МОСКОВСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РЕГАТЫ

Составители А. Д. Блинков,
Е. С. Горская, В. М. Гуровиц

Москва
Издательство МЦНМО
2007

УДК 51
ББК 22.1
М82

Московские математические регаты / Сост. А. Д. Блинков,
М82 Е. С. Горская, В. М. Гуровиц. — М.: МЦНМО, 2007. — 360 с.
ISBN 978-5-94057-269-5

Математическая регата — соревнование для школьных команд, проводящееся ежегодно. В данном сборнике представлены материалы всех московских математических регат по 2005/06 учебный год. Приведены также правила проведения регаты, описана технология ее проведения и особенности подготовки. В приложение включены материалы школьных математических регат и регат, проведенных на всероссийских фестивалях.

Книжка адресована учителям средней школы, методистам, школьникам и может быть интересна всем любителям математики.

ББК 22.1

ISBN 978-5-94057-269-5

Оглавление

Предисловие

Математические регаты — сравнительно новая форма математических соревнований школьников. Тем не менее, со дня проведения первой Московской регаты прошло уже более десяти лет. За это время многократно совершенствовались правила, менялись места проведения регат, но самое главное — неизмеримо выросла их популярность.

Впервые межшкольные соревнования с таким названием были проведены на конференции старшеклассников в Московском энергофизическом лицее. В дальнейшем эту идею использовали преподаватели математики лицея №1511 МИФИ для проведения школьных командных математических соревнований. Правила проведения регаты были существенно изменены, в частности, вместо проверки ответов (в устной форме) стали проверяться решения задач, которые предъявлялись в письменном виде. Это, естественным образом, повлияло и на содержание заданий.

Так как на тот момент в Москве практически отсутствовали массовые командные математические соревнования для старшеклассников, то возможность их проведения в увлекательной и динамичной форме, напоминающей соревнования гребцов или яхтсменов, заинтересовала учителей математики еще нескольких школ. Особая привлекательность математических регат состоит в том, что они имеют ярко выраженную учебную направленность, так как решение школьниками задач, разбор различных способов их решений, апелляции, подведение итогов и награждение призеров — все это происходит в один день, в течение 2,5 – 3,5 часов. Можно провести следующую аналогию: математические регаты соотносятся с традиционными, «большими» математическими олимпиадами, как «быстрые» шахматы с классическими!

Весной 1996 года была проведена первая Московская межшкольная математическая регата для учащихся десятых классов, в которой участвовало восемь команд из четырех школ: №109, №218, №1511 и №1514. Наиболее существенный вклад в подготовку и проведение этой и нескольких последующих регат внесли учителя математики: А.Д. Блинков, А.А. Бучин, А.З. Гурвиц, П.В. Чулков, И.В. Ширстова. Школьникам и учителям, участвовавшим в первой регате, соревнования понравились, и в дальнейшем решено было сделать их традиционными. Для проведения последующих регат правила соревнований были еще раз переработаны, в частности, с учетом мнения большинства участников, начиная со второй регаты, было решено отказаться от системы возможного выбывания команд после классификационного и утешительного туров.

Начиная с 1998/99 учебного года, математические регаты стали составной частью Турниров Архимеда. С последующего учебного года и по настоящий момент в Москве стало ежегодно проводиться, по меньшей мере, пять регат (по одной для каждой параллели с 7 по 11 класс). Информация о сроках их проведения начала регулярно публиковаться в ежегодном календаре олимпиад для школьников г. Москвы, в приложении «Математика» к газете «Первое сентября» и на сервере Московского центра непрерывного математического образования (`http://www.olimpiada.ru`). Там же публиковались материалы прошедших регат и их полные результаты. В 2001 году в издательстве МЦНМО вышло первое издание книги, посвященной математическим регатам.

Первые регаты принимал на своей территории лицей №1511. В последующие несколько лет различные регаты проходили также в московских школах №5, №7, №109, №152, №218, №235, №1189, гимназиях №1514 и №1543. Организаторы регат благодарны директорам и педагогам этих образовательных учреждений.

Важной особенностью проведения регат (как и всех математических соревнований Турнира Архимеда) является их открытость как для школьников — для участия достаточно лишь вовремя подать заявку, так и для их преподавателей математики — любой из учителей имеет право участвовать как в подборе задач, так и в работе жюри. Поэтому, количество школ, принимавших участие в регатах, ежегодно росло. Помимо московских команд, которых становилось все больше, для участия в регатах начали заявляться команды из Подмосковья. Такой рост популярности регат привел к тому, что ни один актовый зал школы уже не мог вместить всех желающих. На помощь пришла администрация Московского городского дворца детского (юношеского) творчества (директор — Д.Л. Монахов, зам. директора филиала — Г.В. Кондаков). Осенью 2001 года одна из регат впервые прошла в стенах Дворца, а впоследствии там стали проводится все московские математические регаты.

Одновременно с этим проведение регат получило финансовую поддержку Департамента Образования г. Москвы, а также организационную и техническую поддержку Московского центра непрерывного математического образования (исполнительный директор — И.В. Ященко). Кроме того, начиная с 1999 года, МЦНМО предоставлял и математическую литературу для награждения призеров регат.

Первые математические регаты готовились и проводились исключительно силами энтузиастов — учителей математики. Впоследствии в число организаторов регат и членов жюри вошли также сотрудники МЦНМО, МГДД(Ю)Т, ДНТТМа (дома научно-технического творчества молодежи), студенты МГУ и НМУ.

Помимо уже названных, большой вклад в подготовку и проведение математических регат различных лет внесли: А.В. Алферов, В.Д. Арнольд, Т.А. Баранова, Ю.А. Блинков, А.А. Волкова, Е.Б. Гладкова, Е.С. Горская, О.Р. Горская, В.М. Гуровиц, С.Е. Дубов, А.В. Иванищук, К.П. Кочетков, Н.А. Кулакова, О.Н. Кривошеева, Д.А. Мусатов, А.Г. Мякишев, Н.М. Нетрусова, Е.И. Нечаева, А.В. Семенов, А.В. Спивак, А.С. Тен, Б.Р. Френкин, Е.Ф. Шершнев.

Активно работали в жюри: А.В. Акопян, Е.П. Андреева, Ф.Б. Баранова, А.И. Балабанов, Е.Я. Барский, А.Л. Беленькая, М.А. Берштейн, С.С. Бирюкова, В.В. Вакулюк, С.И. Васянин, И.Н. Ващенко, Д.Н. Вельтищев, М.Н. Вельтищев, М.А. Волчкевич, Л.Н. Головко, О.Е. Данченко, А.А. Заславский, Г.А. Захарова, В.Ф. Зелицкая, А.Б. Зубов, Д.А. Калинин, А.Я. Канель-Белов, Т.В. Караваева, А.Н. Карпов, М.В. Козлов, Г.А. Колюцкий, А.Г. Королева, Ю.Г. Кудряшов, Р.М. Кузнец, Л.В. Курахтенков, К.Г. Куюмжиян, С.И. Липкин, Э.Х. Липкина, Ю.А. Маганова, Ю.К. Майоров, А.В. Максимов, А.А. Марачев, М.А. Мартиросян, И.А. Николаева, Е.А. Новодворская, А.С. Обрубов, А.Ф. Пенкин, А.В. Подобедов, Ю.О. Пукас, Ф.А. Пчелинцев, Т.Г. Рачкова, Ю.А. Светова, Т.С. Струков, В.В. Трушков, Л.Е. Федулкин, Т.Н. Харютина, А.В. Хачатурян, Б.И. Цорин, А.С. Чеботарев, Е.А. Чернышева, М.Д. Шангареев, Е.А. Шапарин, Н.В. Якунина и многие другие.

В настоящий момент в каждой московской регате участвует от 50 до 80 команд. За прошедшие десять лет участниками этих регат становились представители более ста образовательных учреждений города, четырнадцати городов Московской области, а также гости из Санкт-Петербурга, Витебска, Костромы, Переславля, Смоленска. Кроме того, ряд школ (в том числе, выездных) и математических кружков используют форму математической регаты в своей учебной деятельности. Математические регаты становятся частью некоторых всероссийских соревнований, в частности, они неоднократно проводились на летнем фестивале «Математика 6–9» имени А.П. Савина и на турнире российских регионов по математике (см. приложения).

В настоящее издание включены материалы всех московских математических регат по 2005/06 учебный год. Представлены также правила проведения регаты, описана технология ее проведения и особенности подготовки. В приложение включены материалы школьных математических регат и регат, проведенных на всероссийских фестивалях. Отдельно представлены библиография публикаций, посвященных регатам, и список литературы, использованной при подготовке регат. При подготовке книги к печати, помимо материалов организаторов регат, были использованы отдельные особо удачные решения школьников.

Составители сборника выражают особую благодарность О.Р. Горской, А.В. Иванищуку, А.Г. Мякишеву, Б.Р. Френкину и П.В Чулкову, представившим решения некоторых задач, и Ю.А. Блинкову, сделавшему много ценных замечаний по текстам.

Правила математической регаты и технология ее проведения

1. В математической регате участвуют *команды учащихся одной параллели.* В составе каждой команды — 4 человека. Участие неполных команд согласовывается с организаторами перед началом регаты. Если школа (город, кружок) представлены на регате несколькими командами, то к названию команды добавляется буквенный индекс. В виде исключения допускается участие сборных команд, название которых сообщается организаторам заранее, и команд, составленных из школьников более младшей параллели.

2. Соревнование проводится в *четыре тура* (для учащихся 7–8 классов) или в *пять туров* (для учащихся 9–11 классов). Каждый тур представляет собой коллективное письменное решение *трех* задач. Любая задача оформляется и сдается в жюри на отдельном листе. Эти *листы раздаются* командам перед началом каждого тура. На каждом таком листе указаны: номер тура, «ценность» задач этого тура в баллах, время, отведенное командам для решения, *двойной индекс задачи и ее условие.* Получив листы с заданиями, команда вписывает на каждый из листов *свое название*, а затем приступает к решению задач. Каждая команда имеет право сдать *только по одному* варианту решения каждой из задач, *не подписанные работы — не проверяются.* Использование какой-либо математической литературы или калькуляторов *запрещено.* Мобильные телефоны должны быть *отключены.*

3. Проведением регаты руководит *группа координаторов.* Представители этой группы организуют раздачу заданий и сбор листов с решениями; отвечают на вопросы по условиям задач; проводят разбор задач и демонстрируют итоги проверки.

4. *Проверка решений* осуществляется жюри после окончания каждого тура. Жюри состоит из трех комиссий, специализирующихся на проверке задач №1, №2 и №3 каждого тура. *Критерии проверки* каждая комиссия вырабатывает самостоятельно. В каждой комиссии выделяется *ответственный член жюри*, организующий работу этой комиссии. Он полномочен принимать окончательные решения в спорных ситуациях.

5. *Разбор задач* для учащихся осуществляется параллельно с проверкой. Итоги проверки объявляются только после окончания этого разбора. После объявления итогов тура, команды, не согласные с тем, как оценены их решения, имеют право подать заявки на апелляции. В случае получения такой заявки, комиссия проверявшая решение, осуществляет повторную проверку, после которой может изменить свою

оценку. Если оценка не изменена, то сам процесс апелляции эта же комиссия осуществляет после окончания всех туров регаты, но до окончательного подведения итогов. *В результате любой апелляции оценка решения может быть как повышена, так и понижена*, или же *оставлена без изменения.* В спорных случаях окончательное решение об итогах проверки принимает председатель жюри.

6. Команды — *победители и призеры регаты* определяются по сумме баллов, набранных каждой командой во всех турах. Награждение победителей и призеров происходит сразу после подведения итогов регаты.

Приведенные правила дают основное представление о том, как проходит регата. Имеет смысл добавить, что все команды и члены жюри находятся в одном помещении. В первые годы это был актовый зал школы, впоследствии — один из больших залов городского Дворца. Столы в этом помещении расставляются так, чтобы каждая команда сидела за отдельным столом, и учащиеся могли вести обсуждение, не мешая другим командам. Рассадка команд производится в соответствии с заранее заготовленными и расставленными на столах табличками с названиями команд, причем столы команд из одной школы не располагаются рядом. Члены жюри размещаются компактно (на некотором расстоянии от столов школьников), но для работы каждой из трех комиссий выделяются отдельные места. Для разбора решений задач для демонстрации итогов проверки вначале использовались две классные доски. Впоследствии они были заменены ноутбуками, мультимедиа проекторами и экранами на штативах.

Жюри состоит большей частью из преподавателей участвующих школ и студентов математических факультетов вузов. В каждую комиссию жюри могут входить от 5 до 15 человек, в зависимости от количества участников регаты. Возглавляет комиссию, как правило, один из тех организаторов, кто готовил тексты решений. Председателем жюри является один авторитетных членов жюри, по предварительной договоренности.

Численность группы координаторов колеблется от 6 до 12 человек (также в зависимости от количества участников регаты). Часть из них выполняет роль «ласточек», то есть раздает задания, собирает решения, следит за порядком. Три человека сидят за компьютерами. Из них двое отвечают за синхронную демонстрацию решений на двух экранах, а еще один — ведет электронный протокол регаты.

Обязанности основного ведущего регаты берет на себя один из организаторов, принимавших активное участие в подготовке задач. Наиболее ответственная часть его работы — подробный разбор решений задач для школьников (в некоторых случаях разбирается несколько возможных способов решения), который проводится после каждого тура и занимает от 10 до 20 минут. Этого времени обычно хватает комиссиям жюри, чтобы завершить проверку работ и внести результаты в отдельные протоколы. По мере завершения проверки, результаты команд по каждой из задач тура переносятся в электронный протокол и после окончания разбора задач демонстрируются командам. После появления на доске результатов проверки, команды, не согласные с оценкой их работы, могут заявить об этом поднятием табличек с названием (по команде ведущего). Эти апелляции первоначально рассматриваются комиссиями жюри без участия школьников, поскольку те в это время уже решают задачи следующего тура. Иногда какие-то из оценок изменяются на этом этапе, чаще — этого не происходит, но за командами остается право на личную апелляцию, которую по каждой из задач может осуществлять только один из представителей команды.

Для облегчения работы ведущего и членов жюри полные тексты решений всех задач готовятся заранее. Каждая комиссия жюри получает несколько экземпляров решений «своих» задач непосредственно перед началом первого тура регаты и имеет возможность обсудить предварительные критерии проверки. Полные тексты решений находятся только у ведущего (в распечатанном виде) и у ответственных за разбор задач (в виде компьютерной демонстрации).

Один из ответственных за разбор выполняет также роль второго ведущего. В его обязанности входит, в частности, фиксация времени, отведенного на каждый тур. Один из ведущих объявляет о начале и окончании каждого тура, а также предупреждает команды за две–три минуты до окончания тура (в течение тура часы демонстрируются на экранах). Ведущие также отвечают на вопросы учащихся по условию задач и взаимодействуют с жюри (по мере необходимости).

После того, как закончены все апелляции и внесены все изменения в протокол, происходит процедура награждения команд — победителей и призеров. По сложившейся традиции команды-призеры награждаются дипломами турнира Архимеда. Кроме того, члены каждой команды (в порядке занятых мест) подходят к этажерке с математической литературой и каждый школьник выбирает себе приз.

Количество награждаемых команд зависит прежде всего от успешности решения задач и составляет, как правило, 20–25 процентов от количества команд-участниц.

Подготовка регаты

Проведение регаты требует большой предварительной подготовки, как организационной, так и содержательной. Опишем систему подготовки, сложившуюся к настоящему моменту.

Регистрация заявок на регату осуществляется по телефону или электронной почте. Как правило регистрация начинается за месяц и заканчивается за неделю до даты проведения регаты. Система предварительных заявок связана с тем, что как помещение для регаты, так и материалы должны быть подготовлены заранее. Количество команд от одного учебного заведения обычно не ограничивается, но школам, впервые участвующим в регате, как правило рекомендуется выставить одну или две команды.

Обсуждение задач для конкретной регаты происходит в один из вечеров, примерно за месяц до даты ее проведения. Заседание является открытым, причем представители школ, традиционно участвующих в регатах, оповещаются об этом персонально. На это обсуждение каждый из заинтересованных учителей приезжает со списком задач, которые он хотел бы предложить. Кроме того существует постоянно пополняемый «банк задач», куда включены задачи, предлагавшиеся, но не использованные ранее. Так как организаторы регат преследуют, прежде всего, учебные цели, то отсутствует стремление использовать исключительно «оригинальные» задачи: главное, чтобы участвующие школьники были не знакомы с ними. Поэтому, задача отклоняется, если кто-то из присутствующих преподавателей говорит, что его ученики могут быть с ней знакомы. Также отклоняются и те задачи, решение которых требует знаний выходящих за пределы программы данного класса (при этом, организаторы стараются учитывать имеющееся многообразие программ и учебников). В остальном, действует демократический механизм принятия решения о включении той или иной задачи. Принципиально важным является обсуждение условия каждой задачи вместе с ее предполагаемыми решениями, поскольку список задач (за редким исключением) должен быть утвержден в этот же день. Дальнейшая подготовительная деятельность осуществляется по электронной почте. На этой же встрече преподавателей решается и ряд организационных вопросов.

Исходя из опыта проведения регат, сформулируем основные принципы составления комплекта задач для каждой регаты:

- В каждом туре учащимся предлагается решить три задачи, относящиеся к различным разделам математики. Как правило, первая задача относится к алгебре или основам математического анализа, вторая — геометрическая, третья — логическая, комбинаторная или «числовая». Тематика задач должна максимально соответствовать возрасту участвующих школьников.

- Для таких соревнований пригодны только задачи, решение которых может быть изложено сравнительно кратко.
- Задачи каждого тура должны иметь различную тематику, но примерно одинаковый уровень сложности.
- Задания разных туров, имеющие одинаковый порядковый номер, как правило, относятся к одному разделу математики.
- Сложность заданий и время, выделяемое на их выполнение, увеличиваются от тура к туру[1].
- Распределение баллов по турам должно быть таким, чтобы «стоимость» задач последнего тура относилась к «стоимости» задач первого, как 3 : 2.
- Задания первого тура должны быть сравнительно простыми, чтобы они были решены большинством команд.

После того, как утвержден список задач, преподаватели договариваются о распределении работы по подготовке решений. Черновые варианты решений готовят, как правило, три человека, специализируясь на задачах №1, №2 и №3 соответственно. (Они же обычно впоследствии возглавляют соответствующие комиссии жюри). Решения всех задач (в компьютерном виде) должны быть готовы не позднее, чем за две недели до проведения регаты. Последующую редакцию текстов условий и решений непосредственно осуществляют два–три человека, один из которых впоследствии становится ведущим регаты. Подготовленный ими текст обсуждается по электронной почте, и после этого, задачи окончательно распределяются по турам и не позднее, чем за неделю должны быть готовы окончательные тексты.

Такие сроки связаны с тем, что необходимо еще подготовить компьютерную демонстрацию решений. Кроме того, в последние несколько

[1] В 2005/06 учебном году в регатах 9 – 11 классов было решено «поменять местами» IV и V туры.

лет сложилась еще одна традиция регат, отражающая их учебную направленность. По окончании каждой регаты все ее участники и их учителя получают небольшую брошюру с текстами задач и решений только что состоявшейся регаты. Эти специальные выпуски регулярно готовятся коллективом редакции «Архимед» под руководством П.В. Чулкова (издание Института Логики, Когнитологии и Развития Личности). На издание этих брошюр также требуется время.

Таким образом, комплект распечатанных материалов для проведения регаты включает в себя:

- листы с заданиями для школьников, разложенные «по турам» и размноженные в соответствии с количеством участвующих команд (для удобства сбора листов и проверки каждому номеру задачи соответствует свой цвет листа);
- тексты условий и подробных решений задач, сгруппированных по нумерации, для работы жюри (два–три экземпляра для каждой из комиссий);
- полные тексты условий и решений задач для работы ведущего;
- три протокола — по одному для каждой из комиссий жюри;
- таблички с названиями участвующих команд;
- правила проведения регаты (размноженные в соответствии с количеством команд-участниц).

Подготовку помещения для проведения регаты, изготовление табличек и размножение материалов берут на себя представители группы координаторов регаты.

Условия задач

7 класс

1998/1999 учебный год

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

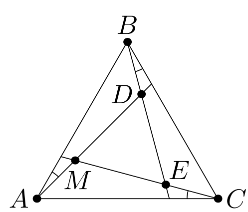
1.1. Биссектриса угла ABC образует с его стороной угол, который равен углу, смежному с углом ABC. Найдите градусную меру угла ABC.

1.2. Среди уравнений, приведенных в пунктах а) – е), укажите уравнения, задающие параллельные прямые: а) $y = 3x - 5$; б) $2y = x + 6$; в) $y = -0{,}7x$; г) $y = \dfrac{6+x}{2}$; д) $y = \dfrac{x}{3}$; е) $y = \dfrac{4-7x}{10}$.

1.3. Вычислите сумму: $1 + 4 + 7 + \ldots + 97 + 100$.

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Треугольник ABC — равносторонний. Лучи AD, BE и CM попарно пересекаются внутри треугольника, причем $\angle BAD = \angle CBE = \angle ACM$ (см. рисунок). Являются ли точки D, E и M вершинами равностороннего треугольника? Ответ обоснуйте.



2.2. Постройте график функции $y = \dfrac{x-5}{x-5}$.

2.3. К числу 43 справа и слева припишите по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 45.

Третий тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

3.1. Из пункта A в пункт F ведет прямолинейная дорога длиной 35 км. Остановки автобуса расположены в точках B, C, D, E. Известно, что $AC = 12$ км, $BD = 11$ км, $CE = 12$ км, $DF = 16$ км. Найдите расстояния: AB, BC, CD, DE и EF.

3.2. На координатной плоскости построены пять прямых, каждая из которых является графиком прямой пропорциональности. Эти прямые проходят через точки: $A(-3; 7{,}5)$; $B(2; -2)$; $C(3,2; -6,4)$; $D(-2; -3)$; $E(5; 8)$. Задайте каждую из функций формулой.

3.3. Делится ли число $\underbrace{66\ldots6}_{1998\ \text{цифр}}$ на 9? Ответ обоснуйте.

Четвертый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

4.1. Верны ли следующие утверждения?

а) Если луч OA образует со сторонами угла BOC равные углы, то он является биссектрисой угла BOC.

б) Если два угла имеют общую вершину и их биссектрисы являются дополнительными лучами, то эти углы — вертикальные.

в) Если биссектрисы двух равных углов лежат на одной прямой, то эти углы — вертикальные.

Ответы обоснуйте.

4.2. Средний возраст одиннадцати футболистов — 22 года. Во время игры один из игроков получил травму и ушел с поля. Средний возраст оставшихся игроков стал 21 год. Сколько лет футболисту, ушедшему с поля?

4.3. Дано: $m = 44\ldots4$; $n = 33\ldots3$.

а) Можно ли подобрать такие m и n, чтобы число n было делителем числа m?

б) Можно ли подобрать такие m и n, чтобы число m было делителем числа n?

Ответы обоснуйте.

1999/2000 учебный год

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Решите уравнение:

$$1 - (2 - (3 - (\ldots(1998 - (1999 - (2000 - x)))\ldots))) = 1000.$$

1.2. Даны два равнобедренных треугольника, в каждом из которых есть сторона, длина которой 6 см, и угол, градусная мера которого 100°. Можно ли утверждать, что эти треугольники равны? Ответ обоснуйте.

1.3. Представьте число 2001 в виде дроби, числителем которой является девятая степень какого-то целого числа, а знаменателем — десятая степень какого-то целого числа.

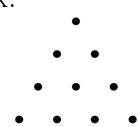
Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Вместо знаков $*$ вставьте такие числа, чтобы равенство

$$(x^2 + * \cdot x + 2) \cdot (x + 3) = (x + *) \cdot (x^2 + * \cdot x + 6)$$

стало тождеством.

2.2. Даны десять точек, расположенные в виде «равностороннего треугольника» (см. рисунок). Зачеркните некоторые из данных точек так, чтобы нельзя было построить ни одного равностороннего треугольника с вершинами в оставшихся точках. Постарайтесь зачеркнуть наименьшее количество точек.



2.3. Найдите значение выражения:

$$\frac{8 + 222 \cdot 444 \cdot 888 + 444 \cdot 888 \cdot 1776}{2 \cdot 4 \cdot 8 + 444 \cdot 888 \cdot 1776 + 888 \cdot 1776 \cdot 3552}$$

Третий тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

3.1. Докажите, что если число b является средним арифметическим чисел a и c, причем $a > c$, то выражение $ab + bc - ac - b^2$ принимает только положительные значения.

3.2. В остроугольном треугольнике ABC проведены медиана BM и высота CH. Найдите длину AC, если $MH = 10$ см.

3.3. «Во время игры в шахматы у меня осталось фигур в три раза меньше, чем у соперника, и в шесть раз меньше, чем свободных клеток на доске, но все равно я выиграл эту партию!» — сказал Винтик Шпунтику. «А у меня, в одной из партий, фигур осталось в пять раз меньше, чем у соперника, и в десять раз меньше, чем свободных клеток на доске, и все-таки я сумел победить!» — в свою очередь рассказал Шпунтик. Чьему рассказу можно верить и почему?

Четвертый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

4.1. В автобусе имеются одноместные и двухместные сидения. Кондуктор заметил, что когда в автобусе сидело 13 человек, то 9 сидений были полностью свободными, а когда сидело 10 человек, то свободными были 6 сидений. Сколько сидений в автобусе?

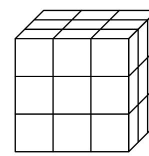
4.2. Какое наименьшее количество плоских разрезов необходимо сделать, чтобы разрезать куб на 64 маленьких кубика? После каждого разреза разрешается перекладывать образовавшиеся части в любое место.

4.3. Джон и Мэри живут в небоскребе, на каждом этаже которого 10 квартир. Номер этажа Джона равен номеру квартиры Мэри, а сумма номеров их квартир равна 239. В какой квартире живет Джон?

2000/2001 учебный год

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. При каких значениях m уравнения $mx - 1000 = 1001$ и $1001x = m - 1000x$ имеют общий корень?



1.2. Куб сложен из 27 одинаковых кубиков (см. рисунок). Сравните площадь поверхности этого куба и площадь поверхности фигуры, которая получится, если из него вынуть все «угловые» кубики.

1.3. Назовем натуральное число «замечательным», если оно самое маленькое среди натуральных чисел с такой же, как у него, суммой цифр. Чему равна сумма цифр две тысячи первого замечательного числа?

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Докажите, что $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{98} - \frac{1}{99} + \frac{1}{100} > \frac{1}{5}$.

2.2. Через вершины A и C треугольника ABC проведены прямые, перпендикулярные биссектрисе угла ABC. Они пересекают прямые CB и BA в точках K и M соответственно. Найдите длину AB, если $BM = 8$ см, $KC = 1$ см и $AB > BC$.

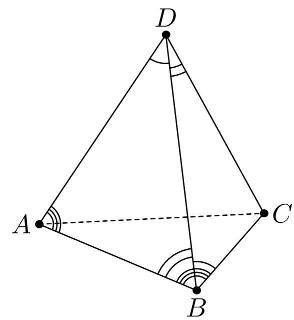
2.3. В клетках шахматной доски записаны в произвольном порядке натуральные числа от 1 до 64 (в каждой клетке записано ровно одно число и каждое число записано ровно один раз). Может ли в ходе шахматной партии сложиться ситуация, когда сумма чисел, написанных в клетках, занятых фигурами, ровно вдвое меньше суммы чисел, записанных в клетках, свободных от фигур?

Третий тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

3.1. Вася задумал три различные цифры, отличные от нуля. Петя записал все возможные двузначные числа, в десятичной записи которых использовались только эти цифры. Сумма записанных чисел равна 231. Найдите цифры, задуманные Васей.

3.2. Дана пирамида $ABCD$ (см. рисунок). Известно, что $\angle ADB =$

$= \angle DBC$; $\angle ABD = \angle BDC$; $\angle BAD = \angle ABC$. Найдите площадь поверхности пирамиды (сумму площадей четырех треугольников), если площадь треугольника ABC равна 10 см^2.



3.3. На острове проживают 1234 жителя, каждый из которых либо рыцарь (который всегда говорит правду) либо лжец (который всегда лжет). Однажды, все жители острова разбились на пары, и каждый про своего соседа по паре сказал: «Он — рыцарь!», либо «Он — лжец!». Могло ли в итоге оказаться, что тех и других фраз произнесено поровну?

Четвертый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

4.1. Расположите в порядке возрастания числа: 222^2; 22^{22}; 2^{222}; 22^{2^2}; 2^{22^2}; $2^{2^{22}}$; $2^{2^{2^2}}$. Ответ обоснуйте.

4.2. Отрезки AC и BD пересекаются в точке O. Периметр треугольника ABC равен периметру треугольника ABD, а периметр треугольника ACD равен периметру треугольника BCD. Найдите длину AO, если $BO = 10$ см.

4.3. Какое наибольшее количество прямоугольников 4×1 можно разместить в квадрате 6×6 (не нарушая границ клеток)?

2001/2002 учебный год

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Число 5 возвели в степень 2002. Как вы думаете, в получившемся числе больше, чем 2002 цифры или меньше? Ответ объясните.

1.2. Две стороны и высота, проведенная к третьей стороне одного треугольника соответственно равны двум сторонам и высоте, проведенной к третьей стороне другого треугольника. Можно ли утверждать, что треугольники равны? Ответ объясните.

1.3. Водитель дальнобойного грузовика взглянул на приборы своей машины и увидел, что спидометр показывает число 25952. «Какое красивое число километров я проехал. Наверное, не скоро выпадет следующее красивое число», — подумал он. Однако, через 1 час 20 минут на спидометре высветилось следующее красивое число. С какой скоростью ехал грузовик?

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Известно, что $(a - b + 2002)$, $(b - c + 2002)$ и $(c - a + 2002)$ — три последовательных целых числа. Найдите эти числа.

2.2. Можно ли расположить на плоскости (но не на одной прямой!) пять точек так, чтобы выполнялось условие: «если три точки являются вершинами треугольника, то этот треугольник — прямоугольный»? Ответ объясните.

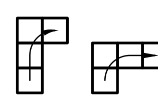
2.3. Автомат умеет от любого картонного прямоугольника отрезать квадрат со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника. Петя разрезал имевшийся у него прямоугольник на 2 больших квадрата, 3 квадрата поменьше и 5 маленьких квадратов со стороной 10 см, используя только этот автомат. Найдите размеры Петиного прямоугольника.

Третий тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

3.1. Может ли натуральное число иметь в полтора раза больше нечетных делителей, чем четных? Ответ объясните.

3.2. В треугольнике ABC H — точка пересечения высот AA_1 и BB_1. Найдите $\angle BAC$, если известно, что $AH = BC$.

