Библиотека
«Математическое просвещение»
Выпуск 16

В. А. Скворцов

ПРИМЕРЫ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва • 2002

УДК 515.124
ББК 22.152
С42

Аннотация

В математике часто рассматриваются множества, между элементами («точками») которых определено расстояние (метрика). Такие множества называют *метрическими пространствами*, если выполнены соответствующие аксиомы. Существует много разных способов определить расстояние в разных множествах. В брошюре обсуждается, как можно измерять расстояние не только между точками на плоскости, но и между кривыми, множествами, функциями. Важным примером расстояния между кривыми является хаусдорфова метрика. Многие метрические пространства разительно отличаются от привычной евклидовой плоскости. Примером метрики с необычными свойствами может служить p-адическая метрика, относящаяся к классу так называемых неархимедовых метрик.

Текст брошюры представляет собой дополненную обработку записи лекции, прочитанной автором 17 февраля 2001 года на Малом мехмате МГУ для школьников 9—11 классов.

Брошюра рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся математикой: школьников старших классов, студентов младших курсов, учителей...

ISBN 5-94057-002-X

Скворцов Валентин Анатольевич.

Примеры метрических пространств.

(Серия: «Библиотека „Математическое просвещение“»).
М.: МЦНМО, 2002. — 24 с.: ил.

Редакторы *Р. К. Ахунжанов*, *К. С. Коршунов*. Техн. редактор *М. Ю. Панов*.

Лицензия ИД № 01335 от 24/III 2000 года. Подписано к печати 26/II 2002 года.
Формат бумаги $60\times88\ ^1/_{16}$. Офсетная бумага № 1. Офсетная печать. Физ. печ. л. 1,50.
Усл. печ. л. 1,47. Уч.-изд. л. 1,41. Тираж 3000 экз. Заказ 574.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
121002, Москва, Г-2, Бол. Власьевский пер., 11. Тел. 241 05 00.

Отпечатано в Производственно-издательском комбинате ВИНИТИ.
140010, г. Люберцы Московской обл., Октябрьский пр-т, 403. Тел. 554 21 86.

КАКИЕ БЫВАЮТ РАССТОЯНИЯ?

Каждый из жизненного опыта знает, что в слова «расстояние между пунктами A и B» даже в повседневной жизни вкладывается разный смысл в зависимости от ситуации. Если лётчик это расстояние скорее всего будет измерять вдоль прямой, то автомобилист будет считать расстоянием длину пути из A в B вдоль шоссейных дорог, которые могут существенно отклоняться от прямолинейного пути.

Вспомним, что обычное расстояние между двумя точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ на плоскости мы определяем так. Мы соединяем эти точки отрезком и берём его длину за расстояние между этими точками. Математическая формула для этого расстояния, обычно называемого евклидовым, выглядит так:

$$\rho(A, B) = (|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2)^{1/2}.$$

Но легко привести примеры, в которых более естественным оказывается другое определение. Допустим мы находимся в городе с очень правильной планировкой. В этом городе $n \cdot k$ прямоугольных кварталов, разделённых $n-1$ «горизонтальными» и $k-1$ «вертикальными» улицами (рис. 1).

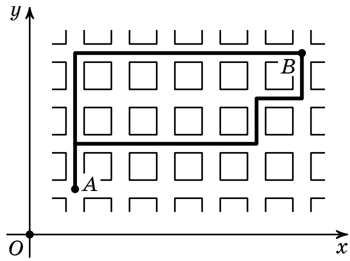

Рис. 1

В таком городе нет смысла пользоваться обычным расстоянием, если нас интересует расстояние от перекрёстка A до перекрёстка B (см. рис. 1). Разумно взять за расстояние между этими пунктами длину кратчайшего пути по улицам города от пункта A до пункта B. Так понимаемое расстояние будет естественным, например, с точки зрения водителя, который не может проезжать через дворы. Как выглядит это расстояние в координатах? Если точка A на плоскости имеет координаты (x_1, y_1), а точка B — координаты (x_2, y_2), то расстояние, обозначим его ρ_1, определяется формулой

$$\rho_1(A, B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|.$$

На той же плоскости можно придумать ещё один вариант расстояния. Например,

$$\rho' = \max(|x_2 - x_1|,\ |y_2 - y_1|).$$

Этому расстоянию можно придать такой физический смысл. Представьте, что мы должны поддерживать определённую температуру в двух комнатах, и измеряем её двумя термометрами. Пусть в первой комнате нам нужно поддерживать температуру x_1, а во второй комнате — температуру y_1. Показания термометров — x_2 и y_2 соответственно. Нужно следить за тем, чтобы температура нигде не отклонилась от нормы. Тогда определённое так расстояние ρ' между показаниями термометров показывает, на сколько градусов произошло отклонение температуры от нормы.

Аналогичные расстояния можно ввести и между точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ трёхмерного пространства.

ШАРЫ

Если на множестве определено расстояние, то с его помощью можно описать геометрические объекты, например, шары или окрестности точек в смысле этого расстояния. Давайте проанализируем расстояния, которые мы ввели, с такой точки зрения: что будет единичным шаром с центром в нуле в смысле какого-то данного расстояния ρ? *Единичный шар* — это множество точек, которые удалены от центра на расстояние не большее, чем 1. Вот формальная запись этого множества:

$$\{A \mid \rho(A, O) \leqslant 1\}.$$

Для евклидова расстояния ρ единичный шар на плоскости будет обычным кругом, как и следовало ожидать (рис. 2, *а*). А как будет выглядеть единичный шар с центром в нуле с точки зрения расстояния,

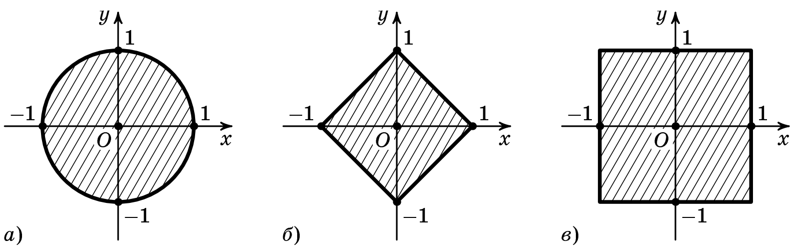

Рис. 2

которое мы назвали ρ_1? Точка A тогда и только тогда принадлежит единичному шару с центром в нуле в этой метрике, когда выполнено неравенство $|x| + |y| \leqslant 1$. Все такие точки A принадлежат квадрату (рис. 2, *б*). Что будет кругом с точки зрения расстояния ρ', которое мы определили через максимум? Тоже квадрат, но другой, со сторонами параллельными осям (рис. 2, *в*).

На самом деле, можно получить бесконечное число способов задания расстояния, если в формуле, определяющей евклидово расстояние заменить 2 на p. Получится такое расстояние:

$$\rho_p(A, B) = (|x_2 - x_1|^p + |y_2 - y_1|^p)^{1/p}.$$

Оказывается, это тоже будет хорошее расстояние (что значит «хорошее», поясним позже), если считать, что $p \geqslant 1$. Теперь то расстояние, которое мы назвали ρ_1, будет совпадать с расстоянием ρ_p при $p = 1$. Так что оно не зря было названо ρ_1.

