И. В. Ященко

Приглашение на математический праздник

И. В. Ященко

ПРИГЛАШЕНИЕ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПРАЗДНИК

Москва
Издательство МЦНМО
2005

УДК 51
ББК 22.1, 74.200.58
Я97

Ященко И. В.

Я97 Приглашение на Математический праздник. — 2-е изд., доп. — М.: МЦНМО, 2005. — 104 с. — ISBN 5-94057-182-4.

В книге приводятся все задания Математического праздника — самой массовой олимпиады по математике для учеников 6–7 классов города Москвы. Почти ко всем заданиям даны ответы, указания и решения.

Книга, рассчитанная на школьников 5–8 классов, будет полезна также их учителям, родителям, руководителям кружков и всем, кто любит решать занимательные задачи.

Первое издание книги увидело свет в 1998 году, настоящее (второе) издание включает материалы всех Математических праздников с 1990 по 2004 год.

ББК 22.1, 74.200.58

Издание осуществлено при поддержке Департамента Образования г. Москвы, Московского института открытого образования, корпорации «Boeing», Научно-методического центра «Школа нового поколения».

Иван Валериевич Ященко

Приглашение на Математический праздник

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г. Подписано в печать 04.12.2004 г.
Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 6,5.
Тираж 10000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. 241-05-00.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП «Полиграфические ресурсы».

ISBN 5-94057-182-4

Памяти Димы Ботина,

замечательного человека,
учителя и организатора олимпиад
посвящается эта книга

ДОРОГОЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Книжка, которую ты сейчас держишь в руках, — это приглашение учащимся 6–7 классов принять участие в Математическом празднике. Он традиционно проходит каждый год в одно из воскресений февраля в Главном здании Московского государственного университета на Воробьёвых горах. В этот день сотни школьников 6–7 классов приходят, чтобы решать интересные задачи.

ЧТО ТАКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПРАЗДНИК И КАК ОН ПРОХОДИТ?

Начинается праздник в 10:00 (конечно, прийти лучше минут на 10–15 раньше). Сначала участников рассаживают по аудиториям и объясняют «правила игры», ведь для многих это первое в их жизни математическое соревнование.

А правила достаточно просты. Надо постараться решить как можно больше задач, причём самому — разговаривать с соседями не разрешается. (Играть надо честно!)

Решение записывайте аккуратно, на специальных бланках, чтобы проверяющие могли это прочитать и понять! При этом писать надо не только ответ, но и решение (обоснование). Не бойтесь приступать к записи, особенно если вроде всё ясно, но непонятно, с чего начать. Задачи на олимпиаде нестандартные, и, в отличие от школьной контрольной, здесь нет специальных правил оформления решений. Кроме того, никто не будет снижать вам оценку за помарки, простят описку (если она не повлияла на ход решения). Главное, чтобы была видна идея и были понятны ваши мысли. Даже если задачу не удалось решить полностью, запишите то, что удалось сделать — может быть, вы остановились в одном шаге от цели, и это обязательно будет отмечено. Помните, что просто верный ответ во многих задачах ценится ниже, чем хорошее решение, но с опиской в конце.

Если задача не поддаётся, стоит перейти к следующей, а потом вернуться ещё раз. Полученное решение лучше сразу записать, а через некоторое время прочитать «свежим» взглядом.

На решение задач даётся 2 часа. Пока ребята решают задачи, родители встречаются с представителями оргкомитета, руководством мехмата МГУ, руководителями кружков, учителями ведущих школ города.

Потом перерыв, во время которого можно послушать разбор задач, посетить интересную лекцию по математике и перекусить.

В 14:00 начинается культурная программа (обычно это показ мультфильмов). В 17:00–17:30 происходит награждение победителей. После награждения — показ работ.

Информация о том, когда состоится математический праздник, задачи прошлых лет, статистика всегда доступны на сайте Московского центра непрерывного математического образования (www.mccme.ru).

Ждём тебя на следующем Математическом празднике и Московской математической олимпиаде!

ИЗ ИСТОРИИ ПРАЗДНИКА

Математический праздник впервые был проведён в 1990 году по инициативе преподавателей математического кружка при МГУ (Малого мехмата) Димы Ботина (памяти которого посвящается эта книга), Саши Спивака и автора этих строк. На первом празднике было около 200 ребят — в основном из математических кружков. С 1990 года Математический праздник стал ежегодным. Число участников неуклонно росло. В 2004 году их уже было около 2000. Многие участники приехали из других городов. С 1994 года Праздник является частью Московской математической олимпиады.

За эти годы из небольшого соревнования для кружковцев Математический праздник превратился в яркий праздник для сотен ребят. Многие его участники (не только победители!), окунувшись в атмосферу математики, впоследствии успешно занимались в кружках, специализированных школах, окончили ведущие вузы, прежде всего МГУ.

Математический праздник проводится силами сотен энтузиастов — студентов и аспирантов мехмата, руководителей кружков, преподавателей вузов, учителей и школьников старших классов ведущих математических школ — низкий им всем поклон. Без них Праздника бы не было... Размер этой книги не позволяет перечислить всех, кто вложил часть своей души в Математический праздник за прошедшие 15 лет, упомянем лишь тех, кто много лет вносил большой вклад в работу оргкомитета и методической комиссии: Л. Д. Альтшуллер, Н. Н. Андреев, В. Д. Арнольд, А. Д. Блинков, $\boxed{\text{Д. Ботин}}$, В. Бугаенко, Т. Галкина, Б. П. Гейдман, Ю. Герман, Т. Голенищева-Кутузова, Д. Григоренко, В. Гуровиц, Б. М. Давидович, С. А. Дориченко, Е. Ю. Иванова, А. Н. Карпов, А. К. Ковальджи, В. Клепцын, В. Крюков, Ю. Кудряшов, Р. Кузнец, Н. Кулакова, А. Кулыгин, С. Маркелов, А. Митягин, М. Панов, М. Потанин, В. Радионов, А. В. Спивак, Р. Фёдоров, В. Фурин, А. Хачатурян, В. П. Хованский, П. В. Чулков, С. Шалунов, $\boxed{\text{И. Ф. Шарыгин}}$, А. Шень, В. В. Ященко.

Праздник был бы невозможен без поддержки со стороны руководства и сотрудников Московского государственного университета (в первую очередь ректората и механико-математического факультета): в этот день бо́льшая часть комплекса МГУ на Воробьёвых Горах — в распоряжении участников этого соревнования.

С 1994 года Математический праздник поддерживается Департаментом образования и Московским институтом открытого образования. Все последние годы эта работа идёт в рамках Московской программы «Одарённые дети».

И конечно, у математического праздника не было бы участников, если бы учителя, руководители кружков, родители не занимались бы с детьми математикой.

ОБ ЭТОЙ КНИГЕ

Вы держите в руках второе (дополненное) издание. Первое издание вышло в 1998 году.

В первой части книги приведены условия задач Математических праздников 1990–2004 годов. Можно просто решать те задачи, которые вам понравятся, а можно иногда и поиграть в олимпиаду — попытаться решить как можно больше задач одной олимпиады за 2 часа. Обычно (но не всегда!) первые две задачи попроще, последние посложнее, причём все задачи на разные темы, так что 2–3 решённые задачи — это уже очень неплохой результат! Иногда (особенно в задачах первых праздников, в которых участвовали в основном кружковцы) могут встретиться задачи, использующие знания, которые формально выходят за рамки школьной программы соответствующего класса. Впрочем, сейчас, с распространением огромного числа альтернативных учебников, тяжело определить, что, собственно, в эту программу входит. В то же время, если у вас достаточно сообразительности и интуиции, нащупать путь решения всегда можно!

После того как задача решена, загляните во вторую часть книги и проверьте свой ответ. Также очень советуем сверить своё решение с приведённым в четвёртой части книги — кроме проверки правильности своего решения (даже если у вас совпал ответ, решение может быть неверным!) вы можете узнать другие подходы к задаче, прочитать интересные комментарии.

Если задача не поддаётся, стоит заглянуть в третью часть книги — там может содержаться подсказка или даже идея решения. Но не спешите — не лишайте себя радости маленького математического открытия! С помощью этих подсказок учитель может помочь ученику на кружке (но не на олимпиаде!).

В тематическом указателе в конце книги задачи сгруппированы по тематике, по основным идеям решения. Это поможет школьнику попрактиковаться в определённых методах решения, а учителю — подобрать задачи для математического кружка.

Много других задач, интересных материалов для кружков и самостоятельных занятий — в частности, задачи большинства математических соревнований (www.mccme.ru/olympiads), замечательные книги от старинной «Арифметики» Л. Ф. Магницкого до современных изданий (www.mccme.ru/ilib), архивы журнала «Квант» (kvant.mccme.ru), — можно найти на сайте Московского центра непрерывного математического образования (www.mccme.ru) и в проекте «Задачи» (www.problems.ru).

БЛАГОДАРНОСТИ

При подготовке данной книги, кроме архивов автора, использовались сборники задач и решений, которые ежегодно издаются оргкомитетом, книга «Московские математические олимпиады 60 лет спустя» (составители А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи, под ред. Ю. С. Ильяшенко и В. М. Тихомирова) и материалы, предоставленные Д. Ботиным, В. Бугаенко, А. К. Ковальджи, А. В. Спиваком, Р. Фёдоровым. Внимательно прочитали рукопись и сделали много полезных замечаний В. Д. Арнольд, Д. и М. Вельтищевы, Т. Караваева, Ю. Кудряшов, А. В. Семёнов, В. В. Ященко.

Отдельная благодарность В. Радионову, который не только подготовил оригинал-макет и иллюстрации, но и исправил ряд неточностей.

И. Ященко
02.12.04

АВТОРЫ ЗАДАЧ

Задачи, несомненно, определяют лицо Математического праздника. Окончательные условия задач и сами варианты рождаются после долгих раздумий и обсуждений. И в результате зачастую трудно установить, кто же конкретно является автором той или иной задачи. Кто-то бросил идею, другой придумал красивую формулировку. Тем не менее, мы решились привести список авторов задач — в тех случаях, где это «удалось установить». Приносим свои извинения за возможные неточности. Будем рады любым замечаниям и исправлениям.

1990 год. 6 класс: И. Ященко (1), Д. Ботин (3), А. Спивак (5). 7 класс: А. Спивак (1), И. Шарыгин (2), Д. Ботин (3), И. Шарыгин (6).

1991 год. 6 класс: И. Ященко (2, 6), Д. Ботин (4), А. Спивак (5). 7 класс: Д. Ботин (3–5).

1992 год. 6 класс: Д. Ботин (2), И. Ященко (4). 7 класс: Д. Ботин (2, 3).

1993 год. 6 класс: А. Спивак (1, 4, 7), Д. Ботин (2, 3, 6), Е. Иванова (5). 7 класс: А. Спивак (1, 3), И. Ященко (1, 5), И. Шарыгин (4), Д. Ботин (5, 6).

1994 год. 6 класс: Д. Ботин (1–6, 8), С. Токарев (7). 7 класс: А. Спивак (1), И. Ященко (2, 3, 5), Д. Ботин (4), А. Ковальджи (6).

1995 год. 6 класс: Д. Ботин (2), И. Шарыгин (3, 5), Е. Пронина (4), В. Ковальджи (6). 7 класс: Р. Фёдоров (1), Д. Ботин (2), И. Шарыгин (3), И. Ященко (4), А. Спивак (5), С. Маркелов (6).

1996 год. 6 класс: И. Шарыгин (2), Н. Васильев (3), А. Спивак (4, 6), Д. Ботин (5). 7 класс: А. Галочкин (1), А. Ковальджи (3, 5), С. Токарев (6).

1997 год. 6 класс: В. Замков (1), А. Спивак (2, 4, 5), А. Галочкин (3). 7 класс: С. Дориченко (1), И. Ященко (2, 5), А. Ковальджи (3), А. Галочкин (4), А. Спивак (5), А. Шень (6).

1998 год. 6 класс: М. Семёнова (1), А. Ковальджи (2), И. Ященко (5), М. Евдокимов (6). 7 класс: М. Семёнова (1), Р. Фёдоров (2), И. Ященко (3), В. Произволов (4), А. Шаповалов (5), С. Токарев (6).

1999 год. 6 класс: Д. Калинин (1, 2), А. Митягин (3), Р. Гордин (5), В. Гуровиц (6). 7 класс: Р. Фёдоров (1), Д. Калинин (2), Р. Гордин (5), В. Произволов (6).

2000 год. 6 класс: А. Митягин (1, 2, 3), В. Клепцын (3), А. Спивак (5). 7 класс: А. Митягин (1), В. Клепцын (2), А. Шень (3), В. Произволов (4), Г. Гальперин (5).

2001 год. 6 класс: А. Блинков (1), А. Саблин (2), А. Спивак, И. Ященко (3), А. Митягин (4), Т. Голенищева-Кутузова, В. Клепцын (5), И. Акулич (6). 7 класс: С. Маркелов (1), И. Ященко (2), Т. Голенищева-Кутузова, В. Гуровиц, П. Кожевников, И. Ященко (3), А. Шень (4), А. Спивак (5).

2002 год. 6 класс: А. Блинков, А. Хачатурян (1), А. Митягин (2), В. Произволов (3), И. Акулич (4), А. Чеботарёв (5), И. Григорьева (6). 7 класс: Г. Гальперин, Д. Григоренко (1), А. Митягин (2), И. Ященко (3), М. Панов (4), И. Акулич (5), Е. Иванова (6).

2003 год. 6 класс: С. Токарев (1–3), А. Хачатурян (2), А. Спивак (4, 5), А. Кустарёв (6). 7 класс: Т. Голенищева-Кутузова, И. Ященко (1) А. Чеботарёв (2), О. Карпенков (3), В. Произволов (4), Р. Фёдоров (5), Ю. Игнатов, С. Токарев (6).

2004 год. 6 класс: А. Хачатурян (2, 4), Т. Голенищева-Кутузова (3), А. Шень (5). 7 класс: И. Ященко (1, 6), Т. Голенищева-Кутузова (2, 3), Ю. Кудряшов (2), А. Шень (4), А. Хачатурян (5).

Условия задач

2004 год

6 класс

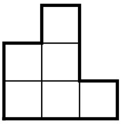
1. Кузнечик прыгает вдоль прямой вперёд на 80 см или назад на 50 см. Может ли он менее чем за 7 прыжков удалиться от начальной точки ровно на 1 м 70 см?

2. Килограмм говядины с костями стоит 78 рублей, килограмм говядины без костей — 90 рублей, а килограмм костей — 15 рублей. Сколько граммов костей в килограмме говядины?

3. а) Придумайте три правильные несократимые дроби, сумма которых — целое число, а если каждую из этих дробей «перевернуть» (т. е. заменить на обратную), то сумма полученных дробей тоже будет целым числом.

б) То же, но числители дробей — не равные друг другу натуральные числа.

4. Сложите из фигур, изображённых на рисунке, а) квадрат размером 9×9 с вырезанным в его центре квадратом 3×3; б) прямоугольник размером 9×12.



(Фигуры можно не только поворачивать, но и переворачивать.)

5. Вадик написал название своего родного города и все его циклические сдвиги (перестановки по кругу), получив таблицу 1. Затем, упорядочив эти «слова» по алфавиту, он составил таблицу 2 и выписал её последний столбец: ВКСАМО.

Таблица 1

М	О	С	К	В	А
А	М	О	С	К	В
В	А	М	О	С	К
К	В	А	М	О	С
С	К	В	А	М	О
О	С	К	В	А	М

Таблица 2

А	М	О	С	К	В
В	А	М	О	С	К
К	В	А	М	О	С
М	О	С	К	В	А
О	С	К	В	А	М
С	К	В	А	М	О

Саша сделал то же самое с названием своего родного города и получил «слово» МТТЛАРАЕКИС. Что это за город, если его название начинается с буквы С?

7 КЛАСС

1. Ваня задумал простое трёхзначное число, все цифры которого различны. На какую цифру оно может оканчиваться, если его последняя цифра равна сумме первых двух?

2. Кролик, готовясь к приходу гостей, повесил в трёх углах своей многоугольной норы по лампочке. Пришедшие к нему Винни-Пух и Пятачок увидели, что не все горшочки с мёдом освещены. Когда они полезли за мёдом, две лампочки разбились. Кролик перевесил оставшуюся лампочку в некоторый угол так, что вся нора оказалась освещена. Могло ли такое быть? (Если да, нарисуйте пример, если нет, обоснуйте ответ.)

3. На доске написаны три правильные несократимые дроби, дающие в сумме единицу, причём их числители — различные натуральные числа. Оказалось, что если каждую из этих дробей «перевернуть» (т. е. заменить на обратную), то сумма полученных дробей будет натуральным числом. Приведите пример таких дробей.

4. Таня написала название своего родного города и все его циклические сдвиги (перестановки по кругу), получив таблицу 1. Затем, упорядочив эти «слова» по алфавиту, она составила таблицу 2 и выписала её последний столбец: `ВКСАМО`.

Таблица 1

М	О	С	К	В	А
А	М	О	С	К	В
В	А	М	О	С	К
К	В	А	М	О	С
С	К	В	А	М	О
О	С	К	В	А	М

Таблица 2

А	М	О	С	К	В
В	А	М	О	С	К
К	В	А	М	О	С
М	О	С	К	В	А
О	С	К	В	А	М
С	К	В	А	М	О

Валера сделал то же самое с названием своего родного города и получил «слово» `ОССНГСОРОК`. Что это за город, если его название заканчивается на букву `К`?

5. См. задачу 4 а) для 6 класса.

6. Из Цветочного города в Солнечный ведёт шоссе длиной 12 км. На втором километре этого шоссе расположен железнодорожный переезд, который три минуты закрыт и три минуты открыт и т. д., а на четвёртом и на шестом километрах расположены светофоры, которые две минуты горят красным светом и три минуты — зелёным и т. д. Незнайка выезжает из Цветочного города в Солнечный в тот момент, когда переезд только что закрылся, а оба светофора только что переключились на красный. За какое наименьшее время (в минутах) он сможет доехать до Солнечного города, не нарушая правил, если его электромобиль едет по шоссе с постоянной скоростью (Незнайка не умеет ни тормозить, ни увеличивать скорость)?

2003 год

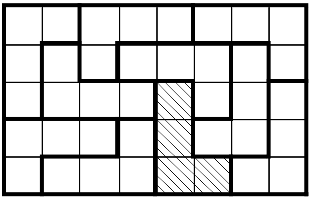
6 класс

1. Один мальчик 16 февраля 2003 года сказал: «Разность между числами прожитых мною (полных) месяцев и прожитых (полных) лет сегодня впервые стала равна 111». Когда он родился?

2. Найдите наименьшее четырёхзначное число $\mathtt{СЕЕМ}$, для которого существует решение ребуса $\mathtt{МЫ} + \mathtt{РОЖЬ} = \mathtt{СЕЕМ}$. (Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.)

3. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Путник встретил троих островитян и спросил каждого из них: «Сколько рыцарей среди твоих спутников?». Первый ответил: «Ни одного». Второй сказал: «Один». Что сказал третий?

4. Прямоугольник разрезан на несколько прямоугольников, периметр каждого из которых — целое число метров. Верно ли, что периметр исходного прямоугольника — тоже целое число метров?



5. В распоряжении юного паркетчика имеется 10 одинаковых плиток, каждая из которых состоит из 4 квадратов и имеет форму буквы Г (все плитки ориентированы одинаково). Может ли он составить из них прямоугольник размером 5×8? (Плитки можно поворачивать, но нельзя переворачивать. Например, на рисунке изображено неверное решение: заштрихованная плитка неправильно ориентирована.)

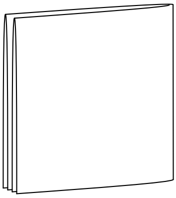
6. На гранях кубика расставлены числа от 1 до 6. Кубик бросили два раза. В первый раз сумма чисел на четырёх боковых гранях оказалась равна 12, во второй — 15. Какое число написано на грани, противоположной той, где написана цифра 3?

7 КЛАСС

1. Расставьте скобки и знаки арифметических действий так, чтобы получилось верное равенство:

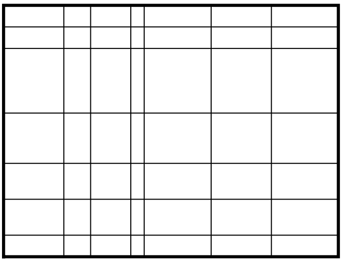
$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6009} = 2003.$$

2. Квадратную салфетку сложили пополам, полученный прямоугольник сложили пополам ещё раз (см. рисунок). Получившийся квадратик разрезали ножницами (по прямой). Могла ли салфетка распасться а) на 2 части? б) на 3 части? в) на 4 части? г) на 5 частей? Если да — нарисуйте такой разрез, если нет — напишите слово «нельзя».



3. Чтобы открыть сейф, нужно ввести код — число, состоящее из семи цифр: двоек и троек. Сейф откроется, если двоек больше, чем троек, а код делится и на 3, и на 4. Придумайте код, открывающий сейф.

4. Прямоугольник разрезали шестью вертикальными и шестью горизонтальными разрезами на 49 прямоугольников (см. рисунок). Оказалось, что периметр каждого из получившихся прямоугольников — целое число метров. Обязательно ли периметр исходного прямоугольника — целое число метров?



5. В честь праздника 1 % солдат в полку получил новое обмундирование. Солдаты расставлены в виде прямоугольника так, что солдаты в новом обмундировании оказались не менее чем в 30 % колонн и не менее чем в 40% шеренг. Какое наименьшее число солдат могло быть в полку?

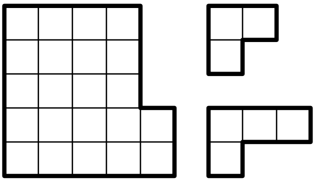
6. Куб размером $3 \times 3 \times 3$ состоит из 27 единичных кубиков. Можно ли побывать в каждом кубике по одному разу, двигаясь следующим образом: из кубика можно пройти в любой кубик, имеющий с ним общую грань, причём запрещено ходить два раза подряд в одном направлении?

2002 год

6 класс

1. Решите ребус: БАО · БА · Б = 2002.

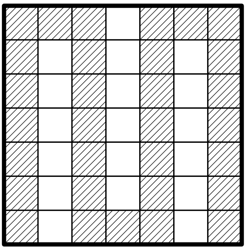
2. Незнайка разрезал фигуру на трёхклеточные и четырёхклеточные уголки, нарисованные справа от неё. Сколько трёхклеточных уголков могло получиться?



3. На доске были написаны 10 последовательных натуральных чисел. Когда стёрли одно из них, то сумма девяти оставшихся оказалась равна 2002. Какие числа остались на доске?

4. Художник-авангардист Змий Клеточкин покрасил несколько клеток доски размером 7×7, соблюдая правило: каждая следующая закрашиваемая клетка должна соседствовать по стороне с предыдущей закрашенной клеткой, но не должна соседствовать ни с одной другой ранее закрашенной клеткой. Ему удалось покрасить 31 клетку.

Побейте его рекорд — закрасьте а) 32 клетки; б) 33 клетки.



5. Илье Муромцу, Добрыне Никитичу и Алёше Поповичу за верную службу дали 6 монет: 3 золотых и 3 серебряных. Каждому досталось по две монеты. Илья Муромец не знает, какие монеты достались Добрыне, а какие Алёше, но знает, какие монеты достались ему самому. Придумайте вопрос, на который Илья Муромец ответит «да», «нет» или «не знаю», и по ответу на который Вы сможете понять, какие монеты ему достались.

6. Айрат выписал подряд все числа месяца: 123456789101112... и покрасил три дня (дни рождения своих друзей), никакие два из которых не идут подряд. Оказалось, что все непокрашенные участки состоят из одинакового количества цифр. Докажите, что первое число месяца покрашено.