3.3. Шахматный конь хочет попасть из левого нижнего угла в правый верхний угол на доске размером 2002×2003, делая ходы только вправо и вверх (см. рисунок). Сможет ли он это сделать? Ответ объясните.



Четвертый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

4.1. Докажите, что число $\underbrace{11\ldots1}_{2\cdot 218} - \underbrace{22\ldots2}_{218}$ является квадратом некоторого натурального числа.

4.2. В треугольнике ABC: $\angle B = 20^\circ$, $\angle C = 40^\circ$, длина биссектрисы AM равна 2 см. Найдите разность сторон: $BC - AB$.

4.3. Дана последовательность, в которой пропущено ровно пять чисел: 102; 105; 111; 114; 120; 123; 129; ? ; ? ; ?; ?; ?; 201; 204; 210; 213; 219. Вставьте пропущенные числа.

2002/2003 учебный год

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Положительные числа a и b таковы, что $a^2+b=b^2+a$. Верно ли, что $a=b$?

1.2. В треугольнике ABC проведены высоты AP и CN, которые пересекаются в точке H, лежащей внутри треугольника. Может ли угол AHC оказаться острым?

1.3. У трех членов жюри спросили: «Сколько команд будет участвовать в математической регате?». Один сказал: «Меньше семидесяти двух». Другой: «Меньше семидесяти одной», а третий: «Меньше семидесяти трех». Сколько команд участвовало в регате, если правы были в точности двое членов жюри?

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. На прямой отметили несколько точек. После этого между каждыми двумя соседними точками поставили еще по точке. Аналогичную операцию проделали еще три раза.

В результате, на прямой оказалось ровно 65 точек. Сколько точек было на прямой первоначально?

2.2. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AM и CK, пересекающиеся в точке O. Может ли угол AOC оказаться острым?

2.3. Существует ли такое натуральное число, что сумма его цифр больше суммы цифр его квадрата?

Третий тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

3.1. Говядина без костей стоит 90 рублей за килограмм, говядина с костями — 78 рублей за килограмм, а кости без говядины — 15 рублей за килограмм. Сколько костей в килограмме говядины?

3.2. Покажите, как разрезать прямоугольник 1×5 на пять частей и сложить из них квадрат.

3.3. Дан бесконечный ряд чисел: 2, 6, 12, 20, 30, 42, … Укажите закономерность и найдите число, стоящее на 2003-м месте.

Четвертый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

4.1. Если идти вниз по движущемуся эскалатору, то на спуск потратишь 1 минуту. Если увеличить собственную скорость в два раза, то спустишься за 45 секунд. За какое время можно спуститься, стоя на этом эскалаторе неподвижно?

4.2. Даны точки A, B, C и D так, что отрезки AC и BD пересекаются в точке E. Отрезок AE на 1 см короче, чем отрезок AB, $AE = DC$, $AD = BE$, $\angle ADC = \angle DEC$. Найдите длину EC.

4.3. Шахматный турнир проводился по круговой системе (каждый участник должен сыграть с каждым из остальных по одной партии). Два участника, Вася и Петя, сыграв одинаковое количество партий, заболели и выбыли из турнира. Успели ли они сыграть между собой, если всего в турнире было сыграно 23 партии?

2003/2004 учебный год

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Вася перемножил квадрат и куб некоторого натурального числа, отличного от единицы. Мог ли он получить шестую степень какого-то натурального числа? Обоснуйте.

1.2. Известно, что треугольники ABC и ADC — прямоугольные равнобедренные. Следует ли из этого, что $\angle ABC = \angle ADC$?

1.3. Существует ли треугольник, градусная мера каждого угла которого выражается простым числом?

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Известно, что $a = 3^{2004} + 2$. Верно ли, что $a^2 + 2$ — простое число? Обоснуйте.

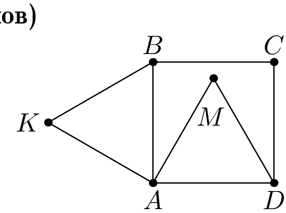
2.2. В треугольнике ABC угол C в три раза больше угла A. На стороне AB взята такая точка D, что $BD = BC$. Найдите CD, если $AD = 4$.

2.3. Существуют ли четыре числа, попарные разности между которыми равны: 2, 2, 3, 4, 5, 6? Обоснуйте.

Третий тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

3.1. Докажите, что если $xy + z = yz + x = zx + y$, то $(x - y)(y - z)(z - x) = 0$.

3.2. $ABCD$ — квадрат. Треугольники AMD и AKB — равносторонние (см. рисунок). Верно ли, что точки C, M и K лежат на одной прямой?



3.3. В трехзначном числе зачеркнули цифру в разряде сотен, затем полученное двухзначное число умножили на 7 и вновь получили исходное трехзначное число. Какое это число?

Четвертый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

4.1. Докажите, что число $1998 \cdot 2000 \cdot 2002 \cdot 2004 + 16$ является квадратом натурального числа.

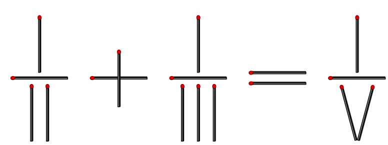
4.2. Треугольник, один из углов которого равен 40°, разрезали по его биссектрисам на шесть треугольников, среди которых есть прямоугольные. Какими могли быть остальные углы исходного треугольника?

4.3. Буратино зарыл на Поле Чудес золотую монету. Из нее выросло дерево, а на нем — две монеты: серебряная и золотая. Серебряную монету Буратино спрятал в карман, а золотую зарыл, и опять выросло дерево, и т. д. Каждый раз на дереве вырастали две монеты: либо две золотые, либо золотая и серебряная, либо две серебряные. Серебряные монеты Буратино складывал в карман, а золотые закапывал. Когда закапывать стало нечего, в кармане у Буратино было 2004 серебряные монеты. Сколько монет закопал Буратино?

2004/2005 учебный год

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Из спичек сложено неверное равенство:



Переложите одну спичку так, чтобы равенство стало верным.

1.2. Вася вырезал из картона треугольник, разрезал его на два треугольника и послал обе части Пете, который также сложил из них треугольник. Верно ли, что Петин треугольник обязательно равен Васиному?

1.3. Средний рост восьми баскетболистов равен 195 см. Какое наибольшее количество из этих игроков может быть ниже, чем 191 см?

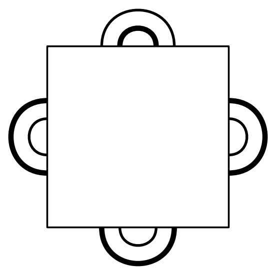
Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Температуру можно измерять в градусах Цельсия и Фаренгейта. Известно, что вода замерзает при 0° C, что соответствует 32° F, а кипит при 100° C или при 212° F.

Сейчас на улице 5 градусов мороза по Цельсию. Какова температура по Фаренгейту?

2.2. На столе лежат шесть непересекающихся контуров из проволоки, частично накрытые листом бумаги (см. рисунок). Известно, что три контура сделаны из медной проволоки (она потолще), а три — из тонкой алюминиевой, причем один из контуров закрыт полностью, а пять других частично видны. Какой контур закрыт полностью, алюминиевый или медный?

Свой ответ достаточно проиллюстрировать рисунком, показывающим расположение всех шести контуров.



2.3. Найдите наименьшее составное число, которое не делится ни на одно из натуральных чисел от двух до десяти.

Третий тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

3.1. Все акции компаний Карабас и Барабас вместе стоят 90 золотых монет. У Буратино есть 25% акций компании «Карабас» и 75% акций компании «Барабас» общей стоимостью 30 золотых монет. Найдите стоимость всех акций каждой компании.

3.2. На плоскости расположены пять точек A, B, C, D и E так, что $AC = 5$ см, $AE = 4$ см; $BC = 14$ см, $BD = 2$ см, $DE = 3$ см. Найдите расстояние между серединами отрезков AB и CD.

3.3. В ряд выложили несколько апельсинов, мандаринов, яблок и груш. Известно, что рядом с фруктом каждого вида можно найти фрукт любого другого вида. Какое наименьшее количество фруктов могло быть выложено?

Четвертый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

4.1. Вася задумал число и прибавил к этому числу его сумму цифр. Петя также задумал число и тоже прибавил к нему его сумму цифр. В результате сложения у Васи и Пети получились одинаковые числа. Верно ли, что они задумывали одинаковые числа?

4.2. Квадрат со стороной 1 разрезали на прямоугольники периметра 2. Сколько прямоугольников могло получиться? (Укажите все возможные значения и обоснуйте).

4.3. В вершинах треугольника записаны числа 1, 2 и 3. Затем каждое из чисел одновременно заменили на сумму двух соседних. Эту операцию проделали еще некоторое количество раз. Могла ли сумма получившихся в итоге трех чисел оказаться равной 3000000?

2005/2006 учебный год

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Грузовик едет со скоростью 65 км/ч, а за ним едет легковой автомобиль — со скоростью 80 км/ч. На каком расстоянии друг от друга эти автомобили будут через две минуты после того, как легковой автомобиль догонит грузовик?

1.2. Покажите, как разрезать произвольный прямоугольник на три части и сложить из них неравнобедренный треугольник.

1.3. В архипелаге каждый остров соединен мостом ровно с семью другими. Сколько в этом архипелаге островов, если мостов — 84?

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Используя только цифры 1 и 7 (каждую из них — не более четырех раз), знаки арифметических действий и скобки, составьте выражение, значение которого равно 2006.

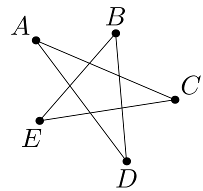
2.2. Точка B лежит на отрезке AC, причем $AB = 2$ см, $BC = 1$ см. На прямой AB укажите все такие точки M, для которых $AM + BM = CM$.

2.3. Женя и Антон учатся в одном классе. У Антона одноклассников вчетверо больше, чем одноклассниц. А у Жени одноклассниц на 17 меньше, чем одноклассников. Кто Женя: девочка или мальчик?

Третий тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

3.1. Каждый из двух мальчиков, Ваня и Витя, задумал по натуральному числу, возвел его в куб и вычел задуманное им число. Полученные ими разности оказались одинаковыми. Могло ли так случиться, что Ваня и Витя задумали различные числа?

3.2. В пятиугольной звезде, изображенной на рисунке, $\angle ACE = \angle ADB$ и $\angle DBE = \angle BEC$. Известно также, что $BD = CE$. Докажите, что $\angle ACD = \angle ADC$.



3.3. Двое по очереди ставят крестики в клетки доски размером 4×4. Проигрывает тот, после чьего хода образуется квадрат 2×2, в каждой клетке которого стоит крестик. Кто выиграет: начинающий или его партнер, и как нужно играть, чтобы выиграть?

Четвертый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

4.1. Учительница написала на доске три числа, отличные от нуля, и велела Диме одно из них уменьшить на треть, другое увеличить на четверть, а третье уменьшить на одну пятую и результаты записать в тетради. Оказалось, что в тетради Дима записал те же числа, что и на доске, но в другом порядке. Докажите, что Дима ошибся.

4.2. Можно ли разрезать произвольный треугольник на 10 треугольников так, чтобы никакие два из них не имели общей стороны?

4.3. Найдите наибольшее число, составленное из различных цифр (в десятичной записи) и делящееся на любую свою цифру.

8 класс

1999/2000 учебный год

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Сколько корней имеет уравнение:

$$\sqrt{1999-2000x}+\sqrt{2001x-2000}=1?$$

1.2. Точки C и D лежат на окружности с диаметром AB. Прямые AC и BD пересекаются в точке P, а прямые AD и BC — в точке Q. Докажите, что $AB \perp PQ$.

1.3. Запишите наибольшее десятизначное число, кратное семи, все цифры в десятичной записи которого различны.

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Найдите значение выражения:

$$\frac{(2+3)\cdot(2^2+3^2)\cdot\ldots\cdot(2^{256}+3^{256})\cdot(2^{512}+3^{512})+2^{1024}}{3^{1024}}.$$

2.2. В равнобокую трапецию с длинами оснований 8 см и 18 см вписана окружность. Найдите ее радиус.

2.3. Сто сумасшедших последовательно красят доску 100×100, используя сто цветов. Они соблюдают единственное правило: в одной строке и в одном столбце не может оказаться двух клеток, раскрашенных одинаково. Смогут ли 99 сумасшедших правильно докрасить доску, если первый сумасшедший уже раскрасил «свои» сто клеток?

Третий тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

3.1. Если каждый мальчик купит пирожок, а каждая девочка — булочку, то они вместе потратят на 1 рубль меньше, чем если бы каждый мальчик купил булочку, а каждая девочка — пирожок. Цена пирожка и цена булочки различаются больше, чем на 50 копеек. Известно также, что мальчиков больше, чем девочек. На сколько? Что дороже, пирожок или булочка, и на сколько?

3.2. Две противоположные стороны AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ лежат на перпендикулярных прямых. Расстояние между серединами сторон BC и AD равно 5. Найдите расстояние между серединами диагоналей AC и BD.

3.3. Можно ли на доску 5×5 поставить три шахматных коня так, чтобы они «били» все незанятые ими клетки?

Четвертый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

4.1. При каких значениях a уравнения $x^3+ax+1=0$ и $x^4+ax^2+1=0$ имеют хотя бы один общий корень?

4.2. Внутри остроугольного треугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до всех вершин и до всех сторон треугольника — наименьшая.

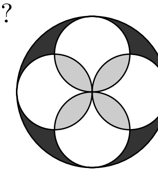
4.3. Найдите все целые a и b такие, что a^4+4b^4 является простым числом.

2000/2001 учебный год

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Решите неравенство: $|x+2000| < |x-2001|$.

1.2. Существует ли выпуклый четырехугольник, у которого сумма длин диагоналей не меньше, чем сумма длин всех сторон?



1.3. Через центр окружности проведены еще четыре окружности, касающиеся данной (см. рисунок). Сравните площади фигур, выделенных на рисунке черным и серым цветом соответственно.

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 1-x_1x_2=0, \\ 1-x_2x_3=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ 1-x_{2000}x_{2001}=0, \\ 1-x_{2001}x_1=0. \end{cases}$$

2.2. В остроугольном треугольнике ABC угол B равен 60°, AM и CN — его высоты, а Q — середина стороны AC. Докажите, что треугольник MNQ — равносторонний.

2.3. Найдите все натуральные m и n, для которых выполняется равенство: $m!+12=n^2$.

Третий тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

3.1. Укажите все пары $(x;y)$, для которых выполняется равенство: $(x^4+1)(y^4+1)=4x^2y^2$.

3.2. К окружности с диаметром AC проведена касательная BC. Отрезок AB пересекает окружность в точке D. Через точку D проведена еще одна касательная к окружности, пересекающая отрезок BC в точке K. В каком отношении точка K разделила отрезок BC?

3.3. Трое рабочих копают яму. Они работают по очереди, причем каждый из них работает столько времени, сколько нужно двум другим, чтобы вырыть половину ямы. Работая таким образом, они выкопали яму. Во сколько раз быстрее трое рабочих выкопают такую же яму, если будут работать одновременно?

Четвертый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

4.1. Найдите все значения a, для которых выражения $a + \sqrt{15}$ и $\frac{1}{a} - \sqrt{15}$ принимают целые значения.

4.2. Расстояние между серединами диагоналей трапеции равно 5 см, а ее боковые стороны имеют длины 6 см и 8 см. Найдите расстояние между серединами оснований.

4.3. Рассмотрим все моменты времени, когда часовая и минутная стрелки часов лежат на одной прямой, образуя развернутый угол. Найдутся ли среди таких прямых две взаимно перпендикулярные?

2001/2002 учебный год

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Известно, что $a(1-b) > \frac{1}{4}$, где a и b — положительные числа. Какое из чисел больше: a или b?

1.2. В трапеции $ABCD$ $(AD \parallel BC)$: $AB = BC = 0,5AD$. Найдите $\angle ACD$.

1.3. По кольцевой линии в одном направлении курсируют с одинаковой скоростью и равными интервалами 12 трамваев. Сколько трамваев нужно добавить, чтобы при той же скорости интервалы между трамваями уменьшились на одну пятую?

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Решите систему:

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ xy + yz + zx \geqslant 0. \end{cases}$$

.

2.2. В треугольнике ABC проведена биссектриса AK. Известно, что совпадают центры двух окружностей: вписанной в $\triangle ABK$ и описанной около $\triangle ABC$. Найдите углы треугольника ABC.

2.3. Найдите все целые значения m такие, что выражение $\dfrac{2m+7}{5m+11}$ принимает целые значения.

Третий тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

3.1. Существуют ли такие числа a, b, c, k, m, n, x, y и z, что $amz > 0$; $bnx > 0$; $cky > 0$; $any < 0$; $bkz < 0$; $cmx < 0$?

3.2. Расположите на плоскости 6 точек так, чтобы каждые три из них являлись вершинами равнобедренного треугольника. Ответ поясните.

3.3. Играя с компьютером, Антон выиграл 60% партий. Отдохнув, он выиграл еще 10 партий подряд, и процент выигранных партий достиг 70%. Какое наименьшее количество партий он должен еще сыграть и сколько из них выиграть, чтобы в итоге количество выигранных партий опять составило 60%?

Четвертый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

4.1. Найдите все положительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} a+b=c^2, \\ b+c=d^2, \\ c+d=a^2, \\ d+a=b^2. \end{cases}$$

4.2. Меньший катет AC прямоугольного треугольника ABC имеет длину b. На гипотенузе AB выбрана такая точка D, что $BD = BC$. На катете BC взята такая точка E, что $DE = BE = m$. Найдите периметр четырехугольника $ADEC$.

4.3. Веревку сложили пополам, потом еще раз пополам, потом снова пополам, а затем разрезали в каком-то месте. Какова может быть длина веревки, если известно, что какие-то два из получившихся кусков имеют длины 9 м и 4 м?

2002/2003 учебный год (осень)

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Найдите $a^6 + 3a^2b^2 + b^6$, если $a^2 + b^2 = 1$.

1.2. Две стороны четырехугольника равны 1 и 4. Одна из диагоналей делит его на два равнобедренных треугольника и имеет длину 2. Найдите периметр четырехугольника.

1.3. После игры в футбол (два тайма по 45 минут) ребята делились впечатлениями. Петя: «Я забил на один гол больше, чем все остальные, вместе взятые». Миша: «Во втором тайме было забито вдвое больше голов, чем в первом». Олег: «Из всех мячей, забитых в первом тайме, я забил половину». Мог ли каждый из них сказать правду?

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Сравните числа: 99! и 50^{99}.

(*Напомним, что* $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$).

2.2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ равны стороны AB и CD и равны углы A и C. Верно ли, что этот четырехугольник — параллелограмм?

2.3. Варианты второго тура математической регаты готовились так: на каждый лист печаталось несколько одинаковых условий и затем каждый лист разрезался. Получилось так, что количество подготовленных условий совпало с количеством команд.

Сколько команд могло участвовать в регате, если сделано p^2 разрезов, где p — простое число?

Третий тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

3.1. Найдите все натуральные значения n, для которых число $n^5 + n + 1$ является простым.

3.2. В треугольнике ABC: $\angle A = 15°$, $\angle B = 30°$. Через точку C проведен перпендикуляр к AC, который пересекает сторону AB в точке M. Найдите BC, если $AM = 5$.

3.3. Из квадрата со стороной 5 клеток вырезали одну клетку, после чего его разрезали на 8 одинаковых прямоугольников размером 3×1. Какую клетку изначально вырезали из квадрата?

Четвертый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

4.1. Найдите наибольшее возможное значение выражения:

$$20x - 4y + 6z - 2x^2 - 4y^2 - 3z^2 - 2.$$

При каких значениях переменных оно достигается?

4.2. Даны две перпендикулярные прямые и точка C, не принадлежащая ни одной из них. Рассмотрим все прямоугольники $CDME$ такие, что вершина D лежит на одной из данных прямых, а вершина E — на другой. Найдите геометрическое место точек M.

4.3. Существует ли такое натуральное число, которое при умножении на 2 станет квадратом натурального числа, при умножении на 3 — кубом какого-то натурального числа, после умножения на 5 — пятой степенью какого-нибудь натурального числа, а после умножения на 7 — седьмой степенью какого-либо натурального числа?

2002/2003 учебный год (весна)

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Какие значения может принимать выражение $(a|b| - b|a|)\,(b|c| - c|b|)\,(c|a| - a|c|)$, где a, b и c — действительные числа?

1.2. Существует ли прямоугольный треугольник, который можно разрезать на три равных треугольника?

1.3. При каком наименьшем значении n число $\underbrace{22\ldots2}_{n\text{ цифр}}$ кратно 17?

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Двое рабочих могут успеть за день либо напилить *пять* поленниц дров, либо наколоть *восемь* таких поленниц. Какое наибольшее количество дров они могут напилить, чтобы успеть наколоть их в тот же день?

2.2. Найдите угол A треугольника ABC, если он равен одному из углов между биссектрисами, проведенными из вершин B и C.

2.3. Найдите наименьшее число, записываемое одними единицами, которое кратно стозначному числу, записываемому одними тройками.

Третий тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

3.1. Сравните дроби: $\dfrac{2002}{2003}$ и $\dfrac{20022003}{20032002}$.

3.2. A и B — фиксированные точки на плоскости. Укажите геометрическое место точек M этой плоскости, для которых A, B и M являются вершинами равнобедренного треугольника.

3.3. Известно, что числа $2n+1$ и $3n+1$, где n — натуральное число, являются точными квадратами. Может ли число $5n+3$ быть простым?

Четвертый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

4.1. Является ли простым или составным число $4^9 + 6^{10} + 3^{20}$?

4.2. В равнобедренном треугольнике ABC угол B, противолежащий основанию, равен 20°. На стороне AB отмечена точка D так, что $BD = AC$. Найдите угол ACD.

4.3. Заведующая библиотекой, увидев, что 8 томов «Малой энциклопедии козлов» стоят в беспорядке, указала на это библиотекарю. Тот в ответ заявил: «Беспорядок — небольшой, так как каждый том стоит либо на своем месте, либо на соседнем».

Сколькими способами можно расставить тома энциклопедии в соответствии с этим условием?

2003/2004 учебный год

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Докажите, что $\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{100} > 1$.

1.2. Из вершины A параллелограмма $ABCD$ проведены высоты AK и AM. Может ли оказаться так, что точка K лежит на стороне параллелограмма, а точка M — на продолжении стороны?

1.3. Существуют ли три последовательных натуральных числа, каждое из которых делится на квадрат какого-нибудь натурального числа, отличного от единицы?

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Числа a, b, c и d таковы, что $a + b = c + d$ и $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Верно ли, что $a^3 + b^3 = c^3 + d^3$?

2.2. В трапеции $ABCD$ диагонали AC и BD перпендикулярны. На большем основании AD выбрана точка M так, что $BM = MD = 3$ см. Найдите длину средней линии трапеции.

2.3. В круговом турнире каждый участник встретился с каждым один раз (победа — 1 очко, ничья — 0,5 очка, поражение — 0). Единоличным победителем турнира стал Иванов. Затем за употребление допинга был дисквалифицирован Петров, результаты всех игр с его участием были аннулированы, и единоличным победителем оказался Сидоров. Петров утверждает, что если бы дисквалифицировали не его, а Сидорова, то он (Петров) стал бы единоличным победителем. Может ли это быть правдой?

Третий тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

3.1. Решите уравнение: $2x^2 + 5y^2 - 4xy - 2y - 4x + 5 = 0$.

3.2. В прямоугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны BC, точка N — середина стороны CD, P — точка пересечения отрезков DM и BN. Докажите, что $\angle MAN = \angle BPM$.

3.3. У Золотой рыбки записаны и перенумерованы подряд все знакомые. Половина из них — щуки, треть — окуни, а все знакомые с номерами, делящимися на 4, — караси. Сколько всего знакомых у Золотой рыбки?

Четвертый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

4.1. Верно ли, что все корни уравнения
$$\frac{x-ab}{a+b}+\frac{x-bc}{b+c}+\frac{x-ca}{c+a}=a+b+c,$$
где a, b и c — данные натуральные числа, являются целыми числами?

4.2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$: $AD = BC$; $\angle ABD + \angle CDB = 180^\circ$. Докажите, что $\angle BAD = \angle BCD$.

4.3. Дан круг радиуса 10 см. На одном из его радиусов отмечены пять точек: на расстояниях 1, 3, 5, 7 и 9 см от центра соответственно. Разрежьте этот круг на 5 равных частей так, чтобы в каждой части оказалась ровно одна точка.

2004/2005 учебный год

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Найдите $x+y$, если $x^3+y^3=9$, а $x^2y+xy^2=6$.

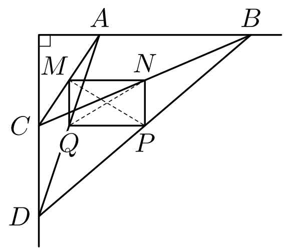
1.2. В треугольнике ABC медиана BE перпендикулярна биссектрисе AD. Найдите длину AB, если $AC = 12$.

1.3. У Васи есть карточки с цифрами 1, 2, 3 и 4 — по две с каждой цифрой. Он хочет сложить из них число так, чтобы между двумя единицами была одна цифра, между двойками — две цифры, между тройками — три, а между четверками — четыре. Укажите какое-нибудь число, которое может получить Вася.

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Известно, что $a+b+c=7$, а $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=0,7$. Найдите сумму: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$.

2.2. Отрезки AB и CD лежат на перпендикулярных прямых (см. рисунок). Точки M, P, N и Q — середины отрезков AC, BD, BC и AD соответственно. Найдите QN, если $MP = 4$ см.



2.3. В шахматном турнире каждый участник встретился с каждым ровно один раз (победа — 1 очко, поражение — 0, ничья — пол-очка). Все шахматисты набрали одинаковое количество очков. Если удалить любого участника и аннулировать результаты встреч с ним, то количество очков у всех остальных участников по-прежнему будет одинаковым. Верно ли, что все партии этого турнира закончились вничью?

Третий тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

3.1. Дано уравнение с переменной x: $(a^2-1)(b-1)x = (a-1)(b^2-1)$. При каких значениях a найдется значение b такое, что данное уравнение не имеет корней?

3.2. Дана равнобокая трапеция с основаниями 11 и 17. Покажите, как ее можно разрезать на четыре равные трапеции.

3.3. В вершинах куба расставлены числа от 1 до 8. На каждой грани записана сумма чисел, расставленных в ее вершинах. Может ли оказаться так, что на гранях записано шесть последовательных натуральных чисел?

Четвертый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

4.1. После того, как учительница Марьиванна пересадила Вовочку с первого ряда на второй, Ванечку — со второго ряда на третий, а Машеньку — с третьего ряда на первый, средний возраст учеников, сидящих в первом ряду, увеличился на неделю, сидящих во втором ряду — увеличился на две недели, а сидящих в третьем ряду — уменьшился на четыре недели. Известно, что на первом и на втором ряду сидят по 12 человек. Сколько человек сидит в третьем ряду?

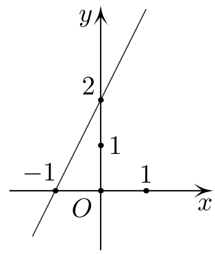
4.2. Угол BAC треугольника ABC равен 120°. На биссектрисе этого угла взята точка D так, что $AD = AB + AC$. Найдите углы треугольника BDC.

4.3. В некоторых клетках таблицы 100×100 стоят крестики. Каждый крестик является единственным либо в строке, либо в столбце. Какое наибольшее количество крестиков может стоять в таблице?

2005/2006 учебный год

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Дан график линейной функции $y = ax + b$ (см. рисунок). Найдите значение выражения $b - a$.



1.2. О четырехугольнике известно, что две его стороны параллельны и что точка пересечения диагоналей является серединой одной из диагоналей. Верно ли, что этот четырехугольник — параллелограмм?

1.3. При умножении натурального числа N на 3 получилось число, сумма цифр которого равна N. Найдите наименьшее возможное значение N.

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Известно, что $a + b + c + d = 6$. Может ли сумма $ab + ac + ad + bc + bd + cd$ равняться 18?

2.2. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен одной из медиан. Какой угол образует эта медиана со вторым катетом?

2.3. Урфин Джюс выстроил 66 дуболомов в шеренгу, пересчитал их и понял, что перестроить их в колонну по пять ему не удастся. Тогда, он решил между любыми двумя дуболомами, стоящими в шеренге, поставить еще по одному дуболому. Сможет ли он, повторив эту операцию несколько раз, добиться того, чтобы количество дуболомов стало кратным пяти?

Третий тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

3.1. У Пети были монеты достоинством в 1 рубль и 1 копейку, причем копеек было меньше, чем на рубль. Покупая продукты, Петя потратил половину всей суммы. После этого у него снова оказались только рубли и копейки, причем копеек оказалось столько, сколько вначале было рублей, а рублей оказалось вдвое меньше, чем вначале было копеек. Сколько денег было у Пети первоначально?

3.2. В четырехугольнике $ABCD$ углы A и B — прямые. Известно также, что $CD = AD + BC$. Биссектриса угла ADC пересекает AB в точке M. Найдите угол CMD.

3.3. Назовем натуральное число замечательным, если оно самое маленькое среди натуральных чисел с такой же, как у него, суммой цифр. Чему равна сумма всех трехзначных замечательных чисел?

Четвертый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

4.1. Решите уравнение:

$$(1 + x + \ldots + x^7)(1 + x + \ldots + x^5) = (1 + x + \ldots + x^6)^2.$$

4.2. На стороне BC квадрата $ABCD$ во внешнюю сторону построен равнобедренный треугольник BEC с основанием BC. Известно, что угол EAD равен $75°$. Найдите угол BEC.

4.3. На поле $e1$ шахматной доски стоит шашка. Сколько существует различных маршрутов, по которым она сможет пройти в дамки?

(*Напомним, что шашка может ходить вперед по диагонали на соседнюю клетку и превращается в дамку, если достигает восьмой горизонтали*).

9 класс

1998/1999 учебный год

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \sqrt{(x+3)^2} = 3 + x, \\ \sqrt{(x-3)^2} = 3 - x. \end{cases}$

1.2. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC соответственно отмечены точки D и E так, что $AD : BD = BE : EC = 2$ и $\angle ACB = 2\angle BED$. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

1.3. Существует ли треугольник ABC, для углов которого выполняется равенство: $\sin\angle A + \sin\angle B = \sin\angle C$?

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Коля и Вася живут в одном доме. В каждом подъезде дома — по 4 квартиры на этаже. Коля живет на пятом этаже в 83 квартире, Вася — на третьем этаже в 169 квартире. Сколько этажей в доме?

2.2. Диагонали выпуклого четырехугольника делят его на четыре треугольника. Площади трех из них равны 1, 2 и 3. Найдите площадь четырехугольника.

2.3. Докажите, что если $a > 0$ и $b > 0$, то из неравенства $ab > a + b$ следует неравенство $a + b > 4$.