Пусть p постепенно увеличивается от 1 до 2. Как будут выглядеть единичные шары, соответствующие этим расстояниям? Оказывается, они тоже будут постепенно раздуваться от ромбика, т. е. от шара, который соответствует расстоянию ρ_1, до привычного нам евклидового шара, соответствующего расстоянию ρ_2 (рис. 3). Ну а дальше, когда p станет больше 2, единичный шар всё больше и больше будет заполнять большой квадратик (см. рис. 3). И оказывается, что при p, стремящемся к бесконечности, получается тот квадрат, который является единичным шаром для расстояния ρ'. Поэтому расстояние, которое мы назвали ρ', можно также обозначить как ρ_∞, если использовать обозначение ρ_p (это предельный случай при p стремящемся к ∞).

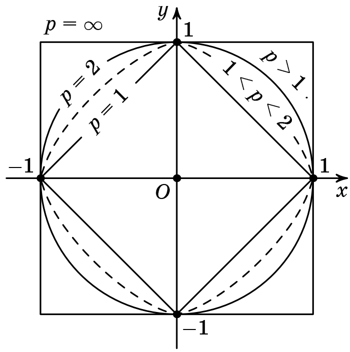

Рис. 3

АКСИОМЫ МЕТРИКИ

Все расстояния, которыми мы пока что ограничились, обладают несколькими универсальными свойствами, которыми должны обладать все «разумно определённые» расстояния.

Во-первых, расстояние между точками на плоскости не отрицательно. Математически это можно записать так:

1) $$\rho(X, Y) \geqslant 0,$$

где X и Y произвольные точки плоскости.

Во-вторых, расстояние между точками X и Y равно нулю тогда и только тогда, когда точки совпадают:

2) $$\rho(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y.$$

В-третьих, во всех разобранных примерах нам было всё равно, измерять ли расстояние от точки X к точке Y или, наоборот, от точки Y к точке X. Расстояние от этого не менялось. Это называется *свойством симметрии*:

3) $$\rho(X, Y) = \rho(Y, X).$$

И наконец, в-четвёртых, нетрудно проверить (а для обычного расстояния это хорошо известно из геометрии), что выполняется так называемое *неравенство треугольника*, а именно для произвольных точек X, Y и Z

4) $$\rho(X, Y) \leqslant \rho(X, Z) + \rho(Z, Y).$$

Если эти свойства (аксиомы) выполняются для некоторого расстояния ρ, определённого для любых пар точек некоторого пространства, то это расстояние называется *метрикой*, а пространство, из которого берутся точки, — *метрическим пространством*, порождённым метрикой ρ.

Совсем не обязательно все расстояния, которые мы можем выдумать и которые с какой-то точки зрения разумны, удовлетворяют этим четырём аксиомам.

Рассмотрим такой пример. У нас есть карта местности, на которой изображены две речки кривыми Γ_1 и Γ_2 соответственно. Нам нужно построить между ними канал (отрезок). Можно сказать, что расстояние между речками — это длина самого короткого из возможных каналов (рис. 4). Тогда естественно ввести такое расстояние:

$$\rho(\Gamma_1, \Gamma_2) = \min_{\substack{X \in \Gamma_1, \\ Y \in \Gamma_2}} \rho(X, Y).$$

Как видно, это разумно определённое расстояние, но оно, как легко понять, не удовлетворяет четвёртому свойству расстояний (неравенству треугольника). Действительно, для трёх речек Γ_1, Γ_2 и Γ_3, изображённых на рис. 5

$$\rho(\Gamma_1, \Gamma_2) > \rho(\Gamma_1, \Gamma_3) + \rho(\Gamma_3, \Gamma_2),$$

так как расстояние между Γ_1 и Γ_2 довольно большое по сравнению с расстоянием между речками Γ_1 и Γ_3 или между Γ_3 и Γ_2. Это пример расстояния, которое н е л ь з я н а з в а т ь м е т р и к о й, так как оно не удовлетворяет четвёртой аксиоме метрики. Поэтому пространство кривых с таким расстоянием не является метрическим пространством.

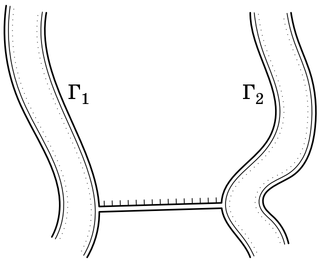

Рис. 4

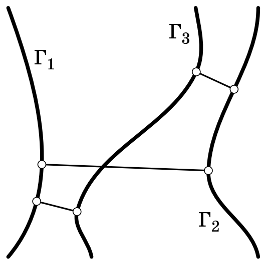

Рис. 5

Обратим внимание, что сейчас мы встретились с пространством, элементами которого являются не просто точки на плоскости, а целые множества на плоскости (в данном случае кривые). Элементами метрического пространства могут быть любые объекты: множества, функции, лишь бы мы умели определять между ними расстояние.

Подход к определению метрического пространства, который мы здесь описали, является аксиоматическим. С таким подходом вы уже встречались в школе: в геометрии тоже выделяются аксиомы геометрии и из этого строится евклидова или неевклидова геометрии, в зависимости от выбора аксиом. Так и здесь: на этих четырёх аксиомах строится вся теория метрических пространств.

Упражнение 1. Проверьте выполнение аксиом метрики для расстояний ρ_1 и ρ'.

ХАУСДОРФОВА МЕТРИКА И ДРУГИЕ РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ КРИВЫМИ

Перейдём к примерам метрических пространств, элементами которых являются не точки, а более сложные объекты. Например, в пространстве, элементами (точками) которого являются кривые, приведённое выше расстояние оказалось неудачным — оно удовлетворяло не всем аксиомам. Попробуем придумать расстояние в пространстве кривых, которое уже будет удовлетворять всем аксиомам метрического пространства.

Рассмотрим пример, который поможет нам понять как устроена так называемая *хаусдорфова метрика*. Пусть у нас есть две кривые (обозначим их через Γ_1 и Γ_2), которые мы будем трактовать как две дороги, и машина, поливающая эти дороги (машина поливает всё вокруг себя, т. е. вся окрестность машины до определённого радиуса поливается водой). Пусть этот радиус действия машины можно менять. Если машина едет по дороге Γ_1, то какой наименьший радиус полива ей надо установить, чтобы она полила всю дорогу Γ_2 (рис. 6)?