7 КЛАСС

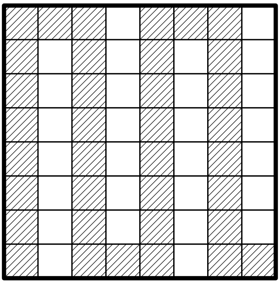
1. 2002 год — год-палиндром, то есть одинаково читается справа налево и слева направо. Предыдущий год-палиндром был 11 лет назад (1991). Какое максимальное число годов-непалиндромов может идти подряд (между 1000 и 9999 годами)?

2. См. задачу 2 для 6 класса.

3. В написанном на доске примере на умножение хулиган Петя исправил две цифры. Получилось $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 2247$. Восстановите исходный пример и объясните, как Вы это сделали.

4. У Васи есть пластмассовый угольник (без делений) с углами $30°$, $60°$ и $90°$. Ему нужно построить угол в $15°$. Как это сделать, не используя других инструментов?

5. Художник-авангардист Змий Клеточкин покрасил несколько клеток доски размером 8×8, соблюдая правило: каждая следующая закрашиваемая клетка должна соседствовать по стороне с предыдущей закрашенной клеткой, но не должна — ни с одной другой ранее закрашенной клеткой. Ему удалось покрасить 36 клеток. Побейте его рекорд! (Жюри умеет закрашивать 42 клетки!)



6. В шахматном турнире на звание мастера спорта участвовало 12 человек, каждый сыграл с каждым по одной партии. За победу в партии даётся 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за поражение — 0 очков. По итогам турнира звание мастера спорта присваивали, если участник набрал более 70 % от числа очков, получаемых в случае выигрыша всех партий. Могли ли получить звание мастера спорта а) 7 участников; б) 8 участников?

2001 год

6 класс

1. Решите ребус: $\mathtt{AX} \cdot \mathtt{УX} = 2001$.

2. Офеня[1] купил на оптовом рынке партию ручек и предлагает покупателям либо одну ручку за 5 рублей, либо три ручки за 10 рублей. От каждого покупателя Офеня получает одинаковую прибыль. Какова оптовая цена ручки?

3. Наташа и Инна купили по одинаковой коробке чая в пакетиках. Известно, что одного пакетика хватает на две или три чашки чая. Этой коробки Наташе хватило на 41 чашку чая, а Инне — на 58. Сколько пакетиков было в коробке?

4. Расставьте по кругу 6 различных чисел так, чтобы каждое из них равнялось произведению двух соседних.

5. Вифсла, Тофсла и Хемуль играли в снежки. Первый снежок бросил Тофсла. Затем в ответ на каждый попавший в него снежок Вифсла бросал 6 снежков, Хемуль — 5, а Тофсла — 4. Через некоторое время игра закончилась. Найдите, в кого сколько снежков попало, если мимо цели пролетели 13 снежков. (В себя самого снежками не кидаются и один снежок не может попасть в двоих.)

6. Поля клетчатой доски размером 8×8 будем по очереди закрашивать в красный цвет так, чтобы после закрашивания каждой следующей клетки фигура, состоящая из закрашенных клеток, имела ось симметрии. Покажите, как можно, соблюдая это условие, закрасить

а) 26;   б) 28 клеток.

(В качестве ответа расставьте на тех клетках, которые должны быть закрашены, числа от 1 до 26 или до 28 в том порядке, в котором проводилось закрашивание.)

7 класс

1. В книге рекордов Гиннесса написано, что наибольшее известное простое число равно $23021^{377} - 1$. Не опечатка ли это?

[1] Продавец вразнос, коробейник.

2. Приходя в тир, игрок вносит в кассу 100 рублей. После каждого удачного выстрела количество его денег увеличивается на 10 %, а после каждого промаха — уменьшается на 10 %. Могло ли после нескольких выстрелов у него оказаться 80 рублей 19 копеек?

3. Для постройки типового дома не хватало места. Архитектор изменил проект: убрал 2 подъезда и добавил 3 этажа. При этом количество квартир увеличилось. Он обрадовался и решил убрать ещё 2 подъезда и добавить ещё 3 этажа. Могло ли при этом квартир стать даже меньше, чем в типовом проекте? (В каждом подъезде одинаковое число этажей и на всех этажах во всех подъездах одинаковое число квартир.)

4. В стене имеется маленькая дырка (точка). У хозяина есть флажок следующей формы (см. рисунок).

Покажите на рисунке все точки, в которые можно вбить гвоздь, так чтобы флажок закрывал дырку.

5. Отметьте на доске 8×8 несколько клеток так, чтобы любая (в том числе и любая отмеченная) клетка граничила по стороне ровно с одной отмеченной клеткой.

2000 год

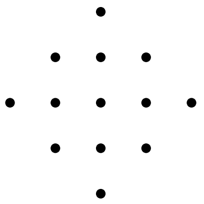
6 класс

1. В записи $*1 * 2 * 4 * 8 * 16 * 32 * 64 = 27$ вместо знаков «$*$» поставьте знаки «$+$» или «$-$» так, чтобы равенство стало верным.

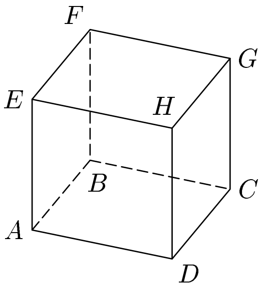
2. В квадрате 7×7 клеток закрасьте некоторые клетки так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце оказалось ровно по три закрашенных клетки.

3. Шифр кодового замка является двузначным числом. Буратино забыл код, но помнит, что сумма цифр этого числа, сложенная с их произведением, равна самому числу. Напишите все возможные варианты кода, чтобы Буратино смог быстрее открыть замок.

4. Зачеркните все 13 точек на рисунке пятью отрезками, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя никакую линию дважды.



5. В одной из вершин куба $ABCDEFGH$ сидит заяц, но охотникам он не виден. Три охотника стреляют залпом, при этом они могут «поразить» любые три вершины куба. Если они не попадают в зайца, то до следующего залпа заяц перебегает в одну из трёх соседних (по ребру) вершин куба. Укажите, как стрелять охотникам, чтобы обязательно попасть в зайца за четыре залпа.



(В решении достаточно написать четыре тройки вершин, в которые последовательно стреляют охотники.)

7 класс

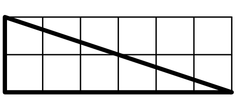
1. См. задачу 2 для 6 класса.

2. Карлсон написал дробь $10/97$. Малыш может: 1) прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно, 2) умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число.

Сможет ли Малыш с помощью этих действий получить дробь,

а) равную $1/2$? б) равную 1?

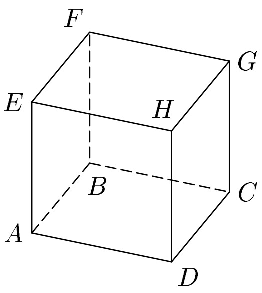
3. Дан прямоугольный треугольник (см. рисунок). Приложите к нему какой-нибудь треугольник (эти треугольники должны иметь общую сторону, но не должны перекрываться даже частично) так, чтобы получился треугольник с двумя равными сторонами.



Укажите (нарисуйте!) несколько различных решений. Каждое новое решение — дополнительный балл.

4. Может ли произведение двух последовательных натуральных чисел равняться произведению двух последовательных чётных чисел?

5. В вершинах куба $ABCDEFGH$ расставлены натуральные числа так, что числа в соседних (по ребру) вершинах отличаются не более чем на единицу. Докажите, что обязательно найдутся две диаметрально противоположные вершины, числа в которых отличаются не более чем на единицу.



(Пары диаметрально противоположных вершин куба: A и G, B и H, C и E, D и F.)

1999 год

6 класс

1. На прямой отметили несколько точек. После этого между каждыми двумя соседними точками отметили ещё по точке. Такое «уплотнение» повторили ещё дважды (всего 3 раза). В результате на прямой оказалось отмечено 113 точек. Сколько точек было отмечено первоначально?

2. Укажите пять целых положительных чисел, сумма которых равна 20, а произведение — 420.

3. Квадрат 4×4 разделён на 16 клеток. Раскрасьте эти клетки в чёрный и белый цвета так, чтобы у каждой чёрной клетки было три белых соседа, а у каждой белой клетки был ровно один чёрный сосед. (Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.)

4. Из Москвы вылетел вертолёт, который пролетел 300 км на юг, потом 300 км на запад, 300 км на север и 300 км на восток, после чего приземлился. Оказался ли он южнее Москвы, севернее её или на той же широте? Оказался ли он восточнее Москвы, западнее Москвы или на той же долготе?

5. Нарисуйте на клетчатой бумаге треугольник с вершинами в углах клеток, две медианы которого перпендикулярны. (Медиана соединяет вершину треугольника с серединой противоположной стороны.)

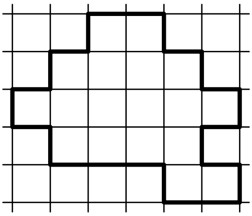
6. На плоскости нарисован чёрный квадрат. Имеется семь квадратных плиток того же размера. Нужно положить их на плоскость так, чтобы они не перекрывались и чтобы каждая плитка покрывала хотя бы часть чёрного квадрата (хотя бы одну точку внутри него). Как это сделать?

7 КЛАСС

1. Числитель и знаменатель дроби — целые положительные числа, дающие в сумме 101. Известно, что дробь не превосходит 1/3. Укажите наибольшее возможное значение такой дроби.

2. Разрежьте фигуру (по границам клеток) на три равные (одинаковые по форме и величине) части.

3. См. задачу 4 для 6 класса.



4. Два пешехода вышли на рассвете. Каждый шёл с постоянной скоростью. Один шёл из A в B, другой — из B в A. Они встретились в полдень и, не прекращая движения, пришли: один — в B в 4 часа вечера, а другой — в A в 9 часов вечера. В котором часу в тот день был рассвет?

5. См. задачу 5 для 6 класс.

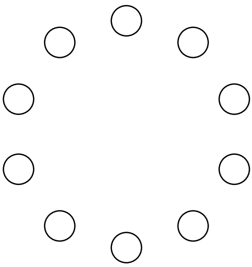
6. Квадрат разбили на 100 прямоугольников девятью вертикальными и девятью горизонтальными прямыми (параллельными его сторонам). Среди этих прямоугольников оказалось ровно 9 квадратов. Докажите, что два из этих квадратов имеют одинаковый размер.

1998 год

6 КЛАСС

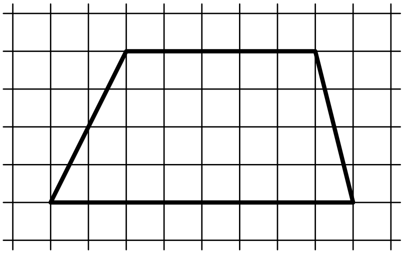
1. На глобусе проведены 17 параллелей и 24 меридиана. На сколько частей разделена поверхность глобуса? Меридиан — это дуга, соединяющая Северный полюс с Южным. Параллель — это окружность, параллельная экватору (экватор тоже является параллелью).

2. Три ёжика делили три кусочка сыра массами 5 г, 8 г и 11 г. Лиса стала им помогать. Она может от любых двух кусочков одновременно отрезать и съесть по 1 г сыра. Сможет ли лиса оставить ёжикам равные кусочки сыра?



3. Расположите в кружочках (вершинах правильного десятиугольника) числа от 1 до 10 так, чтобы для любых двух соседних чисел их сумма была равна сумме двух чисел, им противоположных (симметричных относительно центра окружности).

4. Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, на две части, из которых можно сложить треугольник.



5. На кольцевой дороге расположены четыре бензоколонки: A, B, C и D. Расстояние между A и B — 50 км, между A и C — 40 км, между C и D — 25 км, между D и A — 35 км (все расстояния измеряются вдоль кольцевой дороги в кратчайшую сторону).

а) Приведите пример расположения бензоколонок (с указанием расстояний между ними), удовлетворяющий условию задачи.

б) Найдите расстояние между B и C (укажите все возможности).

6. Расставьте на шахматной доске 32 коня так, чтобы каждый из них бил ровно двух других.

7 КЛАСС

1. См. задачу 1 для 6 класса.

2. В банановой республике прошли выборы в парламент, в котором участвовали все жители. Все голосовавшие за партию «Мандарин» любят мандарины. Среди голосовавших за другие партии 90 % не любят мандарины. Сколько процентов голосов набрала партия «Мандарин» на выборах, если ровно 46 % жителей любят мандарины?

3. См. задачу 5 для 6 класса.

4. На острове Контрастов живут и рыцари, и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Некоторые жители заявили, что на острове чётное число рыцарей, а остальные заявили, что на острове нечётное число лжецов. Может ли число жителей острова быть нечётным?

5. На Луне имеют хождение монеты достоинством в 1, 15 и 50 фертингов. Незнайка отдал за покупку несколько монет и получил сдачу на одну монету больше. Какую наименьшую сумму могла стоить покупка?

6. Из квадрата 5×5 вырезали центральную клетку. Разрежьте получившуюся фигуру на две части, в которые можно завернуть куб $2 \times 2 \times 2$.

1997 год

6 класс

1. Витя выложил из карточек с цифрами пример на сложение и затем поменял местами две карточки. Как видите, равенство нарушилось. Какие карточки переставил Витя?

$$\begin{array}{r} 314159 \\ +\,291828 \\ \hline 585787 \end{array}$$

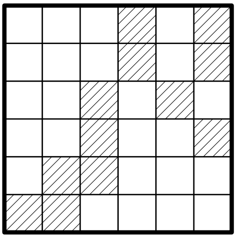
2. В папирусе Ринда (Древний Египет) среди прочих сведений содержатся разложения дробей в сумму дробей с числителем 1, например,

$$\frac{2}{73} = \frac{1}{60} + \frac{1}{219} + \frac{1}{292} + \frac{1}{x}.$$

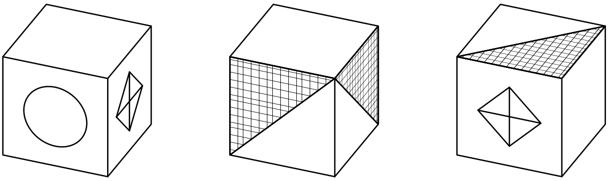
Один из знаменателей здесь заменён буквой x. Найдите этот знаменатель.

3. В корзине лежат 30 грибов — рыжиков и груздей. Известно, что среди любых 12 грибов имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 20 грибов — хотя бы один груздь. Сколько рыжиков и сколько груздей в корзине?

4. Разрежьте изображённую на рисунке доску на 4 одинаковые части, чтобы каждая из них содержала 3 заштрихованные клетки.



5. Придумайте раскраску граней кубика, чтобы в трёх различных положениях он выглядел, как показано на рисунке. (Укажите, как раскрасить невидимые грани, или нарисуйте развёртку.)



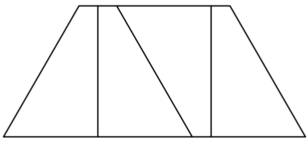
6. Семья ночью подошла к мосту. Папа может перейти его за 1 минуту, мама — за 2, малыш — за 5, а бабушка — за 10 минут. У них есть один фонарик. Мост выдерживает только двоих. Как им перейти мост за 17 минут? (Если переходят двое, то они идут с меньшей из их скоростей. Двигаться по мосту без фонарика нельзя. Светить издали нельзя. Носить друг друга на руках нельзя.)

7 КЛАСС

1. Каких прямоугольников с целыми сторонами больше: с периметром 1996 или с периметром 1998? (Прямоугольники $a \times b$ и $b \times a$ считаются одинаковыми.)

2. В Мексике экологи добились принятия закона, по которому каждый автомобиль хотя бы один день в неделю не должен ездить (владелец сообщает полиции номер автомобиля и «выходной» день недели этого автомобиля). В некоторой семье все взрослые желают ездить ежедневно (каждый — по своим делам!). Сколько автомобилей (как минимум) должно быть в семье, если взрослых в ней а) 5 человек? б) 8 человек?

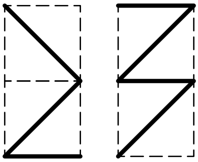
3. Четырёхугольник с длинами сторон 1, 1, 1 и 2 имеет две параллельные стороны и разбит на четыре одинаковые фигуры (см. рисунок). В результате верхняя сторона разделилась на четыре отрезка. Найдите отношение длины большего отрезка к меньшему.



4. См. задачу 3 для 6 класса.

5. В тесте к каждому вопросу указаны 5 вариантов ответа. Отличник отвечает на все вопросы правильно. Когда двоечнику удаётся списать, он отвечает правильно, а в противном случае — наугад (то есть среди несписанных вопросов он правильно отвечает на $1/5$ часть). Всего двоечник правильно ответил на половину вопросов. Какую долю ответов ему удалось списать?

6. Если смотреть на аквариум спереди, то рыбка проплыла, как показано на левом рисунке. А если справа — то как на правом рисунке. Нарисуйте вид сверху.



1996 год

6 класс

1. В двух кошельках лежат две монеты, причём в одном кошельке монет вдвое больше, чем в другом. Как такое может быть?

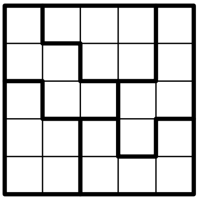
2. Алик, Боря и Вася собирали грибы. Боря собрал грибов на 20 % больше, чем Алик, но на 20 % меньше, чем Вася. На сколько процентов больше Алика собрал грибов Вася?

3. Каких пятизначных чисел больше: не делящихся на 5 или тех, у которых ни первая, ни вторая цифра слева — не пятёрка?

4. Три человека A, B, C пересчитали кучу шариков четырёх цветов. При этом каждый из них правильно различал какие-то два цвета, а два других мог путать: один путал красный и оранжевый, другой — оранжевый и жёлтый, а третий — жёлтый и зелёный. Результаты их подсчётов приведены в таблице. Сколько каких шариков было на самом деле?

	красный	оранжевый	жёлтый	зелёный
A	2	5	7	9
B	2	4	9	8
C	4	2	8	9

5. Можно ли разрезать на четыре остроугольных треугольника а) какой-нибудь выпуклый пятиугольник, б) правильный пятиугольник.



6. Покрасьте клетки доски 5×5 в пять цветов так, чтобы в каждом горизонтальном ряду, в каждом вертикальном ряду и в каждом выделенном блоке встречались все цвета.

7 КЛАСС

1. По кругу расставлены цифры $1, 2, 3, \ldots, 9$ в произвольном порядке. Каждые три цифры, стоящие подряд по часовой стрелке, образуют трёхзначное число. Найдите сумму всех девяти таких чисел. Зависит ли она от порядка, в котором записаны цифры?

2. Два пирата играли на золотые монеты. Сначала первый проиграл половину своих монет (отдал второму), потом второй проиграл половину своих, потом снова первый проиграл половину своих. В результате у первого оказалось 15 монет, а у второго — 33. Сколько монет было у первого пирата до начала игры?

3. Найдите хотя бы две пары натуральных чисел, для которых верно равенство $2x^3 = y^4$.

4. Сколькими способами можно прочитать в таблице слово а) `КРОНА`, б) `КОРЕНЬ`, начиная с буквы «к» и двигаясь вправо или вниз?

```
К Р О Н А       К
Р О Н А       К О
О Н А       К О Р
Н А       К О Р Е
А       К О Р Е Н
      К О Р Е Н Ь
```

5. Футбольный мяч сшит из 32 лоскутков: белых шестиугольников и чёрных пятиугольников. Каждый чёрный лоскут граничит только с белыми, а каждый белый — с тремя чёрными и тремя белыми. Сколько лоскутков белого цвета?

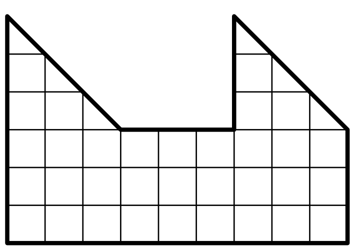
6. Произведение последовательных чисел от 1 до n называется n-факториал и обозначается $n!$ $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!)$. Можно ли вычеркнуть из произведения $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 100!$ один из факториалов так, чтобы произведение оставшихся было квадратом целого числа?

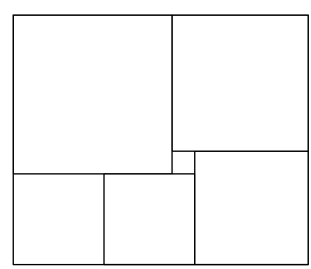
1995 год

6 класс

1. После того, как Наташа съела половину персиков из банки, уровень компота понизился на одну треть. На какую часть (от полученного уровня) понизится уровень компота, если съесть половину оставшихся персиков?

2. Разрежьте изображённую на левом рисунке фигуру на две одинаковые части.





3. Прямоугольник составлен из шести квадратов (см. правый рисунок). Найдите сторону самого большого квадрата, если сторона самого маленького равна 1.

4. Заменить разные буквы разными цифрами, одинаковые — одинаковыми, а звёздочки — любыми так, чтобы получился правильный пример.

$$\begin{array}{r} \times\ 1995 \\ *** \\ \hline ***** \\ +\ *\text{ГОД} \\ \hline \text{СВИНЬИ} \end{array}$$

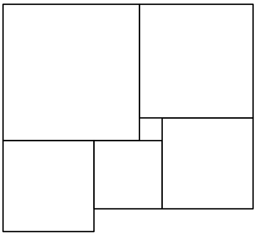
5. Есть 9 борцов разной силы. В поединке любых двух из них всегда побеждает сильнейший. Можно ли разбить их на три команды по три борца так, чтобы во встречах команд по системе «каждый с каждым» первая команда по числу побед одержала верх над второй, вторая — над третьей, а третья — над первой?

6. В квадрате 6×6 отмечают несколько клеток так, что из любой отмеченной можно пройти в любую другую отмеченную, переходя только через общие стороны отмеченных клеток. Отмеченную клетку называют концевой, если она граничит по стороне ровно с одной отмеченной. Отметьте несколько клеток так, чтобы получилось а) 10, б) 11, в) 12 концевых клеток.

7 КЛАСС

1. Натуральное число умножили последовательно на каждую из его цифр. Получилось 1995. Найдите исходное число.

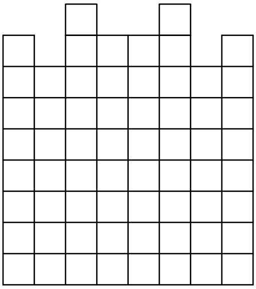
2. Один сапфир и два топаза
ценней, чем изумруд, в три раза.
А семь сапфиров и топаз
его ценнее в восемь раз.
Определить мы просим Вас,
сапфир ценнее иль топаз?



3. Фигура на рисунке составлена из квадратов. Найдите сторону левого нижнего, если сторона самого маленького равна 1.

4. Расставьте скобки так, чтобы получилось верное равенство:

$$1 - 2 \cdot 3 + 4 + 5 \cdot 6 \cdot 7 + 8 \cdot 9 = 1995.$$



5. Из натурального числа вычли сумму его цифр, из полученного числа снова вычли сумму его (полученного числа) цифр и т. д. После одиннадцати таких вычитаний получился нуль. С какого числа начинали?

6. Разрежьте изображённую фигуру на две части, из которых можно сложить целый квадрат 8×8.

1994 год

6 класс

1. Среди четырёх людей нет трёх с одинаковым именем, или с одинаковым отчеством, или с одинаковой фамилией, но у каждых двух совпадает или имя, или отчество, или фамилия. Может ли такое быть?

2. Найдите в последовательности 2, 6, 12, 20, 30, … число, стоящее а) на 6-м; б) на 1994-м месте. Ответ объясните.