Третий тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

3.1. Сплав состоит из цинка и меди, входящих в него в отношении $1 : 2$, а другой сплав содержит те же металлы, но в отношении $2 : 3$. Сколько частей каждого из данных сплавов нужно взять, чтобы получить третий сплав, содержащий цинк и медь в отношении $17 : 27$?

3.2. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC как на сторонах, построены равносторонние треугольники AMC и BKC так, что точки M и K лежат вне прямого угла ACB. Найдите угол между прямыми AK и BM.

3.3. При каких значениях a один из корней уравнения $(a^2+a+1)\,x^2 + (2a-3)\,x + a - 5 = 0$ больше 1, а другой — меньше 1?

Четвертый тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

4.1. В трамвае ехало 60 человек: контролеры, кондукторы, лжекондукторы (граждане, выдававшие себя за кондукторов), лжеконтролёры (граждане, выдававшие себя за контролеров), и, возможно, обычные пассажиры. Общее количество лжеконтролеров и лжекондукторов в 4 раза меньше количества настоящих кондукторов и контролеров. Общее количество контролеров и лжеконтролёров в 7 раз больше общего количества кондукторов и лжекондукторов. Сколько в трамвае обычных пассажиров?

4.2. В равнобокой трапеции с основаниями 4 и 5 проведена диагональ длины 8. Может ли она быть биссектрисой одного из углов трапеции?

4.3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x + \sqrt[6]{x} = y + \sqrt[6]{y}, \\ x^2 + xy + y^2 = 27. \end{cases}$$

Пятый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

5.1. Назовем натуральное число «куском», если оно получается выписыванием подряд чисел от 1 до какого-нибудь натурального n, большего единицы (например, 123 или 123456789101112). Докажите, что произведение любых двух «кусков» не является «куском».

5.2. AL и BM — биссектрисы треугольника ABC. Окружности, описанные около треугольников ALC и BMC, вторично пересекаются в точке K, лежащей на стороне AB. Найдите величину угла ACB.

5.3. Изобразите множество точек на координатной плоскости, для координат x и y которых выражение $\dfrac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ принимает наибольшее значение.

1999/2000 учебный год

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Задайте формулой какую-либо функцию $f(x)$, которая определена при всех x, кроме тех, которые принадлежат промежутку $[1; 2)$.

1.2. В треугольнике ABC точка A_1 принадлежит отрезку BC, а точка C_1 отрезку AB. Может ли точка пересечения отрезков AA_1 и CC_1 быть серединой каждого из них?

1.3. Решите уравнение в целых числах: $1 + m + m^2 + m^3 = 3^n$.

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. При всех значениях a решите уравнение:

$$\sqrt{a - |x|} + \sqrt{x^2 - a^2} = -a.$$

2.2. В треугольнике ABC: $\angle A > \angle B > \angle C$. К какой из вершин треугольника ближе всего расположен центр вписанной в него окружности?

2.3. На окружности расположены 1999 белых и одна красная точка. Рассмотрим все выпуклые многоугольники с вершинами в этих точках. Каких многоугольников больше: тех, у которых есть красная вершина или тех, у которых её нет?

Третий тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

3.1. Найдите значение выражения

$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx},$$

если известно, что $xyz=1$.

3.2. Даны два лоскута материи, имеющие форму квадратов (их размеры — различны). Как их нужно раскроить, чтобы из всех получившихся кусков можно было сшить скатерть, также имеющую форму квадрата?

3.3. Найдите все такие двузначные числа x, для каждого из которых истинны ровно *три* из следующих шести утверждений:

1) x делится на 3; 2) x делится на 5;
3) x делится на 9; 4) x делится на 15;
5) x делится на 25; 6) x делится на 45.

Четвертый тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

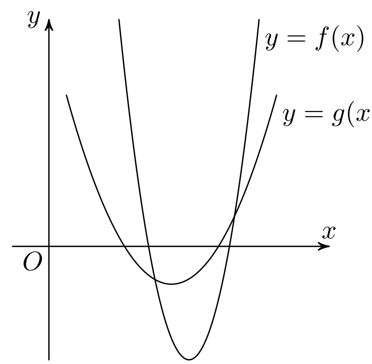
4.1. При каких значениях a сумма четвёртых степеней корней уравнения $x^2-x+a=0$ принимает наименьшее значение?

4.2. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB, имеющей длину c, проведена высота CH. K — середина BC. Найдите радиус окружности, проходящей через точки C, H и K.

4.3. Каждый зритель, пришедший на спектакль «Королевский жираф», принес с собой либо одну дохлую кошку, либо два кочана гнилой капусты, либо три тухлых яйца. Стоявший у входа Гекльберри Финн подсчитал, что кошек было 64 штуки. После спектакля оба артиста — король и герцог — были с ног до головы закиданы припасами, причем на долю каждого досталось поровну предметов (а промахов жители Арканзаса не делают). Правда, король принял на себя лишь пятую часть всех яиц и седьмую часть капусты, но все дохлые кошки полетели именно в него. Сколько зрителей пришло на представление?

Пятый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

5.1. Даны графики двух квадратичных функций: $f(x) = a_1x^2+b_1x+c_1$ и $g(x) = a_2x^2+b_2x+c_2$, имеющие одинаковые направления «ветвей». Абсциссы их точек пересечения положительны, оси симметрии могут не совпадать (см. рисунок). Сравните соответствующие коэффициенты трехчленов.



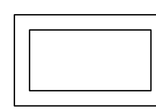
5.2. Пусть M — внутренняя точка равностороннего треугольника ABC. Существует ли треугольник, стороны которого равны отрезкам MA, MB и MC, а вершины лежат на сторонах данного равностороннего треугольника?

5.3. Представьте единицу в виде суммы квадратов пяти попарно различных положительных рациональных чисел.

2000/2001 учебный год

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Решая задачу: «Какое значение принимает выражение $x^{2000} + x^{1999} + x^{1998} + 1000x^{1000} + 1000x^{999} + 1000x^{998} + 2000x^3 + 2000x^2 + 2000x + 3000$ (x — действительное число), если $x^2 + x + 1 = 0$?», Вася получил ответ 3000. Прав ли Вася? Ответ обосновать.



1.2. Являются ли подобными два прямоугольника: картина в рамке и картина без рамки, если ширина рамки всюду одинакова (см. рисунок)?

1.3. Дано число: $123456789101112\ldots$. Какая цифра стоит на 2000-м месте?

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Квадратный трехчлен ax^2+bx+c не имеет корней и $a+b+c > 0$. Найдите знак коэффициента c.

2.2. Биссектриса треугольника делит одну из его сторон на отрезки 3 см и 5 см. В каких границах меняется периметр треугольника?

2.3. Назовем натуральное число «замечательным», если оно — самое маленькое среди всех натуральных чисел с такой же, как у него, суммой цифр. Сколько существует трехзначных «замечательных» чисел?

Третий тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

3.1. На координатной плоскости изобразите все точки, координаты которых являются решениями уравнения: $y^2 - |y| = x^2 - |x|$.

3.2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки E, F и G — середины сторон AB, BC и AD соответственно, причем, $GE \perp AB$, $GF \perp BC$. Найдите угол ACD.

3.3. Тридцать студентов с пяти курсов придумали 40 задач для олимпиады, причем однокурсники — одинаковое количество задач, а студенты с разных курсов — разное. Сколько студентов придумало по одной задаче?

Четвертый тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

4.1. Докажите, что если каждое из двух чисел является суммой квадратов двух целых чисел, то и их произведение является суммой квадратов двух целых чисел.

4.2. Диагонали равнобокой трапеции $ABCD$ с боковой стороной AB пересекаются в точке P. Верно ли, что центр окружности, описанной около трапеции, лежит на окружности, описанной около треугольника ABP?

4.3. Корни уравнения $x^2 + ax + 1 = b$ — целые, отличные от нуля, числа. Докажите, что число $a^2 + b^2$ является составным.

Пятый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

5.1. Про квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 - ax + 1$ известно, что $|f(x)| \leqslant 1$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Найдите наибольшее возможное значение a.

5.2. Дан тупоугольный треугольник ABC. На стороне AC, лежащей против тупого угла, укажите такие точки D, что длина отрезка BD является средним геометрическим длин отрезков AD и CD.

5.3. Докажите, что среди чисел вида $19991999\ldots1999$ найдется хотя бы одно, которое делится на 2001.

2001/2002 учебный год

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Известно, что число a является корнем уравнения $x^3+7x-9=0$. Найдите значение выражения $\dfrac{2a^3+3a}{11a-18}$.

1.2. Могут ли длины сторон a, b и c прямоугольного треугольника удовлетворять соотношению $a^2 + b^2 = 5c^2$?

1.3. Сколько десятизначных чисел можно составить так, чтобы любые две соседние цифры отличались на единицу, если в их десятичной записи можно использовать только цифры 1, 2 и 3?

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. При каких натуральных значениях n выражение $n^2 + (n-1)^2 + n^2(n-1)^2$ является полным квадратом?

2.2. Один из углов трапеции равен $60°$. Найдите отношение её оснований, если известно, что в эту трапецию можно вписать окружность и около этой трапеции можно описать окружность.

2.3. Сравните числа A и B, не используя калькулятор:

$$A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 19 \cdot 20$$

$$B = 1 + 2 + 3 + \ldots + 999\,999 + 1\,000\,000.$$

Третий тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

3.1. Решите уравнение $15(x+1) = |x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|+|x-5|$.

3.2. В треугольнике ABC: $\angle A > \angle B > \angle C$. К какой из сторон треугольника ближе всего расположен центр окружности, описанной около этого треугольника?

3.3. За одну операцию разрешается разрезать многоугольник на две части по любому отрезку, перевернуть одну из частей и склеить эти части по тому же отрезку. Можно ли за несколько таких операций из прямоугольника 5×20 получить квадрат 10×10?

Четвертый тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

4.1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3. \end{cases}$

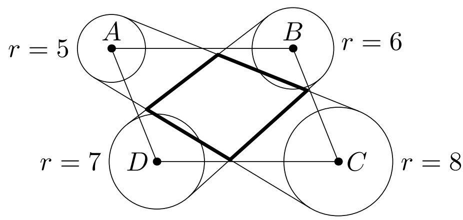
4.2. A и B — фиксированные точки на плоскости. Найдите геометрическое место точек M этой плоскости, для которых выполняется условие: $\angle ABM$ — наибольший из углов треугольника ABM.

4.3. На столе поставлены в один ряд N стаканов, перевёрнутые вверх дном. Разрешается одновременно переворачивать два стакана, стоящие через один. При каких значениях N можно добиться того, чтобы все стаканы стояли дном вниз?

Пятый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

5.1. При каких значения параметра a разность корней квадратного уравнения $x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$ принимает наибольшее значение?

5.2. Вершины параллелограмма $ABCD$ являются центрами непересекающихся окружностей, радиусы которых равны 5, 6, 8 и 7 (см. рисунок). К окружностям с центрами в противолежащих вершинах проведены общие внешние касательные, которые образуют новый четырёхугольник. Докажите, что в него можно вписать окружность и найдите её радиус.



5.3. Найдите среднее арифметическое всех пятизначных чисел-палиндромов (чисел, которые справа налево и слева направо читаются одинаково, например, 12421).

2002/2003 учебный год

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. К простому числу прибавили 400 и получили квадрат натурального числа. Каким могло быть исходное простое число?

1.2. CA и CB — касательные к окружности в точках A и B соответственно, AD — ее диаметр. Прямые DB и AC пересекаются в точке E. Докажите, что C — середина отрезка AE.

1.3. Можно ли число 2002 представить в виде суммы двух натуральных слагаемых, произведение которых делится на 2002?

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Докажите, что при всех $x > 0$, $y > 0$ выполняется неравенство

$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leqslant \frac{1}{xy}.$$

2.2. К окружности, вписанной в треугольник, проведены касательные, параллельные его сторонам. Точки пересечения касательных со сторонами треугольника являются вершинами шестиугольника $ABCDEF$. Верно ли, что противолежащие стороны этого шестиугольника попарно равны?

2.3. Укажите все натуральные значения n такие, что $(n-1)!$ делится на n. (*Напомним, что* $m! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots (m-1) \cdot m$).

Третий тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

3.1. Существуют ли иррациональные числа x и y такие, что числа $x + y^2$ и $x + 2y$ — рациональные?

3.2. В трапеции $ABCD$ меньшее основание BC равно боковой стороне CD. Докажите, что если $AD > 2BC$, то $\angle ABD$ — тупой.

3.3. Какое наименьшее количество точек надо расположить внутри выпуклого пятиугольника $ABCDE$, чтобы внутри любого треугольника с вершинами в точках A, B, C, D и E лежала хотя бы одна точка?

Четвертый тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

4.1. Представьте многочлен $x^7 + x^5 + 1$ в виде произведения двух многочленов.

4.2. Существует ли четырехугольник, не имеющий ни центра симметрии, ни оси симметрии, который можно разрезать на два равных четырехугольника?

4.3. В компании из n человек есть «шпион» — человек, который знает каждого члена этой компании, но его не знает никто из них. Вы можете спросить любого из членов компании про любого другого человека, знает он его или нет, и получить честный ответ. Сможете ли вы выявить «шпиона», задав $(n-1)$ вопрос?

Пятый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

5.1. Найдите все наборы, состоящие из 11 чисел, если известно, что каждое из этих чисел равно квадрату суммы остальных десяти чисел.

5.2. Внутри отрезка AB взяты точки C и D так, что $AC = BD$. Докажите, что для любой точки O, не лежащей на прямой AB, выполняется неравенство $OA + OB > OC + OD$.

5.3. Сколько различных значений можно получить, расставляя всеми возможными способами скобки в выражении $2 : 3 : 5 : 7 : 11 : : 13 : 17 : 19 : 23 : 29$?

2003/2004 учебный год

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Даны два квадратных трехчлена, сумма коэффициентов каждого из которых равна 1. Эти трехчлены перемножили и получили многочлен. Найдите сумму его коэффициентов.

1.2. Каждая из высот параллелограмма не меньше той стороны, которой она перпендикулярна. Найдите угол между диагоналями параллелограмма.

1.3. Турнир по боксу проходил по «олимпийской системе» (в каждом круге проигравшие выбывают). Сколько боксеров участвовало в турнире, если по окончании турнира выяснилось, что 32 человека выиграло боев больше, чем проиграло?

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Известно, что положительные числа a и b удовлетворяют неравенству: $\dfrac{1+ab}{a+b} < 1$. Докажите, что одно из этих чисел больше 1, а другое — меньше 1.

2.2. Можно ли разрезать прямоугольный треугольник с углом 30° на подобные непрямоугольные треугольники?

2.3. Сколько существует не равных между собой треугольников, длины сторон которых — натуральные числа, а периметр равен 20?

Третий тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

3.1. Дан квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$, все коэффициенты которого отличны от нуля. Ваня и Петя должны найти количество его корней. Ваня случайно поменял местами коэффициенты a и b и получил, что трехчлен имеет один корень. Петя вместо этого поменял местами b и c и также получил, что корень — один. Сколько корней у трёхчлена на самом деле?

3.2. Дана трапеция, основания которой имеют длины 4 и 5. Пользуясь только односторонней линейкой (без делений), постройте отрезок длины 1.

3.3. Из простого двузначного числа вычли число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, которое также оказалось простым, и получили квадрат натурального числа. Каким могло быть исходное число?

Четвертый тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

4.1. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения $y - x^2$, если $|x| + |y| \leqslant 13$.

4.2. Даны треугольник ABC и точки D и E такие, что $\angle ADB = \angle BEC = 90°$. Докажите, что длина отрезка DE не превосходит половины периметра треугольника ABC.

4.3. Может ли число, десятичная запись которого содержит более одной цифры, равняться произведению своих цифр?

Пятый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

5.1. Найдите, какие значения может принимать сумма $\frac{1}{x^2+1}+$ $+\frac{1}{y^2+1}+\frac{2}{xy+1}$, если известно, что $\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}=\frac{2}{xy+1}$ и $x\neq y$.

5.2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$: $\angle ABD=\angle CDB=60^\circ$, $\angle BCA=\angle CAD=30^\circ$. Найдите BD, если $AB=2$ см.

5.3. Даны 70 различных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 200. Докажите, что хотя бы два из них отличаются на 4, 5 или 9.

2004/2005 учебный год

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Сократите дробь: $\frac{\sqrt{a^2-a}+\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{2-2a}}$.

1.2. В прямоугольной трапеции $ABCD$ высота AB равна сумме оснований AD и BC. Биссектриса угла ABC пересекает сторону CD в точке K. В каком отношении эта точка делит CD?

1.3. В какое наименьшее количество цветов надо раскрасить доску 100×100, чтобы никакие две соседние клетки (по горизонтали, вертикали или диагонали) не были окрашены в одинаковый цвет?

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Известно, что каждое из уравнений $x^2+2bx+c=0$ и x^2+2cx+ $+b=0$, где $b>0$ и $c>0$, имеет хотя бы один корень. Произведение всех корней этих уравнений равно 1. Найдите b и c.

2.2. Существуют ли четыре отрезка с длинами a, b, c и d такие, что можно составить две трапеции: одну с основаниями a и b и боковыми сторонами c и d, а другую — с основаниями c и d и боковыми сторонами a и b?

2.3. Существует ли натуральное n такое, что число $n^{2004}-1$ является какой-либо степенью двойки?

Третий тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

3.1. Пусть $xyz=1$ и $a=x+\frac{1}{x}$, $b=y+\frac{1}{y}$, $c=z+\frac{1}{z}$. Вычислите $a^2+b^2+c^2-abc$.

3.2. В треугольнике ABC точка M — середина AC, MD и ME — биссектрисы треугольников ABM и CBM соответственно. Отрезки BM и DE пересекаются в точке F. Найдите MF, если $DE=d$.

3.3. На прямой сначала отметили 100 точек, затем отметили середины всех отрезков с концами в ранее отмеченных точках. Какое наименьшее количество точек могло получиться в итоге?

Четвертый тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

4.1. Докажите, что $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \ldots + \frac{1}{2004^2 - 1} < \frac{3}{4}$.

4.2. Существует ли треугольник, в котором радиус описанной окружности равен радиусу вневписанной окружности (то есть, окружности, касающейся одной из его сторон и продолжений двух других)?

4.3. Некоторое простое число возвели в четвертую степень и получили десятизначное число. Могут ли все цифры полученного числа быть различными?

Пятый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

5.1. Существуют ли числа a, b, c и d, удовлетворяющие неравенству $0 < a < b < c < d$, такие что уравнения $x^4 + bx + c = 0$ и $x^4 + ax + d = 0$ имеют хотя бы один общий корень?

5.2. Дан квадрат $ABCD$. Луч AE пересекает сторону BC, причем $\angle BAE = 30^\circ$, а $\angle BCE = 75^\circ$. Найдите $\angle CBE$.

5.3. На окружности расположены шестнадцать точек. Эти точки требуется соединить восемью хордами, не имеющими общих точек (даже общих концов). Сколькими способами это можно сделать?

2005/2006 учебный год

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Найдите x^3+y^3, если известно, что $x+y = 5$ и $x+y+x^2y+xy^2 = 24$.

1.2. Медиана треугольника в полтора раза больше стороны, к которой она проведена. Найдите угол между двумя другими медианами.

1.3. Можно ли, используя в десятичной записи чисел только цифры 2, 3 и 7, записать три натуральных числа, одно из которых равно произведению двух других?

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Известно, что число p является одним из корней квадратного уравнения $5x^2 + bx + 10 = 0$. Выразите через p корни уравнения $10x^2 + bx + 5 = 0$.

2.2. Точку, расположенную внутри треугольника, соединили отрезками с серединами его сторон. Образовались три выпуклых четырехугольника, в два из которых можно вписать окружность. Докажите, что и в третий четырехугольник также можно вписать окружность.

2.3. В детский сад завезли карточки для обучения чтению: на некоторых из них написан слог МА, на остальных — слог НЯ. Каждый ребенок взял по три карточки и стал составлять слова. Оказалось, что из своих карточек 20 детей могут сложить слово МАМА, 30 детей — слово НЯНЯ, а 40 детей — слово МАНЯ. У скольких детей все три карточки одинаковые?

Третий тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

3.1. Известно, что $a^2+bc = a(b+c)$; $b^2+ac = b(c+a)$; $c^2+ab = c(a+b)$. Докажите, что $a = b = c$.

3.2. Какое наименьшее нечетное количество сторон может иметь многоугольник, который можно разрезать на параллелограммы?

3.3. Допустим, что сейчас угол между минутной и часовой стрелкой такой же, как полчаса назад. Найдите все возможные значения этого угла.

Четвертый тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

4.1. Изобразите множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению:

$$\sqrt{(x+3)^2+(y+2)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=5.$$

4.2. В трапеции $ABCD$ точка M лежит на боковой стороне CD так, что $\angle ABM = \angle CBD = \angle BCD = \alpha$. Найдите длину BM, если $AB = b$.

4.3. На какую наибольшую степень числа 3 может делиться сумма вида $1! + 2! + 3! + \ldots + n!$?

Пятый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

5.1. Существуют ли три квадратных трехчлена такие, что сумма любых двух из них, увеличенная на 1, также является квадратным трехчленом и имеет те же корни, что и третий трехчлен?

5.2. На окружности с центром O отмечены точки A и B. Две другие окружности лежат внутри данной, касаются ее в точках A и B и касаются друг друга в точке M. Найдите геометрическое место точек M.

5.3. Возможна ли такая компания, в которой у каждого ровно 10 друзей, а у любых двух — ровно 4 общих друга?

10 класс

1995/1996 учебный год

Классификационный «заезд» (15 минут)

К$_1$. (**6 баллов**) Найдите наибольшее значение функции: $y = \dfrac{x^2}{x^4 + 25}$.

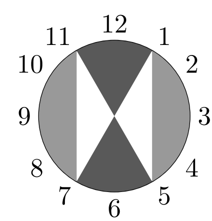
К$_2$. (**5 баллов**) В равнобокой трапеции диагональ перпендикулярна боковой стороне и является биссектрисой одного из углов трапеции. В каком отношении делится каждая диагональ точкой их пересечения?

К$_3$. (**6 баллов**) Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + xy + x = 10, \\ y^2 + xy + y = 20. \end{cases}$$

Утешительный «заезд» (10 минут)

У$_1$. (**5 баллов**) Верно ли, что для любого нечетного числа a число $(100 + a)^5 + 1$ является составным?



У$_2$. (**5 баллов**) Часовой мастер раскрасил циферблат часов в три цвета: красный, синий и зеленый, как показано на рисунке. Какой цвет занимает бо́льшую площадь?

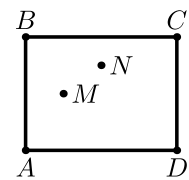
У$_3$. (**6 баллов**) Найдите сумму всех коэффициентов многочлена:

$$P(x) = (1 - 3x + 3x^2)^{743}(1 + 3x - 3x^2)^{797}.$$

Первый тур (15 минут)

I$_1$. (**6 баллов**) Изобразите на координатной плоскости XOY все точки, координаты которых удовлетворяют уравнению:

$$(x^2 + 2x + 4)(y^2 - 6y + 11) = 6.$$



I$_2$. (**6 баллов**) На прямоугольном бильярдном столе $ABCD$ расположены шары M и N. Изобразите траекторию движения шара M, если по нему ударили таким образом, что он, отразившись от бортов AB и BC, попал в шар N.

I$_3$. (**7 баллов**) Найдите все целые решения неравенства:

$$x^2 < 1 - 2\sin 2x.$$

Второй тур (15 минут)

II$_1$. (**7 баллов**) Докажите неравенство: $\dfrac{(a+1)^2}{b} + \dfrac{(b+1)^2}{a} \geqslant 8$, где $a > 0$ и $b > 0$.

II$_2$. (**6 баллов**) Найдите углы треугольника, если две его высоты не меньше сторон, к которым они проведены.

II$_3$. (**6 баллов**) Шахматист-любитель придумал новую фигуру, передвигающуюся «ходом козла»: на три клетки прямо и одну в сторону. Можно ли обойти всю шахматную доску «ходом козла», побывав на каждой клетке не менее одного раза?

Третий тур (20 минут)

III$_1$. (**8 баллов**) p_1 и p_2 — два последовательных простых числа. Известно, что $p_1 + p_2 = 2n$, где $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что n — составное число.

III$_2$. (**6 баллов**) Две окружности пересекаются в точках A и B и касаются некоторой прямой в точках C и D. Прямая AB пересекает отрезок CD в точке N. Докажите, что N — середина отрезка CD.

III$_3$. (**8 баллов**) Найдите наибольшее количество решений системы уравнений:

$$\begin{cases} |x-y| + |x+y| = 4, \\ |x-1| + |y| = a, \qquad a \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1997/1998 учебный год

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Решите уравнение: $5\sqrt{x-3} + 2\sqrt{x} + 3x = 21$.

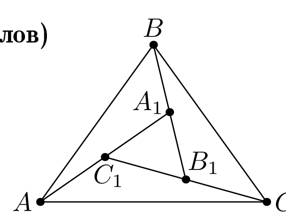
1.2. Верно ли, что в неравных треугольниках против неравных сторон лежат неравные углы?

1.3. На какую наибольшую степень числа 2 может делиться выражение $n^2 + 4n - 33$ при целых значениях n?

Второй тур (15 минут; каждая задача — 6 баллов)

2.1. Решите уравнение: $|x^2+x-2|+|x-3| = x^2 + 1$.

2.2. Найдите $S_{\triangle A_1B_1C_1}$ (см. рисунок), если $S_{ABC} = 7$, $AC_1 = C_1A_1$, $BA_1 = A_1B_1$, $CB_1 = B_1C_1$.



2.3. Можно ли из 37 ниток сплести сетку так, чтобы каждая нитка была связана ровно с пятью другими?

Третий тур (20 минут; каждая задача — 7 баллов)

3.1. Решите уравнение: $\sin^2 x + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2x} = \cos^2 3x$.

3.2. В трапеции $ABCD$ основание AB, диагональ AC и сторона AD равны между собой и имеют длину 5. Длина стороны BC равна 6. Найдите длину диагонали BD.

3.3. Найдите все целые значения a, при которых дробь $\dfrac{a^3-8}{a+2}$ принимает целые значения.

Четвертый тур (25 минут; каждая задача — 8 баллов)

4.1. Изобразите на координатной плоскости XOY множество точек, удовлетворяющих неравенству $y(x^2-9) \geqslant x-3$.

4.2. На биссектрисе внешнего угла при вершине C треугольника ABC выбрана произвольная точка M, не совпадающая с точкой C. Докажите, что $AM + MB > AC + CB$.

4.3. Дана таблица 8×8, к которой записаны числа от 1 до 64 (см. рисунок). Закрашивается 8 клеток так, что в каждой горизонтали и в каждой вертикали — ровно одна закрашенная клетка. Докажите, что сумма чисел, записанных в этих 8 клетках, не зависит от набора закрашенных клеток.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Пятый тур (30 минут; каждая задача — 9 баллов)

5.1. Известно, что графики уравнений $y = x^2 + x - 83$ и $x = y^2 + y - 84$ пересекаются в четырех точках. Существует ли окружность, содержащая эти четыре точки?

5.2. В четырехугольнике $ABCD$: $\angle ABD = \angle BDC = 50^\circ$, $\angle BCA = \angle CAD = 40^\circ$. Найдите величины углов четырехугольника.

5.3. Докажите неравенство: $\sin 2 + \cos 2 + 2(\sin 1 - \cos 1) > 1$.

1998/1999 учебный год

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. В зависимости от значений параметра b определите количество корней уравнения: $\sqrt{3x-5} = b - \sqrt{3x+11}$.

1.2. Окружность, построенная на основании AD трапеции $ABCD$ как на диаметре, проходит через середины боковых сторон и касается основания BC. Найдите углы трапеции.

1.3. Решите неравенство: $x^2 - (\sin 4 + \sin 5)\, x + \sin 4 \cdot \sin 5 < 0$.

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. При какой комбинации знаков верно равенство:

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{1+\sin\alpha} \pm \sqrt{1-\sin\alpha},$$

если $\alpha = \dfrac{19}{11}\pi$?

2.2. Точки A, B и C являются вершинами неравнобедренного треугольника. Сколько существует точек D таких, что четырехугольник с вершинами A, B, C и D имеет хотя бы одну ось симметрии?

2.3. Дано несколько (не менее двух) ненулевых чисел. Вместо некоторых двух чисел a и b из этого набора записываются числа $a+\dfrac{b}{2}$ и $b-\dfrac{a}{2}$. Затем эта операция производится с двумя произвольными числами из получившегося набора и так далее. Докажите, что после нескольких таких операций нельзя вновь получить исходный набор чисел.

Третий тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

3.1. К параболам, заданным уравнениями $y = x^2 + 4$ и $y = -x^2 + 2x$, проведены две общие касательные. Докажите, что четырехугольник, вершинами которого служат точки касания, является параллелограммом.

3.2. Стороны треугольника удовлетворяют неравенствам:

$$a \leqslant 5 \leqslant b \leqslant 6 \leqslant c \leqslant 8.$$

Найдите наибольшее возможное значение площади этого треугольника.

3.3. Первые 1511 натуральных чисел расставлены по порядку вдоль окружности. Затем, последовательно вычеркивается каждое второе число (2; 4; …; 1510; …). Этот процесс продолжается до тех пор, пока не останется только одно число. Какое это число?

Четвертый тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

4.1. Докажите, что ни при каких действительных a, b и c три числа: $(b-c)(bc-a^2)$, $(c-a)(ca-b^2)$ и $(a-b)(ab-c^2)$ не могут быть положительными одновременно.

4.2. Выпуклый двенадцатиугольник вписан в окружность. Шесть его сторон имеют длину $\sqrt{2}$, а каждая из оставшихся — $\sqrt{24}$. Найдите радиус окружности.

4.3. Каким наибольшим количеством нулей может оканчиваться десятичная запись числа $x = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$, где n — натуральное число?

Пятый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

5.1. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения

$$\cos A + \cos B + \cos C,$$

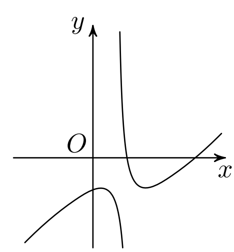
где A, B и C — углы треугольника.

5.2. В тетраэдре $PABC$ проведены биссектрисы PA_1, PB_1 и PC_1 треугольников PBC, PAC и PAB соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

5.3. Сколько раз в последовательности (a_n), заданной формулой $a_n = \left[\sqrt{2n} + \frac{1}{2}\right]$, встречается число 1511?

1999/2000 учебный год

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)



1.1. Может ли график функции $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{kx + l}$ иметь следующий вид (см. рисунок)?

1.2. В равнобокую трапецию вписан круг радиуса r. Найдите длину боковой стороны трапеции, если угол между диагональю и большим основанием равен α.