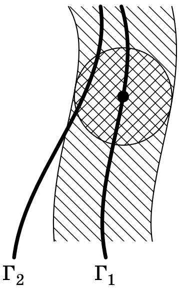

Рис. 6

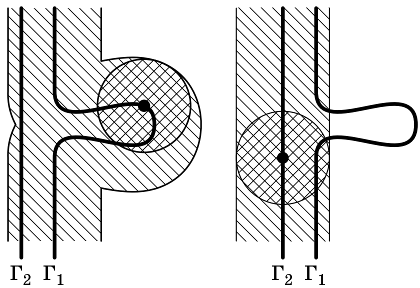

Рис. 7

Будем обозначать точки дороги (кривой) Γ_1 через x, а точки дороги Γ_2 — через y. Зафиксируем точку y на кривой Γ_2. Чтобы была полита точка y, машине нужно установить радиус по крайней мере равный

$$R(y) = \min_{x \in \Gamma_1} \rho(x, y).$$

Заметим, что при меньшем радиусе точка y полита не будет. Но нам нужно полить все точки Γ_2, т. е. взять самый больший из всех радиусов $R(y)$:

$$R_1 = \max_{y \in \Gamma_2} \min_{x \in \Gamma_1} \rho(x, y).$$

И опять же, заметим, что при меньшем радиусе, найдётся точка $y \in \Gamma_2$, которая полита не будет. Теперь возьмём за расстояние между кривыми Γ_1 и Γ_2 этот радиус.

Но такое расстояние ещё не является метрикой, так как оно не удовлетворяет аксиоме симметрии. Действительно, если машина проедет по дороге Γ_1 и польёт дорогу Γ_2, то совсем не обязательно она польёт дорогу Γ_1, проезжая по дороге Γ_2, не увеличивая при этом радиуса полива (рис. 7). Ведь когда машина проезжает по второй

дороге, и пытается полить первую, нужно установить радиус полива как минимум
$$R_2 = \max_{x\in\Gamma_1}\min_{y\in\Gamma_2}\rho(x,y).$$
Чтобы выполнялась аксиома симметрии, возьмём такое расстояние:
$$\rho_H(\Gamma_1,\Gamma_2) = \max\left\{\max_{y\in\Gamma_2}\min_{x\in\Gamma_1}\rho(x,y),\ \max_{x\in\Gamma_1}\min_{y\in\Gamma_2}\rho(x,y)\right\}.$$
Это и есть хаусдорфова метрика в пространстве кривых. Но при этом все кривые в нашем пространстве должны быть «хорошими» (замкнутыми в том смысле, что им должны принадлежать по крайней мере концевые точки), так как, если выбрать «плохие» кривые, то может не выполняться вторая аксиома, о том, что расстояние между двумя «точками» пространства равно нулю тогда, и только тогда, когда эти «точки» совпадают. Например, кривые

$$\Gamma_1\colon\ y=0,\ 0\leqslant x\leqslant 1\ \ (\text{«хорошая» кривая})$$
$$\text{и}\ \ \Gamma_2\colon\ y=0,\ 0< x< 1\ \ (\text{«плохая» кривая})$$

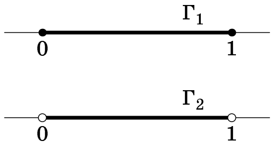

Рис. 8

(рис. 8) не совпадают, а расстояние между ними, очевидно, равно нулю.

Упражнение 2. Докажите что хаусдорфова метрика удовлетворяет аксиомам 2)—4). Тем самым вы докажите, что это действительно метрика, а пространство «хороших» кривых с таким расстоянием — метрическое пространство.

Это расстояние весьма популярно в математическом анализе, и применяется оно, конечно, не для поливальных машин, а для функций. Дело в том, что в теории функций можно работать с функцией как с кривой, отождествляя функцию с её графиком. Если у нас есть два графика, то так определённая хаусдорфова метрика, где в качестве Γ_1 и Γ_2 выступают графики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, определённых, скажем, на отрезке $[a,b]$, будет метрикой уже в пространстве функций, определённых на отрезке $[a,b]$.

Заметим, что теперь мы рассматриваем пространство, точками (элементами) которого являются функции, и более того, у нас есть метрика в этом пространстве, т. е. мы можем мерить расстояние между этими функциями. Таким образом, пространство функций определённых на отрезке $[a,b]$, с расстоянием ρ_H является метрическим.

З а м е ч а н и е. В определении хаусдорфовой метрики за ρ можно брать не только евклидово расстояние, ρ можно брать равным ρ_1, или равным ρ_∞.

В пространстве функций есть и другие расстояния. Более простое расстояние в пространстве непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ задаётся формулой

$$\rho(f_1, f_2) = \max_{x\in[a,b]} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

Это расстояние, называемое *равномерной метрикой*, показывает насколько значения одной функции отклоняются от значений другой (ср. пример про термометры на с. 3—4), рис. 9. Такое расстояние удобно рассматривать именно в пространстве непрерывных функций*). Поясним это на примере. Рассмотрим функцию

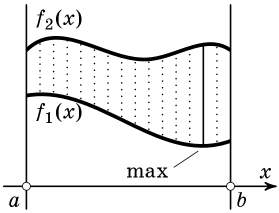

Рис. 9

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Эта функция разрывна в нуле (рис. 10). Допустим, что мы хотим её приблизить непрерывной функцией, и вообще заменить её, сделав маленькую ошибку, на достаточно близкую непрерывную функцию. И в определённом смысле функция

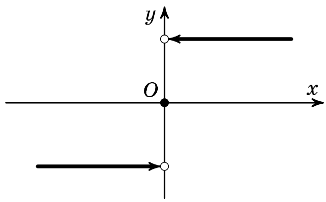

Рис. 10

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } \quad x < -0{,}01, \\ 100x, & \text{если } -0{,}01 \leqslant x \leqslant 0{,}01, \\ 1, & \text{если } \quad 0{,}01 < x \end{cases}$$

(рис. 11) близка к функции $\operatorname{sign}(x)$. Близость между графиками функциями $f(x)$ и $\operatorname{sign}(x)$ станет геометрически очевидной, если график функции $\operatorname{sign}(x)$ дополнить, присоединив к нему «скачок» — отрезок $x = 0$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Строго говоря, так рисовать график неправильно, так как это уже не функция: каждой точке должно

---

*) Равномерную метрику можно распространить и на разрывные ограниченные функции, определив её как

$$\rho(f_1, f_2) = \sup_{x\in[a,b]} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

соответствовать одно единственное значение. Но тем не менее в теории функций иногда рассматривают так определённый *дополненный график*, а именно, имеющийся «скачок» присоединяют к графику (рис. 12).

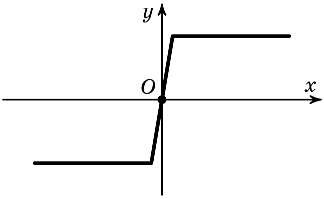

Рис. 11

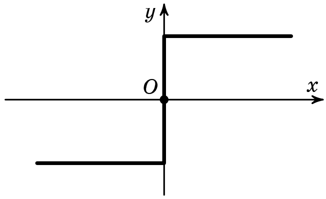

Рис. 12

Эту близость графиков $\operatorname{sign}(x)$ и $f(x)$ не улавливает введённая выше равномерная метрика. Действительно, если x — очень маленькое положительное число, то $\operatorname{sign}(x) = 1$, а значение $f(x)$ близко к нулю. Расстояние между рассматриваемыми функциями в этой метрике равно 1 (см. сноску *) на с. 10). А близки они именно с точки зрения хаусдорфовой метрики в пространстве дополненных графиков.

Упражнение 3. Найдите расстояние между графиком функции $f(x)$ и дополненным графиком функции $\operatorname{sign}(x)$ в смысле хаусдорфовой метрики.

