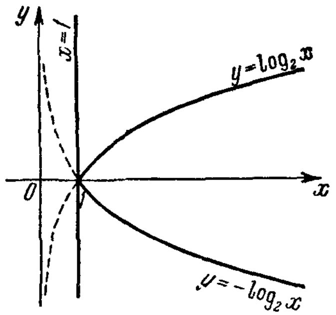

Рис. 317.

$$y=\log_2 x, \quad y=-\log_2 x,$$

$$y=2^x, \quad y=-2^x.$$

График данной функции состоит из графиков $y=\log_2 x$, $y=-\log_2 x$ и из частей графиков $y=2^x$ и $y=-2^x$, расположенных правее оси ординат, т. е. прн $x>0$. Весь график показан на рис. 318 сплошными линиями.

332. Функция определена на всей числовой оси. Данная зависимость четна относительно переменной y, поэтому ее график симметричен отиосительно оси абсцисс. Исследуемую зависимость

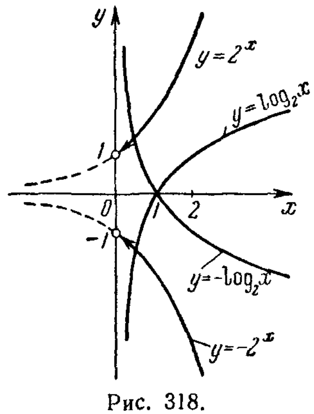

Рис. 318.

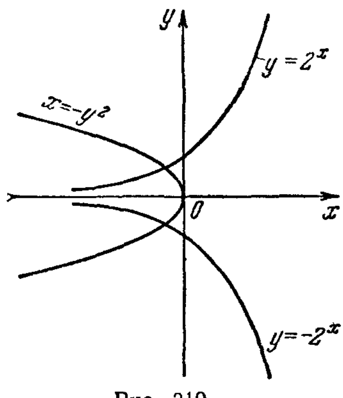

Рис. 319.

легко представить так:

$$(|y|-2^x)(x+y^2)=0.$$

Таким образом, данное уравнеиие равносильно совокупиости двух уравнеиий $|y|=2^x$ и $x=-y^2$. График показан на рис. 319.

333. Область определении функции находим из неравенства $x^2-4>0$, откуда $x>2$ или $x<-2$. Заметим, что $y\neq 0$. Из заданного соотношения имеем: $|y|=x^2-4$. Так как зависимость четна как относительно x, так и относительно y, то график исследуемой функции симметричен относительно обеих осей координат. График состоит из частей парабол: $y=$ $=x^2-4$ и $y=-x^2+4$, расположенных правее прямой $x=2$ и левее прямой $x=-2$. Весь график данной функции показан на рис. 320 сплошными линиями.

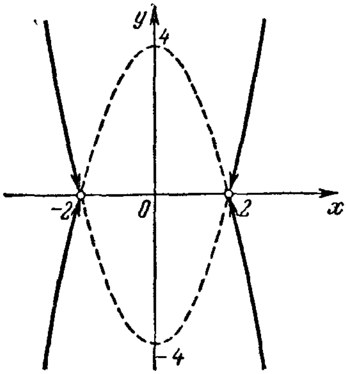

Рис. 320.

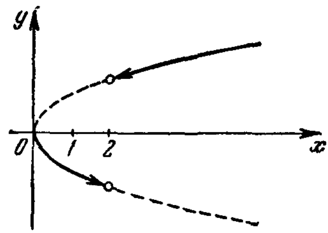

Рис. 321.

334. Функция определена в двух промежутках: $[0, 2)$ и $(2, +\infty)$. Перепишем данную функцию в виде:

$$y=\frac{|x-2|\sqrt{x}}{x-2}.$$

Отсюда следует, что $y=-\sqrt{x}$, если $0\leqslant x<2$, и $y=\sqrt{x}$, если $x>2$. График показан на рис. 321 сплошными линиями.

335. Функция определена в промежутке $[1, +\infty)$. Перепишем данную функцию в виде:

$$y=x+\sqrt{x^2-4(x-1)}=x+|x-2|.$$

Если $1\leqslant x\leqslant 2$, то $y=2$, а если $x>2$, то $y=2x-2$. График показан на рис. 322.

336. Функция определена для всех значений x, кроме $x=0$. Зависимость четная относительно обеих переменных, поэтому ее график симметричен относительно обеих осей, а следовательно, и относительно начала координат. Таким образом, достаточно построить часть графика при $x>0$ и $y>0$, т. е. в первом квадранте, а затем для получения остальных частей отражаем эту часть относительно обеих осей и относительно начала координат.

Если $x>0$ и $y>0$, то заданная зависимость принимает вид:

$$y+\frac{1}{y}=x+\frac{1}{x}.$$

Отсюда следует, что $y=x$ и $y=\frac{1}{x}$. Следовательно, график (при $x>0$ и $y>0$) состоит из биссектрисы первого координатного угла

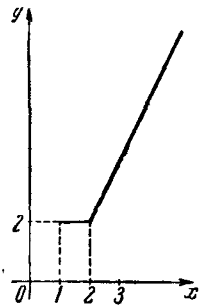

Рис. 322.

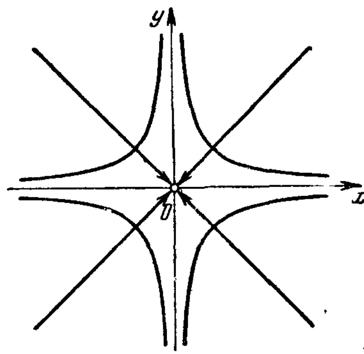

Рис. 323.

и одной ветви параболы $y=\frac{1}{x}$, причем начало координат не принадлежит графику. Весь график показан на рис. 323.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андронов И. К. и Окунев А. К., Основной курс тригонометрии, Учпедгиз, 1960.
2. Берман Г. Н., Сборник задач по курсу математического анализа, изд-во «Наука», 1964.
3. Бермант А. Ф., Курс математического анализа для втузов, изд-во «Наука», 1964.
4. Бермант А. Ф. и Люстерник Л. А., Тригонометрия, Физматгиз, 1960.
5. Гибш И. А., Алгебра, Учпедгиз, 1960.
6. Гурский И. П., Функции и построение графиков, Учпедгиз, 1961.
7. Гюнтер Н. М. и Кузьмин Р. О., Сборник задач по высшей математике, т. I, Физматгиз, 1958.
8. Демидович Б. П., Сборник задач и упражнений по математическому анализу, Физматгиз, 1963.
9. Зетель С. И., Задачи на максимум и минимум, Гостехиздат, 1948.
10. Крейн С. Г. и Ушакова В. Н., Математический анализ элементарных функций, Физматгиз, 1963.
11. Моденов П. С. и Новоселов С. И., Пособие по математике для поступающих в вузы, изд-во МГУ, 1963.
12. Натансон И. П., Простейшие функции на максимум и минимум, Гостехиздат, 1952.
13. Новоселов С. И., Специальный курс элементарной алгебры, изд-во «Высшая школа», 1962.
14. Новоселов С. И., Специальный курс тригонометрии, изд-во «Высшая школа», 1959.
15. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, Физматгиз, 1962.
16. Шилов Г. Е., Как строить графики, Физматгиз, 1959.
17. Энциклопедия элементарной математики, т. III, Гостехиздат, 1952.