3. Несколько одинаковых по численности бригад сторожей спали одинаковое число ночей. Каждый сторож проспал больше ночей, чем сторожей в бригаде, но меньше, чем число бригад. Сколько сторожей в бригаде, если все сторожа вместе проспали 1001 человеко-ночь?

4. Составьте куб $3 \times 3 \times 3$ из красных, жёлтых и зелёных кубиков $1 \times 1 \times 1$ так, чтобы в любом бруске $3 \times 1 \times 1$ были кубики всех трёх цветов.

5. Разрежьте квадрат на три части, из которых можно сложить треугольник с тремя острыми углами и тремя различными сторонами.

6. Вся семья выпила по полной чашке кофе с молоком, причём Катя выпила четверть всего молока и шестую часть всего кофе. Сколько человек в семье?

7. Среди любых десяти из шестидесяти школьников найдётся три одноклассника. Обязательно ли среди всех шестидесяти школьников найдётся а) 15 одноклассников; б) 16 одноклассников?

8. Пешеход обошёл шесть улиц одного города, пройдя каждую ровно два раза, но не смог обойти их, пройдя каждую лишь раз. Могло ли это быть?

7 класс

1. За два года завод снизил объём выпускаемой продукции на 51 %. При этом каждый год объём выпускаемой продукции снижался на одно и то же число процентов. На сколько?

2. Во всех подъездах дома одинаковое число этажей, а на каждом этаже одинаковое число квартир. При этом число этажей в доме больше числа квартир на этаже, число квартир на этаже больше числа подъездов, а число подъездов больше одного. Сколько этажей в доме, если всего в нём 105 квартир?

а) Найдите хотя бы одно решение.

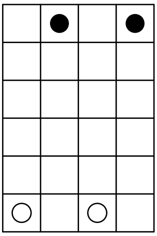
б) Найдите все решения и докажите, что других нет.

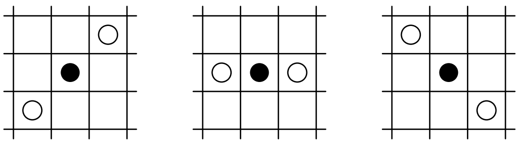
3. Когда Незнайку попросили придумать задачу для математической олимпиады в Солнечном городе, он написал ребус (см. рисунок). Можно ли его решить? (Разным буквам должны соответствовать разные цифры.)

$$\begin{array}{r} \text{АБВ} \\ +\ \text{ГДЕ} \\ \hline \text{ЁЖЗИ} \end{array}$$

4. Имеется много красных, жёлтых и зелёных кубиков $1\times1\times1$. Можно ли сложить из них куб $3\times3\times3$ так, чтобы в каждом блоке $3\times1\times1$ присутствовали все три цвета?

5. На доске 4×6 клеток стоят две чёрные фишки (Вани) и две белые фишки (Серёжи, см. рисунок справа). Ваня и Серёжа по очереди двигают любую из своих фишек на одну клетку вперёд (по вертикали). Начинает Ваня. Если после хода любого из ребят чёрная фишка окажется между двумя белыми по горизонтали или по диагонали (как на рисунках ниже), она считается «убитой» и снимается с доски. Ваня хочет провести обе свои фишки с верхней горизонтали доски на нижнюю. Может ли Серёжа ему помешать?





6. В одной из школ 20 раз проводился кружок по астрономии. На каждом занятии присутствовало ровно пять школьников, причём никакие два школьника не встречались на кружке более одного раза. Докажите, что всего на кружке побывало не менее 20 школьников.

1993 год

5–6 классы

1. Инопланетянин со звезды Тау Кита, прилетев на Землю в понедельник, воскликнул: „А!“. Во вторник он воскликнул: „АУ!“, в среду — „АУУА!“, в четверг — „АУУАУААУ!“. Что он воскликнет в субботу?

2. Мосметрострой нанял двух землекопов для рытья туннеля. Один из них может за час прокопать вдвое больше, чем другой, а платят по договору каждому одинаково за каждый час работы. Что обойдётся дешевле — совместная работа землекопов с двух сторон до встречи или поочерёдное рытьё половины туннеля каждым из землекопов?

3. Как из семи «уголков», каждый из которых склеен из трёх кубиков $1 \times 1 \times 1$, и шести отдельных кубиков $1 \times 1 \times 1$ составить большой куб $3 \times 3 \times 3$?

Можно ли это сделать так, чтобы все отдельные кубики оказались в серединах граней большого куба?

4. Если у числа x подсчитать сумму цифр и с полученным числом повторить это ещё два раза, то получится ещё три числа. Найдите самое маленькое x, для которого все четыре числа различны, а последнее из них равно 2.

5. Дядя Фёдор, кот Матроскин, Шарик и почтальон Печкин сидят на скамейке. Если Шарик, сидящий справа от всех, сядет между дядей Фёдором и котом, то кот станет крайним слева. В каком порядке они сидят?

6. Квадрат $ABCD$ со стороной 2 и квадрат $DEFK$ со стороной 1 стоят рядом на верхней стороне AK квадрата $AKLM$ со стороной 3. Между парами точек A и E, B и F, C и K, D и L натянуты паутинки. Паук поднимается снизу вверх по маршруту $AEFB$ и спускается по маршруту $CKDL$. Какой маршрут короче?

7. Али-Баба стоит с большим мешком монет в углу пустой прямоугольной пещеры размером $m \times n$ клеток, раскрашенных в шахматном порядке. Из любой клетки он может сделать шаг в любую из четырёх соседних клеток (вверх, вниз, вправо или влево). При этом он должен либо положить 1 монету в этой клетке, либо забрать из неё 1 монету, если, конечно, она не пуста. Может ли после прогулки Али-Бабы по пещере оказаться, что на чёрных клетках лежит ровно по 1 монете, а на белых монет нет?

8. В спортклубе тренируются 100 толстяков весом от 1 до 100 кг. На какое наименьшее число команд их можно разделить так, чтобы ни в одной команде не было двух толстяков, один из которых весит вдвое больше другого?

7 КЛАСС

1. Можно ли в центры 16 клеток шахматной доски 8×8 вбить гвозди так, чтобы никакие три гвоздя не лежали на одной прямой?

2. Зная, что число 1993 простое, выясните, существуют ли такие натуральные числа x и y, что

а) $x^2 - y^2 = 1993$;
б) $x^3 - y^3 = 1993$;
в) $x^4 - y^4 = 1993$?

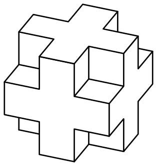
3. Решите уравнение:

$$1993 = 1 + 8 : (1 + 8 : (1 - 8 : (1 + 4 : (1 - 4 : (1 - 8 : x))))).$$

4. В результате измерения четырёх сторон и одной из диагоналей некоторого четырёхугольника получились числа: 1; 2; 2,8; 5; 7,5. Чему равна длина измеренной диагонали?

5. Гулливер попал в страну лилипутов, имея 7 000 000 рублей. На все деньги он сразу купил кефир в бутылках по цене 7 рублей за бутылку (пустая бутылка стоила в то время 1 рубль). Выпив весь кефир, он сдал бутылки и на все вырученные деньги сразу купил кефир. При этом он заметил, что и стоимость кефира, и стоимость пустой бутылки выросли в два раза. Затем он снова выпил весь кефир, сдал бутылки, на все вырученные деньги снова купил кефир и т. д. При этом между каждыми двумя посещениями магазина и стоимость кефира, и стоимость пустой бутылки возрастали в два раза. Сколько бутылок кефира выпил Гулливер?

6. Из кубика Рубика $3 \times 3 \times 3$ удалили центральный шарнир и восемь угловых кубиков. Можно ли оставшуюся фигуру из 18 кубиков составить из шести брусков размером $3 \times 1 \times 1$?



1992 год

5–6 КЛАССЫ

1. Три землекопа за два часа выкопали три ямы. Сколько ям выкопают шесть землекопов за пять часов?

2. На Нью-Васюковской валютной бирже за 11 тугриков дают 14 динаров, за 22 рупии — 21 динар, за 10 рупий — 3 талера, а за 5 крон — 2 талера. Сколько тугриков можно выменять за 13 крон?

3. Как, не отрывая карандаша от бумаги, провести шесть отрезков таким образом, чтобы оказались зачёркнутыми 16 точек, расположенных в вершинах квадратной сетки 4 на 4?

4. Петя и Витя ехали вниз по эскалатору. Посередине эскалатора хулиган Витя сорвал с Пети шапку и бросил её на встречный эскалатор. Пострадавший Петя побежал обратно вверх по эскалатору, чтобы затем спуститься вниз и вернуть шапку. Хитрый Витя побежал по эскалатору вниз, чтобы затем подняться вверх и успеть раньше Пети. Кто успеет раньше, если скорости ребят относительно эскалатора постоянны и не зависят от направления движения?

7 КЛАСС

1. Три землекопа за три часа выкопали три ямы. Сколько ям выкопают шесть землекопов за пять часов?

2. В январе на 1 доллар можно было купить 40 винтиков или 60 шпунтиков. В феврале винтики и шпунтики стали продавать наборами из 25 винтиков и 25 шпунтиков по цене 1 доллар за набор. Для сборки трактора необходимо 600 винтиков и 600 шпунтиков. В каком месяце сборка трактора стоила дороже, если другие затраты не изменились?

3. Резидент одной иностранной разведки сообщил в центр о готовящемся подписании ряда двусторонних соглашений между пятнадцатью бывшими республиками СССР. Согласно его донесению, каждая из них заключит договор ровно с тремя другими. Заслуживает ли резидент доверия?

4. Может ли горящая в комнате[2] свеча не освещать полностью ни одну из её стен, если в комнате а) 10 стен, б) 6 стен?

5. См. задачу 4 для 5–6 классов.

1991 год

5–6 классы

1. Автобусный билет будем считать счастливым, если между его цифрами можно в нужных местах расставить знаки четырёх арифметических действий и скобки так, чтобы значение полученного выражения равнялось 100. Является ли счастливым билет №123456 ?

2. Электрик был вызван для ремонта гирлянды из четырёх соединённых последовательно лампочек, одна из которых перегорела. На вывинчивание любой лампочки из гирлянды уходит 10 секунд, на завинчивание — 10 секунд. Время, которое тратится на другие действия, мало. За какое наименьшее время электрик заведомо может найти перегоревшую лампочку, если у него есть одна запасная лампочка?

3. Как одним прямолинейным разрезом рассечь два лежащих на сковороде квадратных блина на две равные части каждый?

4. Подпольный миллионер Тарас Артёмов пришёл в Госбанк, чтобы обменять несколько 50- и 100-рублёвых купюр старого образца. Ему была выдана 1991 купюра более мелкого достоинства[3], причём среди них не было 10-рублёвых. Докажите, что его обсчитали.

---

[2] Комната имеет вид многоугольника.

[3] В 1991 году были купюры по 1, 3, 5, 10, 25, 50 и 100 рублей.

5. Найдите числа, равные удвоенной сумме своих цифр.

6. Метро города Урюпинска состоит из трёх линий и имеет по крайней мере две конечные станции и по крайней мере два пересадочных узла, причём ни одна из конечных станций не является пересадочной. С каждой линии на каждую можно перейти по крайней мере в двух местах.

Нарисуйте пример такой схемы метро, если известно, что это можно сделать, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя два раза один и тот же отрезок.

7 КЛАСС

1. См. задачу 1 для 5–6 классов.

2. См. задачу 4 для 5–6 классов.

3. В начале года винтики, шпунтики и гаечки продавались по одинаковой цене 1 рубль за 1 кг. 27 февраля Верховный Совет СССР принял закон о повышении цены на винтики на 50 % и снижении цены на шпунтики на 50 %. 28 февраля Верховный Совет РСФСР принял закон о снижении цены на винтики на 50 % и повышении цены на шпунтики на 50 %. Какой товар будет самым дорогим и какой самым дешёвым в марте?

4. Знайка пришёл в гости к братьям-близнецам Винтику и Шпунтику, зная, что один из них никогда не говорит правду, и спросил одного из них: „Ты Винтик?“ „Да,“ — ответил тот. Когда Знайка спросил об этом же второго, то получил столь же чёткий ответ и сразу определил, кто есть кто.

Кого звали Винтиком?

5. Даны две последовательности: 2, 4, 8, 16, 14, 10, 2 и 3, 6, 12. В каждой из них каждое число получено из предыдущего по одному и тому же закону.

а) Найдите этот закон.

б) Найдите все натуральные числа, переходящие сами в себя (по этому закону).

в) Докажите, что число 2^{1991} после нескольких переходов станет однозначным.

1990 год

5 КЛАСС

1. В парламенте некоторой страны две палаты, имеющие равное число депутатов. В голосовании по важному вопросу приняли участие все депутаты, причём воздержавшихся не было. Когда председатель сообщил, что решение принято с преимуществом в 23 голоса, лидер оппозиции заявил, что результаты голосования сфальсифицированы. Как он это понял?

2. Обязательно ли равны два треугольника, если они имеют по три равных угла и по две равные стороны?

3. 48 кузнецов должны подковать 60 лошадей. Какое наименьшее время они затратят на работу, если каждый кузнец тратит на 1 подкову 5 минут? (Лошадь не может стоять на двух ногах.)

4. Замостите плоскость одинаковыми а) пятиугольниками; б) семиугольниками.

5. Отметьте на плоскости 6 точек так, чтобы от каждой на расстоянии 1 находилось ровно три точки.

6–7 КЛАССЫ

1. Раскрасьте плоскость в три цвета так, чтобы на каждой прямой были точки не более, чем двух цветов, и каждый цвет был бы использован.

2. Изобразите множество середин всех отрезков, концы которых лежат а) на данной полуокружности; б) на диагоналях данного квадрата.

3. Можно ли из 13 кирпичей $1 \times 1 \times 2$ сложить куб $3 \times 3 \times 3$ с дыркой $1 \times 1 \times 1$ в центре?

4. Поставьте в ряд а) 5 простых чисел, б) 6 простых чисел так, чтобы разности соседних чисел в каждом ряду были равны.

5. Среди математиков каждый седьмой — философ, а среди философов каждый девятый — математик. Кого больше: философов или математиков?

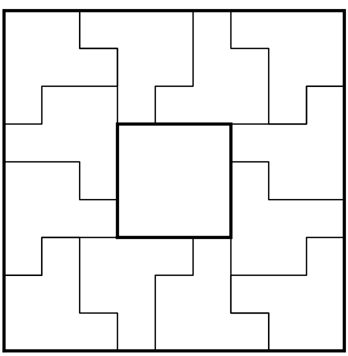
6. Внутри квадрата $ABCD$ расположен квадрат $KMXY$. Докажите, что середины отрезков AK, BM, CX и DY также являются вершинами квадрата.

Ответы

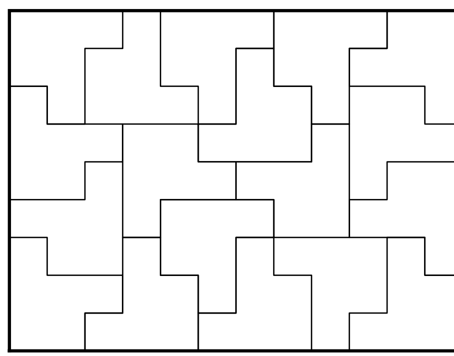
2004 год

6 класс

1. Да, может. Например, 5 прыжков назад и 1 вперёд. **2.** 160 граммов. **3.** а, б) Например, 2/11, 3/11, 6/11. **4.** См. рисунки. **5.** СТЕРЛИТАМАК.



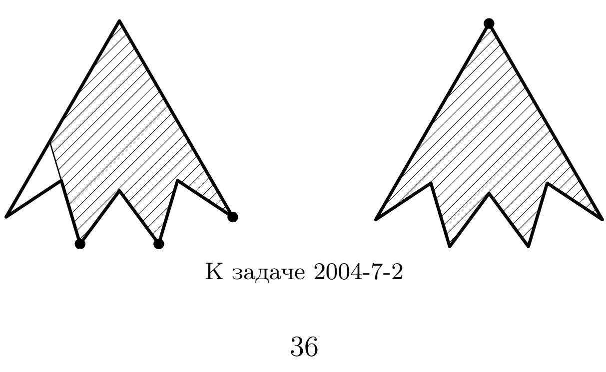
К задаче 2004-6-4 а)



К задаче 2004-6-4 б)

7 класс

1. Только на 7. **2.** Да, могло (см. рисунок). **3.** Например, 2/11, 3/11, 6/11. **4.** СОСНОГОРСК. **5.** См. ответ задачи 4 а) для 6 класса. **6.** 24 мин.

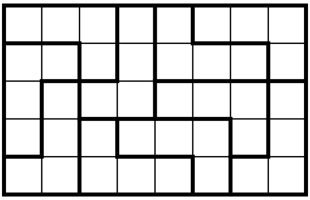


К задаче 2004-7-2

2003 год

6 класс

1. 16 января 1993 года. **2.** 2003. Например, $35+1968=2003$ или $38+1965 = 2003$. **3.** Третий сказал «Один». **4.** Нет. **5.** Да, может (см. рисунок). **6.** 6.



К задаче 2003-6-5

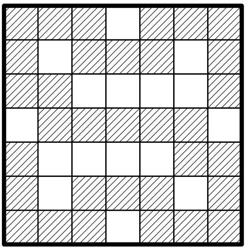
7 класс

1. $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right) : \frac{1}{6009} = 2003$. **2.** Во всех пунктах можно. Примеры см. в разделе «Решения». **3.** 2222232. **4.** Да, обязательно. **5.** 1200. **6.** Нельзя.

2002 год

6 класс

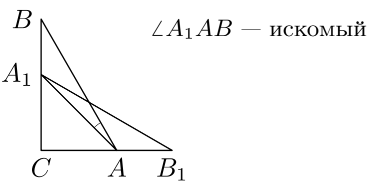
1. $143\cdot 14\cdot 1 = 2002$. **2.** 2 или 6. **3.** 218, 219, 220, 221, 222, 224, 225, 226 и 227. **4.** а, б) См. рисунок. Другие примеры приведены в решении. **5.** Например: «Правда ли, что у тебя золотых монет больше, чем у Алёши Поповича?»

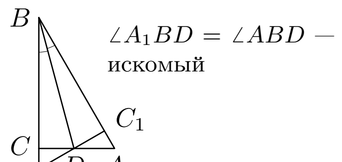


К задаче 2002-6-4 б)

7 класс

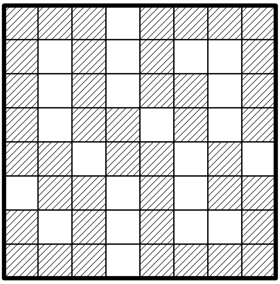
1. 109 лет. **2.** См. ответ задачи 2 для 6 класса. **3.** $4\cdot 5\cdot 4\times 7\cdot 4 = 2240$ (или $4\cdot 7\cdot 4\cdot 5\cdot 4 = 2240$). **4.** На рисунке приведены два возможных решения (без сомнения, есть много других).





К задаче 2002-7-4

5. Пример изображён на рисунке. (Существуют и другие примеры закрашивания 42 клеток.) Закрасить 43 клетки невозможно. **6.** а) могли; б) не могли.



К задаче 2002-7-5

2001 год

6 КЛАСС

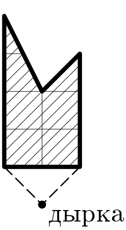
1. АХ = 29, УХ = 69 или, наоборот, АХ = 69, УХ = 29. **2.** 2 рубля 50 копеек. **3.** 20 пакетиков. **4.** Например, 2, 3, 3/2, 1/2, 1/3, 2/3. **5.** В Хемуля, Вифслу и Тофслу попали по одному разу. **6.** Пример приведён на рисунке.

1			20			13	
	2		21		12		
		3	22	11			
14	15	16	4	17	18	19	27
		10	23	5			
	9		24		6		
8			25			7	
			26				28

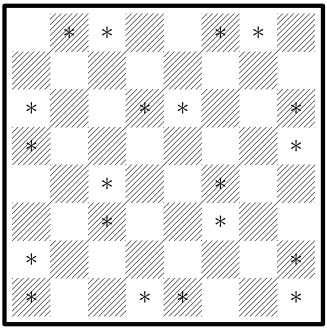
К задаче 2001-6-6

7 КЛАСС

1. Конечно, это опечатка. **2.** Да, могло, если он попал только один раз, а три раза промахнулся. **3.** Да, могло. Например, если в исходном проекте было 4 подъезда, 1 этаж и на каждом этаже по одной квартире. **4.** См. рисунок. **5.** См. рисунок.



К задаче 2001-7-4

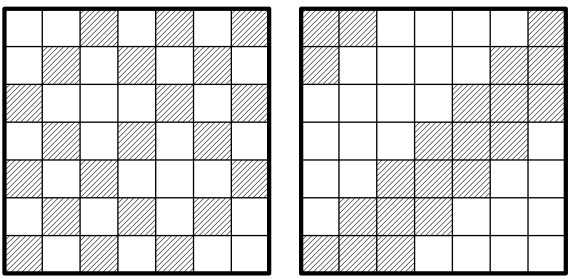


К задаче 2001-7-5

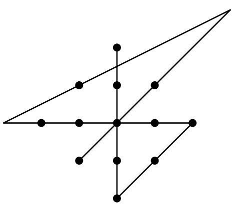
2000 год

6 класс

1. Знаки можно расставить следующим образом: $+1-2+4+$ $+8-16-32+64=27$. **2.** Примеры закраски см. на рисунке. **3.** 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99. **4.** Пример приведён на рисунке. **5.** (CFH), (BDE), (DEG), (ACF). (Порядок залпов важен!)



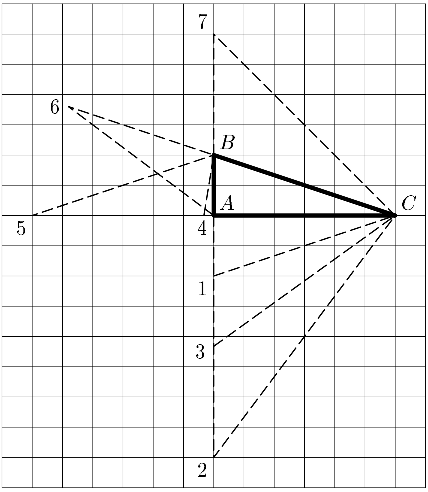
К задаче 2000-6-2



К задаче 2000-6-4

7 класс

1. См. ответ задачи 2 для 6 класса. **2.** а) Да, достаточно прибавить к числителю и знаменателю по 77. б) Нет. **3.** Все возможные примеры приведены на рисунке. **4.** Нет, не может.

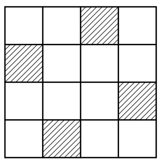


К задаче 2000-7-3

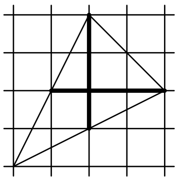
1999 год

6 КЛАСС

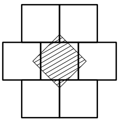
1. 15 точек. **2.** 7, 5, 4, 3 и 1. **3.** Пример приведён на рисунке. **4.** Восточнее Москвы на той же широте. **5.** Один из возможных вариантов изображён на рисунке. **6.** Пример расположения см. на рисунке.



К задаче 1999-6-3



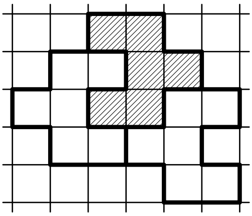
К задаче 1999-6-5



К задаче 1999-6-6

7 КЛАСС

1. 25/76. **2.** См. рисунок. **3.** См. ответ задачи 4 для 6 класса. **4.** Рассвет был в 6 часов утра. **5.** См. ответ задачи 5 для 6 класса.