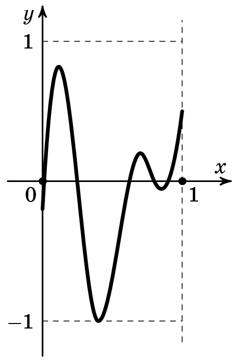

Рис. 13

Давайте вспомним теперь про единичные шары в метрическом пространстве. Как выглядит единичный шар в пространстве непрерывных функций с равномерной метрикой? Пусть, для простоты, отрезок $[a, b]$ совпадает с отрезком $[0, 1]$, а центр единичного шара будет в нуле (речь идёт о нуле метрического пространства). В качестве нуля выступает тождественно нулевая функция — одна точка метрического пространства. Давайте попытаемся представить себе все непрерывные функции, которые удалены от тождественно нулевой функции на расстояние не большее чем 1, ведь это и будет единичный шар с центром в нуле. Их можно представить как функции, графики которых лежат в полосе, ограниченной пунктирными линиями на рис. 13. Действительно, расстояние от каждой точки графика такой функции по вертикали до оси Ox не превосходит единицы, а с другой стороны любая функция выходящая за пределы полосы находится уже на расстоянии большем, чем 1 от тождественно нулевой функции.

А теперь представим себе единичный шар с центром в какой-нибудь фиксированной точке f_0 нашего метрического пространства. Аналогично получаем, что единичный шар с центром f_0 — это все непрерывные функции лежащие на отрезке $[0,1]$, которые ограничены сверху функцией $f_0(x)+1$, а снизу функцией $f_0(x)-1$. Все эти функции тоже лежат внутри криволинейной полосы, ограниченной пунктирными линиями (рис. 14).

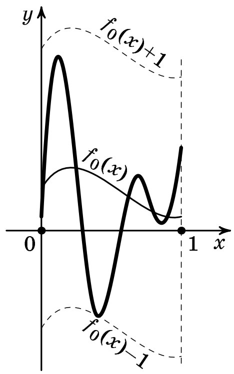

Рис. 14

СФЕРЫ ВЛИЯНИЯ

Отметим несколько точек метрического пространства и разделим всё пространство на «сферы влияния». Каждую точку отнесём к той из фиксированных точек, до которой ей ближе всего. Разумеется, это деление зависит от того, какое мы выберем расстояние (см. 4-ю стр. обложки).

Рассмотрим сначала привычную нам евклидову метрику ρ_2 на плоскости. Пусть мы находимся в городе, в котором есть метро. В какой бы точке города мы не находились можно определить, до какой станции метро ближе всего. Таким образом город делится на «сферы влияния».

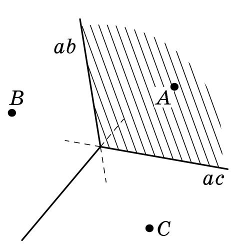

Рис. 15

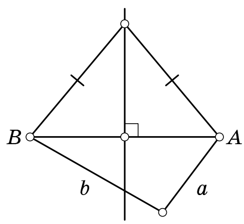

Рис. 16

Для примера, представим город с тремя станциями метро. Тогда сферы влияния будут выглядеть так, как показано на рис. 15. Эти сферы влияния ещё называются *зонами Дирихле*. Заметим, что мы поделили город на сферы влияния относительно метрики ρ_2 (для другой метрики «сферы влияния» будут другими).

Эти сферы влияния нетрудно построить геометрически для любого числа точек. Действительно, если имеется только две станции метро, то достаточно соединить их отрезком и провести через середину этого отрезка прямую, ему перпендикулярную. Эта прямая и будет разделять плоскость на две зоны Дирихле (рис. 16). Если же на карте города появляется третья точка, то сначала надо решить этот спор между каждой парой точек, а затем взять пересечение «попарных» сфер влияния. На рис. 15 заштрихована область, являющаяся сферой влияния станции метро A: из любой точки внутри этой области быстрее всего попасть на станцию A. Действительно, все эти точки и точка A лежат по одну сторону от прямой ab (эта прямая является серединным перпендикуляром к отрезку AB) и от прямой ac, а значит не принадлежат сферам влияния точки B и точки C.

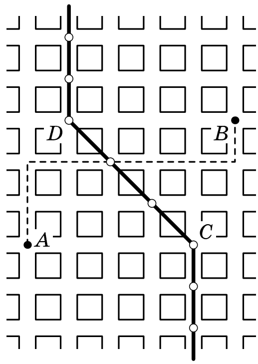

Рис. 17

Воспользуемся теперь метрикой ρ_1. Представим себе сетку улиц с правильной планировкой и две станции метро A и B (рис. 17). Здесь разделителем будет тоже множество точек, расстояние от которых до метро A и до метро B одинаково. В это множество попадают точки отрезка CD, которые являются серединами кратчайшего пути от метро A до метро B (один из таких путей*) на рис. 17 показан пунктиром). Далее, ниже точки C по вертикали расположены точки равноудалённые от обеих станций метро; действительно, при переходе от более верхней точки вниз по вертикали на один квартал, расстояние до обеих станций метро увеличивается ровно на 1. Аналогично, равноудалены от A и B и точки, расположенные по вертикали выше точки D.

Упражнение 4. Разбейте плоскость на сферы влияния двух точек A и B (рис. 17) для метрики ρ_∞.

---

*) Обратите внимание, что для метрики ρ_1, в отличие от привычной нам метрики ρ_2, кратчайший путь, соединяющий две точки A и B, не единственен. (Для произвольной метрики ρ *путь кратчайшей длины* — путь длины $\rho(A, B)$.)

Ещё одно необычное свойство метрики ρ_1 приведено на 4-й стр. обложки.

АВТОМАТИЧЕСКОЕ ИСПРАВЛЕНИЕ ОШИБОК

Сферы влияния (зоны Дирихле) используются в теории кодирования, когда нужно автоматически исправлять ошибки при передаче закодированных сообщений. Рассмотрим слова (сообщения), записанные в алфавите $\{0,1\}$ и состоящие, для простоты, из пяти букв. За расстояние будем считать количество побуквенных различий между ними. Другими словами, расстояние — это количество исправлений, необходимое для того, чтобы одно слово переправить на другое. Например, расстояние между словами 01011 и 11101 равно 3. В реальности, конечно, используются более длинные слова. В качестве центров притяжения выделяются только осмысленные слова (предполагается, что не всякая запись осмысленна!). Пусть расстояние между любыми осмысленными словами достаточно велико.

Предположим, что нам отправлено осмысленное сообщение, при передаче которого произошёл случайный сбой, т. е. некоторое искажение информации. Если сбой небольшой, то некоторые осмысленные слова заменились на близкие к ним неосмысленные слова. А так как всё пространство разбито на области Дирихле относительно осмысленных слов, то мы можем подкорректировать сообщение, заменяя неосмысленное слово на ближайшее к нему осмысленное. Если сбой был действительно небольшой, наша коррекция будет правильной, и мы получим исходное сообщение. Именно так работают некоторые механизмы автоматического исправления ошибок в теории кодирования.