1.3. Квадрат 4×4 разрезают по границам клеток на четыре равных многоугольника. Сколькими способами это можно сделать (способы считаются различными, если при разрезании получаются неравные многоугольники)?

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Может ли сумма возрастающей и убывающей функций быть периодической функцией, отличной от постоянной?

2.2. Дан квадрат $ABCD$. На сторонах BC и CD выбраны точки K и N, так что $BK = KC$ и $CN : ND = 2 : 1$. Отрезки AK и BN пересекаются в точке T. Площадь четырехугольника $KCNT$ равна 13. Найдите площадь треугольника BTA.

2.3. Решите уравнение: $5\cos^5 x + 3\sin^3 x = 5$.

Третий тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

3.1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{z} = \dfrac{z}{u} = \dfrac{u}{s} = \dfrac{s}{t}, \\ x = 8u, \\ x + y + z + u + s + t = 15\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

3.2. Существует ли тетраэдр, периметр каждой грани которого больше суммы остальных трех ребер?

3.3. Какое наибольшее количество натуральных чисел, меньших пятидесяти, можно выбрать так, чтобы любые два из них были взаимно простыми?

Четвертый тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

4.1. Решите уравнение: $1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{3998} + x^{4000} = 2001x^{2000}$.

4.2. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $ABMP$ и $BCDK$. Докажите, что продолжение медианы BE треугольника ABC является высотой треугольника BMK.

4.3. Решите уравнение в натуральных числах:

$$12x^2 - 4x - 2xy + 3y - 9 = 0.$$

Пятый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

5.1. Существует ли натуральное n, такое что:

$$\sin(\sqrt{2}) + \sin(2\sqrt{2}) + \ldots + \sin(n\sqrt{2}) > 2000?$$

5.2. Существует ли такой пятиугольник, отличный от правильного, что точки попарного пересечения его диагоналей являются вершинами пятиугольника, который ему подобен?

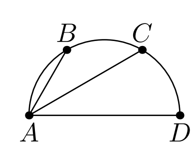
5.3. Решите уравнение: $(x^2 + [x] + 1)^2 + [x^2 + [x] + 1] = x - 1$.

2000/2001 учебный год

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Найдите наименьшее и наибольшее значение выражения $a\sin^2 x + b\cos^2 x$, где a и b — действительные числа.

1.2. Точки B и C делят полуокружность с диаметром AD на три равные части (см. рис.). Найдите площадь фигуры CAB, ограниченной хордами AB и AC и дугой BC, если радиус полуокружности равен R.



1.3. Пусть $S(x)$ — сумма цифр натурального числа x. Решите уравнение: $x + S(x) = 2001$.

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Приведенный квадратный трехчлен $P(x)$ имеет положительный дискриминант D. Сколько корней имеет уравнение $P(x)+P(x+\sqrt{D}) = 0$?

2.2. В треугольнике ABC биссектриса AE равна отрезку EC. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что $AC = 2AB$.

2.3. Существуют ли 6 последовательных натуральных чисел таких, что наименьшее общее кратное первых трех из них больше, чем наименьшее общее кратное трех следующих?

Третий тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

3.1. Найдите все значения a, для которых уравнение

$$ax^2 - 2x + 2a^2 - 4 = 0$$

имеет только целые корни.

3.2. O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Точка D лежит на стороне AC, причем отрезок BD перпендикулярен прямой AO. Найдите длину отрезка AD, если $AC = b$; $AB = c$.

3.3. Дана кучка из 2001 камня. Ее требуется разбить на 2001 кучку по одному камню в каждой, причем за один «шаг» разрешается разбивать любую из уже имеющихся кучек камней на две непустые кучки. На каждом «шаге», если количество камней в двух кучках, получающихся при разбиении, различно, то оплачивается штраф — 1 рубль, если же оно одинаково, то штраф не платится.

Какой наименьший штраф придется заплатить для того, чтобы осуществить указанное разбиение?

Четвертый тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

4.1. Функция $f(x)$ при всех действительных x удовлетворяет уравнению $2f(x)+f(x^2-1) = 1$. Какие значения может принимать $f(-\sqrt{2})$?

4.2. Существуют ли четыре точки A, B, C и D, не лежащие в одной плоскости, такие, что каждый из треугольников ABC, ABD, ACD и BCD является тупоугольным?

4.3. На плоскости задано конечное множество точек так, что для любых двух точек A и B из данного множества существует точка M из этого же множества такая, что $\angle AMB = \alpha$, где α — фиксированное число. Найдите значение α.

Пятый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

5.1. Сколько действительных корней имеет уравнение:

$$x^{37} + x^8 + 1 = 0?$$

5.2. Существуют ли на плоскости два выпуклых четырехугольника такие, что стороны каждого из них лежат на серединных перпендикулярах к сторонам другого?

5.3. Кучку из N спичек произвольным образом разбили на две кучки, подсчитали количество спичек в каждой кучке и записали их произведение. Затем, одну из новых кучек опять разбили на две, опять подсчитали количество спичек в каждой и записали новое произведение. Этот процесс продолжали до тех пор, пока не получили N кучек по одной спичке в каждой. Тогда все полученные произведения сложили и получили число S. Найдите S.

2001/2002 учебный год

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет действительные корни. Верно ли, что трехчлен $a^3x^2 + b^3x + c^3$ также имеет действительные корни?

1.2. Прямая проходит через центр квадрата со стороной 1. Найдите сумму квадратов расстояний от всех вершин квадрата до этой прямой.

1.3. Найдите две последние цифры в десятичной записи числа: $1! + 2! + \ldots + 2001! + 2002!$ (*Напомним, что* $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$).

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. (a_n) — арифметическая прогрессия, $a_1 = 1$. S_{2002} — наибольшая среди всех S_n. Какие значения может принимать разность прогрессии?

2.2. Верно ли, что если длина каждой высоты треугольника меньше 1, то его площадь меньше 1?

2.3. Изобразите 6 точек на плоскости так, чтобы они служили вершинами ровно для 17 треугольников.

Третий тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

3.1. Найдите наибольшее значение выражения $\sin x \cos y \cos z + \cos x \sin y \sin z$.

3.2. Верно ли, что если длина каждой медианы треугольника меньше 1, то его площадь меньше 1?

3.3. Нарисуйте эскиз графика непрерывной функции, которая каждое действительное значение принимает ровно три раза.

Четвертый тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

4.1. Найдите наименьшее значение выражения $\frac{y}{x}$, если известно, что $x^2 - 10x + y^2 - 2y + 1 = 0$.

4.2. Проекциями некоторой фигуры на каждую из двух перпендикулярных плоскостей являются правильные треугольники. Могут ли они быть неравными?

4.3. Можно ли функцию $y = x^3$ представить в виде суммы четной и периодической функций?

Пятый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

5.1. Решите уравнение: $(2x+2)(5-2x)(4x^2+8x+11) = 10(2x+3)^2$.

5.2. Проекциями некоторого треугольника на каждую из двух перпендикулярных плоскостей являются правильные треугольники. Могут ли они быть неравными?

5.3. Найдите все натуральные решения системы уравнений:

$$\begin{cases} k^2 + p = n^2, \\ p^2 + k = m^2. \end{cases}$$

2002/2003 учебный год

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{x + 6 - 2x^2} \cdot \cos(\pi x) = 0$?

1.2. В треугольнике ABC проведены перпендикуляры к стороне AB в точке B и к стороне AC в точке C, которые пересекаются в точке A_1. Аналогично, B_1 — точка пересечения перпендикуляров к стороне AB в точке A и к стороне BC в точке C, а C_1 — точка пересечения перпендикуляров к стороне AC в точке A и к стороне BC в точке B. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

1.3. На какую наибольшую степень двойки делится число $3^{2003} + 1$?

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Известно, что число p является корнем уравнения $x^3 - 3x - 1 = 0$. Найдите значение выражения $p^4 + 2p^3 - 3p^2 - 7p + 2001$.

2.2. Существует ли правильный многоугольник, одна из диагоналей которого равна сумме двух других?

2.3. Про функцию $f(x)$ известно, что при любых a и b выполняется равенство: $f(a+b)+f(a-b)=2f(a)+2f(b)$. Верно ли, что $f(x)$ — четная функция?

Третий тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

3.1. Решите уравнение:

$$x^4+4xy^2+2y^4+1=0.$$

3.2. Существуют ли прямоугольник и точка S (не обязательно лежащая в его плоскости) такие, что расстояния от точки S до вершин прямоугольника в каком-либо порядке равны 1, 3, 5 и 7?

3.3. Верно ли, что существует бесконечное множество натуральных чисел, которые нельзя представить в виде суммы квадратов двух натуральных чисел?

Четвертый тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

4.1. Известно, что для сторон a, b и c треугольника ABC выполняется равенство: $a+b=3c$. Найдите $\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{B}{2}$, где A и B — углы, противолежащие сторонам a и b соответственно.

4.2. Точка M — середина стороны BC выпуклого четырехугольника $ABCD$, $\angle AMD=120^\circ$. Докажите, что $AB+\dfrac{1}{2}BC+CD\geqslant AD$.

4.3. Вася записал по кругу несколько натуральных чисел, так что любые два соседних числа различаются на единицу. После этого он подсчитал сумму A всех чисел, которые больше каждого из двух своих соседей и сумму B всех чисел, которые меньше каждого из двух своих соседей. Эти две суммы Вася сообщил Пете. Сможет ли Петя по числам A и B установить количество чисел, записанных по кругу?

Пятый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

5.1. Докажите, что из любых пяти чисел можно выбрать два числа x и y таких, что выполняется неравенство: $0\leqslant\dfrac{x-y}{1+xy}\leqslant 1$.

5.2. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Известно, что $S_{ABE}=S_{DCE}=1$, $S_{ABCD}\leqslant 4$, $AD=3$. Найдите BC.

5.3. Внутри квадрата со стороной 1 располагается некоторая ломаная длиной 1000, не имеющая самопересечений. Существует ли прямая, имеющая общие точки не менее чем с пятьюстами звеньями этой ломаной?

2003/2004 учебный год

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Известно, что числа $a + b + c$ и $\dfrac{ab + bc + ca}{a + b + c}$ являются целыми. Верно ли, что число $\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c}$ также является целым?

1.2. Есть четыре одинаковых кирпича размером $1 \times 2 \times 4$. Объясните, как составить из них прямоугольный параллелепипед с наибольшей возможной длиной диагонали.

1.3. Найдите все натуральные значения n, при которых $n^5 + 2$ делится на $n + 2$.

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Решите уравнение: $\cos\sqrt{x} + \sqrt{\cos x} = 2$.

2.2. На шахматной доске построены векторы с началом в центре клетки $c2$ и концами в центрах всех остальных клеток. Найдите модуль суммы этих векторов, если сторона клетки доски равна 1.

2.3. Незнайка отметил на плоскости 15 точек и утверждает, что какое бы натуральное число N, где $1 \leqslant N \leqslant 7$, ему ни назвали, он сможет указать прямую, содержащую ровно N отмеченных точек. Прав ли он?

Третий тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

3.1. Последовательность чисел: 3; 7; 14; 24; ... такова, что разности соседних членов образуют арифметическую прогрессию. Найдите сотый член данной последовательности.

3.2. Диагонали трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) пересекаются в точке O. Докажите, что окружности, описанные около треугольников AOD и BOC, касаются друг друга.

3.3. У Васи есть набор из 24 карандашей различных цветов. Он хочет раскрасить некоторое количество кругов по следующему правилу: каждый круг красится в три различных цвета, любое сочетание из двух цветов используется ровно один раз (то есть, если в каком-то круге встретились, например, красный и синий цвета, то ни в каком другом круге такое сочетание цветов невозможно) и каждое сочетание двух цветов должно быть использовано.

Сможет ли он это сделать?

Четвертый тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

4.1. Решите уравнение: $\sqrt{1 - x^2} = 4x^3 - 3x$.

4.2. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Известно, что равны радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC, ABD, ACD и BCD. Докажите, что $AC = BD$.

4.3. Каждое из первых 2004 простых чисел возвели в степень, равную этому числу. Затем перемножили полученные числа и прибавили единицу. Является ли полученное число точным квадратом?

Пятый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

5.1. Известно, что x, y и z — положительные числа, произведение которых равно 0,5. Докажите, что $\dfrac{xy^2}{x^3+1} + \dfrac{yz^2}{y^3+1} + \dfrac{zx^2}{z^3+1} \geqslant 1$.

5.2. M — внутренняя точка отрезка AB, длина которого 11 см. Рассматриваются всевозможные треугольники ABC. Найдите наименьшее возможное расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников CAM и CBM.

5.3. На шахматной доске стоят десять белых фигур. Докажите, что можно поставить на эту доску черного коня так, чтобы он не нападал ни на одну из этих фигур.

2004/2005 учебный год

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Найдите все целые решения неравенства:

$$|x + 3y - 5,5| + |x - 3y| \leqslant \frac{2005}{2006}.$$

1.2. Противоположные стороны шестиугольника попарно равны и параллельны, кроме того, в него можно вписать окружность. Обязательно ли этот шестиугольник — правильный?

1.3. В некотором числе переставили цифры и получилось в три раза меньшее число. Докажите, что исходное число делилось на 27.

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Найдите все значения параметра a, для которых система уравнений

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = a, \\ \cos(x - y) + xy = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

2.2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. На высоте AA_1 выбрана такая точка D, что $A_1D = C_1D$. Точка E — середина стороны AC. Докажите, что точки A, C_1, D и E лежат на одной окружности.

2.3. Имеет ли уравнение $5x^4 = 4y^3 + 3$ целочисленные решения?

Третий тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

3.1. Докажите, что если $0 < x < \frac{\pi}{6}$, то

$$\sin x + \operatorname{tg}^2 x + \sin^3 x + \operatorname{tg}^4 x + \ldots < 1,2.$$

3.2. Внутри треугольника выбраны две точки. Расстояния от одной из них до сторон треугольника равны 1, 3 и 15, а от другой (стороны рассматриваются в том же порядке) — 4, 5 и 11. Найдите радиус окружности, вписанной в данный треугольник.

3.3. Пятизначное число назовем «неразложимым», если оно не раскладывается в произведение двух трехзначных чисел. Какое наибольшее количество таких чисел может идти подряд?

Четвертый тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

4.1. Докажите, что для любых значений x выполняется неравенство:

$$\sqrt{9 + x^2 - 3x\sqrt{2}} + \sqrt{16 + x^2 - 4x\sqrt{2}} \geqslant 5.$$

4.2. Можно ли разрезать куб на три равные части, не являющиеся ни параллелепипедами, ни пирамидами?

4.3. На шахматной доске стоят черная и белая шашки. За один ход разрешается сдвинуть одну из них на соседнюю (по стороне) клетку. Существует ли такая последовательность ходов, при которой каждое возможное расположение шашек встречается ровно один раз?

Пятый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

5.1. Существует ли многочлен $P(x)$ такой, что $P(1) = 1$, $P(2) = 2$, $P(3) = 3$, $P(4) = 4$, $P(5) = 5$, а его значения при всех остальных натуральных x — иррациональны?

5.2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$: $BC = 4$, $\angle ADC = 60^\circ$, $\angle BAD = 90^\circ$. $S_{ABCD} = \dfrac{AB \cdot CD + BC \cdot AD}{2}$. Найдите длину CD.

5.3. Каких треугольников с целыми сторонами больше: с периметром 2005 или с периметром 2008?

2005/2006 учебный год

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Известно, что уравнение $ax^5 + bx^4 + c = 0$ имеет ровно три действительных корня. Сколько корней может иметь уравнение $cx^5 + bx + a = 0$?

1.2. Существует ли замкнутая шестизвенная не плоская ломаная такая, что длины всех ее звеньев равны и углы между соседними звеньями равны?

1.3. Можно ли раскрасить в три цвета все ребра 99-угольной призмы так, что в каждой вершине сходятся все три цвета и у каждой грани (в том числе, у оснований) есть ребра всех трех цветов?

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 8a^2 + 7c^2 = 16ab, \\ 9b^2 + 4d^2 = 8cd. \end{cases}$$

2.2. В параллелограмме $ABCD$ точки E и F — середины сторон BC и CD соответственно. Могут ли лучи AE и AF делить угол BAD на три равные части?

2.3. Натуральное число называется упрощенным, если оно является произведением ровно двух простых чисел (не обязательно различных). Какое наибольшее количество последовательных натуральных чисел может оказаться упрощенными?

Третий тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

3.1. Докажите неравенство:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2} < \frac{99}{100}.$$

3.2. На отрезке AB построена полуокружность, как на диаметре. На этой полуокружности выбраны произвольным образом точки P и Q. Точка C — пересечение прямых AP и BQ, а точка X — пересечение касательных к полуокружности в точках P и Q. Докажите, что прямые CX и AB перпендикулярны.

3.3. Таблица 5×5 заполнена числами 1, 2, …, 25, причем любые два последовательных числа записаны в соседних (имеющих общую сторону) клетках. Какое наибольшее количество простых чисел может оказаться в одном столбце?

Четвертый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

4.1. Существует ли треугольник, в котором синус одного угла равен косинусу другого и равен тангенсу третьего?

4.2. Во вписанном четырехугольнике длины двух противолежащих сторон равны a и b, острый угол между диагоналями равен φ. Найдите все возможные значения радиуса окружности, описанной около четырехугольника.

4.3. Может ли функция, непрерывная на множестве действительных чисел, принимать во всех рациональных точках иррациональные значения, а во всех иррациональных точках — рациональные?

Пятый тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

5.1. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения $x^2 + xy + y^2$, если $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2$.

5.2. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ точка M лежит на стороне AD, причем $BM||CD$ и $CM||BA$. Найдите BC, если $AM = a$; $DM = b$.

5.3. На плоскости отмечены вершины равностороннего треугольника. На каждом шаге разрешается отметить середину отрезка, если его концы также отмечены. Может ли на каком-то шаге оказаться отмеченным центр исходного треугольника?

11 класс

1998/1999 учебный год

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Решите уравнение: $2\cos(0{,}1x) = 2^x + 2^{-x}$.

1.2. Дана трапеция, в которую можно вписать окружность. Докажите, что окружности, построенные на её боковых сторонах, как на диаметрах, касаются друг друга.

1.3. Назовем автобусный билет несчастливым, если сумма цифр его шестизначного номера делится на 13. Могут ли два идущих подряд билета оказаться несчастливыми?

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Решите уравнение: $5^x - 3^x = 16$.

2.2. Верно ли, что если в выпуклом пятиугольнике равны все внутренние углы, то вокруг него можно описать окружность?

2.3. Укажите десять различных натуральных чисел, сумма которых делится на каждое из этих чисел.

Третий тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

3.1. Докажите, что при любых действительных значениях чисел a, b и c хотя бы одно из уравнений: $ax^2 + 2bx + c = 0$, $bx^2 + 2cx + a = 0$, $cx^2 + 2ax + b = 0$ имеет хотя бы один действительный корень.

3.2. Из вершины A треугольника ABC опущен перпендикуляр AK на биссектрису внешнего угла треугольника при вершине B. Сравните периметры треугольников AKC и ABC.

3.3. На бесконечной шашечной доске на соседних клетках по диагонали стоят две шашки черного цвета. Можно ли поставить на доску белую шашку и некоторое количество черных шашек так, чтобы белая шашка «съела» все стоящие на доске черные шашки одним ходом?

Четвертый тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

4.1. Решите уравнение: $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{3^x - 1}{3^x + 1} = \log_3(2x - 7) + x - 6$.

4.2. Можно ли через произвольную точку в пространстве провести 1999 различных прямых так, чтобы полученное множество прямых удовлетворяло условию: «для любых двух прямых существует третья прямая, перпендикулярная им обеим»?

4.3. Докажите, что если сумма цифр натурального числа не меняется при умножении на 5, то это число делится на 9.

Пятый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

5.1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x + \sqrt{1-y^2} = 1, \\ y + \sqrt{1-x^2} = \sqrt{3}. \end{cases}$$

5.2. Правильный многоугольник с нечетным количеством вершин разбит произвольным образом на треугольники диагоналями, не имеющими общих внутренних точек. Докажите, что хотя бы один из этих треугольников является остроугольным.

5.3. Множество натуральных чисел разбейте на два подмножества так, чтобы каждое из них не содержало ни одной бесконечной арифметической прогрессии.

1999/2000 учебный год

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Вычислите: $\cos 36^\circ - \sin 18^\circ$.

1.2. Найдите наименьший радиус круга, из которого можно вырезать треугольник, длины сторон которого 4 см, 5 см и 7 см.

1.3. Представьте число 1999 в виде частного от деления пятой степени какого-либо натурального числа и седьмой степени какого-либо натурального числа.

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Решите уравнение:

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} = 2.$$

2.2. O — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$. Треугольники AOB, BOC, COD и DOA имеют равные периметры. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники AOB, BOC и COD равны соответственно 3, 4 и 6. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник DOA.

2.3. В школьной олимпиаде по математике участвовало 100 человек, по физике — 50 человек, по информатике — 48 человек. Когда каждого из учеников спросили, в скольких олимпиадах он участвовал, ответ «по крайней мере в двух» дали в два раза меньше человек, чем ответ «не менее, чем в одной», а ответ «в трех» — втрое меньше человек, чем ответ «не менее, чем в одной». Сколько всего учеников приняло участие в этих олимпиадах?

Третий тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

3.1. Найдите наименьшее значение выражения: $\dfrac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3.2. Ортогональными проекциями некоторого тела на каждую из двух данных плоскостей являются круги. Докажите, что их диаметры равны.

3.3. Найдите все такие x, что $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{tg} 2x$ являются целыми числами.

Четвертый тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

4.1. Существует ли функция $f(x)$ такая, что область ее определения — все действительные числа и для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $f(x^2) = x$?

4.2. Площадь полной поверхности треугольной пирамиды равна S. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, вершинами которой являются точки пересечения медиан граней данной пирамиды.

4.3. При каких целых n значение выражения $\sqrt{n^2-n+1}$ является целым числом?

Пятый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

5.1. Укажите какую-нибудь функцию, которая дифференцируема на $(-\infty, +\infty)$, а ее производная дифференцируема при всех x, кроме целых.

5.2. Докажите, что сумма синусов внутренних углов выпуклого 1999-угольника меньше 2π.

5.3. Верно ли, что в любой арифметической прогрессии с натуральными членами найдутся два числа с одинаковой суммой цифр в десятичной записи?

2000/2001 учебный год

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} xy = 1, \\ x + y + \cos^2 z = 2. \end{cases}$

1.2. Существует ли пирамида, для которой найдутся ровно семь плоскостей, каждая из которых равноудалена от всех вершин пирамиды?

1.3. Сколько существует натуральных n таких, что $2000 < \sqrt{n} < 2001$?

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Решите уравнение: $x^2 - 5x - 4\sqrt{x} + 13 = 0$.

2.2. Окружность, касающаяся гипотенузы прямоугольного треугольника и продолжений его катетов, имеет радиус R. Найдите периметр треугольника.

2.3. На доске написано уравнение: «$\ldots x^3 + \ldots x^2 + \ldots x + \ldots = 0$» без коэффициентов. Двое по очереди ставят коэффициенты (действительные числа). Второй игрок стремится к тому, чтобы хотя бы один корень уравнения был целым. Может ли первый ему в этом помешать?

Третий тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

3.1. $P(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$. Укажите какую-нибудь прямую, на которой график $P(x)$ отсекает равные отрезки.

3.2. $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма. Ее сечение BCA_1 имеет площадь Q. Найдите объем призмы, если расстояние от C_1 до плоскости этого сечения равно h.

3.3. При каких натуральных n число $A = 1313\ldots13$ (всего $2n$ цифр) делится на 63?

Четвертый тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

4.1. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + a, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

имеет единственное решение?

4.2. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC угол A — прямой, E — точка пересечения диагоналей, точка F — основание перпендикуляра, опущенного из E на сторону AB. Найдите $\angle CFE$, если $\angle DFE = \alpha$.

4.3. Последовательные нечетные числа сгруппированы следующим образом: 1; (3; 5); (7; 9; 11); (13; 15; 17; 19); .... Чему равна сумма чисел в n-й группе?

Пятый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

5.1. $P(x) = (x-4)(x-3)(x-2)(x-1)\,x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$. Найдите сумму коэффициентов при четных степенях многочлена $P'(x)$.

5.2. В треугольнике ABC: $\angle C = 10^\circ$, $\angle B = 20^\circ$. Вне треугольника выбрана точка M так, что треугольник CMB — правильный (точки M и A лежат в разных полуплоскостях относительно BC). Найдите углы MAB и MAC.

5.3. Не используя микрокалькулятор, сравните значения выражений: $\arcsin(\arccos m)$ и $\arccos(\arcsin m)$, где $m = \dfrac{\sin 1 + \cos 1}{2}$.

2001/2002 учебный год

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Найдите площадь фигуры, которая задана на координатной плоскости системой неравенств:

$$\begin{cases} x \leqslant \sqrt{1-y^2}, \\ y \leqslant \sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

1.2. Можно ли расположить в пространстве 9 шаров так, чтобы каждый из них касался ровно пяти других?

1.3. Представьте число 30 в виде произведения как можно меньшего количества множителей, сумма которых равна нулю.

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Докажите, что для любой функции $f(x)$ существуют функции $g(x)$ и $h(x)$ такие, что $f(x) = g(x)\sin x + h(x)\cos x$.

2.2. Стороны пятиугольника, взятые последовательно, равны 4 см, 6 см, 8 см, 7 см и 9 см. Можно ли в этот пятиугольник вписать окружность?

2.3. Найдите все простые числа x, y и z, для которых выполняется равенство: $z = 1 + x^y$.

Третий тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

3.1. Решите уравнение: $x^3 + x^2 + x = -\dfrac{1}{3}$.

3.2. В треугольнике ABC проведены медианы AL и BM, пересекающиеся в точке K. Вершина C лежит на окружности, проходящей через точки K, L и M. Найдите длину медианы CN, если длина стороны AB равна a.

3.3. Приведите пример многогранника, имеющего столько же вершин, ребер и граней, сколько у куба, но не имеющего ни одной четырехугольной грани.

Четвертый тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

4.1. Известно, что многочлен $P(x)$ принимает целые значения при всех целых значениях x. Может ли один из его коэффициентов быть равен $\dfrac{1}{2001}$?

4.2. Дан треугольник ABC. Объясните, как построить точку O внутри треугольника такую, что площади треугольников AOC, BOC и AOB относятся, как $7:11:13$.

4.3. Можно ли разбить числа 1, 2, 3, ..., 99, 100 на три группы так, чтобы сумма чисел в одной группе делилась на 102, сумма чисел в другой группе делилась на 203, а сумма чисел в третьей группе делилась на 304?

Пятый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

5.1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^3 + xy^4 = y^9 + y^7, \\ x^2 + y^3 = 2. \end{cases}$

5.2. В правильной треугольной пирамиде $PABC$ на боковых ребрах выбраны точки: K — середина PA, M — середина PB, $D \in PC$, $PD : DC = 2 : 1$. Через точки K, M и D проведена плоскость, которая делит полную поверхность пирамиды на части, отношение площадей которых равно составному натуральному числу. Какому?

5.3. Существуют ли 2001 различных натуральных чисел, каждое из которых является кубом некоторого натурального числа и которые различаются только порядком цифр?

2002/2003 учебный год

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Решите неравенство: $\left|\dfrac{2x^3 + 2x^2 - x + 2}{x+1}\right| \leqslant |1 - 2x^2| + \dfrac{3}{|x+1|}$.

1.2. В треугольнике ABC биссектрисы AD и CE пересекаются в точке O; $\angle ABC = 60^\circ$. Докажите, что $OD = OE$.

1.3. Пусть $f(x)$ — некоторая функция, определенная на всей числовой прямой. Известно, что функция $f(f(x))$ — возрастающая. Верно ли, что функция $f(x)$ — монотонная?

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Найдите все целые решения уравнения $\sqrt{x+\sqrt{x}} = y - 2002$.

2.2. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребра AB и CD имеют длины a и b соответственно. Найдите сумму квадратов длин двух отрезков, один из которых соединяет середины AC и BD, а другой — середины BC и AD.

2.3. Саша вычислил значение 2002! В числе, полученном Сашей, Андрей слева направо поставил знаки действий: между первой и второй цифрами знак «–», между второй и третьей цифрами знак «+», между третьей и четвертой — «–», и так далее, до конца. Затем Саша вычислил результат этих действий. В полученном Сашей числе Андрей опять поставил между цифрами знаки «–» и «+» по такому же правилу. После этого Саша опять вычислил результат, и так далее.

После некоторого количества таких операций было получено однозначное число. Какое?

Третий тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

3.1. Для действительных чисел x, y и z выполняются два условия: $x+y+z=5$ и $xy+yz+zx=8$. Докажите, что $1 \leqslant x \leqslant \frac{7}{3}$.

3.2. Десять точек A_1, A_2, …, A_{10} делят окружность единичного радиуса на 10 равных дуг. Найдите разность длин отрезков A_1A_4 и A_1A_2.

3.3. На окружности единичного радиуса произвольным образом отмечено 100 точек. Верно ли, что на этой окружности обязательно найдется еще одна точка, сумма расстояний от которой до всех отмеченных не меньше ста?

Четвертый тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

4.1. Решите уравнение:

$$\left(\frac{x^3+x}{3}\right)^3 + \frac{x^3+x}{3} = 3x.$$

4.2. Диагональ BD вписанного четырехугольника $ABCD$ является биссектрисой угла ABC. Найдите площадь этого четырехугольника, если $BD = 6$ см, $\angle ABC = 60°$.

4.3. Из бесконечной последовательности $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots$ выберите шесть чисел, которые составляют арифметическую прогрессию.

Пятый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

5.1. Решите уравнение:
$$\sin^{2001} x + \frac{1}{\cos^{2003} x} = \cos^{2001} x + \frac{1}{\sin^{2003} x}.$$

5.2. В основании пирамиды, имеющей объем V, лежит параллелограмм. Длины боковых ребер этой пирамиды различны и отличны от длин ребер основания. Найдите объем треугольной пирамиды, составленной из боковых граней данной пирамиды.

5.3. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1}$, если $a + b + c = 1$.

2003/2004 учебный год

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Числа x и y таковы, что $\dfrac{xy}{x^2+6y^2} = \dfrac{1}{5}$. Найдите значение выражения $\dfrac{xy}{x^2-6y^2}$.

1.2. Боковые рёбра четырехугольной пирамиды имеют длины 1, 6 и 11. Может ли основание этой пирамиды быть квадратом?

1.3. На шахматной доске отмечены центры всех клеток. Рассмотрим все векторы, начало которых в центре черной клетки, а конец — в центре белой клетки. Докажите, что сумма этих векторов равна нулевому вектору.

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Пусть $f(x)$ — некоторая функция, определенная на всей числовой прямой. Известно, что функция $f(f(x))$ — непрерывная. Верно ли, что функция $f(x)$ — непрерывная?