К задаче 1999-7-2

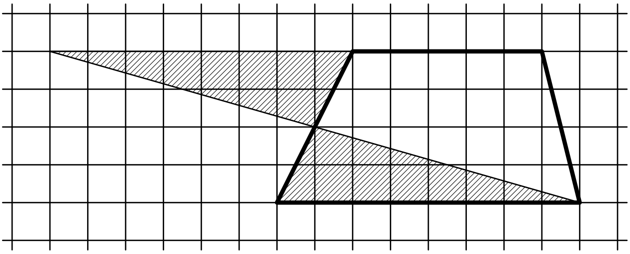
1998 год

6 КЛАСС

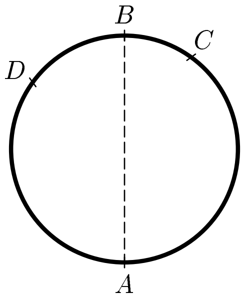
1. 432 части. **2.** Да, сможет. **3.** Числа нужно расположить по кругу, например, в следующем порядке: 1, 4, 5, 8, 9, 2, 3, 6, 7, 10. **4.** См. рисунок. **5.** а) См. рисунок; б) 10 км. **6.** См. рисунок.

7 КЛАСС

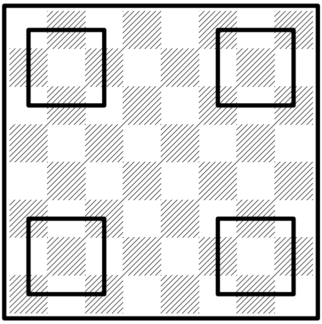
1. См. ответ задачи 1 для 6 класса. **2.** 40 %. **3.** См. ответ задачи 5 для 6 класса. **4.** Нет, не может. **5.** 6 фертингов. **6.** См. рисунок.



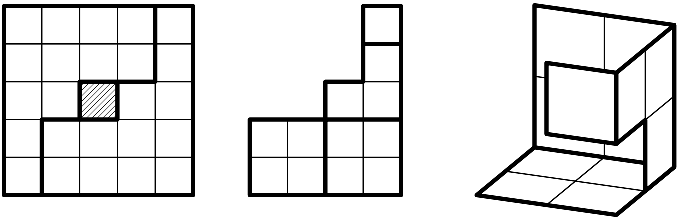
К задаче 1998-6-4



К задаче 1998-6-5



К задаче 1998-6-6



К задаче 1998-7-6

1997 год

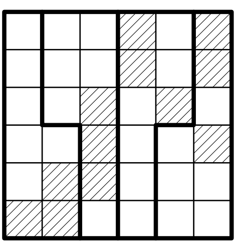
6 класс

1. $\begin{array}{r} +\,314159 \\ 2\mathbf{7}1828 \\ \hline 585\mathbf{9}87 \end{array}$ **2.** 365. **3.** 19 рыжиков и 11 груздей. **4.** См. рисунок. **5.** См. рисунок. **6.** Ошибки в условии нет! Это сделать можно!

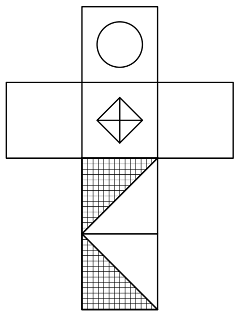
(Пожалуйста, порешайте ещё эту замечательную задачу, даже если вы уже абсолютно уверены, что решения не существует! И только потом посмотрите в указание и решение.)

7 класс

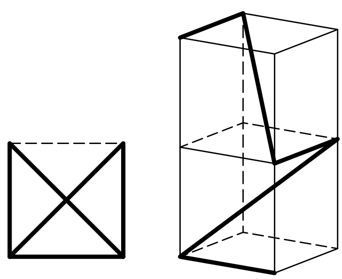
1. Поровну. **2.** а) 6; б) 10. **3.** 5. **4.** См. ответ задачи 3 для 6 класса. **5.** 3/8. **6.** Как плавала рыбка, показано на правом рисунке, а вид сверху — на левом.



К задаче 1997-6-5



К задаче 1997-6-5



К задаче 1997-7-6

1996 год

6 класс

1. Один кошелёк лежит внутри другого. **2.** На 50 %. **3.** Поровну. **4.** Красных — 2, оранжевых — 4, жёлтых — 8, зелёных — 9. **5.** а) Да; б) нет. **6.** См. рисунок.

1	5	3	2	4
2	3	1	4	5
3	4	5	1	2
5	2	4	3	1
4	1	2	5	3

К задаче 1996-6-6

7 класс

1. 4995; не зависит. **2.** 24. **3.** $x = 2$, $y = 2$; $x = 32$, $y = 16$. **4.** а) 32; б) 64. **5.** 20. **6.** Да, нужно вычеркнуть 50!

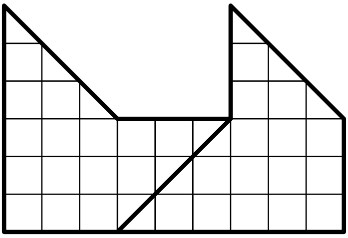
1995 год

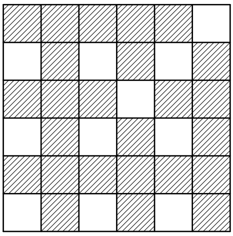
6 класс

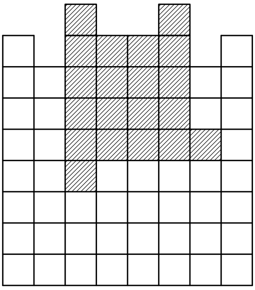
1. На одну четверть. **2.** См. рисунок. **3.** 7. **4.** $\begin{array}{r} \times 1995 \\ 306 \\ \hline 11970 \\ 5985 \\ \hline 610470 \end{array}$ **5.** Да, можно. **6.** а–в) См. рисунок.

7 класс

1. 57. **2.** Ценность одинакова. **3.** 4. **4.** $(1-2)\cdot 3+(4+5\cdot 6\cdot 7+8)\cdot 9=1995$. **5.** Любое число от 100 до 109. **6.** См. рисунок.


К задаче 1995-6-2


К задаче 1995-6-6


К задаче 1995-7-6

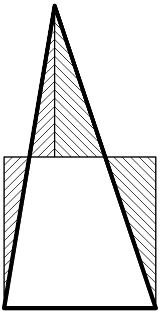
1994 год

6 класс

1. Да, может. Например: Андрей Васильевич Иванов, Андрей Геннадиевич Петров, Борис Геннадиевич Иванов, Борис Васильевич Петров. **2.** а) 42; б) $1994\cdot 1995 = 3\,978\,030$. **3.** 7. **4.** Раскраска по слоям:

к	ж	з	з	к	ж	ж	з	к
з	к	ж	ж	з	к	к	ж	з
ж	з	к	к	ж	з	з	к	ж

5. См. рисунок (равные части заштрихованы одинаково). **6.** 5 человек. **7.** а) Да; б) нет. **8.** Да.


К задаче 1994-6-5

7 класс

1. На 30 %. **2.** а) 7; б) других решений нет. **3.** $879+426=1305$. **4.** Можно, см. ответ задачи 4 для 6 класса. **5.** Нет.

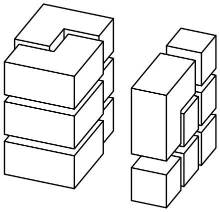
1993 год

5–6 классы

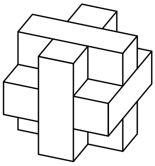
1. „АУУАУААУУААУАУУАУААУАУУААУУАУААУ!“ **2.** Совместная работа — «до встречи» — обойдётся дешевле. **3.** Первый вопрос: см. рисунок. Ответ на второй вопрос: „Нельзя“. **4.** 2999. **5.** (Слева направо) Матроскин, дядя Фёдор, Печкин, Шарик. **6.** Длины маршрутов равны. **7.** Да. **8.** На две команды.

7 класс

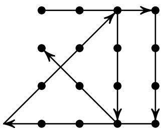
1. Да. **2.** а) да; б) нет; в) нет. **3.** 9. **4.** 2,8. **5.** 1 166 666. **6.** Да, см. рисунок.



К задаче 1993-6-3



К задаче 1993-7-6



К задаче 1992-5/6-3

1992 год

5–6 классы

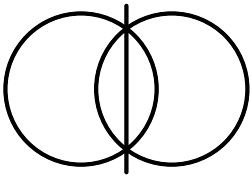
1. 15 ям. **2.** 13. **3.** См. рисунок. **4.** Если скорости ребят как минимум вдвое больше скорости эскалатора, то они добегут до шапки одновременно. Иначе первым придёт Витя.

7 класс

1. 10 ям. **2.** В январе. **3.** Нет. **4.** а, б) Да, может. **5.** См. ответ задачи 4 для 5–6 классов.

1991 год

5–6 КЛАССЫ



К задаче 1991-6-6

1. Да. **2.** 60 секунд. **3.** Надо провести разрез через центры обоих квадратов. **5.** 0; 18. **6.** См. рисунок.

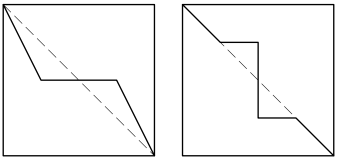
7 КЛАСС

1. См. ответ задачи 1 для 5–6 классов. **3.** Цена на гаечки не изменится, и они окажутся самыми дорогими, а винтики и шпунтики будут стоить по 75 коп. **4.** Второго. **5.** а) Удвоенная сумма цифр; б) 18.

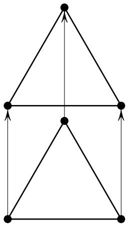
1990 год

5 КЛАСС

2. Не обязательно. **3.** 25 минут. **4.** Замостим плоскость одинаковыми квадратиками (лист в «клеточку»), а теперь разобьём каждый квадратик на два одинаковых пятиугольника (пункт а) или семиугольника (пункт б), как показано на рисунке. **5.** См. рисунок.



К задаче 1990-5-4

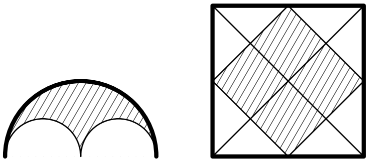


К задаче 1990-5-5

6–7 КЛАССЫ

1. На белом листе бумаги проведём синей ручкой две пересекающиеся прямые, а их точку пересечения отметим чёрной ручкой.

2. См. рисунок. а) Фигура, ограниченная данной полуокружностью и двумя полуокружностями, построенными на половинках диаметра исходной «внутри» неё. б) Квадрат, вершинами которого являются середины сторон данного квадрата. **3.** Нельзя. **4.** а) 5, 11, 17, 23, 29; б) 7, 37, 67, 97, 127, 157. **5.** Если есть хотя бы один философ или математик, то философов больше.



К задаче 1990-6/7-2

Указания

2004 год

6 класс

1. По условию не обязательно двигаться вперёд!

3. а) Подберите три дроби с числителями, равными 1. б) Найдите сначала три дроби с разными знаменателями, дающие в сумме 1.

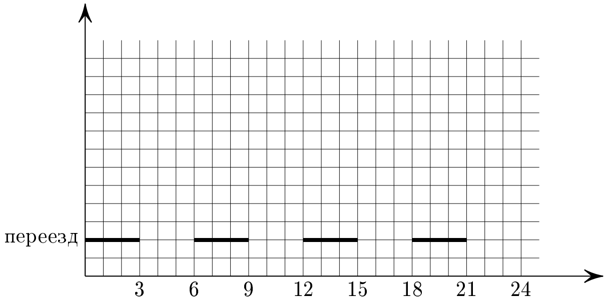
4. Не забудьте, что фигурки можно переворачивать.

5. В последнем столбце таблицы 2 стоят все буквы Сашиного города, В первом столбце таблицы 2 идут все буквы Сашиного города по алфавиту. В названии Сашиного города после буквы, стоящей в последнем столбце этой таблицы, идёт буква, стоящая первой в той же строчке.

7 класс

1. Воспользуйтесь признаками делимости на 2, 5, 3.

6. Незнайка не может проезжать переезд, расположенный на втором километре шоссе, пока не истекут три минуты, а также на седьмой, восьмой и девятой минутах, на тринадцатой–пятнадцатой минутах и т. д. Графически это означает, что график движения Незнайки (прямая) не может пересекать выделенные отрезки.



К задаче 2004-7-6

2003 год

6 класс

1. Пусть мальчик прожил x лет и ещё y месяцев ($y < 12$). Тогда он прожил всего $12x + y$ месяцев и поэтому $12x + y - x = 111$.

2. $\mathtt{C} > \mathtt{P}$, в частности, $\mathtt{C} > 1$.

4. $1/3 + 2/3 = 1$.

6. Сумма чисел на всех гранях кубика равна 21.

7 класс

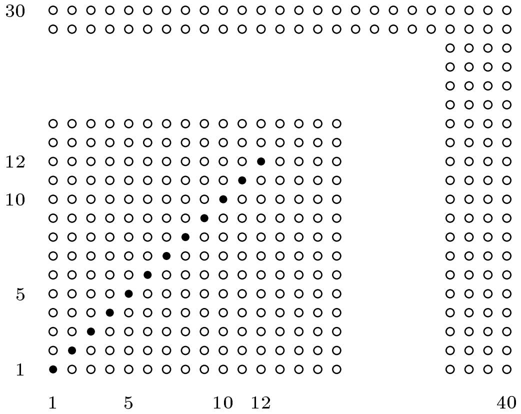
1. $2003 : 6009 = 1/3$.

2. Если разрез «подвинуть» в пределах одной и той же стороны, то число частей не изменится. Когда разрез пройдёт через угол или перейдёт на соседнюю сторону, число частей может измениться.

3. Воспользуйтесь признаком делимости на 3.

4. Заштрихуйте прямоугольники, стоящие на диагонали (как в турнирной таблице).

5. Самое «экономное» — поставить солдат, как показано на рисунке.



К задаче 2003-7-5

6. Выйдя из углового кубика, через ход обязательно попадёшь в центр грани.

2002 год

6 класс

1. $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$.

2. Заметьте, что число трёхклеточных уголков чётно.

4. Не стремитесь закрасить целиком стороны, оставьте середины сторон незакрашенными.

6. Если наименьшее из покрашенных чисел двузначное, то первый из непокрашенных участков состоит из $9 + 2n$, т. е. из нечётного числа цифр.

7 класс

2. См. указание к задаче 2 для 6 класса.

3. В исходном примере хотя бы один сомножитель чётный.

6. Подсчитайте, сколько очков набрали в сумме игроки, получившие звание мастера спорта.

2001 год

6 класс

1. Разложите число 2001 на множители.

3. Если пакетиков с чаем меньше 20, то Инне их не хватит.

5. Пользуясь тем, что число попавших снежков на 13 меньше числа брошенных, составьте уравнение.

7 класс

1. Какая последняя цифра у числа $23021^{377} - 1$?

2. $8019 = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11$.

4. Нарисуйте, куда нужно вешать флажок, чтобы его углы попали точно на дырку.

5. Решайте задачу на шахматной доске.

2000 год

6 класс

1. Найти требуемое расположение знаков легко, если расставлять знаки справа налево.

Попробуйте сами доказать, что

а) при любой расстановке знаков в левой части равенства получается нечётное число;

б) выбором знаков можно получить любое нечётное число между числами -128 и 128, причём единственным способом.

4. Выйдите за пределы фигуры!

5. Покрасьте вершины A, C, F, H в чёрный цвет.

7 КЛАСС

2. а) К числу 77 приводит уравнение $2(10 + x) = 97 + x$.

б) Малыш не может из неравных числителя и знаменателя сделать равные.

3. Одна из двух полученных «равных» сторон может быть «составной».

5. Возьмите вершину, в которой стоит наименьшее из этих чисел, и посмотрите на соседние вершины.

1999 год

6 КЛАСС

1. Найдите, сколько точек было перед последним уплотнением, т. е. решайте задачу «с конца».

2. Разложите 420 на множители.

3. Белых клеток втрое больше, чем чёрных.

4. Меридианы примерно одинаковы по длине, а параллели чем ближе к северу, тем короче.

5. Удобно сначала нарисовать перпендикулярные медианы треугольника, а потом уже вершины.

6. Задачу решить легче, если сначала понять, как поплотнее уложить плитки, а потом уже смотреть, где разместить чёрный квадрат.

7 КЛАСС

3. См. указание к задаче 4 для 6 класса.

4. После полудня первый пешеход прошёл столько же, сколько второй до полудня.

3. См. указание к задаче 5 для 6 класса.

6. Если два квадрата стоят в одной строке, то они одинаковы.

1998 год

6 КЛАСС

1. Решите задачу для двух параллелей (0° и 180°) и одной параллели (экватора).

5. Выясните сначала, как расположены бензоколонки A, C и D.

6. В квадрате 3×3 можно обойти ходом коня все клетки, кроме центральной, и вернуться в исходную клетку.

7 КЛАСС

1. См. указание к задаче 1 для 6 класса.

2. Найдите двумя способами, сколько человек любят мандарины.

4. Если два жителя острова сказали одно и то же, то они либо оба лжецы, либо оба рыцари.

5. Остаток от деления 1, 15 и 50 на 7 равен 1.

1997 год

6 КЛАСС

1. Проверьте пример «справа налево».

3. Рыжиков не больше 19.

4. Разрежьте доску пополам по вертикали.

6. Вроде очевидно, что быстрее всего будет получаться, если фонарик всё время будет носить обратно папа. Но это неверно, и такой путь «тупиковый». Дайте разочек отнести фонарик обратно маме (хотя это и невоспитанность). И пустите вместе самых медленных — бабушку с малышом.

7 КЛАСС

1. Если периметр прямоугольника равен 1996, то сумма длин его соседних сторон равна 998.

2. б) Если каждый день «отдыхает» не более одного автомобиля, то всего автомобилей не более 7.

4. См. указание к задаче 3 для 6 класса.

5. Двоечник мог ошибиться только в тех вопросах, на которые отвечал наугад.

1996 год

6 класс

3. Сравните количество пятизначных чисел, делящихся на пять, и количество пятизначных чисел, у которых хотя бы одна из первых двух цифр слева — пятёрка.

5. б) Каждая сторона пятиугольника содержит сторону одного из треугольников. Все углы правильного пятиугольника тупые.

6. Скажем, что часть клеток раскрашена правильно, если их раскраска не противоречит условию задачи. Есть такие клетки, что если их раскрасить правильно, то правильная раскраска остальных клеток восстанавливается однозначно (одна за другой).

7 класс

1. В наших числах каждая цифра появляется ровно по одному разу в каждом из разрядов — сотен, десятков и единиц.

2. Попробуйте проследить «с конца», сколько у какого пирата было монет после каждой игры.

3. Заметив, что $x = 2$, $y = 2$ — решение, попробуйте найти ещё одно в виде $x = 2^k$, $y = 2^n$.

4. Запишите каждый путь последовательностью нулей и единиц.

5. Подсчитайте двумя способами количество границ белых лоскутков с чёрными.

6. Посмотрите, сколько раз входит каждое число от 2 до 100 в наше произведение.

1995 год

6 класс

3. Сторона самого большого квадрата равна сумме сторон двух квадратов: следующего за ним по часовой стрелке и самого маленького.

5. Упорядочим наших борцов по силе и присвоим каждому «рейтинг» от 9 до 1: 9 — самому сильному и т. д. Тогда сумма рейтингов всех борцов равна 45. Постарайтесь составить команды так, чтобы суммы рейтингов борцов в командах были равны.

7 КЛАСС

1. Разложите число 1995 на простые множители.

3. См. решение задачи 3 для 6 класса.

5. Разность между числом и суммой его цифр делится на 9.

1994 год

6 КЛАСС

2. $2 = 1 \cdot 2;\ \ 6 = 2 \cdot 3$.

3. $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, причём это разложение единственно.

7 КЛАСС

1. Если объём выпускаемой продукции снизился на 51%, значит, он составил 49% от исходного, а 49 — это 7 в квадрате.

2. $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, причём это разложение единственно.

3. Заметим, что Ё $= 1$, далее действуем подбором (решений много!). Попробуйте найти несколько решений!

5. Проведите (за Ваню) сначала среднюю фишку.

6. Посмотрите на самого «активного» школьника.

1993 год

5–6 КЛАССЫ

1. Разбейте «следующее» высказывание пополам и сравните с «предыдущим».

2. Метр туннеля, выкопанный «быстрым» землекопом, обходится дешевле.

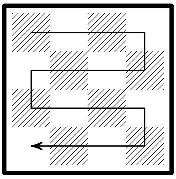
3. Внутренний центральный кубик граничит только с центральными кубиками граней.

4. Если $a < b$, то наименьшее число с суммой цифр a будет меньше, чем наименьшее число с суммой цифр b.

5. Матроскин и до пересадки был крайним слева.

6. $DL = BF$.

7. Заметьте, что прямоугольник $m \times n$ можно обойти «змейкой», проходя каждую клетку по одному разу (см. рисунок для прямоугольника 4×4). Кроме того, «усложните» задачу, запретив Али-Бабе класть монету в клетку, где монета уже есть (то есть при ходе в клетку, где уже есть монета, он будет обязан её забрать). Заметьте, что если Али-Баба будет следовать этому правилу, то ни в какой клетке не может оказаться две монеты!



К задаче 1993-6-7

8. Рассмотрите все пары толстяков, которые не должны оказаться в одной команде. Кроме того, можно считать, что все 100 толстяков разного веса.

7 КЛАСС

2. Разложите левую часть на множители.

3. Упрощайте уравнение «снаружи», а не изнутри.

4. Примените неравенство треугольника: каждая из сторон треугольника меньше суммы двух других сторон, но больше их разности.

5. Ведите расчёты в «твёрдой» валюте — пустых бутылках. Тогда не будет инфляции!

1992 год

5–6 КЛАССЫ

1. Посчитайте сначала, сколько ям выкопают 6 землекопов за 2 часа.

2. За 5 крон дают два талера, значит, за одну крону дают $2/5$ талера или $(2/5) \cdot (10/3)$ рупии.

4. Два встречных эскалатора можно представить себе, как движущееся с постоянной скоростью кольцо, относительно которого шапка неподвижна. Посмотрите на происходящее с точки зрения шапки.

7 класс

1. Посчитайте сначала, сколько ям выкопают 6 землекопов за 3 часа.

3. Подсчитайте двумя способами число подписей под всеми ДВУсторонними соглашениями. И подумайте, может ли оно быть нечётным?

1991 год

5–6 классы

2. Если после замены одной лампочки гирлянда не загорелась, то мы заменили исправную лампочку.

3. Любая прямая, проходящая через центр квадрата, делит его пополам.

4. Сумма любого числа чётных чисел чётная, а нечётного числа нечётных — нечётная.

5. Если первая цифра двузначного числа равна a, а вторая равна b, то само число равно $10a + b$.

6. Не забудьте, что бывают кольцевые линии.

7 класс

4. Если бы они ответили одинаково, то Знайка никак не мог бы их различить.

1990 год

5 класс

1. Сумма двух чисел и их разность имеют одну чётность.

2. Попробуйте разные варианты равенства углов и сторон.

3. Сначала решите задачу для четырёх кузнецов и пяти лошадей.

4. Попробуйте разбить квадрат на два одинаковых пятиугольника или семиугольника.

6–7 классы

1. Нарисуйте две пересекающиеся прямые.

3. Раскрасьте в белый и чёрный цвет в шахматном порядке маленькие кубики $1 \times 1 \times 1$, из которых состоят куб и кирпичи.

5. Рассмотрите людей, являющихся математиками и философами одновременно.