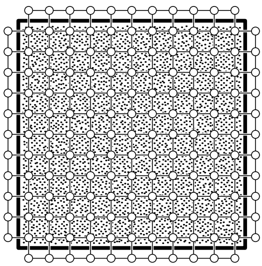

Рис. 18

ВПОЛНЕ ОГРАНИЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

На плоскости с обычным расстоянием возьмём ограниченное множество, например, квадрат. Мы можем разбросать конечное число точек — набросить своего рода сеть на квадрат (рис. 18), так чтобы для любой точки из этого квадрата нашлась «близкая» точка сети («близкая» в смысле «удалённая не более, чем на ранее зафиксированное число ε»). Построенный набор точек называется ε-*сетью*. Подобным же образом ε-сеть можно построить не только для квадрата, а и для любого множества (даже не обязательно ограниченного), но при этом она не обязательно получится конечной*). Так вот, если для некоторого множества в метрическом пространстве при любом $\varepsilon > 0$ удаётся построить конечную ε-сеть, то такое множество называется *вполне ограниченным*.

Как легко понять, в евклидовой плоскости каждое ограниченное множество является вполне ограниченным. Действительно, для любого ограниченного множества на плоскости и для произвольного положительного числа ε можно построить конечную ε-сеть, хотя бы потому что это ограниченное множество можно заключить в некоторый квадрат, для которого конечную ε-сеть мы уже умеем строить. Конечно, количество элементов ε-сети зависит от ε, и более того, возрастает по мере убывания ε, но всё же для каждого ε оно конечно.

Упражнение 5. Докажите, что в любом метрическом пространстве каждое вполне ограниченное множество ограничено, т. е. может быть заключено в шар конечного радиуса.

Утверждение, обратное сформулированному в упражнении, не всегда верно. Оказывается, что в некоторых метрических пространствах существуют такие ограниченные множества, для которых при некоторых ε нельзя найти конечной ε-сети. В качестве примера такого множества рассмотрим единичный шар (с центром в нуле) в пространстве непрерывных функций на отрезке $[0,1]$ с равномерной метрикой

$$\rho(f_1, f_2) = \max_{x\in[a,b]} |f_1(x) - f_2(x)|,$$

уже рассмотренной нами (см. с. 10). Покажем, что для него не существует конечной 1/3-сети. Если мы найдём бесконечное число различных функций, таких, что расстояние между любыми двумя из них равно 1, то ни о какой конечной 1/3-сети и речи быть не может. Действительно, если бы конечная 1/3-сеть существовала, тогда для каждой функции, нашлась бы функция, на расстоянии не более чем 1/3, принадлежащая этой самой 1/3-сети. С другой стороны, если мы вокруг каждой точки нашего бесконечного множества построим шарик радиуса 1/3, то эти шарики не пересекутся (поскольку расстояния между любыми двумя их центрами равно 1), и в каждом таком шарике обязательно должна найтись точка (функция) из 1/3-сети. Но мы предположили, что 1/3-сеть конечна, а шариков — бесконечное число. Это противоречие доказывает, что в рассмотренном случае конечная 1/3-сеть не существует.

---

*) *Конечной ε-сетью* называется ε-сеть, состоящая из конечного числа элементов.

Осталось дело за малым: предъявить бесконечное число различных непрерывных функций, таких что расстояние между каждой парой равно единице. Это можно сделать так: разделим отрезок $[0,1]$ на бесконечное число отрезков $[1/2,1]$, $[1/4,1/2]$, $[1/8,1/4]$ и т. д.; теперь каждому отрезку сопоставим функцию такую, что на отрезке её график проходит по боковым сторонам равнобедренного треугольника единичной высоты, основанием которого является наш отрезок, а вне отрезка функция равна нулю (рис. 19). Все построенные таким образом функции непрерывны. Измерим расстояние между двумя функциями $f_m(x)$ (с «пиком» в точке $3/2^{m+1}$) и $f_n(x)$ (с «пиком» в точке $3/2^{n+1}$). Расстояние $\rho(f_m, f_n)$ не может быть больше чем 1, поскольку

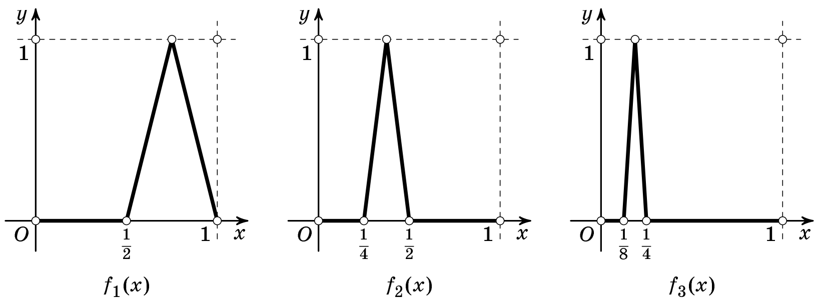

Рис. 19

функции f_m и f_n принимают значения от 0 до 1. С другой стороны, в точке $x = 3/2^{m+1}$ (а также в точке $x = 3/2^{n+1}$)

$$|f_m(x) - f_n(x)| = 1,$$

тем самым,

$$\rho(f_m, f_n) = 1.$$

Итак, мы доказали следующий

Факт. В пространстве непрерывных функций на отрезке $[0,1]$ (оно обозначается $C[0,1]$) с равномерной метрикой единичный шар не является вполне ограниченным множеством.

Подробнее о свойстве вполне ограниченности и о связанном с ним понятием компактности множества можно прочитать в учебниках по функциональному анализу, например, в книге [5].

МЕТРИКИ В ПРОСТРАНСТВЕ ДВОИЧНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Рассмотрим пространство бесконечных последовательностей из нулей и единиц. Для примера, последовательности $x = \{01010101...\}$ и $y = \{11011101...\}$ являются точками этого пространства. Здесь также можно вводить разные расстояния.

Эти последовательности можно отождествлять с числами на отрезке $[0, 1]$, потому что на последовательность из нулей и единиц можно смотреть, как на двоичное представление числа (т. е. представление числа в двоичной записи). Например, записанные выше последовательности x и y можно отождествить с числами, двоичные записи которых, соответственно, 0,01010101... и 0,11011101... Это отождествление позволяет принять в качестве расстояния между последовательностями обычное расстояние между числами на числовой прямой, с которыми эти последовательности отождествляются. При этом, однако, может не выполняться вторая аксиома метрики. Например, две разные последовательности 1000... и 0111..., если на них смотреть как на набор коэффициентов двоичного разложения чисел, представляют одно и то же число:

$$0{,}1000... = 0{,}0111... = \frac{1}{2}.$$

Поэтому расстояние между этими последовательностями равно нулю, хотя это разные последовательности. Такое нарушение взаимной однозначности соответствия между множеством двоичных последовательностей и множеством чисел на отрезке $[0, 1]$ происходит лишь за счёт так называемых двоично-рациональных чисел, т. е. чисел вида $m/2^n$, каждому из которых соответствуют два разных двоичных разложения. Одно из этих разложений конечное, в котором все коэффициенты, начиная с некоторого места, нулевые, а другое бесконечное, в котором, начиная с некоторого места, стоят подряд лишь единицы. Если мы договоримся исключить из пространства двоичных последовательностей, например, все конечные последовательности, то в оставшемся множестве последовательностей введённое расстояние уже будет удовлетворять всем аксиомам метрики.