2.2. $ABCD$ — ромб. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 3 см, а радиус окружности, описанной около треугольника BDC, равен 4 см. Найдите периметр ромба.

2.3. Найдите все натуральные значения n, для которых выполняется равенство: $n^3 - n = n!$

Третий тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

3.1. Решите уравнение: $2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} = 2 \cdot 2^{\sqrt[6]{x}}$.

3.2. В равнобедренном треугольнике ABC на боковых сторонах AB и BC взяты точки K и L так, что $AK = BL$. Докажите, что $KL \geqslant \frac{1}{2}AC$.

3.3. Решая числовой ребус ДВА + ТРИ = ПЯТЬ, Вася получил 150 возможных ответов. Верно ли, что Вася нашел все решения ребуса?

Четвертый тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

4.1. Найдите значение выражения: $(1+\operatorname{tg} 1^\circ)\,(1+\operatorname{tg} 2^\circ)\ldots(1+\operatorname{tg} 44^\circ)$.

4.2. По горизонтальной прямой s произвольным образом «катаются» две окружности, радиусы которых r и R. К ним проведены две общие внутренние касательные, пересекающиеся в точке M. По какой траектории движется точка M?

4.3. На столе лежат три кучки камней, в одной из которых 5 камней, в другой — 49, а в третьей — 51. Разрешается делать две операции: 1) складывать любые две кучки камней в одну; 2) любую кучку с четным количеством камней делить на две равные кучки.

Можно ли, выполняя только эти операции, разложить камни на кучки, состоящие из одного камня каждая?

Пятый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

5.1. Известно, что для чисел a, b и c выполняются равенства: $a^3 - b^3 - c^3 = 3abc$ и $a^2 = 2(b+c)$. Найдите число a.

5.2. Площадь ортогональной проекции некоторого параллелепипеда на плоскость одной из его граней в два раза больше площади этой грани, площадь его ортогональной проекции на плоскость другой грани в полтора раза больше площади этой грани, и, наконец, площадь его проекции на плоскость третьей грани равна площади этой грани. Найдите плоские углы в гранях данного параллелепипеда.

5.3. На доске было записано 17 двузначных чисел. Математик выбрал одно из них и возвел его в сотую степень. Оказалось, что полученное число делится на каждое из оставшихся шестнадцати. Верно ли, что оно делится и на их произведение?

2004/2005 учебный год

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Решите уравнение: $2^{|x|} - \cos y + \lg(1 + x^2 + |y|) = 0$.

1.2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки K, M, N и P — середины сторон AB, BC, CD и DA соответственно. Отрезки AM и CK пересекаются в точке E, а отрезки AN и CP — в точке F. Найдите площадь четырехугольника $AECF$, если площадь $ABCD$ равна 12.

1.3. Пусть M — наименьшее из четырех чисел: a, b, c и $1-a-b-c$. Найдите наибольшее значение M.

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Найдите все значения k и b такие, что система уравнений

$$\begin{cases} y = kx + b, \\ |x+2| + |y-2| = 4 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений.

2.2. Существует ли невыпуклый многогранник, имеющий ровно пять вершин?

2.3. Докажите, что если числа m и m^2+2 — простые, то и число m^3+2 — также простое.

Третий тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

3.1. Докажите, что существуют различные действительные числа x, y и z такие, что $x^3 - 3x^2 = y^3 - 3y^2 = z^3 - 3z^2$. Найдите все значения, которые может принимать сумма $x + y + z$ таких чисел.

3.2. AM — биссектриса равнобедренного треугольника ABC с основанием AC. Докажите, что если $\angle B = 100^\circ$, то $AM + BM = AC$.

3.3. Можно ли из каких-нибудь девяти выпуклых шестиугольников составить какой-нибудь выпуклый тридцатидевятиугольник?

Четвертый тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

4.1. Решите уравнение: $2^{x^5} + 4^{x^4} + 256^4 = 3 \cdot 16^{x^3}$.

4.2. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде проведено сечение через диагонали оснований, а также сечение, проходящее через ребро нижнего основания и противолежащее ребро верхнего основания. Найдите угол между секущими плоскостями, если площади данных сечений равны.

4.3. На каждой половинке кости домино указано число очков — от 0 до некоторого N, большего 1. Все возможные пары чисел встречаются по одному разу (включая «дубли» — пары одинаковых чисел). Все кости домино выложены в цепочку, причем на прилегающих половинках соседних костей стоят одинаковые числа. Могут ли на концах цепочки стоять различные числа?

Пятый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

5.1. Известно, что $9x^2 + 16y^2 + 144z^2 = 169$. Найдите наибольшее возможное значение выражения $6x - 4y + 24z$.

5.2. Одна окружность проходит через вершины A и C прямоугольника $ABCD$, другая — через вершины B и D. Докажите, что их общая хорда проходит через центр прямоугольника.

5.3. Количество пользователей интернета росло в течение всего года. При этом на четыре разных квартала (в каком-то порядке) пришлись: наибольший абсолютный прирост, наименьший абсолютный прирост, наибольший относительный прирост и наименьший относительный прирост. (Абсолютный прирост — разность между новым и старым значением величины. Относительный прирост — это абсолютный прирост, делённый на старое значение.)

Известно, что наименьший относительный прирост был раньше, чем наибольший относительный. В каком квартале был наибольший абсолютный прирост?

2005/2006 учебный год

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Известно, что каждое из двух квадратных уравнений $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$ имеет ровно один действительный корень, причем эти корни различны. Может ли уравнение $f(x)+g(x) = 0$ также иметь ровно один действительный корень?

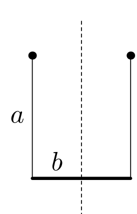
1.2. Сумма расстояний от каждой внутренней точки выпуклого пятиугольника до всех прямых, содержащих его стороны, одна и та же. Верно ли, что этот пятиугольник обязательно является правильным?

1.3. Натуральное число называется примарным, если оно является степенью простого числа с натуральным показателем (например, 7^1 или 13^4). Найдите самую длинную цепочку примарных чисел, идущих подряд.

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Существуют ли две функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные на R и тождественно не равные нулю, такие, что $f(g(x)) \equiv 0$ и $g(f(x)) \equiv 0$?

2.2. Напараллельных веревках длины a подвешена балка длины b (см. рисунок). Ее повернули вокруг вертикальной оси на угол 60° так, что в процессе поворота веревки оставались натянутыми. На какую высоту поднялась балка?



2.3. Найдите все целые решения уравнения: $x^2 - 2xy + 2x - y + 1 = 0$.

Третий тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

3.1. Решите систему уравнений:

$$\begin{aligned} x + y^2 &= z^3, \\ x^2 + y^3 &= z^4, \\ x^3 + y^4 &= z^5. \end{aligned}$$

3.2. Известно, что длина каждой биссектрисы треугольника не превосходит 1. Найдите наибольшее значение площади треугольника.

3.3. Пятнадцать команд играют турнир в один круг (каждая встречается с каждой один раз). Докажите, что в некотором матче встретятся команды, сыгравшие до этого в сумме нечетное количество матчей.

Четвертый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

4.1. Докажите, что если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$ и $a + b + c = 3$, то $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geqslant ab + bc + ca$.

4.2. В тетраэдре $PABC$ высота, опущенная из вершины P, проходит через ортоцентр треугольника ABC. Найдите отношение площадей граней PAB и PAC, если $PC = 6 - \sqrt{2}$; $PB = 6 + \sqrt{2}$; $BC = 2\sqrt{19}$.

4.3. Существует ли такое натуральное число N, что если приписать его к самому себе, то получится полный квадрат?

Пятый тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

5.1. Зная, что $\sin\alpha > 0$ и $\sin 3\alpha > 0{,}25$, докажите, что $\sin\alpha > \dfrac{109}{1296}$.

5.2. В окружность вписан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB. На большем катете BC взята точка D так, что $AC = BD$. Найдите угол DEC, где E — середина дуги AB, содержащей точку C.

5.3. На поверхности кубика Рубика в каждом из 54 квадратиков проведена одна диагональ. Могут ли эти диагонали образовывать замкнутую траекторию, не имеющую самопересечений? (Кубик Рубика представляет собой куб, составленный из 27 одинаковых кубиков).

Ответы и решения

7 класс

1998/1999 учебный год

1.1. *Ответ*: $\angle ABC = 120^\circ$.

Углы ABD и CBD равны, так как BD — биссектриса угла ABC (см. рис. 1). Тогда, по условию, угол EBC, смежный с углом ABC, равен каждому из углов ABD и CBD. Так как сумма этих трех углов равна 180°, то каждый из них имеет величину 60°, то есть, $\angle ABC = 120^\circ$.

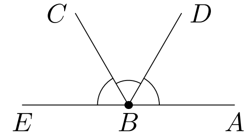


Рис. 1

1.2. *Ответ*: параллельные прямые задают уравнения в) и е).

Перепишем уравнения данных прямых так, чтобы можно было сравнить их угловые коэффициенты. а) $y = 3x - 5$; б) $y = 0{,}5x + 3$; в) $y = -0{,}7x$; г) $y = 0{,}5x + 3$; д) $y = \frac{1}{3}x$; е) $y = -0{,}7x + 0{,}4$. Прямые параллельны, если их угловые коэффициенты равны, а свободные члены различны, следовательно, прямые б) и г) совпадают, а прямые в) и е) параллельны.

1.3. *Ответ*: 1717.

Пусть $S = 1 + 4 + 7 + \ldots + 97 + 100$, тогда $S = 100 + 97 + \ldots + 4 + 1$, значит, $2S = (1 + 100) + (4 + 97) + \ldots + (97 + 4) + (100 + 1)$, причем количество пар равно $(100 + 2) : 3 = 34$, значит, $S = \frac{34 \cdot 101}{2} = 1717$.

2.1. *Ответ*: да, является.

Рассмотрим треугольники ADB, BEC и CMA (см. рис. 2). Имеем: $AB = BC = CA$; $\angle BAD = \angle CBE = \angle ACM$ (по условию); $\angle ABD = \angle BCE = \angle CAM$, так как эти углы дополняют равные углы до 60°. Следовательно, треугольники равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Из равенства треугольников следует равенство их соответствующих сторон: $AD = BE = CM$ и $BD = CE = AM$. Так как $MD = AD - AM$, $DE = BE - DB$, $ME = CM - CE$, то $MD = DE = ME$, то есть треугольник MDE — равносторонний.

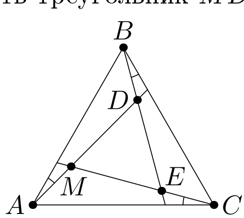


Рис. 2

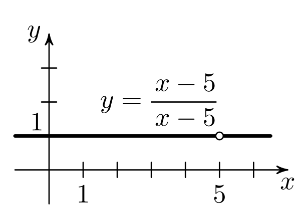


Рис. 3

2.2. *Ответ*: см. рис. 3.

Функция имеет вид: $y = 1$, если $x \neq 5$.

2.3. *Ответ*: 2430 или 6435.

Обозначим цифры, которые приписаны к числу 43 слева и справа, соответственно a и b. Число делится на 45, значит, оно делится на 5 и на 9. Так как число делится на 5, то b (последняя цифра) равна 0 или 5. Сумма цифр числа равна: $a + 4 + 3 + b = a + 7 + b$. Пользуясь признаком делимости на 9, получаем, что если $b = 0$, то $a = 2$; если $b = 5$, то $a = 6$.

3.1. *Ответ*: $AB = 8$ км; $BC = 4$ км; $CD = 7$ км; $DE = 5$ км; $EF = 11$ км.

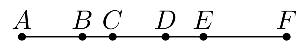


Рис. 4

См. рис. 4: $AB = AF - (BD + DF) = 35 - (11 + 16) = 8$ (км). $BC = AC - AB = 12 - 8 = 4$ (км). $CD = BD - BC = 11 - 4 = 7$ (км). $DE = CE - CD = 12 - 7 = 5$ (км). $EF = DF - DE = 16 - 5 = 11$ (км).

3.2. *Ответ*: $y = -2{,}5x$; $y = -x$; $y = -2x$; $y = 1{,}5x$; $y = 1{,}6x$.

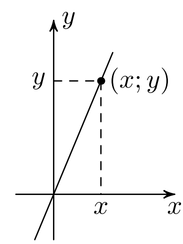


Рис. 5

Прямо пропорциональная зависимость задаётся формулой вида: $y = kx$, где $k \neq 0$. Тогда, если $x \neq 0$, то $k = \dfrac{y}{x}$ (см. рис. 5).

3.3. *Ответ*: да, делится.

Сумма цифр данного числа: $6 \cdot 1998 = 2 \cdot 3 \times 3 \cdot 666 = 2 \cdot 666 \cdot 9$ делится на 9, следовательно, число делится на 9.

4.1. *Ответ*: утверждения а)–в) не верны, например, см. рис. 6а–в.

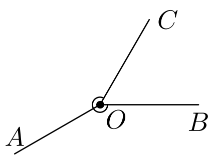


Рис. 6а

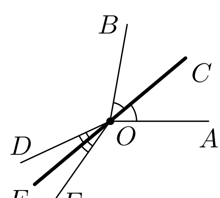


Рис. 6б

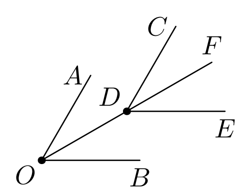


Рис. 6в

4.2. *Ответ*: 32 года.

Сумма возрастов игроков до травмы была $22 \cdot 11 = 242$ (года), а после травмы — $21 \cdot 10 = 210$ (лет). Возраст игрока, ушедшего с поля, равен $242 - 210 = 32$ (года).

4.3. *Ответ*: а) можно; б) нельзя.

а) Например, $m = 444$, $n = 3$. б) Нельзя, так как число m делится на 2, а число n не делится на 2.

1999/2000 учебный год

1.1. *Ответ*: 2000.

Раскрыв скобки, получим: $1-2+3-4+\ldots+1999-2000+x=1000$; $-1000+x=1000$; $x=2000$.

1.2. Нет. Рассмотрим, например, два равнобедренных треугольника, в одном из которых длину 6 см имеет основание, а в другом — боковая сторона, причем величину 100° имеет в каждом треугольнике угол при вершине (угол при основании равнобедренного треугольника не может быть тупым). Треугольники не равны, так как не равны их соответствующие стороны.

1.3. *Ответ*: например, $2001=\dfrac{\left(2001^9\right)^9}{\left(2001^8\right)^{10}}$.

2.1. *Ответ*: $(x^2+3x+2)(x+3)=(x+1)(x^2+5x+6)$.

Обозначив неизвестные коэффициенты a, b и c соответственно, и приведя к стандартному виду многочлены в левой и правой части, получим:

$$(x^2+ax+2)(x+3)=x^3+(a+3)x^2+(3a+2)x+6;$$

$$(x+b)(x^2+cx+6)=x^3+(b+c)x^2+(bc+6)+6b.$$

Данное равенство будет являться тождеством тогда и только тогда, когда одновременно выполняются равенства: $6b=6$; $bc+6=3a+2$; $b+c=a+3$. Решая соответствующую систему уравнений, получим, что $b=1$; $a=3$; $c=5$.

Так как по условию задачи не требуется доказывать единственность искомого набора чисел, то возможно также решение методом подбора.

2.2. Достаточно зачеркнуть четыре точки, например, отмеченные на рис. 7.

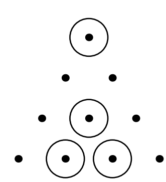


Рис. 7

Тот факт, что меньше четырех точек зачеркнуть нельзя, учащиеся (при данной формулировке условия) доказывать не обязаны. Отметим, что доказательство этого следует из того, что должна быть зачеркнута центральная точка и по-крайней мере еще три.

2.3. *Ответ*: $\frac{1}{8}$.

$$\frac{8+222\cdot 444\cdot 888+444\cdot 888\cdot 1776}{2\cdot 4\cdot 8+444\cdot 888\cdot 1776+888\cdot 1776\cdot 3552}=$$
$$=\frac{1\cdot 2\cdot 4\cdot(1+222^2+444^2)}{2\cdot 4\cdot 8\cdot(1+222^2+444^2)}=\frac{1}{8}.$$

3.1. *Первый способ.* Так как $b=\dfrac{a+c}{2}$ и $a>c$, то $a>b>c$. Тогда,

$$ab+bc-ac-b^2=(ab-ac)+(bc-b^2)=a(b-c)-b(b-c)=(a-b)(b-c)>0.$$

Второй способ. Подставим значение b в данное выражение и преобразуем его, используя формулы сокращенного умножения:

$$ab+bc-ac-b^2=a\cdot\frac{a+c}{2}+\frac{a+c}{2}\cdot c-ac-\left(\frac{a+c}{2}\right)^2=$$
$$=\frac{(a+c)^2}{2}-\frac{(a+c)^2}{4}-ac=\frac{(a+c)^2}{4}-ac=\frac{(a-c)^2}{4}>0,$$

так как $a>c$.

3.2. *Ответ*: 20 см.

В прямоугольном треугольнике AHC с прямым углом H отрезок HM является медианой, проведенной к гипотенузе (см. рис. 8). Следовательно, $AC=2MH=20$ см.

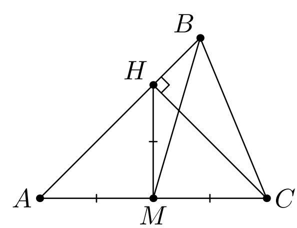


Рис. 8

3.3. *Ответ*: ни одному из рассказов верить нельзя.

Пусть истинно высказывание Винтика, тогда должно выполняться равенство: $n+3n+6n=64$, где n — количество фигур, оставшихся у Винтика. Так как n — натуральное число, то равенство выполняться не может, то есть, рассказу Винтика верить нельзя. Аналогично, если истинно высказывание Шпунтика, то должно выполняться равенство: $m+5m+10m=64$, где m — количество фигур, оставшихся у Шпунтика. Это равенство верно при $m=4$, но, так как у его соперника в этом случае должно остаться 20 фигур, а количество шахматных фигур одного цвета во время партии не может быть больше 16, то рассказу Шпунтика также верить нельзя.

4.1. *Ответ*: 16.

В первом случае, наименьшее количество занятых сидений равно 7, а наибольшее — 13. Во втором случае, наименьшее количество занятых сидений равно 5, а наибольшее — 10. Таким образом, если x — количество всех сидений в автобусе, то выполняются неравенства: $7+9 \leqslant \leqslant x \leqslant 13+9$ и $5+6 \leqslant x \leqslant 10+6$. Отсюда, единственным возможным значением x является 16, причем оно может достигаться только тогда, когда в первом случае занято максимальное количество двухместных сидений, а во втором случае занято максимальное количество одноместных. Проверяем: в первом случае, 13 человек заняли 6 двухместных и одно одноместное сидение, оставив 9 одноместных сидений свободными; во втором случае, 10 человек заняли 10 одноместных сидений, оставив 6 двухместных сидений свободными. То есть, условие задачи выполняется, если в автобусе шесть сидений — двухместных и десять сидений — одноместных.

4.2. *Ответ*: 6.

Так как после каждого разреза количество частей не может возрасти более, чем в два раза, а $64 = 2^6$, то количество разрезов не может быть меньше 6. Остается привести пример, когда количество разрезов равно 6. Для этого достаточно, после разреза куба на две равные части плоскостью, параллельной двум его граням, поставить полученные части «в столбик» и произвести второй разрез, в результате которого мы получим четыре части. Их, в свою очередь, ставим «в столбик», производим разрез, который опять удваивает количество частей и так далее.

4.3. *Ответ*: 217.

Пусть x — номер квартиры Джона. Тогда, номер его этажа равен $239 - x$. Частное от деления с остатком номера квартиры на 10 равно номеру предыдущего этажа, поэтому: $x = 10\cdot(238-x)+r$, где $0 \leqslant r < 9$, $11x = 2380 + r$, $x = 216 + \dfrac{4+r}{11}$. Поскольку x является натуральным числом тогда и только тогда, когда $r = 7$, то $x = 217$.

2000/2001 учебный год

1.1. *Ответ*: при $m = \pm 2001$.

Корнями данных уравнений являются числа $\dfrac{2001}{m}$ и $\dfrac{m}{2001}$ соответственно. $\dfrac{2001}{m} = \dfrac{m}{2001} \Leftrightarrow m^2 = 2001^2 \Leftrightarrow m = \pm 2001$.

1.2. *Ответ*: площади поверхностей фигур равны.

Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — один из «угловых» кубиков (см. рис. 9). Тогда, ровно три его грани, имеющие общую вершину (например, A_1), принадлежат поверхности куба. Если этот кубик вынуть, то вместо этих граней на поверхности полученной фигуры образуются три таких же грани (к ним прилегали оставшиеся три грани вынутого кубика с общей вершиной C).

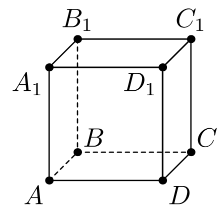


Рис. 9

1.3. *Ответ*: 2001.

Так как все «замечательные» числа в десятичной записи имеют различные суммы цифр, то две тысячи первое замечательное число имеет сумму цифр 2001.

2.1. Вычислим: $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$; $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$; $\frac{1}{6}+\frac{1}{20}=$ $=\frac{13}{60}>\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$, сумма остальных дробей в левой части неравенства — положительна, значит, значение левой части больше, чем $\frac{1}{5}$.

2.2. *Ответ*: $AB = 9$ см.

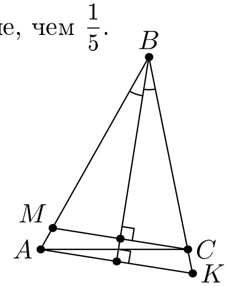


Рис. 10

В треугольниках ABK и MBC биссектрисы одновременно являются и высотами (см. рис. 10), поэтому эти треугольники — равнобедренные. Так как $AB > BC$, то точка M лежит на стороне AB, а точка K — продолжении стороны BC. Значит, $BC = BM = 8$ (см); $AB = BK =$ $= BC + CK = 9$ (см).

2.3. *Ответ*: нет, не может.

Рассмотрим сумму всех чисел: $1+2+\ldots+63+64 = (1+64)\cdot 32 = 65\cdot 32$. Для того, чтобы выполнялось условие задачи, необходимо, чтобы эта сумма была кратна трем, но это невозможно, так как ни 65, ни 32 не делится на 3.

Одна из команд предложила иной вариант решения: рассмотрим все остатки при делении данных чисел на 3. Двадцать одно из этих чисел кратно трем; еще двадцать одно число при делении на 3 дает остаток 2, а остаток 1 при делении на 3 имеют двадцать два числа. Следовательно, указанная сумма не может быть кратна трем.

3.1. *Ответ*: Вася задумал цифры 1, 2 и 4.

Пусть a, b и c — три цифры, задуманные Васей. Существует девять двузначных чисел, в десятичной записи которых используются только эти цифры: $\overline{aa}$; $\overline{bb}$; $\overline{cc}$; $\overline{ab}$; $\overline{ba}$; $\overline{ac}$; $\overline{ca}$; $\overline{bc}$; $\overline{cb}$. Найдем их сумму, разложив каждое из чисел в виде суммы разрядных слагаемых: $(10a+a)+(10b+$ $+b)+(10c+c)+(10a+b)+(10b+a)+(10a+c)+(10c+a)+(10b+c)+(10c+$ $+b) = 33a+33b+33c = 33(a+b+c)$. По условию, $33(a+b+c) = 231$, то есть, $a+b+c = 7$. Существует единственная тройка различных и отличных от нуля цифр, сумма которых равна 7.

3.2. *Ответ*: 40 см^2.

Используя признаки равенства треугольников, докажем, что все грани пирамиды — равные треугольники. 1) $\triangle ADB = \triangle CBD$ (II признак равенства треугольников), следовательно, $AD = BC$ и $AB = CD$. 2) $\triangle ADB = \triangle ACB$ (I признак равенства треугольников). 3) $\triangle ABC = \triangle CDA$ (III признак равенства треугольников). Следовательно, все четыре треугольника имеют одинаковые площади.

3.3. *Ответ*: нет, не могло.

Предположим, что описанная ситуация возможна, тогда, каждая из фраз произнесена по $1234 : 2 = 617$ раз. При любом разбиении жителей на пары существует только три возможных вида пар: 1) два рыцаря; 2) два лжеца; 3) рыцарь и лжец. В парах первого и второго вида каждый произнес: «Он — рыцарь!», а в парах третьего вида каждый произнес: «Он — лжец!». Таким образом, каждая из фраз произнесена четное количество раз, что противоречит тому, что их должно быть по 617.

4.1. *Ответ*: $222^2 < 2^{2^{2^2}} < 22^{2^2} < 22^{22} < 2^{222} < 2^{22^2} < 2^{2^{22}}$.

Сначала рассмотрим показатели степеней с основанием 2 и сравним их: $2^{2^2} = 2^4 = 16 < 222 < 22^2 = 484 < 512 = 2^9 < 2^{22}$. Следовательно, $2^{2^{2^2}} < 2^{222} < 2^{22^2} < 2^{2^{22}}$. Затем оценим остальные степени: $22^{2^2} = 22^4 > 16^4 = 2^{16} = 2^{2^{2^2}}$ и $22^{2^2} = 22^4 < 22^{22} < 64^{37} = (2^6)^37 = 2^{222}$; $222^2 < 256^2 = 2^{16} = 2^{2^{2^2}}$.

4.2. *Ответ*: 10 см.

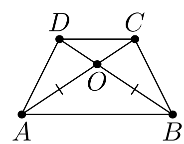


Рис. 11

Так как $P_{ABC} = P_{ABD}$, то $AC + BC = AD + BD$ (см. рис. 11). Аналогично, так как $P_{ACD} = P_{BCD}$, то $AC + AD = BC + BD$. Приведем второе равенство к виду $AC - BC = BD - AD$ и сложим с первым: $2AC = 2BD$, то есть, $AC = BD$. Значит, $AD = BC$, следовательно, $\angle ADB = \angle BCA$ (по III признаку равенства треугольников), откуда $\triangle ABD = \triangle BAC$, то есть, $\triangle AOB$ — равнобедренный; $AO = BO = 10$ см.

4.3. *Ответ*: 8.

Один из примеров расположения — см. рис. 12а.

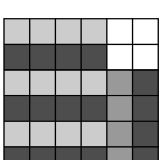


Рис. 12а

2	3	4	1	2	3
1	2	3	4	1	2
4	1	2	3	4	1
3	4	1	2	3	4
2	3	4	1	2	3
1	2	3	4	1	2

Рис. 12б

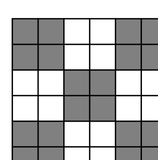


Рис. 12в

Для доказательства того, что невозможно расположить больше, раскрасим квадрат в четыре цвета так, чтобы любой прямоугольник располагался на четырех клетках, закрашенных в различные цвета (см. рис. 12б). Клеток, имеющих цвет №4 будет только 8, поэтому и прямоугольников можно разместить не более восьми.

Другой вариант доказательства — раскраска квадрата в два цвета (см. рис. 12в). При такой раскраске любой прямоугольник располагается на двух черных и двух белых клетках. Но, при такой раскраске, черных клеток — 20, а белых — только 16, поэтому больше восьми прямоугольников в данном квадрате расположить невозможно.

2001/2002 учебный год

1.1. *Ответ*: меньше.

Оценить количество цифр числа 5^{2002} можно различными способами, например так: $5^{2002} = (5^4)^{500} \cdot 5^2 = 625^{500} \cdot 25 < 1000^{500} \cdot 25 = (10^3)^{500} \cdot 25 = 25 \cdot 10^{1500}$. Полученное число содержит 1502 цифры, следовательно, в десятичной записи числа 5^{2002} меньше, чем 2002 цифры.

1.2. *Ответ*: нет, нельзя.

Рассмотрим, например, остроугольный треугольник ABC ($AB \neq BC$) и проведем его высоту BH (см. рис. 13). Пусть $CH < AH$, тогда на луче HA отметим точку D так, что $HD = HC$, и соединим ее с вершиной B. Из равенства треугольников BHC и BHD следует, что $BC = BD$. Таким образом, в треугольниках ABC и ABD: $BC = BD$, AB — общая сторона, BH — общая высота, проведенная к сторонам AC и AD соответственно. Эти треугольники не равны, так как один из них остроугольный, а другой — тупоугольный.

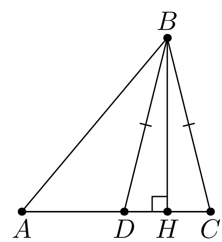


Рис. 13

1.3. *Ответ*: 82,5 км/ч.

Следующим красивым числом (то есть, числом-палиндромом) будет число 26062. Следовательно, за 1 час 20 минут грузовик проехал $26062 - 25952 = 110$ (км), значит его скорость равна $110 : \frac{4}{3} = 82,5$ (км/ч).

2.1. *Ответ*: 2001, 2002 и 2003.

Пусть $n-1$, n и $n+1$ — три последовательных целых числа, тогда их сумма равна $3n$, то есть утроенному второму числу. Так как $(a - b + 2002) + (b - c + 2002) + (c - a + 2002) = 6006$, то $n = 2002$. Значит, $n - 1 = 2001$, $n + 1 = 2003$.

2.2. *Ответ*: можно.

Пример такого расположения — вершины квадрата $ABCD$ и точка O пересечения его диагоналей (см. рис. 14). Треугольники AOB, BOC, COD, DOA, ABC, ADC, ABD и CBD являются прямоугольными, а тройки точек A, O, C и B, O, D треугольников не образуют.

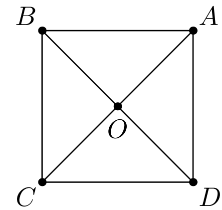


Рис. 14

Можно доказать, что приведенное расположение точек — единственное, удовлетворяющее условию. Пять точек, лежащих на одной прямой, формально могли бы удовлетворять условию, так как в этом случае не образовывается ни одного треугольника.

2.3. *Ответ*: 370 см × 160 см (см. рис. 15).

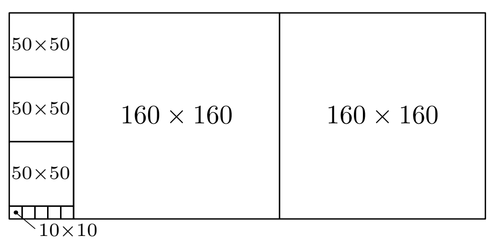


Рис. 15

Эту задачу удобно решать «с конца». Пять квадратов со стороной 10 см могли быть получены только последовательным разрезанием прямоугольника 50 × 10 (см). Так как этот прямоугольник, в свою очередь, был получен последовательным отрезанием трех одинаковых квадратов, то длина стороны каждого из этих квадратов — 50 см, а отрезались они от прямоугольника, большая сторона которого равна $10 + 50 \cdot 3 = 160$ (см). Так как размеры этого прямоугольника $160 \times$ $\times\, 50$ (см), то используя аналогичные рассуждения, получим, что длина стороны каждого из двух больших квадратов равна 160 см, что и составляет длину меньшей стороны исходного прямоугольника. Бо́льшая сторона этого прямоугольника равна $50 + 160 \cdot 2 = 370$ (см).