6. Строгого решения этой задачи не требуется. Достаточно интуитивного обоснования. Рассмотрите сначала более простой случай, когда центры квадратов совпадают. Затем вырежьте меньший квадрат из картона и подвигайте его внутри большого квадрата, следя за перемещениями середин интересующих нас отрезков.

Решения

2004 год

6 класс

1. После нескольких неудачных попыток удалиться на 1 м 70 см вперёд может показаться, что ответ — «нет». Заметим, что удалиться на 1 м 70 см не означает обязательно удалиться вперёд. Попробуем удалиться назад. $170 = 50 \cdot 5 - 80$.

2. Пусть в килограмме говядины x кг костей, тогда «чистой» говядины в нём $(1 - x)$ кг. Таким образом,

$$15x + 90(1 - x) = 78,$$

откуда $x = 0{,}16$.

5. Мы будем постепенно восстанавливать Сашину вторую таблицу.

Заметим сначала, что каждая буква встречается в каждом столбце столько же раз, сколько раз она встречается в слове. Поэтому буквы Сашиного города — `МТТЛАРАЕКИС`. Так как слова в таблице упорядочены по алфавиту, то в первом столбце эти буквы стоят в алфавитном порядке: `А`, `А`, `Е`, `И`, `К`, `Л`, `М`, `Р`, `С`, `Т`, `Т` (табл. 1).

Пусть теперь некоторая буква стоит в последнем столбце таблицы 2. Тогда в слове после неё будет идти буква, стоящая первой в этой строке. (При этом мы считаем, что после последней буквы идёт первая.) Из первой строки табл. 1 видно, что после буквы `М` идёт буква `А`, из второй и третьей — что после буквы `Т` один раз идёт `А`, а один раз — `Е`, и т. д.

Так как слова упорядочены по алфавиту, то в строчках с одинаковой первой буквой возможные вторые буквы упорядочены по алфавиту.

Воспользовавшись этим, мы можем заполнить и второй столбец (табл. 2). Из получившейся таблицы видно, что после пары букв `МА` идёт буква `К` (первая строчка), после пары `ТА` идёт `М` (вторая строчка), и т. д.

Можно, пользуясь этой информацией, заполнить третий столбец, потом четвёртый и т. д., пока не заполнится вся таблица. Но для решения задачи достаточно восстановить третью снизу строку (так как название города начинается с буквы `С`), что несложно сделать, зная, какая буква идёт за какой парой букв.

Таблица 1

А	*	*	*	*	*	*	*	*	*	М
А	*	*	*	*	*	*	*	*	*	Т
Е	*	*	*	*	*	*	*	*	*	Т
И	*	*	*	*	*	*	*	*	*	Л
К	*	*	*	*	*	*	*	*	*	А
Л	*	*	*	*	*	*	*	*	*	Р
М	*	*	*	*	*	*	*	*	*	А
Р	*	*	*	*	*	*	*	*	*	Е
С	*	*	*	*	*	*	*	*	*	К
Т	*	*	*	*	*	*	*	*	*	И
Т	*	*	*	*	*	*	*	*	*	С

Таблица 2

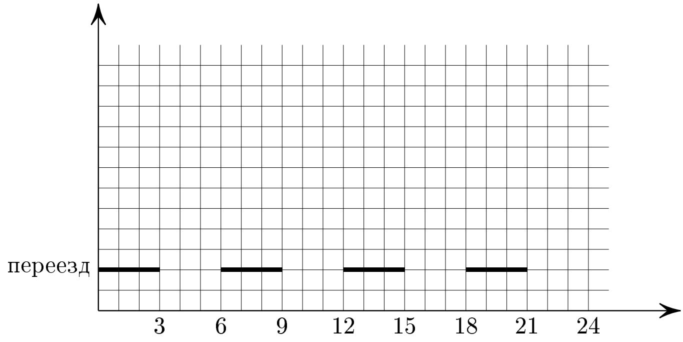
А	К	*	*	*	*	*	*	*	*	М
А	М	*	*	*	*	*	*	*	*	Т
Е	Р	*	*	*	*	*	*	*	*	Т
И	Т	*	*	*	*	*	*	*	*	Л
К	С	*	*	*	*	*	*	*	*	А
Л	И	*	*	*	*	*	*	*	*	Р
М	А	*	*	*	*	*	*	*	*	А
Р	Л	*	*	*	*	*	*	*	*	Е
С	Т	*	*	*	*	*	*	*	*	К
Т	А	*	*	*	*	*	*	*	*	И
Т	Е	*	*	*	*	*	*	*	*	С

7 КЛАСС

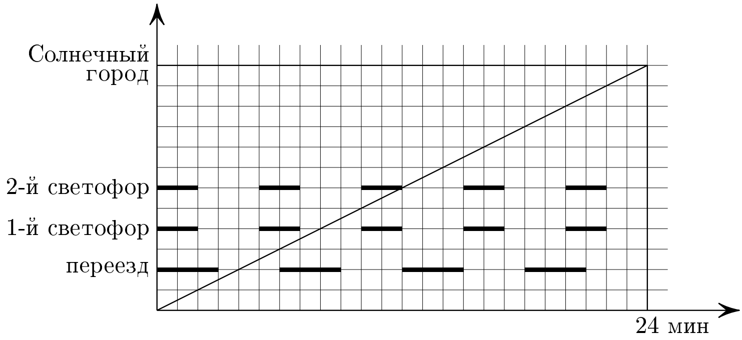
1. Очевидно, что последняя цифра больше 1. Трёхзначное простое число не может оканчиваться ни на чётную цифру (т. е. на 0, 2, 4, 6 или 8), ни на цифру 5. Если последняя цифра 3 или 9, то сумма всех цифр числа, равная удвоенной последней цифре, делится на 3, а тогда само число делится на 3. Таким образом, осталась только цифра семь.

4. Решение аналогично решению задачи 5 для 6 класса.

6. Будем откладывать по оси абсцисс время (в минутах), а по оси ординат — расстояние от Цветочного города (в километрах). Так как скорость электромобиля постоянна, то график его движения — прямая. При этом Незнайка не может проезжать переезд, расположенный на втором километре шоссе, пока не истекут три минуты, а также на седьмой, восьмой и девятой минутах, на тринадцатой–пятнадцатой минутах и т. д. Графически это означает, что прямая не может пересекать выделенные отрезки.



Аналогично можно отметить отрезки, которые запрещено пересекать из-за светофоров. Осталось из начала координат провести прямую, которая не пересекает ни один из выделенных отрезков и пересекает горизонтальную прямую $y = 12$ как можно раньше.



2003 год

6 КЛАСС

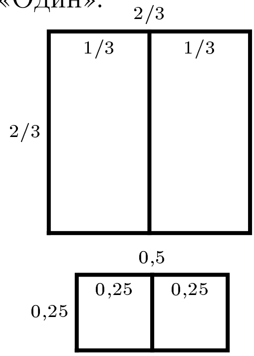
1. Пусть мальчик прожил x лет и ещё y месяцев ($y < 12$). Тогда он прожил всего $12x + y$ месяцев и поэтому $12x + y - x = 111$, то есть $11x + y = 11 \cdot 10 + 1$ или $11 \cdot 10 + 1 - 11x = y$. Так как $y < 12$, то $x = 10$ и $y = 1$.

2. Поскольку $\mathtt{C} > \mathtt{P}$, то $\mathtt{C} > 1$. Так как мы ищем наименьшее число, попробуем взять $\mathtt{P} = 1$, $\mathtt{C} = 2$ и $\mathtt{E} = 0$. Тогда $\mathtt{M} \geqslant 3$. Случай $\mathtt{CEEM} = 2003$ возможен: $35 + 1968 = 2003$ или $38 + 1965 = 2003$.

Кроме указанных решений, ребус имеет ещё 38 решений (в этом можно убедиться, например, с помощью компьютерной программы):
$31+4972=5003$, $32+4971=5003$, $31+5972=6003$, $32+5971=6003$, $81+3927=4008$, $87+3921=4008$, $61+2945=3006$, $65+2941=3006$, $81+4927=5008$, $14+2987=3001$, $17+2984=3001$, $87+4921=5008$, $15+2986=3001$, $16+2985=3001$, $81+5927=6008$, $87+5921=6008$, $41+7963=8004$, $71+4936=5007$, $43+7961=8004$, $76+4931=5007$, $15+3986=4001$, $16+3985=4001$, $61+7945=8006$, $65+7941=8006$, $46+1958=2004$, $48+1956=2004$, $14+5987=6001$, $17+5984=6001$, $57+1948=2005$, $58+1947=2005$, $83+6925=7008$, $85+6923=7008$, $46+2958=3004$, $48+2956=3004$, $24+5978=6002$, $57+2948=3005$, $28+5974=6002$, $58+2947=3005$.

3. Если первый — рыцарь, то в силу его слов второй и третий — лжецы, что невозможно из-за высказывания второго островитянина. Значит, первый — лжец. Если второй — лжец, то в силу его слов третий тоже лжец, но тогда первый сказал правду, а он должен был соврать. Значит, второй — рыцарь. В силу его слов третий тоже рыцарь. Третий честно ответит: «Один».

4. Например, квадрат со стороной 2/3 м можно разрезать средней линией на два прямоугольника, периметры которых равны 2 м. Есть и другие примеры.



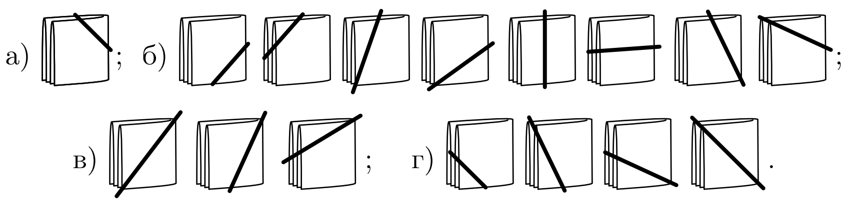
К задаче 2003-6-4

6. Заметим, что сумма всех чисел, написанных на кубике, равна 21. Сумма чисел на верхней и нижней грани в первом и втором случаях равна 9 и 6 соответственно.

После первого броска понятно, что либо 3 напротив 6, либо 4 напротив 5. Предположим, что 4 напротив 5. Но после второго броска ясно, что либо 1 напротив 5, либо 2 напротив 4. Противоречие, следовательно, 3 напротив 6.

2. Заметим, что если разрез «подвинуть» в пределах одной и той же стороны, то число частей не изменится. Когда разрез пройдёт через угол или перейдёт на соседнюю сторону, число частей может измениться.

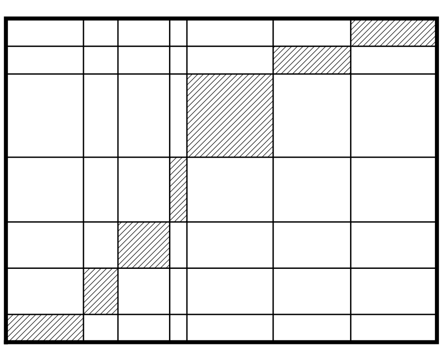
Вот все возможные варианты разрезания салфетки:



3. Так как двоек больше, чем троек, двоек может быть 4, 5, 6 или 7. В первом случае сумма цифр — 17, во втором — 16, в третьем — 15, а в последнем — 14. По признаку делимости на 3 число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3. Значит, годится только третий вариант.

Итак, в коде 6 двоек и 1 тройка. По признаку делимости на 4 число, образованное последними двумя цифрами, должно делиться на 4. Значит, это 32.

4. Рассмотрим прямоугольники, заштрихованные на рисунке («диагональные»). Горизонтальная сторона исходного прямоугольника складывается из их горизонтальных сторон. То же — для вертикальной стороны.



Поэтому периметр исходного прямоугольника равен сумме периметров заштрихованных прямоугольников. Периметр каждого из этих прямоугольников — целое число метров. Их сумма — тоже целое число метров.

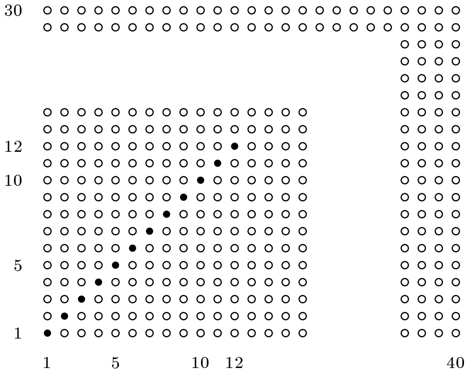
5. Пусть m — число колонн, а n — число шеренг. Тогда в полку mn солдат и $\frac{mn}{100}$ солдат получили новое обмундирование. Согласно условию, не менее чем в $\frac{40n}{100}$ шеренг есть хотя бы по одному солдату в новом обмундировании, значит,

$$\frac{mn}{100} \geqslant \frac{40n}{100}.$$

Отсюда $m \geqslant 40$. Аналогично, не менее чем в $\frac{30m}{100}$ колонн есть солдаты в новом обмундировании. Поэтому

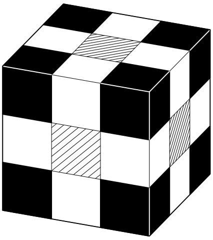
$$\frac{mn}{100} \geqslant \frac{30m}{100}.$$

Откуда $n \geqslant 30$. Значит, в полку не менее, чем $40 \cdot 30 = 1200$ солдат.



Покажем, что 1200 солдат можно построить таким образом. Построим их в виде прямоугольника 30×40 Поставим по диагонали 12 солдат в новом обмундировании (см. рисунок). Ясно, что солдаты в новом обмундировании стоят ровно в 30 % колонн и в 40 % шеренг (30 % от 40 — это 12, 40 % от 30 — тоже 12).

6. Предположим, что можно. В кубе 8 угловых кубиков (на рисунке они покрашены в чёрный цвет) и 6 «центральных» кубиков (они расположены в центрах граней и заштрихованы на рисунке). Нетрудно видеть, что любой ход из углового кубика ведёт в кубик в середине ребра, а следующий ход — в центральный кубик. Таким образом, чтобы попасть из одного углового кубика в другой, придётся пройти хотя бы через один центральный. Иными словами, между каждыми двумя соседними (в порядке обхода) угловыми кубиками должен встретиться хотя бы один центральный. Значит, центральных кубиков не меньше семи, а их всего лишь шесть!



2002 год

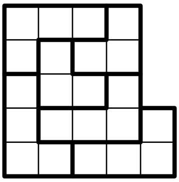
6 класс

1. Заметим, что $\texttt{Б} = 1$. Действительно, если $\texttt{Б} > 2$, то $\texttt{БА} > 20$ и $\texttt{БАО} > 200$, так что $\texttt{БАО} \cdot \texttt{БА} \cdot \texttt{Б} > 200 \cdot 20 \cdot 2 = 8000 > 2002$.

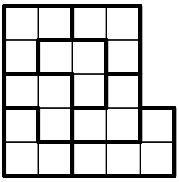
Разложим число 2002 на простые множители: $2002 = 2{\cdot}7{\cdot}11{\cdot}13$. БА является двузначным делителем числа 2002, начинающимся на цифру 1, т. е. БА может быть равно 11, 13 или $2 \cdot 7 = 14$. Так как $\texttt{Б} \neq \texttt{А}$, то $\texttt{БА} \neq 11$. Если $\texttt{БА} = 13$, то $\texttt{БАО} = 2002 : 13 = 154$, откуда А равно и 3, и 5. Противоречие.

Оставшийся вариант $\texttt{БА} = 14$, $\texttt{БАО} = 2002 : 14 = 143$ является решением.

2. Фигура состоит из 22 клеток. Пусть x — число получившихся трёхклеточных уголков, а y — число четырёхклеточных уголков. Тогда $3x + 4y = 22$.



Случай $x = 2$

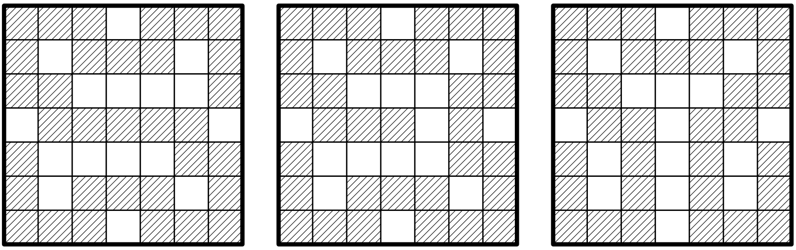


Случай $x = 6$

Заметим, что x чётно и $x < 8$ (почему?), т. е. $x = 0$, 2, 4 или 6. 0 и 4 не подходят, т. к. y получается не целым. Оба оставшихся варианта 2 и 6 реализуются (см. рисунок).

3. Пусть x — наименьшее из написанных чисел. Обозначим через $(x + y)$ вычеркнутое число $(0 < y < 9)$. Тогда $x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + (x + 4) + (x + 5) + (x + 6) + (x + 7) + (x + 8) + (x + 9) - (x + y) = 2002$. Приведём подобные слагаемые: $10x + 45 - x - y = 2002$, то есть $9x = 1957 + y$. Отсюда $1957 + y$ делится на 9. Учитывая условие $0 < y < 9$, получаем, что $y = 5$. Значит, $x = 1962 : 9 = 218$.

4. а, б) Если мы умеем закрашивать 33 клетки, то 32 клетки можно закрасить, вовремя остановившись. Три примера, в которых закрашены 33 клетки, изображены на рисунке (на самом деле таких примеров гораздо больше). Больше 33 клеток закрасить нельзя — это проверено на компьютере.



5. Проверим, что годится вопрос: «Правда ли, что у тебя золотых монет больше, чем у Алёши Поповича?»

Если у Ильи Муромца две золотые монеты, он скажет «да», поскольку у Алёши Поповича не может быть больше одной золотой монеты.

Если обе монеты у Ильи серебряные, то у Алёши хотя бы одна золотая, и Илья Муромец ответит «нет».

Ну а если ему достались разные монеты, то он ответит «не знаю», так как у Алёши может оказаться как две золотые, так и две серебряные монеты.

Конечно, можно было задать и другие вопросы, например:

— Правда ли, что одному из двух других богатырей достались две серебряные монеты?

— Верно ли, что два других богатыря получили хотя бы по одной золотой монете каждый?

— Если я заберу у тебя одну монету и дам вместо неё золотую, станет ли у тебя больше золотых?

(Заметьте, что в последнем вопросе не упоминаются монеты двух других богатырей, а только монеты, доставшиеся Илье Муромцу!)

6. Всего выписано

$$9 + 19 \cdot 2 \text{ (если в месяце 28 дней) цифр,}$$
$$9 + 20 \cdot 2 \text{ (если в месяце 29 дней) цифр,}$$
$$9 + 21 \cdot 2 \text{ (если в месяце 30 дней) цифр,}$$
$$9 + 22 \cdot 2 \text{ (если в месяце 31 дней) цифр.}$$

Допустим, число 1 не покрашено. Если наименьшее из покрашенных чисел двузначное, то первый из непокрашенных участков состоит из нечётного числа цифр, а все остальные — из чётного числа цифр. Если же наименьшее из покрашенных чисел однозначное, то первый из непокрашенных участков состоит не более чем из 8 цифр. Но это слишком мало: покрашенных цифр в этом случае не более 5, непокрашенных — не более $8 \cdot 4 = 32$, итого — не более 37 цифр, а даже самый короткий месяц (февраль невисокосного года) даёт 47 цифр. В обоих случаях получили противоречие. Значит, число 1 должно быть покрашено.

7 КЛАСС

1. Пусть сейчас год-палиндром, имеющий вид $\overline{abba}$. Когда наступит следующий такой год? Рассмотрим два случая:

а) $b = 9$ (год вида $\overline{a99a}$, $a < 9$). Тогда через 11 лет наступит ещё один год-палиндром: $\overline{(a+1)00(a+1)}$. Например, годы 3993 и 4004.

б) $b < 9$. В этом случае следующий год-палиндром наступит через 110 лет: $\overline{a(b+1)(b+1)a}$.

Например, годы 9339 и 9449. Поэтому наибольшее число годов-непалиндромов подряд — 109.

2. См. решение задачи 2 для 6 класса.

3. В получившемся примере три сомножителя чётные, значит, в исходном примере хотя бы один тоже был чётным. Поэтому и произведение было чётным числом, то есть последняя цифра произведения была изменена. Таким образом, слева изменено не более одной цифры. Значит, в исходном примере слева были и пятёрки, и четвёрки, а оканчивалось произведение на 0.

Если бы ни один из сомножителей не был исправлен, то произведение равнялось бы $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 1600$. Но запись числа 1600 отличается от записи числа 2240 более чем на одну цифру. Значит, ровно один из сомножителей исправлен, а произведение равно 2240. Поэтому одна из пятёрок исправлена на семёрку.

6. Докажем от противного, что получить звание мастера могли не более 7 участников турнира. Пусть получивших звание мастера было 8. Тогда каждый набрал не менее $0{,}7 \cdot 11 = 7{,}7$ очка, то есть не менее 8 очков. Таким образом, все они в сумме набрали не менее $8 \cdot 8 = 64$ очков. С другой стороны, не получат звание мастера 4 человека. Значит, в партиях с ними каждый из получивших звание мастера набрал не более 4 очков (даже если выиграл все партии). Это даёт не более $4 \cdot 8 = 32$ очков.

Значит, участники, ставшие мастерами, набрали в партиях между собой не менее 32 очков. Но они сыграли между собой только $8 \cdot 7/2 = 28$ партий (каждый сыграл с семью другими, при этом каждая партия считалась два раза). Противоречие.

Покажем, как ещё можно найти, сколько партий сыграли между собой 8 шахматистов. Если записать результаты партий в таблицу 8×8, то у нас останется свободной диагональ (так как партий с самим собой не играется) и на каждую партию придётся по две клетки: в строке одного из игроков и в строке другого. Таким образом, партий будет $(8 \cdot 8 - 8)/2 = 28$.

Если же звание мастера получили 9 или более участников, то они должны были набрать не менее 72 очков, в то время как всего в турнире разыгрывалось $(12 \cdot 11)/2 = 66$ очков.

Теперь приведём пример турнира, в котором звание мастера получили 7 участников. Пусть первые 7 (по списку) участников всегда выигрывали у последних 5, а все остальные партии завершились вничью. Тогда первые 7 участников набрали по $1 \cdot 5 + 0{,}5 \cdot 6 = 8$ очков, а последние 5 — по $0 \cdot 7 + 0{,}5 \cdot 4 = 2$ очка.

2001 год

6 класс

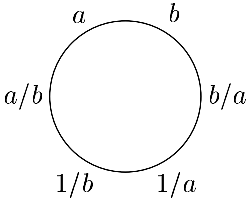
1. Имеем $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$. Поэтому число 2001 можно представить в виде произведения двузначных чисел лишь следующими способами: $69 \cdot 29$ или $23 \cdot 87$. Подходит только первый вариант.

2. Если оптовая цена ручки x рублей, то прибыль от продажи одному покупателю одной ручки равна $5 - x$, а трёх ручек — $10 - 3x$. По условию $5 - x = 10 - 3x$, откуда $x = 2{,}5$. Значит, оптовая цена — 2 рубля 50 копеек.

3. Заметим, что в коробке не могло быть меньше 20 пакетиков: если их хотя бы 19, то Инна не сможет выпить больше $19 \cdot 3 = 57$ чашек, а она выпила 58. С другой стороны, в коробке не могло быть больше 20 пакетиков: если их хотя бы 21, то Наташа не могла выпить меньше $21 \cdot 2 = 42$ чашек, а она выпила 41. Тем самым, в коробке было 20 пакетиков: Инна заварила 18 пакетиков по три раза и 2 пакетика по два раза, а Наташа заварила 1 пакетик три раза и 19 пакетиков по два раза.

Замечание. Обязательно надо предъявить способ выпить 41 и 58 чашек чая, иначе решение будет не полным.