Иное, более интересное в определённом смысле, расстояние между последовательностями из нулей и единиц можно ввести следующим образом. Пусть $x = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ и $y = \{y_1, y_2, ..., y_n, ...\}$ — две такие последовательности. Обозначим через $\oplus$ сложение «по модулю 2», т. е. положим $0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0$ и $1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1$. Используя это обозначение, введём такое расстояние:

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n \oplus y_n}{2^n}.$$

Для двух произвольных последовательностей нашего пространства это расстояние определено и конечно, поскольку сумма в правой части не превосходит суммы бесконечной геометрической прогрессии

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Оно очевидно неотрицательно, равно нулю для равных последовательностей и обладает свойством симметрии. Для проверки неравенства треугольника заметим, что для любых трёх последовательностей x, y, z, где $z = \{z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots\}$ при каждом n выполнено неравенство

$$x_n \oplus y_n \leqslant (x_n \oplus z_n) + (z_n \oplus y_n).$$

В самом деле, если $x_n = y_n$, то $x_n \oplus y_n = 0$, и неравенство очевидно. Если же $x_n \neq y_n$, то $x_n \oplus y_n = 1$, а справа в неравенстве хотя бы одна скобка тоже равна 1, потому что z_n не равно одному из чисел x_n и y_n.

Отсюда ясно, что

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n \oplus y_n}{2^n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n \oplus z_n}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n \oplus y_n}{2^n} = \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Таким образом, наше расстояние удовлетворяет всем четырём аксиомам метрики.

Введённую метрику можно перенести на отрезок $[0, 1]$, отождествляя, как и выше, последовательности с числами, коэффициентами двоичных разложений которых являются члены последовательностей, т. е. ставя каждой последовательности $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ в соответствие двоичное число $\widetilde{x} = 0{,}x_1 x_2 \ldots x_n \ldots$

Интересная геометрическая модель нашего пространства двоичных последовательностей получается, если разные двоичные разложения одного и того же двоично-рационального числа не отождествлять, а считать разными точками так называемого «модифицированного» отрезка $[0, 1]$. Можно условиться конечное разложение двоично-рационального числа считать его «правым» изображением на модифицированном отрезке, а бесконечное — его «левым» изображением. Так двоичное разложение $0{,}1000\ldots$ можно считать соответствующим «правой» точке $\frac{1}{2}$, которую обозначим $\frac{1}{2}^{(+)}$, а разложение

0,0111... считать соответствующим «левой» точке $\frac{1}{2}$, которую обозначим $\frac{1}{2}^{(-)}$. Для множества чисел, не являющихся двоично-рациональными, соответствие между точками отрезка $[0,1]$ и их двоичными разложениями является взаимно однозначным. Так что на модифицированном отрезке эти числа можно себе представлять обычными точками.

Модифицированный отрезок с введённой выше метрикой представляет собой весьма необычное метрическое пространство, сильно отличающееся по своей структуре от отрезка с обычным расстоянием. Это пространство оказывается весьма «дырявым». Если мы посчитаем расстояние между $\frac{1}{2}^{(+)}$ и $\frac{1}{2}^{(-)}$, то получим

$$\rho\left(\frac{1}{2}^{(+)}, \frac{1}{2}^{(-)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1,$$

т. е. эти точки, которые на обычном отрезке «слипаются», отождествляясь с одним и тем же числом $1/2$, на модифицированном отрезке оказываются весьма далёкими друг от друга. Между ними находится «дырка» длиной 1. Подобные «дырки» находятся между каждой парой, состоящей из левого и правого изображений двоично-рационального числа. Такие «дырявые» метрические пространства называют *вполне несвязными*. В них не существует непрерывного пути из одной точки в другую: по дороге всегда приходится перепрыгивать через «дырки».

В нашем пространстве двоичных последовательностей можно ввести операцию сложения $\oplus$, определив её как покоординатное сложение по модулю 2, т. е. можно определить сумму двух последовательностей x и y как последовательность

$$x \oplus y = \{x_1 \oplus y_1,\ x_2 \oplus y_2,\ \ldots,\ x_n \oplus y_n,\ \ldots\}.$$

Операция вычитания при этом окажется совпадающей со сложением. Пространство двоичных последовательностей с так определённым сложением и с введённым выше расстоянием часто называют двоичной группой Кантора, потому что оно похоже по своей структуре на такое же «дырявое» множество Кантора, играющее важную роль в математическом анализе (см. [5]).

Подробнее о двоичной группе и её применениях в математике можно прочитать в [2].

p-АДИЧЕСКАЯ МЕТРИКА

Поговорим о метрике, которая определена на множестве рациональных чисел, превращая это множество в метрическое пространство, весьма отличающееся по своим геометрическим свойствам от привычного евклидова пространства.

Зафиксируем некоторое простое число p. Если рациональные числа a и b равны, то положим

$$\rho(a,b)=0.$$

В случае $a \neq b$ представим разность этих чисел в виде

$$a-b=p^k \cdot \frac{m}{n},$$

где m, n и k — целые числа, причём m и n не делятся на p. Метрику в этом случае определим равенством

$$\rho(a,b)=\frac{1}{p^k}.$$

Так определённая метрика называется *p-адической*. Первые три аксиомы для этой метрики очевидно выполнены. Для проверки неравенства треугольника попарные разности трёх рациональных чисел a, b и c представим в виде

$$a-b=p^{k_1} \cdot \frac{m_1}{n_1}, \quad a-c=p^{k_2} \cdot \frac{m_2}{n_2}, \quad c-b=p^{k_3} \cdot \frac{m_3}{n_3},$$

где все числа m_i, n_i не делятся на p. Поскольку

$$p^{k_1} \cdot \frac{m_1}{n_1}=a-b=(a-c)+(c-b)=p^{k_2} \cdot \frac{m_2}{n_2}+p^{k_3} \cdot \frac{m_3}{n_3},$$

то k_1 не может быть меньше, чем наименьшее из чисел k_2 и k_3. Поэтому $p^{k_1} \geqslant \min\{p^{k_2}, p^{k_3}\}$, откуда

$$\frac{1}{p^{k_1}} \leqslant \max\left\{\frac{1}{p^{k_2}}, \frac{1}{p^{k_3}}\right\} \leqslant \frac{1}{p^{k_2}}+\frac{1}{p^{k_3}}.$$

Таким образом мы доказали для нашей метрики не только неравенство треугольника, но и более сильное неравенство

$$\rho(a,b) \leqslant \max\{\rho(a,c),\ \rho(c,b)\}. \qquad (*)$$

Метрику, обладающую этим свойством, называют *неархимедовой*. Метрика, не являющаяся неархимедовой, называется *архимедовой*. Наши рассуждения показывают, что p-адическая метрика является неархимедовой.

Упражнение 6. Проверьте, что рассмотренные в предыдущих параграфах метрики являются архимедовыми.