3.1. *Ответ*: нет, не может.

Рассмотрим разложение натурального числа на простые множители. Если в этом разложении отсутствует множитель 2, то все делители этого числа нечётные и ответ очевиден. Пусть в разложении числа на простые множители есть хотя бы одна «двойка». Рассмотрим все нечётные делители этого числа. Если умножить на 2 каждый из них, то получится четный делитель этого же числа. Таким образом, если среди делителей числа есть хотя бы один чётный, то *чётных делителей*, по крайней мере, *не меньше, чем нечётных.* Следовательно, натуральное число не может иметь нечетных делителей в полтора раза больше, чем четных.

3.2. *Ответ*: 45°.

Рассмотрим прямоугольные треугольники AB_1H и BB_1C (см. рис. 16): $AH = BC$ (по условию); $\angle HAC = 90^\circ - \angle ACB = \angle B_1BC$, следовательно, эти треугольники равны по гипотенузе и острому углу. Из равенства треугольником получим, что $AB_1 = BB_1$, значит $\triangle ABB_1$ — прямоугольный и равнобедренный, то есть, $\angle BAC = \angle ABB_1 = 45^\circ$.

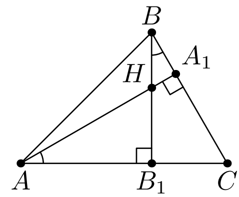


Рис. 16

3.3. *Ответ*: нет, не сможет.

Для того, чтобы попасть из левого нижнего угла доски в правый верхний угол, конь должен переместиться на 2001 клетку вдоль меньшей стороны доски и на 2002 клетки вдоль большей стороны. Таким образом, ему надо преодолеть 2001 + 2002 = 4003 клетку. Любой из двух разрешенных ходов приближает коня к цели ровно на три клетки. Так как 4003 не делится на 3, то попасть в правый верхний угол доски конь не сможет.

4.1.

$$\underbrace{11\ldots1}_{2\cdot218} - \underbrace{22\ldots2}_{218} = 1\underbrace{00\ldots0}_{217}1 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{218} - 2\cdot\underbrace{11\ldots1}_{218} =$$

$$= \bigl(1\underbrace{00\ldots0}_{217}1 - 2\bigr)\cdot\underbrace{11\ldots1}_{218} = \underbrace{99\ldots9}_{218}\cdot\underbrace{11\ldots1}_{218} =$$

$$= 3\cdot\underbrace{33\ldots3}_{218}\cdot\underbrace{11\ldots1}_{218} = \underbrace{33\ldots3}_{218}\cdot\underbrace{33\ldots3}_{218} = \underbrace{33\ldots3}_{218}{}^2.$$

4.2. *Ответ*: 2 см.

Рассмотрим данный треугольник ABC (см. рис. 17). Так как $\angle BAC = 180^\circ - (20^\circ + 40^\circ) = 120^\circ$, то $\angle BAM = \angle CAM = 60^\circ$. На стороне BC отметим точку D такую, что $BD = AB$, тогда $CD = BC - BD = BC - AB$. В равнобедренном треугольнике BAD $\angle BAD = \angle BDA = (180^\circ - 20^\circ) : 2 = 80^\circ$; $\angle AMC$ — внешний для треугольника BAM, поэтому $\angle AMC = 20^\circ + 60^\circ = 80^\circ$. Так как $\angle BDA = \angle AMC$, то $\triangle MAD$ — равнобедренный с основанием MD. $\angle CAD = \angle BAC - \angle BAD = 120^\circ - 80^\circ = 40^\circ$, то есть $\angle CAD = \angle DCA$,

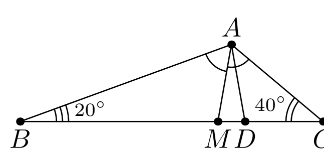


Рис. 17

значит $\triangle CAD$ — равнобедренный с основанием AC. Поэтому $CD = AD = AM = 2$ (см).

4.3. *Ответ*: пропущены числа 141; 147; 159; 174; 186.

Для того, чтобы восстановить пропущенные числа, необходимо заметить, что каждый член данной последовательности, начиная со второго, получается в результате сложения предыдущего члена и суммы его цифр: $111 = 105 + 6$; $114 = 111 + 3$; и т. д. Искомые числа: $141 = 129 + 12$; $147 = 141 + 6$; $159 = 147 + 12$; $174 = 159 + 15$; $186 = 174 + 12$.

2002/2003 учебный год

1.1. *Ответ*: нет, не верно. Например, $a = 0,2$, $b = 0,8$.

Для того, чтобы найти a и b, для которых верно данное равенство, преобразуем его: $a^2 - b^2 = a - b \Leftrightarrow (a - b)(a + b) = (a - b) \Leftrightarrow (a - b)(a + b - 1) = 0$. Следовательно, данное равенство верно, если $a = b$ или $a + b = 1$. Таким образом, достаточно указать пару различных положительных a и b, для которых $a + b = 1$.

1.2. *Ответ*: нет, не может.

Пусть ABC — данный треугольник, AP и CN — его высоты (см. рис. 18). Так как $\angle AHC$ — внешний для треугольника CHP, то $\angle AHC > \angle HPC = 90°$. Следовательно, $\angle AHC$ — тупой.

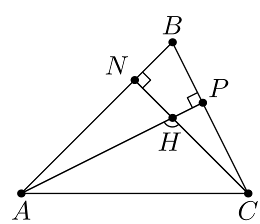


Рис. 18

Заметим, что если не потребовать, чтобы точка пересечения высот лежала внутри треугольника, то ответ будет положительным. Действительно, точка B является точкой пересечения высот AN и CP треугольника AHC. В четырехугольнике $BPHN$ углы BPH и BNH — прямые, угол NHP — тупой. Так как сумма углов четырехугольника равна $360°$, то $\angle ABC$ — острый.

1.3. *Ответ*: 71.

Второе утверждение не может быть верно, так как в этом случае верны и два других утверждения, что противоречит условию. Следовательно, верными являются первое и третье утверждение, а второе —

неверно. То есть, данное число меньше 72 и не меньше 71. Единственное число, удовлетворяющее данным условиям — 71.

2.1. *Ответ*: 5 точек.

Первый способ. Заметим, что если даны n точек, то после выполнения указанной операции появится еще $n-1$ точка, а всего точек станет $2n-1$. Тогда количество точек перед проведением последней операции можно найти из уравнения $2n-1=65$, откуда $n=33$. Далее, поступая аналогично, получим уравнения:

1) $2n-1=33$, откуда $n=17$;

2) $2n-1=17$, откуда $n-9$;

3) $2n-1=9$, откуда $n=5$.

Второй способ. Пусть x — первоначальное количество точек, тогда после проведения указанной операции в первый раз точек станет $2x-1$, а после повторения операции точек будет $(2x-1)+(2x-2)=4x-3$. Аналогично, в следующий раз точек станет $(4x-3)+(4x-4)=8x-7$, а в итоге окажется $(8x-7)+(8x-8)=16x-15$ точек. Решая уравнение $16x-15=65$, получим, что $x=5$.

2.2. *Ответ*: нет, не может.

Первый способ. Пусть ABC — данный треугольник, AM и CK — его биссектрисы (см. рис. 19). Пусть $\angle AOC$ — острый, то есть, $\angle AOC < 90^\circ$, тогда, рассмотрев сумму углов треугольника AOC, получим, что $\angle OAC + \angle OCA > 90^\circ$. Следовательно, $\angle BAC + \angle BCA > 180^\circ$, что невозможно, так как это углы треугольника ABC.

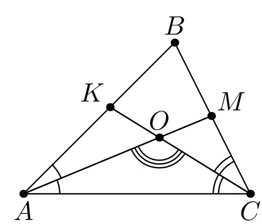


Рис. 19

Второй способ. Пусть $\angle ABC = \beta$, тогда вычислим $\angle AOC$: $\angle BAC + \angle BCA = 180^\circ - \beta$; $\angle OAC + \angle OCA = 90^\circ - 0,5\beta$; $\angle AOC = 90^\circ + 0,5\beta > 90^\circ$, то есть, $\angle AOC$ — тупой.

2.3. *Ответ*: да, существует.

Заметим, что при возведении в квадрат числа, оканчивающегося на 8 или на 9, последняя цифра уменьшается. Наименьшее число, удовлетворяющее условию — 39. Приведем еще несколько вариантов: 48, 49, 79.

3.1. *Ответ*: 160 грамм.

Пусть в килограмме говядины x кг костей, тогда «чистой» говядины в нем — $(1-x)$ кг. Таким образом, стоимость костей составляет $15x$ рублей, а стоимость говядины — $90(1-x)$ рублей. Исходя из условия, составим уравнение: $15x + 90(1-x) = 78$. Решив уравнение получим, что $x = 0,16$.

3.2. *Ответ*: см., например, рис. 20а и 20б соответственно.

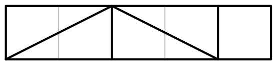


Рис. 20а

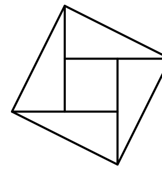


Рис. 20б

3.3. *Ответ*: 4014012.

Заметим, что разность между вторым и первым числом: $4 = 2 \cdot 2$, между третьим и вторым числом: $6 = 2 \cdot 3$, между четвертым и третьим $8 = 2 \cdot 4$ и так далее, то есть, *разность между соседними числами увеличивается на* 2. Следовательно, разность между 2003-м и 2002-м числом будет равна $2 \cdot 2003$. Таким образом, 2003-е число отличается от первого на $S = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \ldots + 2 \cdot 2003$. Значит, 2003-е число равно $2 + S = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \ldots + 2 \cdot 2003 = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 2003) = 2 \cdot (1 + 2003) \cdot 1002 = 2003 \cdot 2004 = 4014012$.

4.1. *Ответ*: 1,5 минуты.

Первый способ. Так как $60 : 45 = \dfrac{4}{3}$, то во втором случае за минуту можно было бы пройти $\dfrac{4}{3}$ эскалатора, то есть, на $\dfrac{1}{3}$ эскалатора больше, чем в первом случае. Это происходит за счет увеличения скорости человека в 2 раза. Следовательно, собственная скорость человека равна $\dfrac{1}{3}$ неподвижного эскалатора в минуту. Так как в первом случае можно спустится за одну минуту, то скорость движения эскалатора — $\dfrac{2}{3}$ неподвижного эскалатора в минуту. Значит, искомое время спуска равно: $1 : \dfrac{2}{3} = 1,5$ (минуты).

Второй способ. Пусть L метров — длина эскалатора, x метров в секунду — собственная скорость человека, y метров в секунду — скорость эскалатора. Тогда скорость спуска в первом случае составит $(x + y)$ м/с, а во втором случае — $(2x + y)$ м/с. Исходя из условия, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} (x + y)\,60 = L, \\ (2x + y)\,45 = L. \end{cases}$$

Решить ее можно, например, так:

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{1}{60}\,L, \\ 2x+y=\dfrac{1}{45}\,L \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=\dfrac{1}{180}\,L, \\ y=\dfrac{1}{90}\,L. \end{cases}$$

Искомое время спуска равно: $\dfrac{L}{y} = 90$ (секунд).

4.2. *Ответ*: $EC = 1$ см.

Так как $AD = BE$, $CD = AE$, $\angle ADC = \angle DEC = \angle BEA$ (вертикальные углы), то $\triangle ADC = \triangle BEA$ (см. рис. 21). Из равенства этих треугольников следует, что $AC = AB$, тогда $EC = AC - AE = AB - AE = 1$ см (по условию).

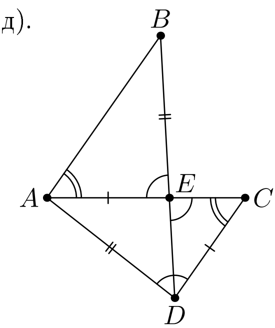


Рис. 21

4.3. *Ответ*: нет, не успели.

Заметим, что если в турнире n участников, то по круговой системе должно быть сыграно $\dfrac{n(n-1)}{2}$ партий. Поэтому, если участников было 7, то сыгранных партий должно быть 21, если участников 8, то сыгранных партий — 28, а если участников 9, то сыгранных партий — 36. Так как всего было сыграно больше 21 партии, то количество участников больше семи, а так как было сыграно менее 28 партий, то количество участников, закончивших турнир, меньше восьми, а всего участников — меньше десяти. Таким образом, первоначально в турнире могло участвовать либо 8, либо 9 шахматистов. В первом случае не сыграно $28 - 23 = 5$ партий, а во втором: $36 - 23 = 13$ партий, то есть, в обоих случаях остались несыгранными нечетное количество партий. Если предположить, что Вася и Петя успели сыграть между собой, то количество несыгранных партий должно оказаться четным (поровну у Васи и у Пети).

2003/2004 учебный год

1.1. *Ответ*: мог, например, $64^2 \cdot 64^3 = 32^6$.

Так как $a^2 \cdot a^3 = a^5$, то равенство $a^5 = b^6$ выполняется, если $a = n^6$, $b = n^5$, где n — некоторое натуральное число. Возьмем, например, $n = 2$, тогда $a^2 = 2^{12}$; $a^3 = 2^{18}$, то есть, $(2^6)^2 \cdot (2^6)^3 = (2^5)^6$.

1.2. *Ответ*: нет, не следует.

Общая сторона AC в одном из треугольников может являться катетом, а в другом — гипотенузой (например, см. рис. 22).

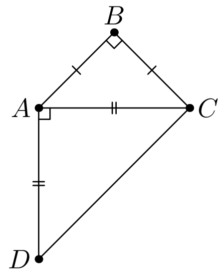


Рис. 22

1.3. *Ответ*: да, существует, например, треугольник с углами: 2°, 11° и 167°.

Так как сумма углов треугольника равна 180°, то градусные меры всех углов треугольника не могут выражаться нечетными числами. Следовательно, градусная мера одного из углов равна 2°. Остается подобрать два простых числа, сумма которых равна 178. Другие возможные примеры: 2°, 5° и 173°; 2°, 29° и 149°; 2°, 41° и 137°; 2°, 47° и 131°; 2°, 71° и 107°; 2°, 89° и 89°.

2.1. *Ответ*: нет, не верно.

Заметим, что данное число a при делении на 3 дает остаток 2, следовательно, оно имеет вид: $a = 3t+2$, где t — некоторое натуральное число (в данном случае $t = 3^{2003}$). Тогда $a^2 + 2 = (3t + 2)^2 + 2 = 9t^2 + 12t + 6 = 3(3t^2 + 4t + 2)$, то есть, кратно трем при любом натуральном t. Следовательно, это число не является простым.

2.2. *Ответ*: $CD = 4$.

Пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда $\angle BCA = 3\alpha$ (см. рис. 23). Так как треугольник DBC — равнобедренный, то $\angle BDC = \angle BCD = \beta$. Тогда $\angle DCA = 3\alpha - \beta$. Так как $\angle CDB$ — внешний для треугольника ADC, то $\angle CDB = \angle DAC + \angle DCA$. Следовательно, $\beta = \alpha + (3\alpha - \beta) \Leftrightarrow \beta = 2\alpha$. Таким образом, $\angle DCA = \alpha$, то есть, треугольник ADC — равнобедренный с основанием AC. Следовательно, $CD = AD = 4$.

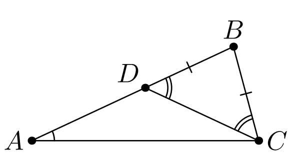


Рис. 23

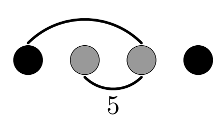


Рис. 24

2.3. *Ответ*: нет, не существуют.

Предположим, что такие числа существуют, тогда среди них нет одинаковых, так как каждая разность отлична от нуля. Упорядочим числа. На рис. 24 они обозначены кружками слева направо в порядке возрастания. Тогда разность между наибольшим и наименьшим числом равна 6. Далее существуют различные способы прийти к противоречию, например:

1) сумма трех попарных разностей между соседними числами должна быть равна 6, а в данном наборе нет трех чисел, имеющих такую сумму.

2) рассмотрим два числа, разность между которыми равна 5. Если одно из них — «крайнее», то разность между вторым числом и другим «крайним» числом должна быть равна 1, тогда как в исходном наборе единицы не было. Если же равна пяти разность двух «средних» чисел, то разность между «крайним» и одним из средних чисел (на рис. 24 они соединены линией) должна быть больше пяти — противоречие.

3.1. $xy + z = yz + x \Leftrightarrow xy - yz + z - x = 0 \Leftrightarrow y(x - z) - (x - z) = 0 \Leftrightarrow (x - z)(y - 1) = 0 \Leftrightarrow x = z$ или $y = 1$. Аналогично, из равенства $xy + z = zx + y$ можно получить, что $y = z$ или $x = 1$, а из равенства $yz + x = zx + y$ можно получить, что $x = y$ или $z = 1$. Заметим, что если выполняется хотя бы одно из равенств $x = z$, $y = z$ или $x = y$, то равенство $(x - y)(y - z)(z - x) = 0$ также выполняется. Предположим, что это не так, то есть: $x \neq z$, $y \neq z$ и $x \neq y$, тогда $x = 1$, $y = 1$ и $z = 1$, следовательно, $x = y = z$ — противоречие. Таким образом, выполняется хотя бы одно из равенств $x = z$, $y = z$ или $x = y$, следовательно, выполняется и доказываемое равенство.

3.2. *Ответ*: да, верно.

Проведем отрезки MK и MC и докажем, что $\angle KMC$ — развернутый (см. рис. 25). Так как сторона каждого равностороннего треугольника равна стороне квадрата, то треугольники KAM и MDC — равнобедренные с основаниями KM и MC соответственно. Заметим, что $\angle KAM = \angle KAB + \angle BAM = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$, а $\angle MDC = 30^\circ$. Следовательно, $\angle KMA = 45^\circ$, $\angle DMC = 75^\circ$. То есть, $\angle KMC = \angle KMA + \angle AMD + \angle DMC = 45^\circ + 60^\circ + 75^\circ = 180^\circ$, то есть, точки C, M и K лежат на одной прямой.

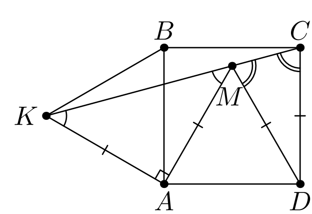


Рис. 25

3.3. *Ответ*: 350.

Пусть $\overline{abc}$ — десятичная запись исходного числа, тогда $7\overline{bc} = \overline{abc} = 100a + \overline{bc}$. Следовательно, $6\overline{bc} = 100a$. Разделив обе части на 2, получим равенство: $3\overline{bc} = 50a$. Числа 50 и 3 взаимно просты, поэтому $\overline{bc}$ делится на 50, то есть, $\overline{bc} = 50$, $a = 3$.

Отметим, что возможны также «переборные» решения, основанные на том, что при умножении числа $\overline{bc}$ на 7 не изменилась последняя цифра, поэтому $c = 0$ или $c = 5$. Кроме того, из условия задачи следует, что $a < 7$.

4.1. Пусть $x = 2001$, тогда данное число равно: $(x-3)(x-1)(x+1)(x+3)+16 = (x^2-9)(x^2-1)+16 = x^4-10x^2+25 = (x^2-5)^2$. Следовательно данное число равно квадрату натурального числа $2001^2 - 5$.

4.2. *Ответ*: либо два угла по 70°, либо 40° и 100°.

Пусть ABC — данный треугольник с углом B, равным 40°; AK, BL и CM — его биссектрисы, пересекающиеся в точке O (см. рис. 26 а, б).

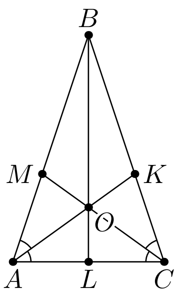


Рис. 26а

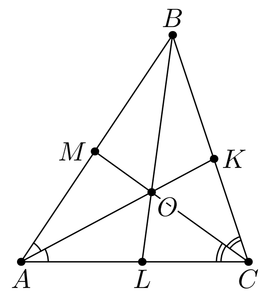


Рис. 26б

Докажем, что ни один из образовавшихся углов с вершиной O не может быть прямым. Действительно, если $\angle AOC = 90°$, то $\angle OAC + \angle OCA = 90°$, следовательно, $\angle BAC + \angle BCA = 180°$, что невозможно. Если же $\angle LOC = 90°$, то смежный с ним $\angle BOC = 90°$, и мы приходим к уже разобранному случаю. Таким образом, прямыми могут быть только углы с вершинами в точках M, K и L. Возможны два случая: 1) прямым является угол при вершине L (см. рис. 26а); 2) прямым является один из углов: либо при вершине K, либо при вершине M (см. рис. 26б). В первом случае биссектриса BL является высотой треугольника, то есть, треугольник ABC — равнобедренный с основанием AC и его углы: 40°; 70°; 70°. Во втором случае треугольник ABC также равнобедренный, но с основанием BC (либо с основанием AB) и его углы: 40°; 40°; 100°.

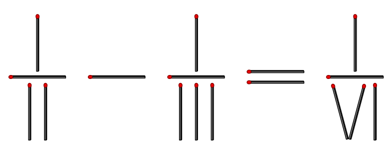
Заметим, что так как треугольник ABC не равносторонний, то только одна из биссектрис данного треугольника может быть перпендикулярна стороне.

4.3. *Ответ*: 2003.

Назовем монету, из которой что-то ”выросло” — «родителем», а монету, которая ”выросла” из какой-нибудь монеты — «ребенком». Заметим, что «детьми» являются все монеты, кроме первой, а каждая золотая монета (и только она) является «родителем». Поскольку у каждого «родителя» — два «ребенка», то «детей» — в два раза больше, чем «родителей». Пусть x — количество золотых монет, а y — количество серебряных, тогда всего монет будет $x+y$, из которых «детьми» являются $(x+y)-1$ монет, а «родителями» — x. Составляем уравнение: $(x+y)-1 = 2x \Leftrightarrow x = y-1$, то есть, количество золотых монет меньше количества серебряных на 1, следовательно, Буратино закопал 2003 монеты.

2004/2005 учебный год

1.1. *Ответ*:



1.2. *Ответ*: нет, неверно.

Например, если Вася разрезал остроугольный треугольник ABC по медиане BD (см. рис. 27а), а Петя сложил треугольник так, как это показано на рис. 27б.

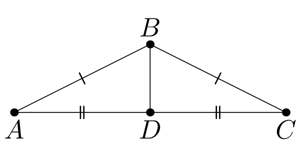


Рис. 27а

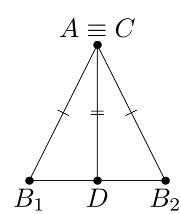


Рис. 27б

1.3. *Ответ*: семь.

Например, если один баскетболист имеет рост 230 см, то рост каждого из остальных может быть 190 см, так как $(230+190\cdot 7) : 8 = 195$.

2.1. *Ответ*: $23^\circ F$.

Из условия следует, что $100^\circ C = 180^\circ F$, то есть, $1^\circ C = 1,8^\circ F$. Поэтому, 5 градусам мороза по Цельсию соответствуют: $32^\circ F - 5\cdot 1,8^\circ F = 23^\circ F$.

2.2. *Ответ*: полностью закрыт медный контур (см. рис. 28).

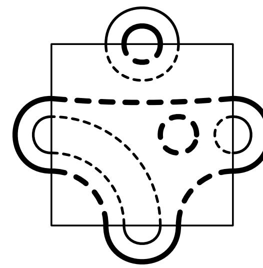


Рис. 28

2.3. *Ответ*: 121.

Любое составное число является произведением не менее чем двух простых множителей. Из условия задачи следует, что каждый из этих множителей не может быть меньше, чем 11. Значит, искомое число не меньше, чем $11^2 = 121$, а это число удовлетворяет условию.

3.1. *Ответ*: все акции компании «Карабас» стоят 75 золотых монет, а компании «Барабас» — 15 золотых монет.

Из условия следует, что 100% акций компании «Карабас» и 300% акций компании «Барабас» стоят 120 монет. Значит, 200% акций компании «Барабас» стоят $120 - 90 = 30$ золотых монет. Тогда все акции компании «Барабас» стоит 15 монет, а все акции компании «Карабас»: $90 - 15 = 75$ (монет).

По условию задачи можно составить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 90, \\ 0,25x + 0,75y = 30, \end{cases}$$

где x и y — искомые стоимости акций. Решение, приведенное выше, соответствует решению этой системы способом сложения.

3.2. *Ответ*: 3,5 см.

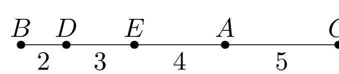


Рис. 29

Так как $BD + DE + EA + AC = BC$, то точки A, D и E лежат на отрезке BC так, как это показано на рис. 29. Тогда $AB = 9$ см; $CD = 12$ см. Искомое расстояние можно, например, вычислить так: середина отрезка AB удалена от точки B на половину длины AB, то есть, на 4,5 см. Середина отрезка CD удалена от точки C на половину длины CD, то есть, на 6 см. Следовательно, расстояние между серединами отрезков AB и CD равно $14 - 4,5 - 6 = 3,5$. Для вычисления расстояния можно также рассмотреть координатный луч BC и воспользоваться координатными формулами середины отрезка и расстояния между точками координатной прямой.

3.3. *Ответ*: 8.

Рассмотрим какой-то фрукт в ряду, например апельсин. У него не более двух соседей. Следовательно, чтобы апельсины встречались в паре с тремя другими видами фруктов, необходимо не менее двух апельсинов. Аналогичные рассуждения показывают, что выложено не менее двух мандаринов, не менее двух яблок и не менее двух груш. Значит, всего фруктов должно быть не менее восьми.

Этого количества фруктов достаточно для выполнения условия задачи, например: апельсин, мандарин, яблоко, груша, апельсин, яблоко, мандарин, груша.

4.1. *Ответ*: нет, неверно.

Например, если Вася задумал число 91, а Петя — число 100, то оба получили сумму 101.

Отметим, что среди двузначных чисел нельзя найти два различных числа, у которых равны сумма самого числа и его суммы цифр. Действительно, пусть два таких числа $\overline{ab} = 10a + b$ *и* $\overline{cd} = 10c + d$ *существуют, тогда* $11a + 2b = 11c + 2d \Leftrightarrow 11(a - c) = 2(d - b)$. *Если* $b = d$, *то* $a = c$, *тогда* $\overline{ab} = \overline{cd}$. *Если* $b \neq d$, *то* $d - b$ *делится на* 11, *что невозможно, так как* d *и* b *— цифры.*

4.2. *Ответ*: могло получиться любое количество прямоугольников, большее трех.

1) Покажем, что невозможно разрезать данный квадрат меньше, чем на четыре прямоугольника с периметром 2. Действительно, каждый из четырех углов квадрата является одновременно и углом одного из прямоугольников. Если нам удалось разрезать квадрат на 1, 2 или 3 прямоугольника с периметром 2, то хотя бы один из них занимает 2 угла. То есть, у такого прямоугольника две стороны равны стороне квадрата, следовательно, его периметр больше двух.

2) Разрезание квадрата со стороной 1 на четыре квадрата со стороной $\frac{1}{2}$ (см. рис. 30а) удовлетворяет условию задачи.

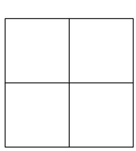


Рис. 30а

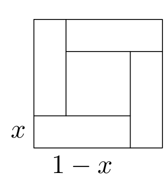


Рис. 30б

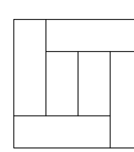


Рис. 30в

3) Разрежем квадрат на 4 одинаковых прямоугольника и квадрат так, как это показано на рис. 30б. Пусть одна из сторон прямоугольника равна x, тогда другая сторона имеет длину $1 - x$, поэтому периметр каждого из этих прямоугольников равен 2 независимо от значения x.

Сторона «центрального» квадрата равна $1-2x$, то есть, его периметр равен $4-8x$. Следовательно, это разбиение удовлетворяет условию задачи при $x=\frac{1}{4}$.

4) Для того, чтобы разрезать данный квадрат на 6 прямоугольников периметра 2 достаточно разбить «центральный» квадрат на два равных прямоугольника (см. рис. 30в). В этом случае периметр каждого из них будет равен $2(1-2x)+2\cdot\frac{1-2x}{2}=3(1-2x)$, то есть, $x=\frac{1}{6}$

Аналогично, изменяя значение x, можно разбивать центральный квадрат на любое количество равных прямоугольников, увеличивая тем самым количество прямоугольников в разрезании данного квадрата.

В общем виде: для того, чтобы разрезать данный квадрат на n *прямоугольников с периметром* 2, *достаточно разбить «центральный» квадрат на* $n-4$ *одинаковых прямоугольника. Периметр каждого из них равен* $2(1-2x)+2\cdot\frac{1-2x}{n-4}=\frac{2(1-2x)(n-3)}{n-4}$. *По условию, это выражение должно быть равно* 2, *то есть,* $1-2x=\frac{n-4}{n-3}$, *следовательно,* $x=\frac{1}{2(n-3)}$. *Отметим, что эта формула применима и для «вырожденного» случая* $n=4$, *рассмотренного в пункте* 2).

4.3. *Ответ*: нет, не могла.

Пусть в какой-то момент в вершинах записаны числа a, b и c. Тогда после указанной операции вместо них будут записаны числа $b+c$, $c+a$ и $a+b$. Так как $(b+c)+(c+a)+(a+b)=2(a+b+c)$, то после каждой операции сумма трёх записанных чисел удваивается. Сумма исходных чисел не делится на 5, поэтому и сумма чисел, полученных после любого количества операций, на 5 делиться не может.

2005/2006 учебный год

1.1. *Ответ*: 500 метров.

Скорость сближения автомобилей равна $80-65=15$ (км/ч) $=250$ (м/мин). Через две минуты после того, как автомобили поравняются, они будут находиться друг от друга на расстоянии $250\cdot 2=500$ (м).

1.2. Существует несколько способов решения задачи. Рассмотрим два из них. Пусть $ABCD$ — данный прямоугольник (см. рис. 31 а, б).

Первый способ. Пусть K — середина меньшей стороны BC (см. рис. 31а). Разрежем прямоугольник по прямой AK и приложим прямоугольный треугольник ABK так, как показано на рисунке. Треугольник AMD — искомый, причем еще один разрез можно сделать произвольно.