4. Если рядом поставить числа a и b, то следующим надо поставить число b/a. За ним $1/a$, потом $1/b$, наконец, a/b. При этом $a = a/b \cdot b$ и «круг замкнулся». Такие шесть чисел будут удовлетворять условию задачи, если они все различны. Например, они будут такими, если взять $a = 2$, $b = 3$.



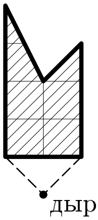
5. Если в Вифслу, Тофслу и Хемуля попали x, y и z снежков соответственно, то всего было брошено $13 + x + y + z$ снежков (поскольку 13 снежков не достигли цели). С другой стороны, Вифсла бросил $6x$, Хемуль — $5y$, а Тофсла — $(4z+1)$ снежков (вместе с первым снежком). Получаем уравнение: $6x+5y+4z+1 = 13+x+y+z$, откуда $5x+4y+3z = 12$. Так как x, y, z — целые неотрицательные числа, то x может быть равен 1 или 2, y — 1, 2 или 3, а z — 1, 2, 3 или 4. Перебором находим единственное решение $(1; 1; 1)$.

7 КЛАСС

1. Любая степень числа, оканчивающегося цифрой 1, тоже оканчивается цифрой 1. Поэтому разность $23021^{377} - 1$ оканчивается на 0 и, следовательно, не является простым числом.

На самом деле наибольшим известным сегодня простым числом является число $2^{3021377} - 1$. Простые числа вида $2^n - 1$ называют *числами Мерсенна* (по имени математика 17 века М. Мерсенна, который их исследовал). Можно доказать, что при составном n число $2^n - 1$ составное. Поэтому числа Мерсенна бывают только при простых n. Например, $2^2 - 1 = 3$, $2^5 - 1 = 31$, $2^7 - 1 = 127, \ldots$ — простые числа. Однако нельзя утверждать, что каждому простому числу p соответствует простое число $2^p - 1$. Например, $2^{11} - 1$ составное. Поиском чисел Мерсенна занимались многие выдающиеся математики, например, Эйлер доказал, что число $2^{31} - 1$ — простое. Конечно или бесконечно множество чисел Мерсенна — вопрос, на который пока нет ответа.

2. Увеличение на 10 % означает умножение на 1,1. Уменьшение на 10 % означает умножение на 0,9. Разложив 8019 на множители $8019 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11$, заметим, что $8019 = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11$. Поэтому после трёх промахов и одного попадания у игрока будет 100 руб. $\cdot\, 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}1 = 80{,}19$ руб. $=$ $= 80$ руб. 19 коп.



4. Найдём точки, куда надо вбивать гвоздь так, чтобы «углы» флажка попадали точно на дырку. Соединив их и заштриховав внутренности, мы получим решение задачи. Убедитесь в этом сами (доказывать в этой задаче ничего не нужно).

5. Будем рассуждать, используя шахматную доску. Заметим, что белые клетки граничат по стороне только с чёрными и наоборот. Поэтому сначала отметим несколько белых клеток так, чтобы у каждой чёрной клетки был ровно один отмеченный сосед (на рисунке слева). Затем отметим несколько чёрных клеток так, чтобы и у каждой белой клетки появился ровно один отмеченный сосед (на рисунке справа), при этом у чёрных клеток новых отмеченных соседей не появится.

2000 год

6 класс

1. Будем заменять звёздочки справа налево. Так как $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63 < 64$, то перед 64 должен стоять «+» (иначе результат будет отрицательным). Получаем $1*2*4*8*16*32+64 = 27$. Перед 32 должен стоять «$-$», иначе слева будет слишком большое число, даже если остальные звёздочки заменить на «$-$». Продолжая аналогично, получим $+1-2+4+8-16-32+64 = 27$.

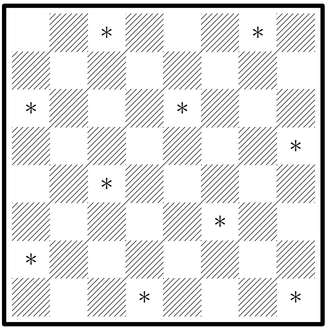
3. Пусть первая цифра кода x, а вторая y. Тогда само число записывается как $10x + y$, а условие задачи можно записать уравнением $(x + y) + x \cdot y = 10x + y$. Следовательно, $x \cdot y = 9x$.

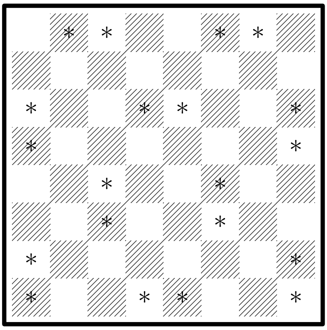
Так как код — двузначное число, то x не равно 0, а значит, $y = 9$. При этом x можно взять любым, кроме 0. Проверьте!

5. Покажем, что последовательность выстрелов CFH, BDE, DEG и ACF приводит к цели.

Покрасим вершины A, C, F и H в чёрный цвет, а остальные вершины — в белый. Заметим, что любые две соседние вершины будут покрашены в разные цвета. Значит, после каждого залпа заяц перебегает в вершину другого цвета.

Сделаем первый залп по вершинам C, F и H. Если заяц находился в чёрной вершине, то либо охотники сразу попали в него, либо заяц находился в вершине A. В последнем случае после залпа заяц перебежит в одну из трёх соседних вершин, и залп (BDE) обязательно достигнет цели.





Если заяц находился в белой вершине, то после двух выстрелов он снова окажется в белой вершине. Рассуждая аналогично предыдущему случаю, убеждаемся, что залпы (DEG), а потом (ACF) обязательно поразят зайца.

Есть и другие решения.

7 класс

2. а) Да, достаточно прибавить к числителю и знаменателю по 77. б) Действительно, дробь равна единице, если её числитель и знаменатель равны. А Малыш никак не сможет из неравных чисел сделать равные.

4. Докажем методом от противного. Предположим, что найдутся два натуральных числа k и n такие, что $n(n+1) = 2k(2k+2)$. Рассмотрим два случая: $n < 2k$ и $n > 2k$.

Если $n \leqslant 2k$, то $n + 1 < 2k + 2$, поэтому $n(n + 1) < 2k(2k + 2)$. Противоречие. Если $n > 2k$, то $n + 1 \geqslant 2k + 2$, поэтому $n(n + 1) > 2k(2k + 2)$. Противоречие.

5. Обозначим числа, стоящие в вершинах A, B, C, D, E, F и H куба, соответствующими маленькими латинскими буквами: a, b, c, d, e, f, g и h. Возьмём одну из вершин, в которой стоит наименьшее число. Без ограничения общности это вершина A и в ней стоит число a. (оно находится в вершине A). Тогда для значений чисел b, d и e, стоящих в соседних с A вершинах B, D и E, остаётся только две возможности a и $a + 1$. Значит, какие-нибудь два из чисел b, d и e равны. Пусть равные числа стоят в вершинах B и E (остальные случаи рассматриваются аналогично). В этом случае искомыми будут диаметрально противоположные вершины E и C: $e = b$, а числа c и b отличаются не более чем на 1, поэтому числа e и c отличаются не более чем на 1.

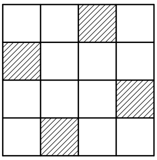
1999 год

6 класс

1. Если (до уплотнения) было отмечено n точек, то после уплотнения будет отмечено $2n - 1$ точек (из которых n старых и $n - 1$ новая). Если после уплотнения получилось k точек, то

$2n-1=k$ или $n=(k+1)/2$. Таким образом, до последнего уплотнения было $(113+1)/2=57$ точек, до второго — $(57+1)/2=29$ точек и в самом начале — $(29+1)/2=15$ точек.

2. Разложим 420 на множители: $420=6\cdot7\cdot10=2\cdot2\cdot3\times\times5\cdot7$. Теперь уже несложно сгруппировать эти множители в пять групп так, чтобы в сумме получилось 20: $7\cdot5\cdot3\cdot4\cdot1=420$; $7+5+3+4+1=20$.



3. Заметим, что белых клеток должно быть втрое больше чем чёрных, так что белых будет 12, а чёрных — 4. После этого легко нарисовать требуемую картинку.

4. Вертолёт летит на юг по московскому меридиану, затем по параллели, потом снова по меридиану на север, а затем по более северной параллели. Так как все меридианы одинаковы, широта его не изменится (сколько градусов он пролетел на юг, столько же он пролетит и на север). А параллели разные: чем севернее, тем короче, так что на северной параллели те же 300 км составят большее число градусов. Значит, вертолёт окажется восточнее Москвы на той же широте.

7 КЛАСС

1. Сумма числителя и знаменателя равна 101. Значит, чем больше числитель дроби, тем меньше её знаменатель — и тем больше сама дробь (так как и числитель и знаменатель — положительные числа). Видно, что $25/76$ ещё меньше $1/3$, а $26/75$ — уже больше.

3. См. решение задачи 4 для 6 класса.

4. Пусть от рассвета до полудня прошло x часов. Первый пешеход шёл x часов до полудня и 4 после, второй — x до полудня и 9 после. Заметим, что отношение времён равно отношению длин путей до и после точки встречи, так что $x/4=9/x$. Из этой пропорции находим, что $x=6$.

Проведём более подробное обоснование Действительно, пусть скорость первого пешехода (идущего из A в B) равна v_1, а скорость второго (идущего из B в A) равна v_2. Тогда до точки встречи первый прошёл $v_1\cdot x$, а второй — $v_2\cdot x$. После полудня первый прошёл $v_1 \cdot 4$, а второй — $v_2 \cdot 9$. Но после полудня первый прошёл столько же, сколько второй до полудня. И наоборот, после полудня второй прошёл столько же, сколько первый до полудня. Имеем:

$$\begin{aligned} v_1 \cdot x &= v_2 \cdot 9, \\ v_1 \cdot 4 &= v_2 \cdot x, \end{aligned} \qquad \text{или} \qquad \begin{aligned} \frac{v_1}{v_2} &= \frac{9}{x}, \\ \frac{v_1}{v_2} &= \frac{x}{4}, \end{aligned}$$

Отсюда $x/4 = 9/x$.

6. Если два квадрата из девяти находятся в одной горизонтальной строке, то они имеют одинаковую высоту, а будучи квадратами — и одинаковую ширину, так что в этом случае всё доказано. Точно так же можно рассуждать, если два квадрата окажутся в одном вертикальном столбце. Осталось рассмотреть третий случай, когда все квадраты находятся в разных строках и в разных столбцах. Тогда они попадают в девять столбцов из десяти и в девять строк из десяти, и остаётся одна свободная строка и один свободный столбец. Докажем, что прямоугольник, стоящий на пересечении «свободной» строки и «свободного» столбца будет ещё одним, десятым квадратом. В самом деле, ширину свободного столбца можно найти, вычтя суммарную ширину девяти квадратов из ширины большого квадрата. Точно так же высота свободной строки равна разности высоты большого квадрата и суммы высот девяти квадратов, а высота любого квадрата равна его ширине. Но по условию десятого квадрата нет, так что третий случай невозможен.

1998 год

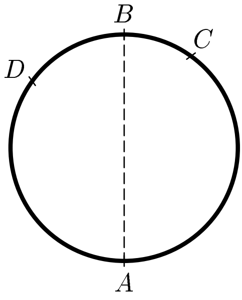
6 КЛАСС

1. Меридианы делят глобус на 24 части (дольки), а параллели делят каждую дольку на $17 + 1 = 18$ частей. Всего $18 \cdot 24 = 432$ части.

2. Например, лиса сначала три раза отрезает по 1 г от кусочков в 5 г и 11 г. Получатся один кусок в 2 г и два куска по 8 г.

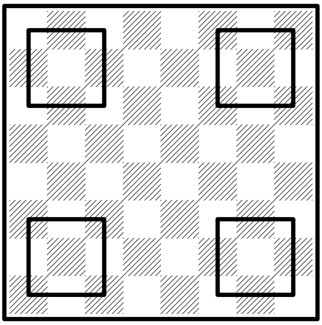
Теперь осталось шесть раз отрезать и съесть по 1 г от кусочков в 8 г.

5. В условии даны все три расстояния между A, C и D. Выясним сначала, как расположены эти три бензоколонки.



Бензоколонки A и C разбивают кольцевую дорогу на две дуги. Если бы бензоколонка D находилась на меньшей дуге, то сумма расстояний от A до D и от D до C была равна расстоянию от A до C. Но это не так.

Значит, бензоколонка D расположена на большей дуге, поэтому длина большей дуги между A и C равна $AD + DC = 25 + 35 = 60$ км. Следовательно, длина кольцевой дороги равна 60 км $+ AC = 100$ км.



Так как $BA = 50$ км, то A и B диаметрально противоположны. Значит, расстояние от B до C равно $50 - 40 = 10$ км (см. рисунок).

6. Если в квадрате 3×3 поставить коней на все клетки, кроме центральной, то каждый конь будет бить ровно двух других. Теперь расположим четыре таких «каре» на доске подальше друг от друга — так чтобы кони из разных каре не били друг друга (см. рисунок).

7 КЛАСС

1. См. решение задачи 1 для 6 класса.

2. Пусть всё население республики — N человек, из них за «Мандарин» проголосовало M человек. Тогда, с одной стороны, мандарины любят $0{,}46 \cdot N$ человек, а с другой стороны, это число равно числу проголосовавших за «Мандарин» плюс десять процентов от оставшихся (т. е. $0{,}1 \cdot (N - M)$).

Получаем уравнение

$$M + 0{,}1(N - M) = 0{,}46 \cdot N,$$

или

$$M + 0{,}1 \cdot N - 0{,}1 \cdot M = 0{,}46 \cdot N,$$

или

$$0{,}9 \cdot M = 0{,}36 \cdot N,$$

откуда

$$\frac{M}{N} = \frac{0{,}36}{0{,}9} = 0{,}4,$$

т. е. за «Мандарин» проголосовало 40 % населения республики.

3. См. решение задачи 5 для 6 класса.

4. Ясно, что если два человека сделали одно и то же утверждение, то они либо оба лжецы, либо оба рыцари.

Поскольку на острове есть хотя бы один лжец и хотя бы один рыцарь, то либо все рыцари сделали первое утверждение, а все лжецы второе, либо наоборот. В первом случае и рыцарей, и лжецов чётное число, а во втором и тех, и других — нечётное число. Значит, число людей на острове обязательно чётно.

5. Нетрудно построить пример, когда покупка стоит 6 фертингов: Незнайка заплатил две монеты — 1 фертинг и 50 фертингов, а сдачу получил тремя монетами по 15 фертингов.

Докажем, что покупка не могла стоить меньше шести фертингов. Остаток от деления на 7 достоинства каждой из монет равен 1. Пусть Незнайка отдал k монет на сумму A. Тогда остаток от деления A на 7 равен остатку от деления k на 7. Остаток от деления на 7 сдачи C равен остатку от деления $k+1$ на 7. Остаток от деления на 7 стоимости покупки $(A-C)$ равен разности остатка от деления A на 7 и остатка от деления C на 7, т. е. равен 6. Поэтому стоимость покупки не может быть меньше 6 фертингов.

1997 год

6 класс

1. Начнём проверять пример «справа налево». В разрядах единиц и десятков всё в порядке, а в разряде сотен появляется ошибка. Значит, одна из цифр этого разряда — 1, 8 или 7 — переставлена. Если предположить, что Витя переставил две карточки «внутри» разряда сотен (единственный вариант — поменять местами 7 и 8), то ещё останется ошибка в разряде десятков тысяч. Значит, одна из цифр разряда сотен поменялась с цифрой более старшего разряда.

Чтобы восстановить равенство в разряде сотен, цифру 1 можно поменять только на 9. Цифра 9 в более старших разрядах есть только одна. Но если 1 и 9 поменять местами, то ещё сохранится ошибка в разряде десятков тысяч.

Цифру 8 можно поменять только на 6, но ни одной цифры 6 в примере нет.

Значит, остаётся единственная возможность — поменять цифру 7. Вместо неё надо поставить цифру 9. Она у нас (в более старших разрядах) только одна и, если их поменять местами, то получается верный пример.

2. Сначала найдём $1/x$ из уравнения

$$\frac{2}{73} = \frac{1}{60} + \frac{1}{219} + \frac{1}{292} + \frac{1}{x},$$

$$\frac{2}{73} - \frac{1}{219} - \frac{1}{292} - \frac{1}{60} = \frac{1}{x},$$

$$\frac{2}{73} - \frac{1}{73 \cdot 3} - \frac{1}{73 \cdot 4} - \frac{1}{60} = \frac{1}{x},$$

$$\frac{17}{73 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{5 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1}{x},$$

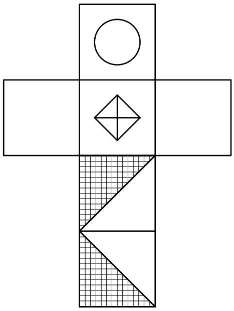
$$\frac{17 \cdot 5 - 73}{73 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{x},$$

$$\frac{1}{73 \cdot 5} = \frac{1}{x}.$$

Получим $1/x = 1/365$, значит, $x = 365$.

3. Так как среди любых 12 грибов хотя бы один — рыжик, то груздей не больше 11. Так как среди любых 20 грибов хотя бы один — груздь, то рыжиков не больше 19. А так как всего в корзине 30 грибов, получаем, что груздей ровно 11, а рыжиков ровно 19.

5. См. развёртку. На первом рисунке в условии внизу белая грань, а две оставшиеся невидимые грани — треугольники.



Лучше всего сделать из подручных материалов кубик и пофантазировать...

Похоже, первая картинка отличается от второй просто поворотом, то есть две невидимые вертикальные грани на первом рисунке — треугольники. Нарисуем их на нашем кубике. Ага, теперь не получается на него посмотреть так, чтобы увидеть третью картинку. Что-то тут не так, но мы вроде где-то близко... Очень уж хочется «спрятать» два треугольника со второй картинки на задние грани в первой... Идея — их надо ещё перевернуть! То есть вторая картинка — это не просто повёрнутая на 180 градусов первая, а ещё и перевёрнутая! Верхняя грань на второй картинке была внизу на первой! Рисуем... Теперь всё сходится и на третьей картинке.

6. Как только вы освободитесь от догмы, что фонарик обратно должен носить самый быстрый, то есть папа, и станете рассматривать другие варианты, то скоро догадаетесь, что надо пустить вместе бабушку и малыша. Теперь решение уже не очень сложно найти. Итак,

папа с мамой	— 2 мин,
папа обратно с фонариком	— 1 мин,
малыш с бабушкой	— 10 мин,
мама обратно с фонариком	— 2 мин,
папа с мамой	— 2 мин.

Всего 17 минут!

7 КЛАСС

1. Если периметр прямоугольника равен 1996, то сумма длин его соседних сторон равна 998. Все такие прямоугольники имеют вид (пишем по возрастанию меньшей стороны) 1×997, 2×996, $3 \times 995, \ldots, 498 \times 500$, 499×499. На этом список заканчивается, так как прямоугольник 500×498 уже был. Видим, что каждому числу от 1 до 499 соответствует ровно один прямоугольник. Аналогично, если периметр прямоугольника равен 1998, то сумма длин его соседних сторон равна 999. Все такие прямоугольники имеют вид (пишем по возрастанию меньшей стороны) 1×998, 2×997, 3×996, $\ldots$, 498×501, 499×500. На этом список заканчивается, так как прямоугольник 500×499 уже был. Видим, что каждому числу от 1 до 499 соответствует ровно один прямоугольник. То есть в обоих случаях прямоугольников поровну, а именно, 499.

2. а) Пяти автомобилей не хватит, так как в день, когда один из автомобилей «отдыхает», кому-то не на чем будет ехать. Шести, очевидно, хватает.

б) Ясно, что автомобилей не менее 8. Если каждый день «отдыхает» не более одного автомобиля, то всего автомобилей не больше, чем дней недели, то есть семи. Значит, в какой-то день отдыхает два автомобиля, и в этот день нам надо ещё как минимум 8 автомобилей. Итого 10. Мы доказали, что меньше, чем десятью автомобилями обойтись нельзя. Десяти достаточно — составьте, пожалуйста, график сами.

П р и м е ч а н и е. Использованное здесь рассуждение встречается очень часто и носит название «Принцип Дирихле». Его любят формулировать следующим образом: «Если в n клетках сидят $n+1$ кроликов, то в какой-то клетке сидят как минимум два кролика».

3. Пусть x — длина меньшего отрезка. В верхней стороне четырёхугольника, имеющей длину 1, укладывается 3 маленьких отрезка и один большой. Значит, длина большого отрезка равна $1 - 3x$. В нижней стороне четырёхугольника, имеющей длину 2, укладывается 3 больших отрезка и один маленький. Получаем уравнение

$$3 \cdot (1 - 3x) + x = 2.$$

Отсюда

$$3 - 9x + x = 2.$$

Следовательно,

$$x = \frac{1}{8}.$$

Итак, длина меньшего отрезка равна $1/8$. Поэтому длина большего равна $1 - 3 \cdot 1/8 = 1 - 3/8 = 5/8$. Значит, больший отрезок в пять раз длиннее меньшего.

5. Двоечник ошибся в $1/2$ от общего числа вопросов. Но он мог ошибиться только в тех вопросах, на которые отвечал наугад. При этом число вопросов, в которых он ошибся, равно $4/5$ от числа вопросов, на которые он отвечал наугад. То есть число вопросов, на которые он отвечал наугад, в $5/4$ раза больше числа вопросов, в которых он ошибся. Значит, он отвечал наугад на $(1/2) \cdot (5/4) = 5/8$ от общего числа вопросов. Ну, а списал ответы на все остальные, то есть на $3/8$ от общего числа вопросов.

1996 год

6 класс

2. Пусть Боря собрал x грибов. Тогда 20 % от количества грибов, собранных Борей, равно $0{,}2x$. Значит, Алик собрал $x - 0{,}2x = 0{,}8x$ грибов, а Вася собрал $x + 0{,}2x = 1{,}2x$ грибов. Получаем, что Вася собрал грибов в $\frac{1{,}2}{0{,}8} = 1{,}5$ раза больше, чем Алик, то есть на 50 % больше количества грибов, собранных Аликом.

Примечание. К сожалению, условие этой задачи допускает неоднозначное толкование — можно по-разному понимать, от какого именно количества надо брать проценты. Так, Вася собрал грибов на 50 % больше (от количества грибов, собранных Аликом), но если считать от количества грибов, собранных Васей, то получится, что он собрал на $33\frac{1}{3}$ процента больше. Поэтому, если вам на олимпиаде встречается задача на проценты, допускающая неоднозначное толкование, обязательно уточните условие у дежурного по аудитории и напишите подробное решение. Если вы приведёте только ответ, то нельзя будет определить — может, у вас просто арифметическая ошибка...

3. Найдём сначала количество пятизначных чисел, делящихся на пять, и количество пятизначных чисел, у которых хотя бы одна из первых двух цифр слева — пятёрка.

Каждое пятое пятизначное число делится на пять, а всего пятизначных чисел 90000. Значит, пятизначных чисел, делящихся на 5, всего $90000 : 5 = 18000$.

Первые две слева цифры пятизначного числа образуют двузначное число. Всего имеется 90 двузначных чисел: $10, 11, 12, \ldots, 99$. Из них

9 чисел оканчиваются на 5: 15, 25, 35, ..., 95, и

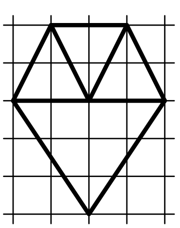
10 чисел начинаются с 5: 50, 51, 52, ..., 59.