Чтобы убедиться в необычности свойств пространства с неархимедовой метрикой, посмотрим на три точки такого пространства a, b и c как на вершины треугольника, а на попарные расстояния между этими числами как на длины сторон треугольника. Пусть $\rho(a,c) \neq \rho(c,b)$. Допустим, что при этом $\rho(a,c) < \rho(c,b)$. Тогда в соответствии с неравенством (*) $\rho(a,b) \leqslant \rho(c,b)$. Но неравенство (*) остаётся справедливым если точки a, b и c написать в другом порядке. Например, $\rho(c,b) \leqslant \max\{\rho(c,a),\ \rho(a,b)\}$. Но неравенство $\rho(c,b) \leqslant \rho(a,c)$ не выполнено по предположению. Поэтому выполнено $\rho(c,b) \leqslant \rho(a,b)$. Тем самым получаем, что $\rho(a,b) = \rho(c,b)$.

Таким образом, мы убедились, что в пространстве с неархимедовой метрикой все треугольники оказываются равнобедренными. При этом в случае 2-адической метрики (т. е. при $p = 2$) эти равнобедренные треугольники не могут оказаться равносторонними (если они не вырождаются в точку). В самом деле, пусть $\rho(a,b) = \rho(b,c) = \frac{1}{2^k}$, причём

$$a - b = 2^k \cdot \frac{m_1}{n_1} \quad \text{и} \quad b - c = 2^k \cdot \frac{m_2}{n_2},$$

где числа m_1, n_1, m_2, n_2 нечётные. Тогда

$$a - c = 2^k\left(\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2}\right) = 2^k \cdot \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}.$$

Число $m_1 n_2 + m_2 n_1$ является чётным, поэтому

$$\rho(a,c) \leqslant \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{1}{2^k} = \rho(a,b).$$

Другое странное свойство неархимедовой метрики проверьте самостоятельно.

Упражнение 7. Рассмотрим круг с центром в точке a радиуса r:

$$D_r(a) = \{x \mid \rho(x,a) < r\}.$$

Докажите, что в случае, когда метрика ρ является неархимедовой, любая точка этого круга является его центром, т. е. если $b \in D_r(a)$, то $D_r(b) = D_r(a)$.

Более подробно о свойствах некоторых из рассмотренных здесь метрических пространств можно прочитать в популярных публикациях [1], [3], [7]. Для более глубокого изучения затронутых здесь вопросов читателям, знакомым с основами математического анализа, можно рекомендовать книги [2], [4], [5] и статью [6].

РЕШЕНИЯ УПРАЖНЕНИЙ

1. И для расстояния ρ_1, и для расстояния ρ' аксиома 1) выполняется по определению функций, задающих расстояние, так как модуль не принимает отрицательных значений. Проверим аксиому 2). Если точки совпадают, то расстояние между ними равно нулю. А если точки не совпадают, то хотя бы одно из двух выражений $|x_2 - x_1|$, $|y_2 - y_1|$ больше нуля.

Аксиома 3) очевидно следует из равенства $|x| = |-x|$.

Осталось проверить неравенство треугольника. Пусть точки A, B и C имеют координаты (x_1, y_1), (x_2, y_2) и (x_3, y_3) соответственно. Для ρ_1 неравенство треугольника доказывается совсем просто:

$$\rho(A,B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| \leqslant$$
$$\leqslant |x_2 - x_3| + |x_3 - x_1| + |y_2 - y_3| + |y_3 - y_1| = \rho(A,C) + \rho(C,B).$$

Для ρ' доказательство ненамного сложнее. Не ограничивая общности, можно считать, что $\max\{|x_2 - x_1|,\ |y_2 - y_1|\} = |x_2 - x_1|$, тогда

$$|x_2 - x_1| \leqslant |x_2 - x_3| + |x_3 - x_1| \leqslant$$
$$\leqslant \max\{|x_2 - x_3|,\ |y_2 - y_3|\} + \max\{|x_3 - x_1|,\ |y_3 - y_1|\}.$$

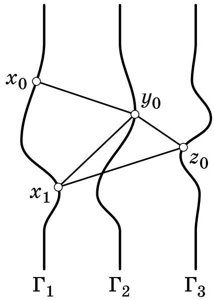

Рис. 20

2. Если кривые совпадают, то очевидно, что хаусдорфово расстояние между ними равно нулю. Если же кривые не совпадают, выберем точку a на кривой Γ_1, не принадлежащую кривой Γ_2. Вычислим $\min\limits_{x\in\Gamma_1} \rho(x,a)$. Это число больше нуля, потому что можно выбрать шар с центром в a достаточно малого радиуса, такой чтобы в нём не было точек кривой Γ_1. А значит, $\rho_H(\Gamma_1, \Gamma_2) > 0$.

Свойство симметрии для ρ_H вытекает из свойства симметрии для метрики ρ.

Проверим неравенство треугольника. По определению

$$\rho_H(\Gamma_1,\Gamma_2) = \max\left\{\max_{y\in\Gamma_2}\min_{x\in\Gamma_1}\rho(x,y),\ \max_{x\in\Gamma_1}\min_{y\in\Gamma_2}\rho(x,y),\right\}$$

Оценим каждое из выражений, стоящих в фигурных скобках. Обозначим через x_0 и y_0 точки кривых Γ_1 и Γ_2 соответственно, в которых достигается $\max\limits_{y\in\Gamma_2}\min\limits_{x\in\Gamma_1}\rho(x,y)$ (рис. 20). Пусть z_0 — точка кривой Γ_3, в которой достигается $\min\limits_{z\in\Gamma_3}\rho(z,y_0)$, а x_1 — точка кривой Γ_1, в которой достигается $\min\limits_{x\in\Gamma_1}\rho(x,z_0)$ (см. рис. 20). Имеем:

$$\max_{y\in\Gamma_2}\min_{x\in\Gamma_1}\rho(x,y) = \rho(x_0,y_0) \leqslant \rho(x_1,y_0) \leqslant \rho(x_1,z_0) + \rho(z_0,y_0) \leqslant$$
$$\leqslant \max_{z\in\Gamma_3}\min_{x\in\Gamma_1}\rho(x,z) + \max_{y\in\Gamma_2}\min_{z\in\Gamma_3}\rho(z,y).$$

Аналогично получаем неравенство

$$\max_{x\in\Gamma_1}\min_{y\in\Gamma_2}\rho(x,y) \leqslant \max_{x\in\Gamma_1}\min_{z\in\Gamma_3}\rho(x,z) + \max_{z\in\Gamma_3}\min_{y\in\Gamma_2}\rho(z,y).$$

Следовательно,

$$\rho_H(\Gamma_1,\Gamma_2) \leqslant \max\left\{\max_{x\in\Gamma_1}\min_{z\in\Gamma_3}\rho(x,z),\ \max_{z\in\Gamma_3}\min_{x\in\Gamma_1}\rho(x,z)\right\} +$$
$$+ \max\left\{\max_{x\in\Gamma_2}\min_{z\in\Gamma_3}\rho(z,y),\ \max_{z\in\Gamma_3}\min_{y\in\Gamma_2}\rho(z,y)\right\} = \rho_H(\Gamma_1,\Gamma_3) + \rho_H(\Gamma_3,\Gamma_2).$$

3. Обозначим точку $(0;1)$ через A, точку $(0{,}01;1)$ — через B. Проведём биссектрису AC и высоту AH треугольника OAB и опустим перпендикуляры CD и CE из точки C на прямые OA и AB соответсвенно (рис. 21). Докажем, что искомое хаусдорфово расстояние равно AH.