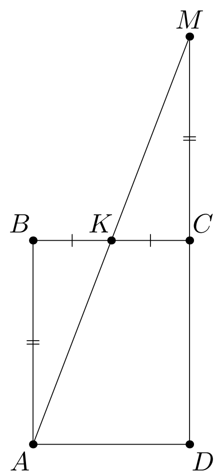


Рис. 31а

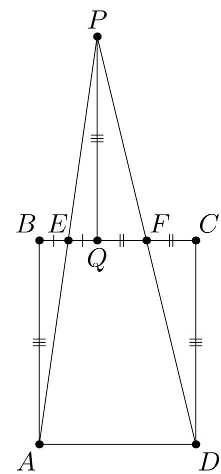


Рис. 31б

Второй способ. Выберем на меньшей стороне BC две точки E и F так, что $EF = \frac{1}{2}BC$ и $BE \neq CF$ (см. рис. 31б). Разрежем прямоугольник по прямым AE и BF и приложим прямоугольные треугольники ABE и DCF так, как показано на рисунке. Треугольник APD — искомый.

Выбор меньшей стороны (в обоих способах) гарантирует, что полученный треугольник не будет равнобедренным.

1.3. *Ответ*: 24 острова.

Пусть в архипелаге x островов. Построим около каждого моста по две таможни — у выхода на каждый из двух островов, которые соединяет этот мост. Тогда всего будет построено $84 \cdot 2 = 168$ таможен. С другой стороны, так как каждый остров соединён с семью другими, то на каждом острове — по семь таможен, то есть всего их — $7x$. Следовательно, $x = \dfrac{168}{7} = 24$.

2.1. *Ответ*: например, $17 \cdot (117 + 1) = 2006$ или $17 \cdot 117 + 17 = 2006$ или $17 \cdot (17 \cdot 7 - 1) = 2006$.

2.2. *Ответ*: точки M_1 и M_2, лежащие от A на расстоянии 1 см (см. рис. 32).

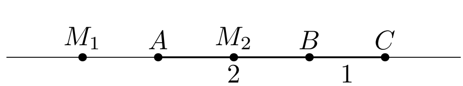


Рис. 32

Возможны четыре случая предполагаемого расположения искомых точек на прямой AB по отношению к трем данным точкам A, B и C.

1) Точка M лежит левее точки A, тогда $AM + BM = AM + BA + AM = 2AM + 2$; $CM = CA + AM = AM + 3$, следовательно, $AM = 1$. Искомая точка — M_1 (см. рис. 32).

2) Точка M принадлежит отрезку AB. Тогда $AM + BM = AB = 2$; $CM = CB + BM = BM + 1$, следовательно, $BM = 1 = AM$. Искомая точка — M_2 (см. рис. 32).

3) Точка M принадлежит отрезку BC. В этом случае решений нет, так как $AM + BM \geqslant AB = 2$, а $CM \leqslant 1$.

4) Точка M лежит правее точки C. В этом случае также нет решений, поскольку $BM > CM$.

При желании случаи 3) *и* 4) *можно объединить. Можно также считать прямую* AB *координатной, где* $A(0)$, *тогда решением задачи будут точки* $M(x)$, *удовлетворяющей уравнению* $|x| + |x - 2| = |x - 3|$.

2.3. *Ответ*: девочка.

Пусть у Антона x одноклассниц, тогда одноклассников — $4x$. Предположим, что Женя — мальчик, тогда одноклассниц и одноклассников у него столько же, сколько у Антона. Из условия задачи следует, что $4x - x = 17$. Так как 17 не делится на 3, то это уравнение не имеет натуральных решений, то есть наше предположение неверно.

Предположим, что Женя — девочка, тогда у нее $(x - 1)$ одноклассница и $(4x + 1)$ одноклассник. Следовательно, $(4x + 1) - (x - 1) = 17 \Leftrightarrow 4x - x + 2 = 17 \Leftrightarrow x = 5$. Таким образом, при таком предположении условие задачи выполняется.

3.1. *Ответ*: нет, не могло.

Пусть a и b — задуманные натуральные числа, тогда по условию $a^3 - a = b^3 - b$. Преобразуем: $(a^3 - b^3) - (a - b) = 0 \Leftrightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2) - (a - b) = 0 \Leftrightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2 - 1) = 0$. Так как при любых натуральных значениях a и b вторая скобка принимает положительные значения, то равенство возможно только при $a = b$.

3.2. Пусть AC и AD пересекают отрезок BE в точках K и M соответственно (см. рис. 33). Из условия задачи следует, что треугольники CEK и DBM равны по стороне и двум прилежащим углам. Следовательно, $CK = DM$ и $\angle CKE = \angle DMB$. Тогда $\angle AKE = \angle AMB$ (углы, смежные с равными). Получим, что в треугольнике AMK равны углы, прилежащие к стороне MK, поэтому этот треугольник — равнобедренный ($AK = AM$). Следовательно, $AC = AK + CK = AM + DM = AD$, то есть треугольник ACD — также равнобедренный (с основанием CD). Поэтому $\angle ACD = \angle ADC$, что и требовалось доказать.

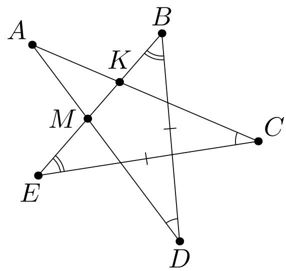


Рис. 33

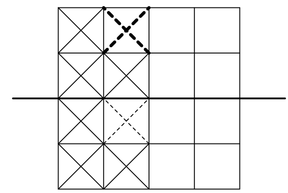


Рис. 34

3.3. *Ответ*: выигрывает второй игрок.

Разделим доску на две равные части горизонтальной прямой (см. рис. 34). На каждый ход первого игрока второй должен отвечать точно таким же ходом, но на другой части доски. Например, если первый игрок закрасил левый верхний угол, то второй должен закрасить на левой вертикали вторую клетку снизу.

Покажем, что такая стратегия второго игрока приведёт к его выигрышу. После каждого хода второго игрока картинка на обеих половинах доски будет одинаковой. Если после хода первого игрока в одной из половин доски не образовалось квадрата 2×2, заполненного крестиками, то и после хода второго в другой половине доски такого квадрата образоваться не может.

Допустим, что такой квадрат образовался после хода второго игрока на «стыке» двух половин доски. Но тогда такой же квадрат образовался ранее, после хода первого игрока на одной из половин доски (см., например, рис. 34; последние ходы игроков обозначены толстым и тонким пунктиром соответственно).

Отметим, что вместо горизонтальной прямой, делящей доску на две равные части, можно использовать и вертикальную прямую. Приведенное решение можно использовать и в случае, если доска для игры является прямоугольником размера $4 \times n$.

4.1. Пусть x, y и z — числа, записанные учительницей. Тогда числа, записанные Димой, в каком-то порядке равны $\frac{2}{3}x$; $\frac{5}{4}y$ и $\frac{4}{5}z$. Предположим, что Дима не ошибся. Далее можно рассуждать по разному.

Первый способ. Произведение чисел, записанных Димой, должно быть равно произведению чисел, записанных учительницей, то есть $\frac{2}{3}x \cdot \frac{5}{4}y \cdot \frac{4}{5}z = xyz$. Так как $xyz \neq 0$ и $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \neq 1$, то записанное равенство выполняться не может.

Второй способ. Учитывая, что среди записанных чисел нет нулей, получим два варианта возможных равенств: 1) $x = \frac{5}{4}y$; $y = \frac{4}{5}z$ и $z = \frac{2}{3}x$; 2) $z = \frac{5}{4}y$; $x = \frac{4}{5}z$ и $y = \frac{2}{3}x$.

1) Из первого равенства следует, что $4x = 5y$, а из второго — что $5y = 4z$, поэтому $x = z$, что противоречит третьему равенству.

2) Из первого равенства следует, что $4z = 5y$, а из второго — что $5x = 4z$, поэтому $x = y$, что противоречит третьему равенству.

Таким образом, Дима ошибся, что и требовалось доказать.

4.2. *Ответ*: да, можно.

См., например, рис. 35.

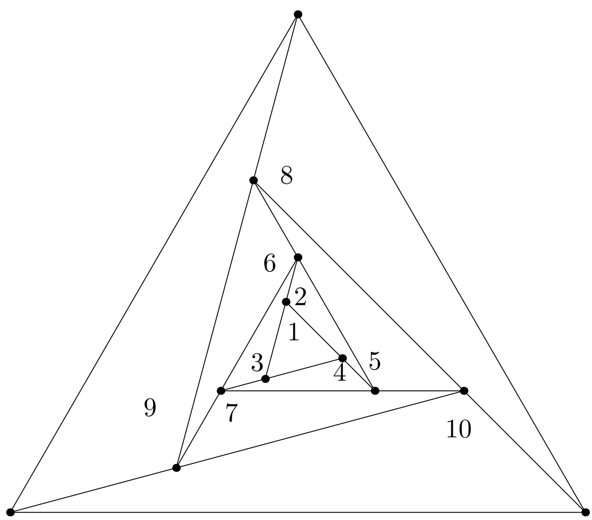


Рис. 35

4.3. *Ответ*: 9867312.

Среди цифр искомого числа не может быть нуля (на нуль делить нельзя), поэтому искомое число — не более чем девятизначное. Для того, чтобы оно делилось на 5, необходимо, чтобы его десятичная запись оканчивалась этой цифрой, но тогда это число не будет делится на четные цифры, то есть будет не более чем пятизначным. Поэтому исключаем цифру 5, и рассматриваем числа, составленные из остальных цифр. Если число — восьмизначное и не содержит цифр 0 и 5, то сумма его цифр равна 40, то есть оно не делится ни на 3, ни на 9 и будет в этом случае не более чем шестизначным. Следовательно, нам выгоднее исключить одну цифру так, чтобы оставшаяся сумма цифр делилась на 9.

Поэтому исключаем цифру 4 и рассматриваем четные семизначные числа, составленные из различных цифр, кроме 0, 5 и 4. Наибольшее среди таких чисел — 9876312, его сумма цифр равна 36, поэтому оно делится на 9 и на 3. Так как 312 делится на 8, то рассматриваемое число также делится на 8. На 6 оно делится потому, что делится на 2 и на 3. Но это число не делится на 7. Значит надо так переставить цифры этого числа, чтобы сохранить делимость на 8 и добавить делимость на 7, при этом затрагивая как можно меньше старших разрядов.

Так как 132 не делится на 8, то придется переставлять по крайней мере четыре последние цифры. Составляя таким образом числа, делящиеся на 8 (9872316, 9872136, 9871632), непосредственной проверкой убеждаемся, что они не делятся на 7. Поэтому, требуемая перестановка должна коснуться и разряда десятков тысяч.

Наибольшим среди чисел, получаемых такой перестановкой, является число 9867312. Оно делится на 7 ($9867312 : 7 = 1409616$), и при такой перестановке сохраняется делимость на остальные цифры.

8 класс

1999/2000 учебный год

1.1. *Ответ*: корней нет.

Найдем области определения каждого из квадратных корней. Первый из них определен, если $x \leqslant \frac{1999}{2000}$, а второй, если $x \geqslant \frac{2000}{2001}$. Так как $1 - \frac{1999}{2000} = \frac{1}{2000} > \frac{1}{2001} = 1 - \frac{2000}{2001}$, то $\frac{1999}{2000} < \frac{2000}{2001}$. Следовательно, таких значений x, для которых левая часть уравнения имеет смысл, не существует, то есть уравнение не имеет корней.

1.2. 1) Пусть точки C и D лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB (см. рис. 36а). Тогда, BC и AD — высоты треугольника APB, так как $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$ (вписанные углы, опирающиеся на диаметр). Q — точка пересечения высот треугольника APB, значит, третья высота этого треугольника принадлежит прямой PQ, то есть, $AB \perp PQ$, что и требовалось доказать. При другом порядке расположения точек C и D в той же полуплоскости меняются «ролями» точки P и Q.

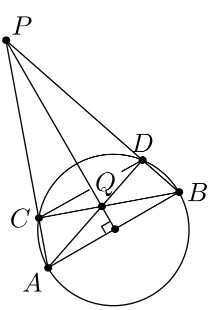


Рис. 36а

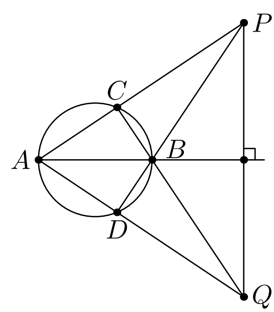


Рис. 36б

2) В случае, если точки C и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AB, меняются «ролями» прямые AB и PQ (см., например, рис. 36б). Доказательство для данного случая проводится аналогично.

1.3. *Ответ*: 9876543201.

Рассмотрим число 9876543210. Оно является наибольшим среди десятизначных чисел, все цифры в десятичной записи которых различны, и при делении на 7 дает остаток 2. Число 9876543201 меньше рассмотренного на 9.

2.1. *Ответ*: 1.

Умножим числитель данной дроби на выражение $(3-2)$. Так как его значение равно 1, то величина дроби не изменится. Применив одну и ту же формулу сокращенного умножения $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$ несколько раз, получим, что данная дробь равна $\dfrac{3^{1024} - 2^{1024} + 2^{1024}}{3^{1024}} = 1$.

2.2. *Ответ*: 6 см.

Рассмотрим равнобокую трапецию $ABCD$ и окружность с центром O и радиусом r, вписанную в нее.

Первый способ. Окружность касается оснований трапеции в их серединах, K — точка касания окружности с боковой стороной AB (см. рис. 37а). По свойству касательных к окружности, проведенных из одной точки, $AK = \dfrac{1}{2}\,AD = 9$ см, $BK = \dfrac{1}{2}\,BC = 4$ см, $\angle AOB = 90^\circ$, так как образован биссектрисами углов, сумма величин которых равна 180°. OK — высота прямоугольного треугольника AOB, проведенная к гипотенузе. Её длина равна среднему геометрическому длин отрезков AK и BK, то есть, $OK = r = 6$ см.

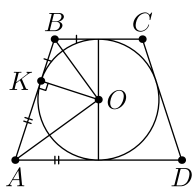


Рис. 37а

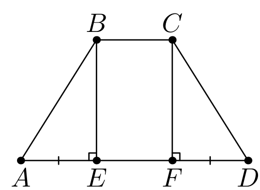


Рис. 37б

Второй способ. По свойству описанного четырехугольника $AB + CD = BC + AD$, следовательно, $AB = CD = (BC + AD) : 2 = 13$ см. Проведем высоты трапеции BE и CF (см. рис. 37б). $AE = DF = (AD - BC) : 2 = 5$ см. Применив теорему Пифагора для любого из треугольников ABE или CDF, получим, что высота трапеции равна 12 см. Радиус вписанной окружности равен половине высоты, то есть, 6 см.

2.3. *Ответ*: нет, не смогут.

Например, если первый сумасшедший покрасит в 99 различных цветов первые 99 клеток в первой строке, а последнюю клетку второй строки — в сотый цвет.

3.1. Пусть x — количество мальчиков, а y — количество девочек; a рублей стоит пирожок, b рублей стоит булочка. Составляем уравнение: $xa + yb + 1 = xb + ya$. Переносим все слагаемые, содержащие переменные, в одну часть и раскладываем на множители: $(x-y)\,(b-a) =$

$= 1$. По условию, $x > y$, следовательно, $a < b$. Так как $b - a > 0{,}5$, то $x - y < 2$. Так как x и y — целые и $x > y$, то $x - y = 1$, следовательно, $b - a = 1$. То есть, мальчиков на одного человека больше, чем девочек, а булочка дороже пирожка на 1 рубль.

3.2. *Ответ*: 5.

Пусть E и F — середины сторон BC и AD, а M и K — середины диагоналей AC и BD (см. рис. 38).

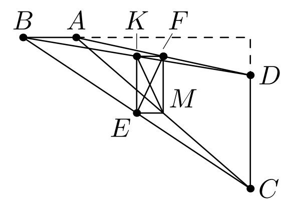


Рис. 38

Первый способ. Соединим последовательно точки K, F, M и E. Так как отрезок KF является средней линией треугольника DBA, то $KF \parallel AB$ и $KF = 0{,}5AB$. Аналогично, EM — средняя линия треугольника CAB, значит, $EM \parallel AB$ и $EM = 0{,}5AB$. Следовательно, $KF \parallel EM$ и $KF = EM$, то есть, четырехугольник $KFME$ — параллелограмм. Так как KE — средняя линия треугольника DBC, то $KE \parallel DC$. По условию, $AB \perp CD$, а по ранее доказанному, $KF \parallel AB$, следовательно, $KE \perp KF$, то есть, $KFME$ — прямоугольник. Используя равенство диагоналей прямоугольника, получим: $MK = EF = 5$.

Второй способ. Рассмотрим декартову систему координат: $O(0;0)$ — точка пересечения прямых AB и CD; AB — ось x; CD — ось y. Тогда, $A(a;0)$; $B(b;0)$; $C(0;c)$; $D(0;d)$. Используя формулу для вычисления координат середины отрезка, получим, что $E(0{,}5b;0{,}5c)$; $F(0{,}5a;0{,}5d)$; $M(0{,}5a;0{,}5c)$; $K(0{,}5b;0{,}5d)$. Применив формулу для вычисления расстояния между точками на координатной плоскости ($PQ = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$), получим, что $MK = EF = 5$.

3.3. *Ответ*: нет, нельзя.

Доказательство можно провести несколькими способами.

Первый способ. Если конь стоит в центральной клетке доски, то он «бьет» восемь полей, а если на любой другой, то не более шести. Таким образом, из 22 свободных клеток доски «битыми» могут оказаться не более, чем двадцать.

Второй способ. Рассмотрим традиционную «шахматную» раскраску данной доски. Тогда тринадцать полей данной доски будут иметь черный цвет, а двенадцать — белый. Если шахматный конь стоит на черной клетке, то он «бьет» только белые клетки, и наоборот. Таким образом, каждый из трех коней будет бить не более восьми клеток одного цвета, значит найдутся клетки, которые не будут заняты и не будут «биты».

4.1. *Ответ*: при $a = -2$.

Пусть x_0 — общий корень данных уравнений, причем $x_0 \neq 0$, в чем легко убедится непосредственной проверкой. Подставим число x_0 в каждое из уравнений, умножим обе части первого из получившихся верных равенств на x_0 и вычтем второе равенство. Получим, что $x_0 = 1$, то есть, если данные уравнения имеют общий корень при каких-то значениях a, то он равен 1. Подставив $x = 1$ в любое из уравнений, получим, что $a = -2$, то есть, для того чтобы число 1 являлось общим корнем данных уравнений, *необходимо*, чтобы $a = -2$. Достаточность этого условия проверяется подстановкой $x = 1$ и $a = -2$ в другое уравнение.

4.2. Искомой точкой является ортоцентр треугольника (точка пересечения его высот), который лежит внутри данного треугольника, так как, по условию, он — остроугольный. Предположим, что это не так, выберем точку M внутри данного треугольника ABC, не совпадающую с его ортоцентром H, и рассмотрим сумму расстояний от точки M до всех вершин и до всех сторон треугольника (см. рис. 39). Попарно сгруппировав длины отрезков, применяя неравенство треугольника и используя то, что гипотенуза прямоугольного треугольника больше его катета, получим:

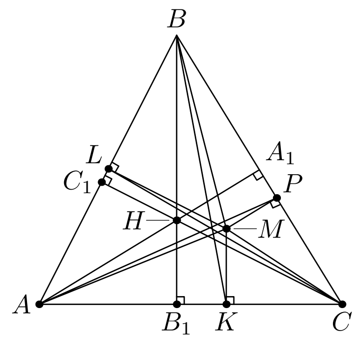


Рис. 39

$$
\begin{aligned}
&MA + MB + MC + MP + MK + ML = \\
&\qquad = (MA + MP) + (MB + MK) + (MC + ML) > \\
&\qquad > AP + BK + CL > AA_1 + BB_1 + CC_1 = \\
&\qquad = HA + HA_1 + HB + HB_1 + HC + HC_1.
\end{aligned}
$$

Отметим, что если точка M принадлежит какой-либо из высот треугольника, то все записанные соотношения также будут верны.

4.3. *Ответ*: $a = \pm 1$, $b = \pm 1$ (четыре пары).

$$
\begin{gathered}
a^4 + 4b^4 = (a^4 + 4a^2b^2 + 4b^2) - 4a^2b^2 = \\
= (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 = (a^2 - 2ab + 2b^2)\times \\
\times(a^2 + 2ab + 2b^2) = ((a-b)^2 + b^2)((a+b)^2 + b^2).
\end{gathered}
$$

Для того, чтобы полученное произведение было простым числом, необходимо, чтобы один из множителей был равен 1. Учитывая, что числа a и b — целые, получим: $\begin{cases} a = b, \\ b = \pm 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} a = -b, \\ b = \pm 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} b = 0, \\ a = \pm 1 \end{cases}$. В последнем случае, оба множителя принимают значение, равное 1, поэтому произведение не является простым числом. В остальных случаях, один из множителей равен единице, а другой — пяти, то есть, произведение равно 5.

2000/2001 учебный год

1.1. *Ответ*: $(-\infty; 0,5)$.

Решим неравенство, используя координатную прямую. Данное неравенство выполняется для всех точек с координатой x, которые находятся ближе к точке с координатой -2000, чем к точке с координатой 2001. Так как $\dfrac{-2000 + 2001}{2} = 0,5$, то искомыми являются все точки, расположенные левее точки с координатой $0,5$ (см. рис. 40).

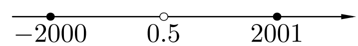


Рис. 40

Возможны другие способы решения, в частности, раскрытие модулей (три случая) или *возведение обеих частей неравенства в квадрат.*

1.2. *Ответ*: не существует.

Любая диагональ выпуклого четырехугольника $ABCD$ разбивает его на два треугольника (см. рис. 41). Применим к каждому из треугольников ABC, ADC, ABD и CBD неравенство треугольника: $AB + BC > AC$; $AD + CD > AC$; $AB + AD > BD$; $BC + CD > BD$. Сложив эти неравенства почленно, получим: $2(AB + BC + CD + AD) > 2(AC + BD)$. Следовательно, сумма длин диагоналей четырехугольника меньше его периметра.

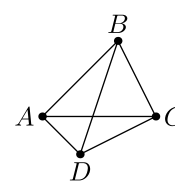


Рис. 41

1.3. *Ответ*: площади фигур равны.

Так как радиус большего круга в два раза больше радиуса меньшего, то их площади относятся, как $4 : 1$, значит, S — площадь большего круга — равна сумме площадей четырех меньших. Пусть x — площадь серой фигуры, а y — площадь черной. Так как серая фигура («лепесток», см. рис. в условии) является пересечением меньших кругов, а черная фигура дополняет объединение меньших кругов до большего, то $S - y = S - x$, то есть, $x = y$.

2.1. *Ответ*: $(1; 1; \ldots; 1)$; $(-1; -1; \ldots; -1)$.

Первый способ. Заметим, что $x_1x_2 = 1$, $x_2x_3 = 1$, ..., $x_{2001}x_1 = 1$. Следовательно, $x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot \ldots \cdot x_{2001}^2 = 1$, откуда $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{2001} = 1$ или $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{2001} = -1$. Так как $x_1x_2 = 1$, $x_3x_4 = 1$, $\cdot$, $x_{1999}x_{2000} = 1$, то $x_{2001} = 1$ или $x_{2001} = -1$. Далее последовательно находим: x_1, x_2, и т. д. Получим: $x_{2001} = x_{2000} = \ldots = x_1 = 1$ или $x_{2001} = x_{2000} = \ldots = x_1 = -1$.

Второй способ. $x_1 = 1/x_2$; $x_2 = 1/x_3$; ...; $x_{2000} = 1/x_{2001}$. Следовательно, значения всех переменных с нечетными индексами равны между собой и значения всех переменных с четными индексами равны между собой, при этом, все переменные принимают значения одного знака. Из последнего уравнения следует, что $x_1 = 1/x_{2001}$, то есть, $x_1 = x_{2001} = \pm 1$. Тогда, из первого уравнения получим, что $x_2 = \pm 1$, и т. д. Таким образом, значение каждой из переменных либо равно 1, либо равно -1.

2.2. В прямоугольных треугольниках AMC и ANC (см. рис. 42) Q — середина гипотенузы AC, значит, медианы QM и QN этих треугольников равны половине AC, то есть, равны между собой. Вычислим угол MQN.

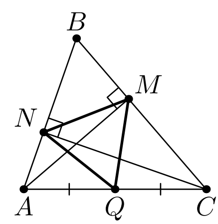


Рис. 42

Первый способ. Так как $QM = QN = 0,5AC$, то точки M и N лежат на окружности с диаметром AC. $\angle BAM = 90° - \angle ABC = 30°$ (из прямоугольного треугольника AMB). $\angle MQN = 2\angle MAN = 60°$, так как $\angle MQN$ — центральный, а $\angle MAN$ — вписанный, и они опираются на одну и ту же дугу окружности.

Второй способ. $\angle MQN = 180° - (\angle AQN + \angle CQM)$. Так как треугольники AQN и CQM — равнобедренные, то $\angle AQN = 180° - 2\angle CAB$; $\angle CQM = 180° - 2\angle ACB$. $\angle AQN + \angle CQM = 360° - 2(\angle CAB + \angle ACB) = 360° - 2(180° - \angle ABC) = 120°$, значит, $\angle MQN = 60°$. Следовательно, $\triangle MQN$ — равнобедренный с углом $60°$, то есть, $\triangle MQN$ — равносторонний, что и требовалось доказать.

2.3. *Ответ*: $m = 4$; $n = 6$.

При $m \geqslant 5$ значение $m!$ кратно 2 и кратно 5, то есть, десятичная запись этого числа оканчивается нулем, поэтому, число $m! + 12$ оканчивается цифрой 2, следовательно, оно не может быть квадратом натурального числа. Последовательно проверив значения $m = 1$; 2; 3; 4, получим, что $m = 4$; $n = 6$.

3.1. *Ответ*: $(1; 1)$, $(-1; -1)$, $(1; -1)$, $(-1; 1)$.

Первый способ. Раскроем скобки, перенесем все слагаемые в одну часть и сгруппируем:

$$x^4y^4+x^4+y^4+1-4x^2y^2=0 \Leftrightarrow (x^4y^4-2x^2y^2+1)+(x^4-2x^2y^2+y^4)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2y^2-1)^2+(x^2-y^2)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y^2=1, \\ x^2=y^2 \end{cases} \Leftrightarrow |x|=|y|=1.$$

Второй способ. Используем неравенство о средних: $\dfrac{x^4+1}{2} \geqslant x^2$ и $\dfrac{y^4+1}{2} \geqslant y^2$. Перемножив почленно эти неравенства, и умножив полученное неравенство на 4, получим, что $(x^4+1)(y^4+1) \geqslant 4x^2y^2$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $x^4=y^4=1$.

3.2. *Ответ*: 1 : 1.

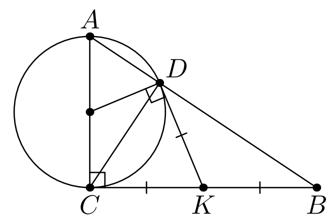


Рис. 43

Так как $\angle ADC$ — вписанный и опирается на диаметр окружности, то $\angle ADC = 90^\circ$, значит, $\triangle BDC$ — прямоугольный. $KD = KC$, так как они являются отрезками касательных к окружности, проведенными из одной точки (см. рис. 43). $\angle DCK = \angle CDK = \alpha$, тогда, $\angle DBC = 90^\circ - \angle DCK = 90^\circ - \alpha$; $\angle KDB = 90^\circ - \angle CDK = 90^\circ - \alpha$, следовательно, $KD = KB$. Таким образом, $KC = KB$, то есть, K — середина BC.

Равенство углов DBC и KDB можно также доказать, используя равенство других углов: $\angle DAC = \angle KDC$ ($\angle DAC$ — вписанный, опирающийся на дугу DC, а $\angle KDC$ — между касательной и хордой, стягивающей эту же дугу).

3.3. *Ответ*: в 2,5 раза.

Первый способ. Пусть время работы каждого из рабочих составляет a, b и c часов соответственно. Следовательно, яма была выкопана за $a+b+c$ часов. В случае совместной работы: за первые a часов первый рабочий выкопает свою долю от «общей» ямы, а двое других могли бы выкопать еще половину ямы. За следующие b часов свою часть работы сделает второй, а остальные также могли выкопать половину ямы. И, наконец, за c часов третий рабочий сделает свою часть работы, а двое остальных — еще половину ямы. Следовательно, за $a+b+c$ часов могло быть выкопано 2,5 ямы. Значит, работая одновременно, они выкопали бы такую же яму в 2,5 раза быстрее.

Второй способ. Пусть производительность каждого из рабочих равна x, y и z ям за час соответственно. Тогда, время работы каждого из них соответственно равно: $\dfrac{0,5}{y+z}$, $\dfrac{0,5}{x+z}$ и $\dfrac{0,5}{x+y}$ часов. То есть, они выкопали яму за время $T = \dfrac{0,5}{y+z} + \dfrac{0,5}{x+z} + \dfrac{0,5}{x+y}$ (часов). При этом, первый рабочий выкопал $\dfrac{0,5x}{y+z}$ ямы, второй — $\dfrac{0,5y}{x+z}$ ямы, а третий — $\dfrac{0,5z}{x+y}$ ямы. Так как, работая таким образом, они выкопали яму, то $\dfrac{0,5x}{y+z} + \dfrac{0,5y}{x+z} + \dfrac{0,5z}{x+y} = 1$. В случае совместной работы, время выкапывания ямы составит: $t = \dfrac{1}{x+y+z}$ часов. Используя это, преобразуем составленное уравнение:

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = 2 \Leftrightarrow \frac{x}{y+z} + 1 + \frac{y}{x+z} + 1 + \frac{z}{x+y} + 1 =$$
$$= 2 + 3 \Leftrightarrow \frac{x+y+z}{y+z} + \frac{y+x+z}{x+z} + \frac{z+x+y}{x+y} = 5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+y+z)\left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{x+y}\right) = 5.$$

Значит, $\dfrac{1}{t} \cdot 2T = 5$, то есть, $T : t = 2,5$.

4.1. *Ответ*: $a = 4 - \sqrt{15}$ или $a = -4 - \sqrt{15}$.

Пусть $a + \sqrt{15} = m$, $\dfrac{1}{a} - \sqrt{15} = n$, где m и n — целые числа. Тогда, $a = m - \sqrt{15} = \dfrac{1}{n + \sqrt{15}}$, следовательно, $(m - \sqrt{15})(n + \sqrt{15}) = 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (m-n)\sqrt{15} = 16 - mn$. Числа $16 - mn$ и $m - n$ являются целыми. Если $m \neq n$, то число $\dfrac{16 - mn}{m - n}$ является рациональным, значит, оно не может быть равным $\sqrt{15}$. Если $m = n$, то $16 - mn = 0$, следовательно, $m = n = \pm 4$.

4.2. *Ответ*: 5 см.

Пусть $ABCD$ — данная трапеция, M и K — середины диагоналей (см. рис. 44а).