То есть всего вроде бы 19 двузначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна пятёрка. Но при этом число 55 мы посчитали два раза. Значит, всего имеется 18 двузначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна пятёрка. А сколькими способами можно «продолжить» двузначное число до пятизначного? Первые две цифры у нас фиксированы, а три последние могут быть любыми. То есть получается 1000 пятизначных чисел, начинающихся с данного двузначного (например, если двузначное число было 25, то соответствующие пятизначные это $25000, 25001, 25002, \ldots, 25999$). Теперь количество пятизначных чисел, у которых хотя бы одна из первых двух цифр слева — пятёрка, легко подсчитать. Их 18000.

Мы получили, что чисел, делящихся на 5, и чисел, у которых хотя бы одна из первых двух цифр слева — пятёрка, поровну (по 18000). Значит, пятизначных чисел, не делящихся на 5, и тех, у которых ни первая, ни вторая цифра слева — не пятёрка, тоже будет поровну (по $90000 - 18000 = 72000$).

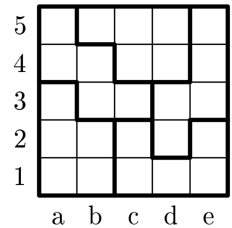
4. Ошибиться при подсчёте красных шариков мог только один из них, а двое правильно сосчитали число красных шариков. Поэтому красных шариков было 2. В подсчёте красных шариков ошибся С, значит, он путал красные с оранжевыми, а жёлтые и зелёные считал правильно. Получаем, что жёлтых — 8, а зелёных — 9. Все оставшиеся шарики — оранжевые. Общее число шариков все считали правильно — 23. Значит, оранжевых шариков было 4 $(23 - 2 - 8 - 9 = 4)$.

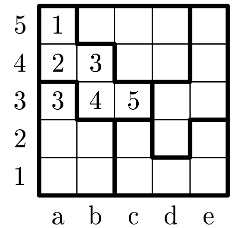
5. а) См. рисунок.

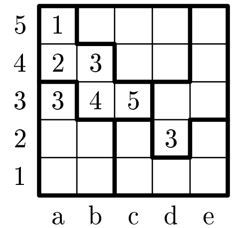


б) Каждая сторона пятиугольника содержит сторону одного из треугольников. У пятиугольника пять сторон, а треугольников у нас четыре. Значит, какие-то две стороны пятиугольника содержат стороны одного и того же треугольника. Следовательно, угол между этими сторонами тупой. Противоречие с тем, что все треугольники должны быть остроугольными.

6. Введём на нашем квадрате координаты (как в шахматах или в игре «морской бой»).







Раскрасим правильно блок a5a4b4b3c3. Тогда правильная раскраска остальных клеток восстанавливается однозначно в следующем порядке: a3, d2, c5, e1, d1, b5, d5, e5, d4, d3, c4, e4, e3, e2, a2, a1, b2, b1, c2, c1.

Опишем подробно два первых шага, приведя к остальным только картинки (обязательно проведите рассуждение до конца сами!).

Итак, раскрасим правильно блок a5a4b4b3c3. Пусть клетка a5 окрашена в цвет 1, a4 — в цвет 2, b4 — в цвет 3, b3 — в цвет 4, c3 — в цвет 5.

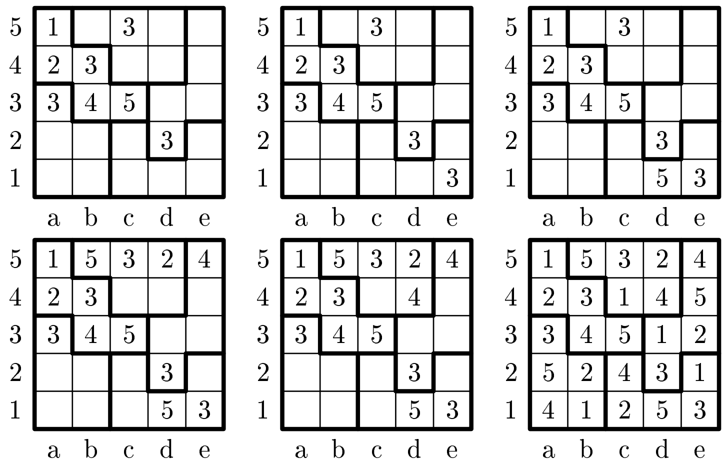
В какой цвет нужно покрасить клетку a3, чтобы получилась правильная раскраска? В цвета 1 и 2 покрасить нельзя, так как они уже есть на вертикали «a». В цвета 4 и 5 покрасить тоже нельзя, так как они уже есть на третьей горизонтали. Остаётся единственная возможность — цвет 3.

Теперь посмотрим, в какой цвет нужно покрасить d2. Рассмотрим сначала блок b5c5c4d5d4. В нём на четвёртой горизонтали не может быть клетки цвета 3 (цвет 3 на четвёртой горизонтали уже есть). Значит, клетка цвета 3 в нашем блоке — это одна из трёх клеток пятой горизонтали: b5, c5, d5. Получаем, что цвет 3 уже встречается на пятой (одна из клеток b5, c5, d5), четвёртой (b4) и третьей (a3) горизонталях. Значит, единственная возможная клетка цвета 3 в блоке d2d3e3e4e5 — это клетка d2.

Теперь продолжите, пожалуйста, рассуждение сами, пользуясь рисунками на следующей странице.

7 класс

1. Трёхзначное число, у которого в разряде сотен — цифра a, в разряде десятков — цифра b, а в разряде единиц — цифра c, равно $100a + 10b + c$. (Например, $394 = 3 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 4$.) Просматривая



по кругу наши девять трёхзначных чисел, замечаем, что каждая цифра встречается ровно по одному разу в каждом из разрядов — сотен, десятков и единиц. То есть каждая цифра один раз войдёт в нашу сумму с коэффициентом 100, один раз — с коэффициентом 10 и один раз — с коэффициентом 1. Значит, искомая сумма не зависит от порядка, в котором записаны цифры, и равна

$$(100 + 10 + 1)(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 111 \cdot 45 = 4995.$$

2. Попробуем проследить «с конца», сколько у какого пирата было монет после каждой игры. В последней игре первый проиграл второму половину своих монет, после чего у него осталось 15 монет. Но это ровно столько, сколько он только что отдал второму! Значит, перед этим у первого было $15 \cdot 2 = 30$ монет, а у второго было $33 - 15 = 18$ монет. Аналогично, во второй игре второй пират проиграл ровно столько, сколько у него осталось после второй игры, то есть 18 монет. Получаем, что перед второй игрой у второго пирата было $18 \cdot 2 = 36$ монет, а у первого было $30 - 18 = 12$ монет. Проделав самостоятельно ещё один шаг рассуждения, вы найдёте, что вначале у пиратов было по 24 монеты.

3. Заметим, что $x = 2$, $y = 2$ — решение. Попробуем найти ещё одно в виде $x = 2^k$, $y = 2^n$, подобрав подходящие k и n.

Имеем

$$2 \cdot (2^k)^3 = (2^n)^4,$$

или

$$2^{3k+1} = 2^{4n}.$$

Осталось подобрать k и n так, чтобы было выполнено равенство $3k + 1 = 4n$. Ну, а это уже совсем просто. Например, $k = 5$, $n = 4$ и, соответственно, $x = 32$, $y = 16$.

4. а) Представьте себе, что вы хотите объяснить другу какой-нибудь найденный вами способ прочтения слова. Для этого его надо как-то записать. Обозначим шаг вправо через 1, а шаг вниз — через 0. Тогда каждому способу прочтения слова (назовём его путём) мы поставим в соответствие последовательность из пяти нулей и единиц по следующему правилу:

если на первом шаге мы идём вправо, то на первое место пишем нуль, если вниз — то единицу;

если на втором шаге мы идём вправо, то на второе место пишем нуль, если вниз — то единицу;

и так далее.

Заметим, что разным путям соответствуют разные последовательности, а разным последовательностям — разные пути, причём каждой возможной последовательности соответствует путь — надо просто пройти, следуя нашим правилам (соответствия с такими свойствами математики называют взаимно однозначными).

Таким образом, число путей равно числу последовательностей нулей и единиц длины 5. А их $2^5 = 32$. Если вы впервые встретились с последовательностями нулей и единиц, обязательно выпишите все возможные последовательности нулей и единиц длины 1, 2, 3, 4, 5. Сколько их получилось?

5. Обозначим искомое количество лоскутков белого цвета через x. Тогда лоскутков чёрного цвета будет $32 - x$. Чтобы составить уравнение, подсчитаем двумя способами количество «границ» белых лоскутков с чёрными.

Каждый белый лоскуток граничит с тремя чёрными. То есть число границ равно $3 \cdot x$.

С другой стороны, каждый чёрный лоскуток граничит с пятью белыми. То есть число границ равно $5 \cdot (32 - x)$.

Получаем уравнение $3x = 5 \cdot (32 - x)$. Отсюда $8x = 160$ и $x = 20$.

6. Посмотрим, сколько раз входит каждое число от 2 до 100 в наше произведение. Число 2 входит во все факториалы, начиная со второго, то есть 99 раз; число 3 входит во все факториалы, начиная со третьего, то есть 98 раз; и так далее — каждое число входит во все факториалы, начиная со «своего». То есть n входит в произведение $101 - n$ раз:

$$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 100! = 2^{99} \cdot 3^{98} \cdot 4^{97} \cdot \ldots \cdot 97^4 \cdot 98^3 \cdot 99^2 \cdot 100.$$

В частности, все нечётные числа входят в произведение чётное число раз, а чётные — нечётное число раз. Выделим отдельно произведение всех чётных чисел, взятых по одному разу,

$$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 100! = 2^{99} \cdot 3^{98} \cdot 4^{97} \cdot \ldots \cdot 97^4 \cdot 98^3 \cdot 99^2 \cdot 100 = \\ = (2^{98} \cdot 3^{98} \cdot 4^{96} \cdot \ldots \cdot 97^4 \cdot 98^2 \cdot 99^2) \cdot (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 98 \cdot 100).$$

В первой скобке все степени чётные, значит, произведение чисел в первых скобках — квадрат целого числа. А произведение чисел во вторых скобках равно

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 98 \cdot 100 = 2 \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \cdot \ldots \cdot (2 \cdot 49) \cdot (2 \cdot 50) = \\ = 2^{50} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 49 \cdot 50 = 2^{50} \cdot 50!$$

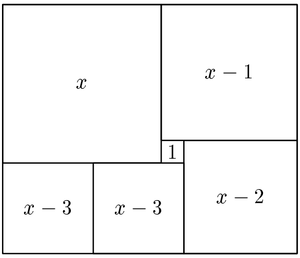
Но 2^{50} является квадратом целого числа. Значит, если зачеркнуть 50!, то оставшееся произведение будет квадратом целого числа.

1995 год

6 класс

1. Поскольку половина персиков составляет одну треть от всего компота, то половина от оставшихся персиков составляет одну шестую часть от всего компота. Учитывая, что $2/3 = 4/6$, получаем ответ — $1/4$.

3. Заметим, что сторона самого большого квадрата равна сумме сторон двух квадратов: следующего за ним по часовой стрелке и самого маленького. Обозначив сторону самого большого квадрата через x, последовательно выразим стороны других квадратов: $x - 1$, $x - 2$, $x - 3$, $x - 3$ (см. рисунок). Теперь заметим, что длина верхней стороны прямоугольника равна $x + (x - 1)$, а длина нижней равна $(x - 2) + (x - 3) + (x - 3)$. Но ведь противоположные стороны прямоугольника равны. Получаем уравнение



$$x + (x - 1) = (x - 2) + (x - 3) + (x - 3).$$

Отсюда $2x - 1 = 3x - 8$ и, значит, $x = 7$.

4. Очевидно, что вторая цифра множителя — нуль. Посмотрим, какими могут быть первая и третья цифры множителя. Видно, что если умножить 1995 на последнюю цифру множителя, то получится пятизначное число, а если на первую — то четырёхзначное.

Выпишем произведения числа 1995 на все ненулевые цифры: $1995 \cdot 1 = 1995$, $1995 \cdot 2 = 3990$, $1995 \cdot 3 = 5985$, $1995 \cdot 4 = 7980$, $1995 \cdot 5 = 9975$, $1995 \cdot 6 = 11970$, $1995 \cdot 7 = 13965$, $1995 \cdot 8 = 15960$, $1995 \cdot 9 = 17955$.

Получается, что последней цифрой множителя может быть 6, 7, 8 или 9, а первой — 1, 2, 3, 4 или 5. Сейчас уже можно просто перебрать все допустимые варианты выбора первой и последней цифры (их всего 20 — объясните, почему).

Но лучше ещё немного порассуждать и сократить себе работу по перебору вариантов.

Заметим, что при умножении 1995 на первую цифру множителя получается четырёхзначное число ($*$ГОД), у которого последние три цифры различны (по условию, разные буквы обозначают разные цифры). Поэтому число $*$ГОД не может быть равным 1995 и 3990. Значит, для первой цифры осталось только три варианта:

3, 4, 5. А всего вариантов выбора первой и последней цифры множителя осталось 12 (почему?).

Теперь посмотрим на пятизначное число, полученное при умножении 1995 на последнюю цифру множителя. Видно, что две его последние цифры должны быть различными (почему?), и поэтому, оно не равно 17955. Значит, последняя цифра множителя — не 9.

Итак, для первой цифры осталось только три варианта (3, 4, 5), а для последней тоже только три (6, 7, 8). Значит, осталось 9 вариантов выбора первой и последней цифры.

Теперь заметим, что четыре цифры О, Д и Ь, И различны. Отсюда простыми рассуждениями получаем, что для множителя остаётся только четыре варианта: 308, 306, 407 и 508.

Это уже небольшой перебор, который можно быстро провести, и найти ответ. (В принципе можно было ещё заметить, что если первая цифра 5, то $*$ГОД $=$ 9950, при сложении обязательно произойдёт перенос в следующий разряд, и итог будет не шестизначным, а семизначным. Поэтому для первой цифры остаётся только два варианта: 3 и 4. А для множителя — только три: 308, 306, 407.)

$$\begin{array}{r} \times\ 1995 \\ 306 \\ \hline 11970 \\ 5985 \\ \hline 610470 \end{array}$$

5. В задачах, где нужно просто предъявить пример, самое главное — интуитивно почувствовать путь его построения (который часто приходит в голову в процессе неудачных попыток доказательства!). Попробуем поразмышлять вместе. Конечно кажется, что если такие команды существуют, то они примерно равны по силе. Но как же измерить силу команд? Упорядочим наших борцов по силе и присвоим каждому рейтинг от 9 до 1: 9 — самому сильному и т. д. Тогда сумма рейтингов борцов равна 45. Постараемся составить команды так, чтобы суммы рейтингов борцов в командах были равны. То есть нам надо разбить числа от

1 до 9 на три группы так, чтобы сумма чисел в каждой группе равнялась 15. Где-то мы, кажется, видели похожую задачку...? Ага, когда составляли магический квадрат 3×3! В нём сумма чисел по любой горизонтали, любой вертикали и любой диагонали равна 15! Нарисуем магический квадрат 3×3.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Попробуем взять из него строки. Это три команды с одинаковым суммарным рейтингом — 15. Проверим... Первая со второй — счёт $5:4$, вторая с третьей — счёт $5:4$, и третья с первой — счёт $5:4$! Ура — получилось! Кстати, столбцы тоже подошли бы (проверьте!).

7 КЛАСС

1. Разложим число 1995 на простые множители — $1995 = 3 \times \times 5 \cdot 7 \cdot 19$. Надо разбить это произведение на две группы: часть множителей войдёт в исходное число, а другая часть будет его цифрами. Ясно, что 19 войдёт в искомое число (цифры «19» нет!). Остаётся несложный перебор, который даёт единственный ответ: $57 \cdot 5 \cdot 7 = 1995$.

2. Пусть s — стоимость сапфира, t — топаза, а i — изумруда. Из первой строчки нашего стихотворения получаем

$$s + 2t = 3i.$$

А из второй —

$$7s + t = 8i.$$

Посмотрим, сколько стоят 24 изумруда. („А почему вдруг именно 24?“— спросите вы. А вот почему: если я могу брать изумруды по три штуки, а вы по 8, то 24 — это первое число, которое получится у нас обоих! Проверьте это.)

Итак, из первой строчки

$$8s + 16t = 24i.$$

А из второй

$$21s + 3t = 24i.$$

Получается, что

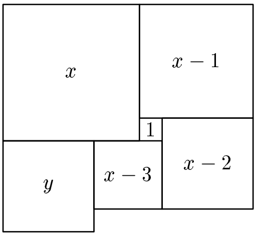
$$8s + 16t = 21s + 3t$$

или

$$13s = 13t.$$

То есть 13 сапфиров равны по стоимости 13 топазам, а значит, стоимость одного сапфира равна стоимости одного топаза.

3. Заметим, что сторона самого большого квадрата равна сумме сторон двух квадратов: следующего за ним по часовой стрелке и самого маленького. Обозначив сторону самого большого квадрата через x, последовательно выразим стороны других квадратов — $x-1$, $x-2$, $x-3$ (см. рисунок). Сторону левого нижнего квадрата нам выразить через x не удалось, поэтому придётся обозначить её через y. Теперь заметим, что верхняя сторона прямоугольника равна $x+(x-1)$, а нижняя — $(x-2)+(x-3)+y$. Но ведь противоположные стороны прямоугольника равны. Получаем уравнение



$$x+(x-1)=(x-2)+(x-3)+y.$$

Отсюда $2x-1=2x-5+y$ и, значит, $y=4$.

5. Разность между числом и суммой его цифр делится на 9. Поэтому все числа, которые мы получали, делились на 9 (кроме, может быть, исходного). Пойдём с конца. Нуль в принципе получается из любого однозначного натурального числа после вычитания из него суммы цифр. Но из них на 9 делится только 9. Поэтому на предпоследнем шаге у нас было число 9. Но 9 можно получить только из одного числа, делящегося на 9, — из 18. И так далее

$$0 \leftarrow 9 \leftarrow 18 \leftarrow 27 \leftarrow 36 \leftarrow 45 \leftarrow 54 \leftarrow 63 \leftarrow 72 \leftarrow 81.$$

Тут путь раздваивается — 81 можно получить и из 90, и из 99. Сделаем последний шаг назад (теперь делимость на 9 нам уже не важна!) — 90 ни из какого числа получить нельзя, а для 99 есть целых 10 возможных предшественников: $100, 101, 102, \ldots, 109$.

1994 год

6 КЛАСС

2. Можно заметить, что $2 = 1 \cdot 2$, $6 = 2 \cdot 3$, $12 = 3 \cdot 4$, и предположить, что n-й член последовательности равен $n \cdot (n+1)$. Проверка на 4-м ($20 = 4 \cdot 5$) и 5-м ($30 = 5 \cdot 6$) членах последовательности показывает, что мы угадали. Значит, на шестом месте стоит число $6 \cdot 7 = 42$, а на 1994-м — $1994 \cdot 1995 = 3978030$.

Конечно, это не доказательство в строгом математическом смысле этого слова. Например, так можно «доказать», что число шестьдесят делится на все числа. Действительно, 60 делится на 1, на 2, на 3, на 4, на 5, на 6 ... Однако для решения задачи требуется только найти достаточно простое правило, следуя которому, можно получить такую последовательность. А умение увидеть, почувствовать закономерность (что требовалось в данной задаче) не менее важно для математика, чем умение строго рассуждать! Если вы найдёте какое-нибудь другое (но тоже «достаточно простое») правило, дающее последовательность 2, 6, 12, 20, 30, напишите, пожалуйста, нам (а на олимпиаде такое решение тоже было бы засчитано!).

3. Обозначим через s число сторожей в бригаде, через b число бригад, а через n — число ночей, которые проспал один сторож. Тогда $s \cdot b \cdot n = 1001$. Но $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, причём числа $7, 11, 13$ — простые. Учитывая, что по условию $s < n < b$, получаем $s = 7$. Попробуйте теперь решить задачу 2 для 7 класса!

6. Пусть n — количество чашек (число человек в семье), а x — количество выпитого молока (в чашках). Тогда количество выпитого кофе равно $n - x$. Катя выпила одну чашку кофе с молоком, которая состояла из одной четверти всего молока ($x/4$) и одной шестой всего кофе ($(n-x)/6$). Получаем

$$\frac{x}{4} + \frac{(n-x)}{6} = 1,$$

$$3x + 2(n-x) = 12,$$

$$x + 2n = 12.$$

Так как n — целое число, то из последнего равенства следует, что x — целое число, причём чётное ($x = 12 - 2n$). Кроме того, $x \leqslant n$, так как количество выпитого молока, конечно, не больше, чем общее количество напитка. Теперь небольшим перебором находим, что последнее уравнение имеет три решения:

$$n = 6,\ x = 0; \qquad n = 5,\ x = 2; \qquad n = 4,\ x = 4.$$

При этом первое и последнее решения отвечают случаю, когда все пили просто молоко или просто кофе, а второе — когда пили действительно кофе с молоком.

7. а) Разобьём всех 60 школьников на группы одноклассников. Если среди школьников нет 15 одноклассников, то в каждой группе не более 14 школьников.

Пусть k — число групп, состоящих из двух и более школьников. Такие группы назовём большими.

Из условия вытекает, что $k \leqslant 4$ (иначе, взяв двоих из каждой большой группы, мы получим не менее 10 школьников, среди которых не будет трёх одноклассников). Поэтому возможны два случая: $k \leqslant 3$ и $k = 4$. Рассмотрим их.

1. Если $k \leqslant 3$, то общее число школьников в больших группах не превышает 42. Следовательно, найдётся 18 школьников, которые не входят в большие группы, а значит, не имеют ни одного одноклассника! Противоречие с условием задачи.

2. Если $k = 4$, то общее число школьников в больших группах не превышает 56. Следовательно, найдутся 4 школьника, которые не имеют ни одного одноклассника! Взяв этих четверых и добавив к ним по двое из всех четырёх больших групп, мы получим даже 12 школьников, среди которых не найдётся трёх одноклассников. Противоречие с условием задачи.

б) Не обязательно. Пример: четыре класса по 15 школьников.

8. Рассмотрим шесть улиц, выходящих из центра города в разных направлениях (то есть шесть отрезков с общим началом и без других общих точек). Пешеход может, выйдя из центра, пройти каждую улицу туда-обратно. Но, очевидно, пройти по каждой улице ровно один раз невозможно.

Можно привести пример и без тупиков: возьмём треугольник, отметим в нём точку и соединим её с вершинами. Попробуйте сами доказать, что пешеход не сможет обойти эти улицы, пройдя каждую по одному разу.

Подсказка (теорема Эйлера): Пусть пешеход смог обойти все улицы некоторого города, пройдя каждую ровно по одному разу. Тогда на каждом перекрёстке, кроме, быть может, того, с которого он начал, и того, на котором закончил, сходится чётное число улиц. Попробуйте доказать это сами!

7 КЛАСС

1. Пусть за год выпуск снижался на $x\,\%$. Приняв исходный объём выпуска продукции за 1, получим, что через год выпуск продукции составил $\dfrac{100-x}{100}$ от исходного, а через два года — $\left(\dfrac{100-x}{100}\right)^2$ от исходного. С другой стороны, по условию выпуск продукции снизился на $51\,\%$ и, значит, составил $\dfrac{49}{100}$ от исходного. Получаем, что $\left(\dfrac{100-x}{100}\right)^2=\dfrac{49}{100}$. Отсюда $\dfrac{100-x}{100}=\dfrac{7}{10}$, $x=30$.

2. Обозначим через p число подъездов в доме, через f — число этажей, а через k — число квартир на этаже. Тогда $p\cdot f\cdot k=105$. Но $105=3\cdot5\cdot7$, причём числа $3, 5, 7$ — простые. Учитывая, что по условию $p<k<f$, получаем $f=7$. Попробуйте теперь решить задачу 3 для 6 класса!