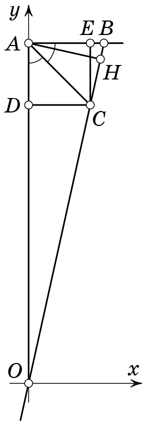

Рис. 21

Если установить на поливальной машине радиус полива CD и проехать по дополненному графику функции $\operatorname{sign}(x)$ (ломаная $\ldots OAB\ldots$), то график функции $f(x)$ (ломаная $\ldots OB\ldots$) будет полностью полит, а если установить меньший радиус полива то точка C графика $f(x)$ останется не политой.

Если установить радиус полива AH и проехать по графику функции $f(x)$ дополненный график функции $\operatorname{sign}(x)$ будет полностью полит, а при меньшем радиусе полива, точка A останется не политой.

Получаем, хаусдорфово расстояние между этими графиками равно большей из длин AH и $CD = CE$. Рассмотрим треугольник AOH. Длина его высоты, опущенной из вершины H, больше CD и меньше AH, т. е. $AH > CD$. Таким образом, хаусдорфово расстояние между графиками равно

$$AH = \frac{OA \cdot AB}{OB} = \frac{1 \cdot 0{,}01}{\sqrt{1^2 + 0{,}01^2}} = \frac{1}{\sqrt{10001}}.$$

4. Сначала найдём множество точек, которые являются серединами кратчайших путей из A в B. Для этого нарисуем две окружности (границы шара) с центрами в точках A и B, с радиусами равными половине расстояния между ними (рис. 22). Эти окружности пересекаются по отрезку CD, который и будет множеством точек, являющихся серединами кратчайших путей из A в B. Далее, на луче CC' расположены точки, равноудалённые от точек A и B. В этом легко убедиться, рисуя окружности с центрами в точках A и B с большими радиусами. Аналогично, равноудалены от A и B и точки, расположенные на луче DD'.

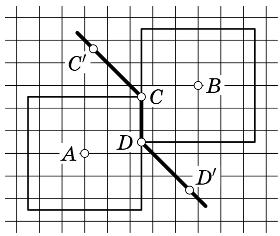

Рис. 22

5. Рассмотрим некоторую точку O данного метрического пространства. Эта точка будет центром шара, в который будет заключено данное вполне оганиченное множество. Найдём радиус этого шара.

Так как множество вполне ограничено, для него существует конечная ε-сеть при $\varepsilon = 1$. Обозначим через N количество элементов этой 1-сети, а сами элементы обозначим через $A_1, A_2, \ldots, A_N$. Другими словами, всё данное вполне ограниченное множество покрывается N шарами единичного радиуса с центрами $A_1, A_2, \ldots, A_N$.

Покажем, что при $R = 1 + \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} \rho(O, A_i)$ любая точка C данного вполне ограниченного множества содержится в шаре радиуса R с центром в точке O. Действительно, для C найдётся такой элемент A_k из 1-сети, что $\rho(A_k, C) \leqslant 1$. Используя неравенство треугольника, получаем:

$$\rho(O, C) \leqslant \rho(O, A_k) + \rho(A_k, C) \leqslant \rho(O, A_k) + 1 \leqslant R.$$

Таким образом точка C лежит внутри построенного шара.

6. Для того чтобы определить, являяется ли метрика ρ архимедовой, достаточно предъявить три точки A, B и C, такие что $\rho(A, B) = 1$, $\rho(A, C) = 1/2$ и $\rho(C, B) = 1/2$. Действительно, в этом случае $\rho(A, B) > \max\{\rho(A, C),\ \rho(C, B)\}$, и метрика ρ не является неархимедовой, т. е. она архимедова.

Рассмотрим точки $A(-1/2,0)$, $B(1/2,0)$ и $C(0,0)$. Имеем:

$$\rho_p(A,B) = ((-1/2-1/2)^p + (0-0)^p)^{1/p} = 1,$$
$$\rho_p(B,C) = ((1/2-0)^p + (0-0)^p)^{1/p} = 1/2,$$
$$\rho_p(C,A) = ((0+1/2)^p + (0-0)^p)^{1/p} = 1/2.$$

Таким образом, метрики ρ_p архимедовы.

Докажем что хаусдорфова метрика в пространстве кривых на плоскости и равномерная метрика в пространстве непрерывных функций на отрезке $[0,1]$, являются архимедовыми. Рассмотрим три функции на отрезке $[0,1]$:

$$f_1(x) \equiv -1/2, \quad f_2(x) \equiv 1/2, \quad f_3(x) \equiv 0.$$

Расстояния между ними равны $\rho(f_1,f_2)=1$, $\rho(f_2,f_3)=1/2$, $\rho(f_3,f_1)=1/2$ для обеих метрик.

Осталось рассмотреть только две метрики в пространстве двоичных последовательностей. Определим двоичные последовательности

$$A=\{00000\ldots\}, \quad B=\{11111\ldots\}, \quad C=\{01111\ldots\}.$$

Для обеих метрик расстояния между этими последовательностями равны $\rho(A,B)=1$, $\rho(B,C)=1/2$, $\rho(C,A)=1/2$.

7. Сначала докажем, что все точки шара $D_r(a)$ содержатся в шаре $D_r(b)$. Выберем произвольную точку $c \in D_r(a)$ и рассмотрим треугольник abc. Точки b и c лежат в шаре $D_r(a)$, следовательно, $\rho(a,b) \leqslant r$ и $\rho(a,c) \leqslant r$. А так как метрика ρ является неархимедовой, получаем: $\rho(b,c) \leqslant \max\{\rho(b,a),\ \rho(a,c)\} \leqslant r$. Это в точности означает, что точка c содержится в шаре $D_r(b)$.

Докажем, что все точки шара $D_r(b)$ содержатся в шаре $D_r(a)$. Теперь точки a и b поменялись ролями. Рассуждая аналогично, получаем, что шар $D_r(b)$ содержится в шаре $D_r(a)$. А тем самым, шары $D_r(b)$ и $D_r(a)$ совпадают.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Беккер, С. Востоков, Ю. Ионин. 2-адические числа // Квант. 1979. № 2. С. 26—31.

[2] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов. Ряды и преобразования Уолша. — М.: Наука, 1987.

[3] Е. П. Долженко, В. А. Скворцов. Как измеряют расстояние между функциями // Математика в школе. 1977. № 6. С. 51—88.

[4] Н. Коблиц. p-адические числа, p-адический анализ и дзета-функции. — М.: Мир, 1982 *или* Могилёв: Бибфизмат, 1997.

[5] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1981.

[6] Б. Сендов. Некоторые вопросы теории приближения функций и множеств в хаусдорфовой метрике // Успехи матем. наук. 1969. Т. 24. № 5. С. 141—178.

[7] Ю. А. Шрейдер. Что такое расстояние?. — («Популярные лекции по математике». Вып. 38). — М.: Физматгиз, 1963.