5. Проведём (за Ваню) сначала среднюю фишку (крайняя и так пройдёт!). Будем двигать её вперёд, не обращая внимания на ходы Серёжи. И она пройдёт, что можно доказать перебором (немного поиграв — это сделали многие участники олимпиады)!

Приведём красивое строгое доказательство, не использующее перебора. Назовём номер горизонтали, на которой фишка стоит (считая снизу), её высотой. Если Ванина фишка окажется между Сережиными, то её удвоенная высота $2h$ будет равна сумме высот Сережиных фишек (если они на одной горизонтали, то это совсем очевидно; проверьте, что это верно и в том случае, когда Ванину фишку «зажали» по диагонали).

Пусть это произошло после хода Серёжи. Значит, ребята сделали равное число ходов — по n, и сумма высот Сережиных фишек равна $n+2$, а высота Ваниной равна $6-n$. Получаем $n+2 = 12-2n$, то есть $12 = 3n+2$, что, очевидно, неверно, так как 12 делится на 3.

Теперь рассмотрим другой случай: Ванину фишку «зажали» после его хода. Значит, Ваня сделал на один ход больше — Серёжа сделал n ходов, а Ваня $n+1$. Тогда сумма высот Сережиных фишек равна $n+2$, а высота Ваниной равна $6-n-1$. Получаем $n+2 = 12-2n-2$. Или $12 = 3n+4$, что, очевидно, неверно.

6. Всего было $20 \cdot 5 = 100$ посещений кружка. Если каждый школьник посетил кружок не более четырёх раз, то всего школьников было не менее чем $100/4 = 25$. Пусть теперь хотя бы один школьник посетил кружок пять раз. Тогда на каждом из этих пяти занятий все остальные школьники разные. Их уже $5 \cdot 4 = 20$.

Второе решение (более длинное, но содержащее полезный метод). Из 5 школьников можно составить ровно 10 различных пар. Действительно, есть 5 вариантов выбрать первого школьника в пару и четыре варианта выбрать второго (школьник не может быть в паре сам с собой). Вроде бы 20 вариантов... Но при этом каждую пару мы посчитали два раза — один раз назвав «первым» одного из членов пары, а потом — другого! (Обязательно выпишите таким способом все пары из пяти школьников и заметьте это!) Теперь, так как никакие два школьника не были одновременно более чем на одном занятии, то получается, что из всех ходивших на кружок можно составить не менее, чем $10 \cdot 20 = 200$ различных пар. Предположим, что на кружке побывало девятнадцать школьников. Тогда из них можно составить $(19 \cdot 18)/2 = 171$ различных пар (обоснуйте это так же, как мы это сделали для 5 школьников). Но 171 меньше 200. Противоречие.

Примечание. Число различных (неупорядоченных) пар, которые можно составить из n школьников, равно $n(n-1)/2$. Попробуйте это доказать. А сколько можно составить упорядоченных пар (где один назван командиром)?

1993 год

5–6 классы

1. Разбив «следующее» высказывание на две равные части, мы видим, что первая половина совпадает с «предыдущим», а вторая получается из предыдущего «отражением в зеркале», то есть заменой букв А на буквы У и наоборот.

2. За один час работы быстрый землекоп выкапывает больше, а платят им одинаково. Значит, метр туннеля, выкопанный быстрым землекопом, обходится дешевле. В варианте до встречи на долю быстрого придётся половина туннеля и ещё часть, а в другом варианте — только половина. Значит, дешевле копать до встречи. Отметим, что ответ не зависит от того, во сколько именно раз отличаются скорости землекопов.

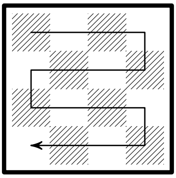
3. Внутренний центральный кубик граничит только с центральными кубиками граней. Поэтому, если все шесть отдельных маленьких кубиков поместить в центры граней большого, то внутренний центральный кубик станет «изолированным» и не сможет быть частью никакого уголка. А седьмого отдельного маленького у нас нет!

4. Докажем сначала, что если $a < b$, то наименьшее число с суммой цифр a будет меньше, чем наименьшее число с суммой цифр b. Пусть B — наименьшее число с суммой цифр b. Если уменьшить на 1 любую ненулевую цифру числа B, то сумма цифр уменьшится ровно на 1 и само число тоже уменьшится. Значит, после нескольких (а именно, $b - a$) таких операций мы получим число, меньшее B, с суммой цифр, в точности равной a. Значит, и наименьшее число с суммой цифр, равной a, будет меньше, чем B. Теперь мы легко можем решить задачу. Наименьшее число с суммой цифр, равной 2, — это 11. Наименьшее число с суммой цифр, равной 11, — это 29, а наименьшее число с суммой цифр 29 — это 2999.

5. По условию, крайний справа — это Шарик. В частности, он сидит правее Матроскина. После пересадки Шарика слева от Матроскина никого не оказалось. Значит, там никого и не было! То есть, крайний слева — это Матроскин. Рядом с ним, по условию, — дядя Фёдор. Ну а потом, на единственном оставшемся свободным месте — почтальон.

6. Заметим, что $AD = CD = 2$, $ED = DK = 1$. Поэтому два прямоугольных треугольника AED и CKD равны. А значит, равны и отрезки AE и CK. Равенство этих отрезков можно также легко заметить, если нарисовать чертёж на клетчатой бумаге — они будут диагоналями равных прямоугольников размера 2×1. Аналогично, $FB = DL$. Кроме того, $EF = KD$ как стороны квадрата. Поэтому $AE + EF + FB = CK + KD + DL$.

7. Заметим, что прямоугольник $m \times n$ можно обойти «змейкой», проходя каждую клетку по одному разу (см. рисунок для прямоугольника 4×4). Кроме того, «усложним» задачу, запретив Али-Бабе класть монету в клетку, где монета уже есть (то есть при ходе в клетку, где уже есть монета, он будет обязан её забрать). Заметим, что если Али-Баба будет следовать этому правилу, то ни в какой клетке не может оказаться две монеты!



Итак, пойдём по пещере (вместе с Али-Бабой) «змейкой» с мешком монет и будем стараться, чтобы в каждой клетке оказалось требуемое (правильное) количество монет. Сделав очередной ход, будем проверять, правильное ли количество монет на клетке, с которой мы только что ушли. Если правильное, то будем спокойно идти дальше. А если неправильное, то возможно только два варианта: 0 вместо 1 и 1 вместо 0 (ведь Али-Баба следует нашему дополнительному правилу!). Сделаем шаг назад и либо возьмём монету (если она там была), либо положим монету (если монеты там не было), а потом сделаем шаг вперёд. Теперь в клетке, с которой мы только что ушли, стало правильное количество монет, и можно спокойно идти дальше.

Так, клетка за клеткой, мы добьёмся того, что на всех клетках, кроме, может быть, самой последней — правильное количество монет. Если на последней клетке неправильное количество монет, то (сообразите сами — почему), пойдя назад, вперёд и назад, мы добьёмся, что на всех клетках будет правильное количество монет.

8. Заметим, что наличие толстяков одинакового веса только упрощает задачу. Действительно, с каждым толстяком можно поместить в команду всех толстяков того же веса. При этом условие задачи по-прежнему будет выполнено. Значит, можно считать, что все 100 толстяков разного веса.

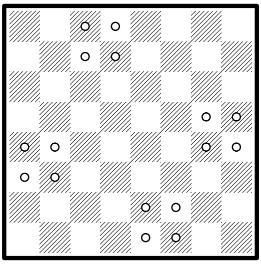
В частности, у каждого толстяка есть не более чем один товарищ, который вдвое легче него, и не более чем один, который вдвое тяжелее него.

Теперь заставим наших толстяков взяться за руки: каждый из них подаст левую руку тому, который вдвое тяжелее него (если такой есть), а правую — тому, который вдвое легче него (если такой есть).

Получится, что вся сотня разобьётся на непересекающиеся «цепочки». Причём в каждой цепочке самый правый — это самый лёгкий, а самый левый — это самый тяжёлый.

Раскрасим каждую цепочку в два цвета в шахматном порядке, начиная с самого лёгкого. Теперь сформируем две искомые команды по «цветному» признаку.

7 класс



1. См. рисунок.

2. а) Разложим левую часть на множители. Имеем: $(x-y)(x+y)=1993$. То есть и $x-y$, и $x+y$ являются делителями числа 1993. Учитывая, что число 1993 простое (то есть делится только на себя и на 1), получаем: либо $x-y=1$, $x+y=1993$, либо $x-y=1993$, $x+y=1$. Второй случай, очевидно, невозможен для натуральных x и y, а в первом случае находим $x=997$, $y=996$.

б) Разложим левую часть на множители. Имеем: $(x-y)(x^2+$ $+xy+y^2)=1993$. Учитывая, что число 1993 простое, получаем: либо $x-y=1$, $x^2+xy+y^2=1993$, либо $x-y=1993$, $x^2+xy+y^2=$ $=1$. Решений нет.

в) Разложим левую часть на множители. Имеем: $(x^2-y^2)(x^2+$ $+y^2)=1993$. Учитывая, что число 1993 простое, получаем: либо

$x^2 - y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 1993$, либо $x^2 - y^2 = 1993$, $x^2 + y^2 = 1$. Решений нет.

3. Будем упрощать уравнение «снаружи» скобок, а не изнутри:

$$1993 = 1 + 8 : (1 + 8 : (1 - 8 : (1 + 4 : (1 - 4 : (1 - 8 : x))))),$$
$$\frac{8}{1992} = 1 + 8 : (1 - 8 : (1 + 4 : (1 - 4 : (1 - 8 : x)))),$$
$$-\frac{249}{31} = 1 - 8 : (1 + 4 : (1 - 4 : (1 - 8 : x))),$$
$$\frac{31}{35} = 1 + 4 : (1 - 4 : (1 - 8 : x)),$$
$$-35 = 1 - 4 : (1 - 8 : x),$$
$$\frac{4}{36} = 1 - 8 : x,$$
$$x = 9.$$

4. Будем применять неравенство треугольника для исключения невозможных случаев. Если длина диагонали равна 7,5, то оставшиеся четыре числа можно разбить на две пары так, что сумма чисел в каждой из них больше 7,5. Но этого, очевидно, сделать нельзя. Аналогично, не подходит 5. Если длина диагонали равна 1, то оставшиеся четыре числа можно разбить на две пары так, что разность чисел в каждой из них меньше 1, но этого, очевидно, сделать нельзя. Аналогично, не подходит 2.

Остаётся единственный вариант — 2,8. Четырёхугольник по условию существует. Поэтому, доказывать, что 2,8 на самом деле подходит, не обязательно (хотя и полезно, чтобы проверить своё решение или даже найти ошибку в условии!)

5. Заметим, что если все расчёты проводить в твёрдой валюте — пустых бутылках, — то инфляции не будет. То есть бутылка с кефиром будет всё время стоить 7 пустых бутылок, а кефир в ней (без тары) — 6 пустых бутылок. Гулливер, имея вначале «денег» на 1 166 666 бутылок кефира (без тары) и ещё 4 пустых бутылки, сможет проводить свои коммерческие операции до тех пор, пока не останется с четырьмя пустыми бутылками, сдав которые, он уже не сможет снова купить кефир.

1992 год

5–6 классы

1. Три землекопа за 2 часа выкопали 3 ямы, значит, шесть землекопов за 2 часа выкопают в два раза больше, то есть 6 ям. А шесть землекопов за 5 часов ещё в два с половиной раза больше, то есть 15 ям.

2. За 5 крон дают два талера, значит, за одну крону дают $2/5$ талера. Аналогично, за один талер дают $10/3$ рупии, за одну рупию — $21/22$ динара, за один динар — $11/14$ тугрика. Получается, что за одну крону дают $2/5$ талера, или $(2/5)\cdot(10/3)$ рупии, или $(2/5)\cdot(10/3)\cdot(21/22)$ динара, или $(2/5)\cdot(10/3)\cdot(21/22)\cdot(11/14)$ тугрика. Вычислив, получаем, что

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{21}{22}\cdot\frac{11}{14}=1.$$

Значит, за одну крону дают один тугрик, а за 13 крон, соответственно, 13 тугриков.

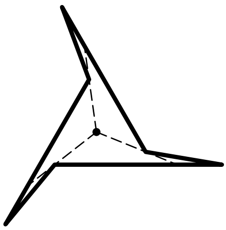
4. Заметим, что два встречных эскалатора образуют движущееся с постоянной скоростью кольцо (на котором можно кататься, как на карусели), относительно которого шапка неподвижна. Встанем около шапки и понаблюдаем за бегом ребят. При этом можно считать, что эскалаторы стоят! И мы увидим, как ребята одновременно побегут к нам из диаметрально противоположной точки кольца с равными скоростями, но каждый со своей стороны. Теперь очевидно, что ребята прибегут к шапке одновременно. Вопрос: найти пробел в доказательстве. Подсказка: внимательно понаблюдайте за происходящим в случае, когда скорости ребят очень-очень маленькие (почти нулевые).

7 класс

1. Три землекопа за 3 часа выкопали 3 ямы, значит, шесть землекопов за 3 часа выкопают в два раза больше, то есть 6 ям. А шесть землекопов за 5 часов ещё в $5/3$ раза больше, то есть 10 ям.

2. В январе надо было потратить 10 долларов на 600 шпунтиков и 15 долларов на 600 винтиков, то есть всего 25 долларов. В феврале же надо купить 24 набора из 25 винтиков и 25 шпунтиков. Значит, в январе сборка трактора стоит на 1 доллар дороже.

3. Под каждым двусторонним соглашением между республиками стоят две подписи руководителей каждой из них. Значит, общее число подписей под всеми соглашениями — чётное. С другой стороны, руководитель каждой из республик поставил подпись ровно под тремя соглашениями. А всего республик 15. Значит, всего подписей 45. Противоречие.



4. б) См. рисунок.

5. См. решение задачи 4 для 5–6 классов.

1991 год

5–6 КЛАССЫ

1. $1 + (2 + 3 + 4) \cdot (5 + 6) = 100$. Есть и другие решения (попробуйте найти ещё хотя бы одно).

2. Предположим, что мы не заменяли какие-то две лампочки. Тогда, если нам не повезло и одна из них — перегоревшая, то мы не сможем определить, какая именно. Значит, для того, чтобы заведомо определить перегоревшую лампочку, необходимо вывинтить хотя бы три из них (30 секунд) и завинтить на их место какие-то другие (ещё 30 секунд).

Покажем, что 60 секунд всегда хватит. Вывинтим первую лампочку и завинтим на её место запасную (прошло 20 секунд). Если гирлянда загорелась, то нам повезло и хватило даже 20 секунд. Если же гирлянда не загорелась, значит, единственная неисправная лампочка ещё в гирлянде, а у нас в руках опять исправная. Теперь вывинтим вторую и завинтим на её место бывшую первую (в сумме прошло 40 секунд). Если нам опять не повезло, то вывинчиваем третью лампочку, а на её место завинчиваем бывшую вторую (в сумме прошло 60 секунд). Если гирлянда всё ещё не горит, то, значит, неисправна последняя лампочка. Решение засчитывалось и тем школьникам, которые добавляли ещё 20 секунд на замену последней лампочки.

3. Любая прямая, проходящая через центр квадрата, делит его пополам. Поэтому надо провести разрез через центры обоих квадратов.

4. Сумма любого числа чётных чисел чётная, а нечётного числа нечётных — нечётная. Значит, исходная сумма денег (сумма какого-то числа 50-рублёвых и 100-рублёвых купюр) — чётная, а полученная сумма денег (сумма 1991 купюры по 1, 3, 5 или 25 рублей) — нечётная.

5. Легко заметить, что однозначных чисел, больших нуля, с требуемым свойством нет. Попробуем найти решение среди двузначных чисел. Если первая цифра двузначного числа равна a, а вторая равна b, то само число равно $10a + b$. Имеем $10a + b = 2(a + b)$. Отсюда $8a = b$, то есть $a = 1$, $b = 8$.

Можно показать, что других решений нет (идея: самое маленькое трёхзначное число — 100, а самая большая сумма трёх цифр $9 + 9 + 9 = 27$). Но это на олимпиаде не требовалось.

7 КЛАСС

1. См. решение задачи 1 для 5–6 классов.

2. См. решение задачи 4 для 5–6 классов.

4. Если бы они ответили одинаково, то Знайка никак не мог бы их различить. Значит, второй ответил: „нет“. Теперь, если бы Винтиком был первый, то получилось бы, что оба сказали правду. А это противоречит условию. Значит, Винтик — второй, и они оба солгали (что условием не запрещено).

5. а) Закон можно угадать, заметив, например, что пока число однозначное, оно удваивается, а потом — вроде нет. А то, что 10 переходит в 2, наводит на мысль, что удваивается не само число, а сумма его цифр. Итак, искомый закон обнаружен: «Удвоенная сумма цифр».

Конечно, это не доказательство в строгом математическом смысле этого слова. Например, так можно «доказать», что число шестьдесят делится на все числа. Действительно, 60 делится на 1, на 2, на 3, на 4, на 5, на 6... Однако для решения задачи требуется только найти «достаточно простое» правило, следуя которому можно получить такую последовательность. А умение увидеть, почувствовать закономерность (что требовалось в данной задаче) не менее важно для математика, чем умение строго рассуждать! Если вы найдёте какой-нибудь другой (но тоже «достаточно простой») закон, дающий две последовательности 2, 4, 8, 16, 14, 10, 2 и 3, 6, 12, напишите, пожалуйста, нам (а на олимпиаде такое решение тоже было бы засчитано!).

б) См. решение задачи 5 для 5–6 классов.

в) Заметим, что если число не меньше, чем трёхзначное, то его сумма цифр меньше самого числа. Значит, число будет уменьшаться, пока не станет двузначным или однозначным. Остаётся единственная опасность: попасть в «неподвижную точку» — 18. Но это в нашем случае невозможно, так как исходное число не делилось на 9 (докажите строго следующее свойство нашего закона получения одних чисел из других: если некоторое число делится на 9, то и число, из которого оно получено, тоже делится на 9).

1990 год

5 КЛАСС

1. Общее число депутатов в обеих палатах чётное. Так как в голосовании приняли участие все депутаты и не было воздержавшихся, то сумма голосов «за» и «против» равна общему числу депутатов и поэтому чётная. Значит, и разность голосов «за» и «против» тоже должна быть чётной, ведь она отличается от суммы на удвоенное число голосов «против» ($a + b = a - b + 2b$). Но число 23 нечётно. Противоречие.

2. Не обязательно. Возьмём треугольник со сторонами 8 см, 12 см и 18 см и увеличим его в полтора раза. Получится треугольник с такими же углами, а стороны у него будут равны 12 см, 18 см и 27 см. (Возможны и другие примеры неравных треугольников, удовлетворяющих условиям задачи.)

Утверждение о том, что если у двух треугольников пропорциональны стороны, то их углы равны, строго доказать не так просто. Для этого нужно знать преобразование подобия. На олимпиаде достаточно было сослаться на этот факт как на интуитивно очевидный.

3. Задача состоит из двух частей: доказать, что за 25 минут управиться можно, и доказать, что быстрее выполнить работу нельзя. Начнём со второй части.

Всего у 60 лошадей 240 копыт. Если бы всю работу делал один кузнец, то ему бы потребовалось $240 \times 5 = 1200$ минут. Значит, 48 кузнецов никак не смогут выполнить всю работу быстрее, чем за $1200 : 48 = 25$ минут.

Покажем теперь, как можно подковать всех лошадей за 25 минут. Разобьём кузнецов на 12 бригад по 4 кузнеца в каждой и выделим каждой бригаде по 5 лошадей. Каждая бригада сможет подковать «своих» лошадей за 25 минут следующим образом. Организуем конвейер, назначив каждого кузнеца «ответственным» за определённую ногу лошади.

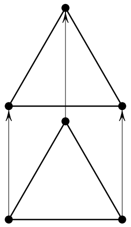
Первые пять минут первый кузнец подковывает переднюю правую ногу первой лошади, второй — переднюю левую второй лошади, третий — заднюю правую третьей, четвёртый — заднюю левую четвёртой, а пятая лошадь отдыхает.

Затем сдвигаем лошадей «по кругу». Вторые пять минут первый кузнец подковывает переднюю правую ногу пятой лошади, второй — переднюю левую первой лошади, третий — заднюю правую второй, четвёртый — заднюю левую третьей, а четвёртая лошадь отдыхает.

Третьи пять минут первый кузнец подковывает переднюю правую ногу четвёртой лошади, второй — переднюю левую пятой лошади, третий — заднюю правую первой, четвёртый — заднюю левую второй, а третья лошадь отдыхает.

Продолжив работу по этой схеме, каждая бригада подкуёт «своих» лошадей за 25 минут, а, значит, 48 кузнецов подкуют 60 лошадей за 25 минут.

5. Нарисуем равносторонний треугольник со стороной 1 и сдвинем его «вверх» (или в любую другую сторону, только не под углом 60° к стороне) на 1 (см. рисунок). Вершины этих двух треугольников мы и отмечаем: они удовлетворяют условию задачи.



Догадаться до этого решения можно так. Сделаем из проволоки два равносторонних треугольника со стороной 1. Расположим их в пространстве один над другим на расстоянии 1 и соединим соответствующие вершины проволокой (получается так называемая треугольная призма). Теперь «аккуратно положим» этот проволочный каркас на плоскость.

6–7 КЛАССЫ

3. Раскрасим в белый и чёрный цвет в шахматном порядке маленькие кубики $1 \times 1 \times 1$, из которых состоят куб и кирпичи. В 13 кирпичах поровну (по 13) чёрных и белых кубиков, а в кубе $3 \times 3 \times 3$ без центра одних — 12, а других — 14.

4. «Просеем» все числа от 1 до 200 через «решето Эратосфена». Для этого зачеркнём сначала все числа, делящиеся на 2, потом — делящиеся на 3 (на 4 не надо! Почему?), потом — делящиеся на 5 и т. д. Останутся незачеркнутыми только простые числа (объясните, почему!). Такой метод выписывания всех простых чисел и называется решетом Эратосфена.

Теперь найти нужные последовательности не так уж и сложно.

Поиск упростится, если заметить следующую закономерность. Пусть есть три простых числа с одинаковой разностью между ними, тогда эта разность — чётная (почему?). Если таких простых чисел четыре, то разность делится ещё и на 3, а значит, уже и на 6. (Подсказка: посмотрите на остатки от деления на 3). А если таких простых чисел шесть, то разность делится ещё и на 5! Доказать строго это не очень просто. Но нам не нужно в данной задаче это доказывать — а интуитивное ощущение, что такой факт верен, может очень ускорить поиск.

5. Обозначим через x число людей, являющихся математиками и философами одновременно. Тогда число математиков равно $7x$, а число философов — $9x$.

Если $x \neq 0$, то философов больше. А что значит, что $x = 0$? Это значит, что ни тех, ни других нет вообще, то есть их «поровну». Это правильный ответ, формально удовлетворяющий условию задачи. И те, кто его указал, вдвойне молодцы! Хотя решение засчитывалось и тем, кто разобрал только случай, когда математики всё-таки есть.

6. Если маленький квадрат сдвинуть (без вращения) так, чтобы его центр совпал с центром большого квадрата, то середины всех четырёх отрезков AK, BM, CX и DY сдвинутся (одинаково!) на половину длины сдвига маленького квадрата. Поэтому, если они стали вершинами некоторого квадрата, то и до сдвига они были вершинами некоторого квадрата. Осталось заметить, что если центры квадратов совпадают, то вся «картинка» переходит в себя при поворотах на $90°$, $180°$ и $270°$.

Тематический указатель

Оглавление