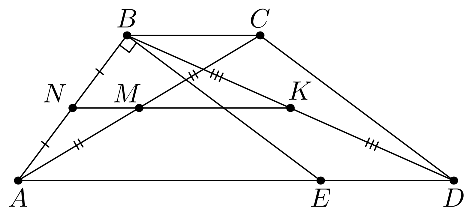


Рис. 44а

Через точку B проведем прямую, параллельную CD, которая пересекает основание AD в точке E. Так как $BCDE$ — параллелограмм, то $BE = CD = 8$ см. Тогда $AE = AD - ED = AD - BC$. Используем, что $MK = 0,5(AD - BC)$. (Этот факт можно доказать, продолжив отрезок MK, лежащий на средней линии трапеции, до пересечения с одной из боковых сторон трапеции. Если N — точка пересечения, то отрезки KN и MN являются средними линиями треугольников ABD и ABC соответственно.) По условию, $MK = 5$ см, значит, $AE = 10$ см. В треугольнике ABE длины сторон равны 6 см, 8 см и 10 см, значит, $\triangle ABE$ — прямоугольный с прямым углом B (по теореме, обратной теореме Пифагора). Пусть P и Q — середины оснований BC и AD соответственно. Вычислить длину PQ можно различными способами.

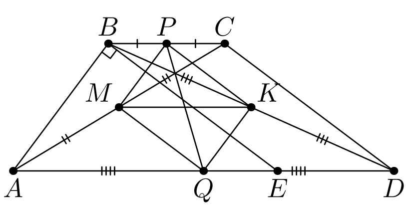


Рис. 44б

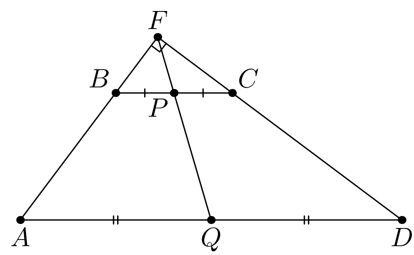


Рис. 44в

Первый способ. Рассмотрим четырехугольник $PKQM$ (см. рис. 44б). Его противолежащие стороны PM и KQ являются средними линиями треугольников ABC и ABD соответственно, значит, $PKQM$ — параллелограмм. Так как $PM \parallel AB$, $PK \parallel CD \parallel BE$ и $AB \perp BE$, то $PM \perp PK$, то есть, $PKQM$ — прямоугольник. Диагонали прямоугольника равны, следовательно, $PQ = MK = 5$ см.

Второй способ. Продолжим боковые стороны трапеции до пересечения в точке F (см. рис. 44в) и используем известный факт: прямая, проходящая через середины оснований трапеции содержит точку пересечения прямых, содержащих боковые стороны (его можно доказать, используя либо векторы, либо подобие треугольников, либо гомотетию). По ранее доказанному, $\angle AFD = 90°$, следовательно, точки P и Q являются центрами описанных окружностей для прямоугольных треугольников BFC и AFD соответственно. Значит, QF и PF — радиусы этих окружностей, поэтому, $PQ = QF - PF = 0,5AD - 0,5BC = 0,5(AD - BC) = 5$ (см).

4.3. *Ответ*: Нет.

Предположим, что это не так, и такие прямые найдутся. Тогда, в эти моменты времени часовые стрелки перпендикулярны. Значит, между ними прошло целое количество часов. Тогда, положение минутных стрелок в эти моменты времени одинаково, и угла в 90° они образовать не могут, что противоречит нашему предположению.

Возможен также способ решения, основанный на вычислениях. Можно найти все моменты времени, когда стрелки часов направлены в противоположные стороны (на одной прямой), и непосредственной проверкой убедиться, что среди этих прямых нет перпендикулярных. (Первый из таких моментов наступит через $\frac{6}{11}$ *часа после начала суток, а остальные — еще через каждые* $\frac{12}{11}$ *часа.*)

2001/2002 учебный год

1.1. *Ответ*: $a > b$.

Так как $a > 0$, то из неравенства в условии следует, что $1 - b > 0$. Далее возможны различные способы.

Первый способ. Используем неравенство о средних: $\frac{a + (1-b)}{2} \geqslant \sqrt{a(1-b)} > \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$. Следовательно, $a + (1 - b) > 1 \Leftrightarrow a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$.

Второй способ. Из данного неравенства следует, что $a > \frac{1}{4(1-b)}$. Поэтому, $a - b > \frac{1}{4(1-b)} - b = \frac{1 - 4b + 4b^2}{4(1-b)} = \frac{(1-2b)^2}{4(1-b)} \geqslant 0$, то есть, $a > b$.

1.2. *Ответ*: 90°.

Проведем в данной трапеции биссектрису угла ABC, которая пересечет диагональ AC в точке M, а основание AD — в точке K (см. рис. 45). Так как $\angle AKB = \angle CBK = \angle ABK$, то $AB = AK = KD = BC$, то есть, $BCDK$ — параллелограмм; $\triangle ABC$ — равнобедренный, значит, $BM \perp AC$. Так как $CD \parallel BM$, то $CD \perp AC$.

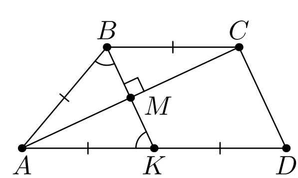


Рис. 45

1.3. *Ответ*: 3.

Так как время ожидания каждого трамвая должно уменьшиться на одну пятую, то оно составит $\frac{4}{5}$ от первоначального. Значит, за день мимо любой остановки должно проезжать в $\frac{5}{4}$ раз больше трамваев, то есть их должно стать 15.

Возможно и иное рассуждение. Остановим в какой-то момент все трамваи, тогда интервал между ними составит $\frac{1}{12}$ часть окружности. Уменьшение интервала движения на $\frac{1}{5}$ означает, что интервал между трамваями будет равен $\frac{1}{12} - \frac{1}{60} = \frac{1}{15}$ части окружности, то есть трамваев должно стать 15.

Хорошей моделью описываемой ситуации является циферблат часов, где первоначальное положение двенадцати трамваев соответствует положению чисел 1, 2, …, 11, 12*.*

2.1. *Ответ*: $x = y = z = 0$.

Первый способ. Из уравнения системы следует, что $(x + y + z)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) = 0$. Так как неравенство $x^2+y^2+z^2 \geqslant 0$ верно при всех x, y и z, а неравенство $xy + yz + zx \geqslant 0$ выполняется по условию, то полученное равенство возможно т. и т. т., когда

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 0, \\ xy + yz + zx = 0, \end{cases}$$

что достигается только при $x = y = z = 0$.

Второй способ. Из условия следует, что:

$$\begin{cases} -x = y + z, \\ x(y + z) + yz \geqslant 0, \end{cases}$$

следовательно, $yz \geqslant -x(y + z) = x^2$, значит, $2yz \geqslant x^2$. Из первого уравнения последней системы получим, что $x^2 = y^2 + 2yz + z^2$, тогда $x^2 \geqslant y^2 + x^2 + z^2$, то есть, $y = z = 0$, значит, и $x = 0$.

2.2. *Ответ*: $\angle A = \angle C = 72^\circ$; $\angle B = 36^\circ$.

Из условия следует, что центр O окружности описанной около $\triangle ABC$ лежит внутри этого треугольника. Кроме того, так как $OA = OB = OC$ и биссектриса угла B проходит через точку O, то $\angle OAB = \angle OBA = \angle OBC = \angle OCB = \alpha$ и $\angle OAC = \angle OCA$ (см. рис. 46), значит, $\angle BAC = \angle BCA$, то есть, $\triangle ABC$ — равнобедренный. Так как AK — биссектриса $\angle BAC$,

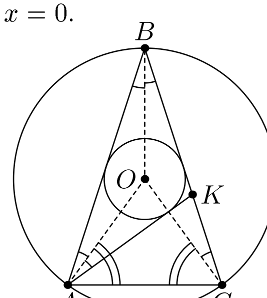


Рис. 46

а AO — биссектриса $\angle BAK$, то $\angle BAC = \angle BCA = 4\alpha$; $\angle ABC = 2\alpha$; тогда $4\alpha + 4\alpha + 2\alpha = 180^\circ \Leftrightarrow \alpha = 18^\circ$.

2.3. *Ответ*: $m = -2$.

Первый способ. Так как $(5m+11)-(2m+7) = 3m+4 \geqslant 0$ при $m \geqslant -\dfrac{4}{3}$, то целые значения m, большие -2, решением задачи не являются (числитель меньше знаменателя). При $m = -2$ данная дробь принимает целое значение 3. При $m = -3$ данная дробь принимает значение $-\dfrac{1}{4}$. При целых $m \leqslant -4$ числитель и знаменатель данной дроби — отрицательны, значит, $|5m+11| - |2m+7| = -5m - 11 + 2m + 7 = -3m - 4 > 0$, то есть модуль числителя меньше модуля знаменателя, поэтому целых значений данная дробь принимать не может.

Второй способ. Данная дробь принимает целые значения, если модуль ее знаменателя равен 1 или ее можно сократить на выражение, равное модулю знаменателя. $|5m + 11| = 1$ при $m = -2$ или $m = -2{,}4$. Выясним, при каких целых значениях m данная дробь сократима. Для этого, найдем наибольший общий делитель числителя и знаменателя с помощью алгоритма Евклида: НОД $(5m + 11; 2m + 7) =$ НОД $(2m + 7; m - 3) =$ НОД $(m - 3; 13) = 13$, если $m - 3$ кратно 13 (в остальных случаях НОД равен 1 и дробь — не сократима). Таким образом данная дробь сократима тогда и только тогда, когда $m = 13k + 3$, где k — целое число.

При найденных значениях k

$$\frac{2m+7}{5m+11} = \frac{26k+13}{65k+26} = \frac{13(2k+1)}{13(5k+2)} = \frac{2k+1}{5k+2}.$$

Так как $|5k + 2| \neq 1$ ни при каких целых значениях k, то других целых m, удовлетворяющих условию задачи, не существует.

3.1. *Ответ*: нет, не существуют.

Предположим, что такие a, b, c, k, m, n, x, y и z существуют, тогда произведение данных шести чисел: amz; bnx; cky; any; bkz и cmx отрицательно, так как среди них — три положительных и три отрицательных числа. Но это невозможно, так как это произведение равно $(abcmnpxyz)^2$, а значит, оно неотрицательно.

Таким образом, исходное предположение неверно, и таких чисел не существует.

3.2. *Ответ*: см. рис. 47.

Проведем произвольную окружность с центром O и разделим ее на 5 равных частей точками A, B, C, D и E (см. рис. 47). Указанные 6 точек — искомые, так как $OA = OB = OC = OD = OE$ (радиусы окружности), $AB = BC = CD = DE = EA$ и $AC = AD = BD = BE = CE$ (в обоих случаях — хорды, стягивающие равные дуги).

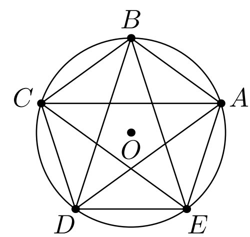


Рис. 47

3.3. *Ответ*: 10 партий, из них две — выиграть.

Пусть сначала Антон сыграл с компьютером n партий, из которых выиграл $0,6n$. По условию, $\dfrac{0,6n+10}{n+10} = 0,7$. Решением этого уравнения является $n = 30$, значит, на данный момент, Антон сыграл 40 партий, из которых выиграл 28. Пусть он должен сыграть еще x партий, из которых выиграть — y. Тогда, по условию $\dfrac{28+y}{40+x} = 0,6 \Leftrightarrow \dfrac{3}{5}x - 4 = y$. Так как x и y — натуральные числа, то значение x должно быть кратно 5. При $x = 5$ $y < 0$, при $x = 10$ $y = 2$.

4.1. *Ответ*: $a = b = c = d = 2$.

Первый способ. Вычитая из первого уравнения второе, из второго — третье, и т. д., получим, что: $a - c = c^2 - d^2$ (1); $b - d = d^2 - a^2$ (2); $c - a = a^2 - b^2$ (3); $d - b = b^2 - c^2$ (4). Пусть $a \geqslant c$, тогда из (1) следует, что $c \geqslant d$, а из (3) следует, что $b \geqslant a$. Таким образом получим, что $b \geqslant a \geqslant c \geqslant d$. Но, если $b \geqslant d$, то из (2) следует, что $d \geqslant a$, а из (4) следует, что $c \geqslant b$, то есть $c \geqslant b \geqslant d \geqslant a$. Таким образом, выполняются неравенства: $a \geqslant c$ и $c \geqslant a$, то есть, $c = a$.

Тогда из неравенства $c \geqslant b \geqslant d \geqslant a$ следует, что $a = b = c = d$, откуда подстановкой в любое из данных уравнений получаем ответ. Случай, когда $a \leqslant c$ рассматривается аналогично и приводит к тому же ответу.

Второй способ. Вычтем из первого уравнения третье и преобразуем: $c^2 - a^2 = (a - c) + (b - d) \Leftrightarrow (c - a)(c + a + 1) = b - d$. Аналогично, вычитаем из второго уравнения четвертое: $d^2 - b^2 = (b - d) + (c - a) \Leftrightarrow (d - b)(d + b + 1) = c - a$. Из полученных уравнений следует, что $(d-b)(d+b+1)(c+a+1) = b-d$. Если $b \neq d$, то $(d+b+1)(c+a+1) = -1$, а это уравнение положительных решений не имеет. Следовательно, $b = d$, а тогда из полученных ранее уравнений следует, что $c = a$. Таким образом, в исходной системе первое уравнение совпадет с третьим, а второе — с четвертым. Тогда получаем:

$$\begin{cases} a + b = a^2, \\ b + a = b^2, \end{cases}$$

то есть, $a = b$. Подставив этот результат в любое из уравнений, найдем ответ.

4.2. *Ответ*: $2m + b$.

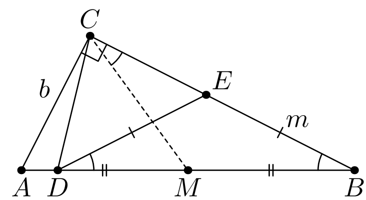


Рис. 48

Пусть M — середина гипотенузы AB данного прямоугольного треугольника ABC (см. рис. 48). Тогда, $AM = BM = CM$ и $\angle BDE = \angle MBC = \angle MCB$ (углы при основаниях двух равнобедренных треугольников). Так как $BD = BC$, то $\triangle BDE = \triangle BCM$ (по стороне и двум прилежащим углам), следовательно, $CM = DE = m$ и $CE = BC - BE = BD - BM = DM$. Тогда $P_{ADEC} = AD + DE + EC + CA = AD + m + DM + b = AM + b + m = 2m + b$.

4.3. *Ответ*: 52 м или 68 м или 88 м.

При разрезании могут образоваться куски трех различных типов (см. рис. 49), причем длина одного из типов кусков ровно вдвое больше, чем другого. Обозначим эти длины: x, $2x$ и y соответственно, а длину всей веревки — L. Подсчитав количество кусков каждого типа, получим, что $L = 8x + 4y = 4(2x + y)$. Все возможные, исходя из условия, варианты длин кусков представлены в таблице:

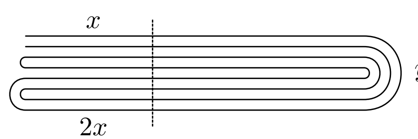


Рис. 49

x	4	2	9	4,5
y	9	9	4	4
L	68	52	88	52

2002/2003 учебный год (осень)

1.1. *Ответ*: 1.

Первый способ. $a^6 + 3a^2b^2 + b^6 = (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4) + 3a^2b^2 = a^4 - a^2b^2 + b^4 + 3a^2b^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 = 1$.

Второй способ. $a^6+3a^2b^2+b^6=(a^2+b^2)^3-3a^4b^2-3a^2b^4+3a^2b^2=$ $=(a^2+b^2)^3-3a^2b^2(a^2+b^2)+3a^2b^2=1-3a^2b^2+3a^2b^2=1$.

Третий способ. Так как $b^2=1-a^2$, то $a^6+3a^2b^2+b^6=a^6+3a^2(1-$ $-a^2)+(1-a^2)^3=a^6+3a^2-3a^4+1-3a^2+3a^4-a^6=1$.

1.2. *Ответ*: 11.

Пусть данные стороны четырехугольника $ABCD$ — соседние, например, AB и BC (см. рис. 50). Тогда, используя неравенство треугольника, получим, что диагональю длины 2 может быть только BD. Применяя неравенство треугольника (или условие того, что три точки лежат на одной прямой) для треугольников ABD и CBD, получим, что $AD=BD=2$; $DC=BC=4$. Значит, периметр $ABCD$ равен 11. Если данные стороны — противолежащие, например, AB и CD то, рассуждая аналогично, приходим к такому же четырехугольнику.

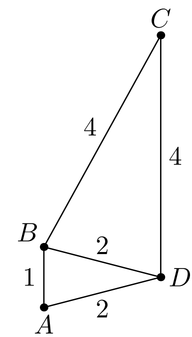


Рис. 50

1.3. *Ответ*: нет.

Предположим, что все высказывания — истинны, тогда, из того, что сказал Олег следует, что в первом тайме забито четное количество голов, тогда, из высказывания Миши следует, что количество голов, забитых во втором тайме также четно, значит, и общее количество забитых мячей — четно. Вместе с тем, из слов Пети можно определить, что количество забитых мячей — нечетно. Таким образом получено противоречие, и кто-то из мальчиков сказал неправду.

2.1. *Ответ*: $99!<50^{99}$.

$$99!=1\cdot2\cdot\ldots\cdot50\cdot\ldots\cdot98\cdot99=(50-49)\,(50-48)\cdot\ldots\cdot(50-1)\cdot50\cdot(50+1)\times$$
$$\times(50+49)=50(50^2-1^2)\,(50^2-2^2)\cdot\ldots\cdot(50^2-49^2)<50\cdot(50^2)^{49}<50^{99}.$$

2.2. *Ответ*: утверждение неверно.

Примеры четырехугольников, отличных от параллелограмма и удовлетворяющих условию, можно получить различными способами.

Первый способ. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABE (см. рис. 51а). На его основании AE выберем такую точку D, что $AD>DE$. Построим угол BDF, равный углу DBE так, чтобы луч DF пересекал BE. На этом луче отложим отрезок CD, равный BE. Тогда, $\triangle BDE=\triangle DBC$ по двум сторонам и углу между ними. $ABCD$ — искомый четырехугольник, так как $\angle BAD=\angle BED=\angle BCD$ и $AB=$ $=BE=CD$.

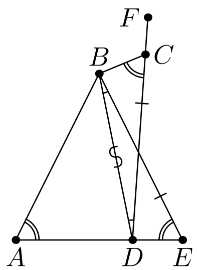


Рис. 51а

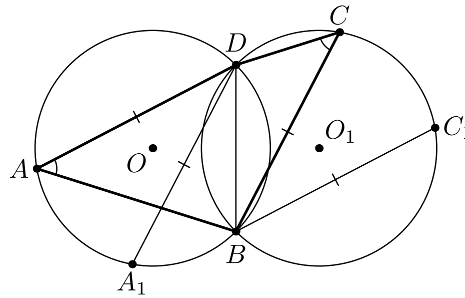


Рис. 51б

Второй способ. Рассмотрим две окружности равного радиуса с центрами O и O_1 (см. рис. 51б). BD — их общая хорда. Проведем в одной окружности хорды DA и DA_1 на одинаковом расстоянии от центра O, а в другой окружности — хорды BC и BC_1 на таком же расстоянии от центра O_1. Так как $DA = DA_1 = BC = BC_1$ и $\angle BAD = \angle BCD$ (вписанные углы в равных окружностях, опирающиеся на равные дуги), то $ABCD$ — искомый четырехугольник.

В приведенных примерах $ABCD$ — выпуклый четырехугольник. В первом примере это обеспечивается выбором треугольника ABC: достаточно рассмотреть треугольник, у которого основание не меньше боковой стороны (в частности, равносторонний). Во втором примере очевидно, что всегда можно выбрать хорды DA и BC так, чтобы $ABCD$ был выпуклым.

2.3. *Ответ*: $p^2 + 1$ или $2p^2$ или $(p+1)\,p$.

Так как каждый лист разреза́лся на одинаковое количество частей, то количество разрезов должно быть делителем p^2. Число p^2 имеет ровно три делителя: 1, p и p^2. В первом случае каждый лист разреза́лся на две части, то есть количество команд равно $2p^2$; во втором случае — на $(p+1)$ часть, то есть команд было $(p+1)\,p$; в третьем случае, один лист разреза́лся на p^2+1 часть, значит, было p^2+1 команд.

3.1. *Ответ*: $n = 1$.

Разложим данное выражение на множители: $n^5+n+1 = (n^5-n^2) + (n^2+n+1) = n^2(n-1)\,(n^2+n+1)+(n^2+n+1) = (n^2+n+1)\,(n^3-n^2+1)$. Данное число будет простым тогда и только тогда, когда один из полученных множителей равен 1, а другой множитель — простое число. Так как $n^2+n+1 \geqslant 3$ при всех натуральных значениях n, то $n^3-n^2+1 = 1$, то есть, $n^2(n-1) = 0$. Это уравнение имеет единственное решение в натуральных числах: $n = 1$. При этом значении n первый множитель равен 3.

3.2. *Ответ*: 2,5.

Проведем CK — медиану прямоугольного треугольника CAM (см. рис. 52). Так как $\angle CKB$ — внешний для равнобедренного треугольника ACK, то $\angle CKB = 30^\circ = \angle CBK$. То есть $CB = CK = 0,5AM = 2,5$.

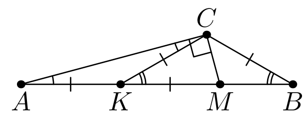


Рис. 52

3.3. *Ответ*: изначально вырезали центральную клетку.

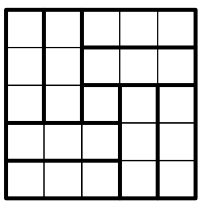


Рис. 53а

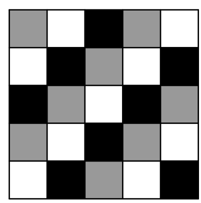


Рис. 53б

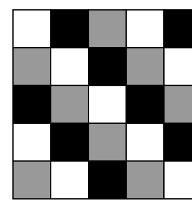


Рис. 53в

Несложно заметить, что центральная клетка квадрата могла быть вырезана (см. рис. 53а). Докажем, что никакая другая клетка не могла быть вырезана. Для этого, раскрасим квадрат в три цвета, используя «диагональную» раскраску (см. рис. 53б). Получим 9 белых, 8 серых и 8 черных клеток. Любой прямоугольник размером 3×1, независимо от его расположения, будет содержать клетки трех цветов, поэтому вырезанной может оказаться только белая клетка. Для того, чтобы показать, что остальные белые клетки не являются решением задачи, еще раз используем «диагональную» раскраску, «повернув» квадрат на 90° (см. рис. 53в). В этом случае, количество клеток каждого цвета не изменится, значит, вырезанной по-прежнему может быть только белая клетка, но единственной белой клеткой, сохранившей свой цвет, является центральная.

4.1. *Ответ*: 52; при $x = 5$, $y = -0,5$ и $z = 1$.

Преобразуем данное выражение: $20x - 4y + 6z - 2x^2 - 4y^2 - 3z^2 - 2 = (-2x^2 + 20x) - (4y^2 + 4y) - (3z^2 - 6z) - 2 = -2(x^2 - 10x + 25 - 25) - (4y^2 + 4y + 1 - 1) - (3z^2 - 6z + 3 - 3) - 2 = -2(x-5)^2 + 50 - (2y+1)^2 + 1 - 3(z-1)^2 + 3 - 2 = 52 - 2(x-5)^2 - (2y+1)^2 - 3(z-1)^2$. Так как $2(x-5)^2 \geqslant 0$, $(2y+1)^2 \geqslant 0$ и $3(z-1)^2 \geqslant 0$, то наибольшее возможное значение выражения равно 52. Оно достигается при $x = 5$, $y = -0,5$ и $z = 1$.

4.2. *Ответ*: прямая, проходящая через точку O пересечения данных прямых, и перпендикулярная прямой OC.

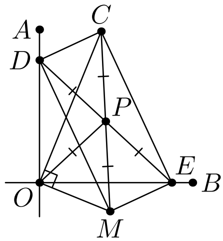


Рис. 54а

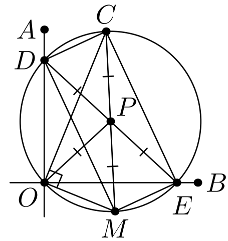


Рис. 54б

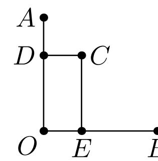


Рис. 54в

Пусть O — точка пересечения данных прямых. Рассмотрим один из прямоугольников, описанных в условии, и проведем его диагонали (см. рис. 54а). Соединим точку O отрезками с точками C, M и P. Так как OP — медиана прямоугольного треугольника DOE, то $OP = 0,5DE$. Диагонали DE и CM прямоугольника $CDME$ равны, следовательно, $OP = 0,5CM$, значит, $\triangle COM$ — прямоугольный с прямым углом COM. Таким образом, доказано, что если M — вершина данного прямоугольника, то она лежит на прямой, перпендикулярной к OC и проходящей через точку O.

Докажем, что любая точка M этой прямой является вершиной одного из прямоугольников. Построим окружность с диаметром CM, центром которой является точка P (см. рис. 54б). Так как $\angle COM = 90^\circ$, то эта окружность пройдет через точку O, а так как расстояние от P до каждой из данных прямых меньше, чем PO, то она пересечет данные прямые в точках D и E соответственно. DE также является диаметром построенной окружности, так как $\angle DOE = 90^\circ$. Следовательно, $CDME$ — прямоугольник.

Если точки M и O — совпадают, то искомым является прямоугольник, стороны CD и CE которого соответственно перпендикулярны прямым OA и OB (см. рис. 54в).

4.3. *Ответ*: да, существует, например: $2^{105} \cdot 3^{140} \cdot 5^{84} \cdot 7^{90}$.

Заметим, что если $N = p_1^{\alpha} \cdot p_2^{\beta} \cdot \ldots \cdot p_k^{\omega}$ (то есть число N разложено на простые множители), то для того, чтобы оно являлось квадратом натурального числа необходимо и достаточно, чтобы каждое из чисел α, β, …, ω было кратно двум. Аналогично, для того, чтобы число N являлось кубом натурального числа, необходимо и достаточно, чтобы каждый из этих показателей степеней был кратен трем, и т. д. Поэтому, чтобы привести пример числа N, удовлетворяющего условию задачи, заметим, что в его разложение на простые множители обязаны входить числа 2, 3, 5 и 7, то есть, N делится на $2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 5^{\gamma} \cdot 7^{\lambda}$. Подберем показатели степеней так, чтобы выполнялись все данные условия. Число α должно быть кратно трем, пяти и семи, а при делении на 2 давать остаток 1, например, $\alpha = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$. Аналогично, число β должно быть кратно двум, пяти и семи, а при делении на 3 давать остаток 2, например, $\beta = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2 = 140$. Рассуждая аналогичным образом, можно получить, что $\gamma = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 = 84$; $\lambda = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 = 90$.

Заметим, что указанное число является наименьшим из возможных. Для того чтобы найти общий вид всех таких чисел, необходимо записать показатели степеней в виде: $\alpha = 2k - 1$; $\beta = 3m - 2$; $\gamma = 5n - 4$; $\lambda = 7p - 6$ *и решить в натуральных числах уравнения*: $2k - 1 = 105x$; $3m - 2 = 70y$; $5n - 4 = 42z$ *и* $7p - 6 = 30t$. *Остальные простые множители могут входить в разложение искомых чисел с показателями степеней, кратными* $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$.

2002/2003 учебный год (весна)

1.1. *Ответ*: 0.

Если хотя бы одно из чисел: a, b или c равно 0, то ответ 0 — очевиден. Предположим, что среди этих чисел нет нулей, тогда, среди них можно выбрать два числа одного знака. Пусть, например, числа a и b имеют одинаковый знак. Тогда, $a|b| - |a|b = 0$, в чем несложно убедиться, рассмотрев два случая: 1) $a > 0$, $b > 0$; 2) $a < 0$, $b < 0$. Таким образом, в данном произведении хотя бы один из множителей равен 0, то есть, значение данного выражения равно 0.

1.2. Рассмотрим $\triangle ABC$ с прямым углом C, в котором $\angle ABC = 30°$ (см. рис. 55). Проведем биссектрису AK этого треугольника и из точки K опустим перпендикуляр KD на гипотенузу.

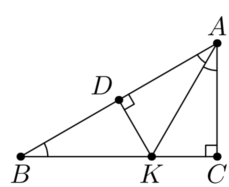


Рис. 55

Прямоугольные треугольники AKC и AKD равны, поскольку $\angle CAK = \angle DAK = 30°$, а AK — их общая гипотенуза, а прямоугольные треугольники BKD и AKD равны, так как $\angle DBK = \angle DAK = 30°$, а DK — их общий катет. Следовательно, указанный треугольник ABC разрезан на три равных треугольника, что и требовалось доказать.

1.3. *Ответ*: при $n = 16$.

Запишем число, десятичная запись которого состоит из нескольких двоек, и будем делить его «в столбик» на 17 до тех пор, пока на очередном шаге не получим остаток 0. При этом, двойки в делимом дописываются по необходимости. Получится пример (см. рис. 56).

```
-2222222222222222|17
 17              |...
 -52
  51
  -122
   119
    -32
     17
    -152
     136
     -162
      153
       -92
        85
        -72
         68
         -42
          34
          -82
           68
          -142
           136
            -62
             51
            -112
             102
             -102
              102
                0
```

Рис. 56

2.1. *Ответ*: $3\frac{1}{13}$ поленницы.

Первый способ. Пусть x — искомое количество дров. На распиливания одной поленницы уходит $\frac{1}{5}$ дня, а на то, чтобы затем ее наколоть — $\frac{1}{8}$ дня, поэтому, на обработку x пленниц будет затрачено $\frac{x}{5}$ и $\frac{x}{8}$ дней соответственно. Так как вся работа должна быть сделана за день, то $\frac{x}{5} + \frac{x}{8} \leqslant 1$. Решая это неравенство, получим, что $x \leqslant \frac{40}{13}$. Это означает, что наибольшее количество дров, которое можно распилить, а затем — наколоть, составляет $3\frac{1}{13}$ поленницы.

Второй способ. Заметим, что оптимальная организация работы состоит в том, чтобы работать без пауз. Так как НОК$(5; 8) = 40$, то найдем, за какое время (при наилучшей организации работы) рабочие напилят и наколют 40 поленниц дров. Исходя из условия, 40 поленниц дров рабочие будут 8 дней пилить и 5 дней колоть. Следовательно, всю работу они сделают за 13 дней, значит, за день они смогут полностью обработать $\frac{40}{13}$ поленницы.

2.2. *Ответ*: 60°.

Пусть CE — биссектриса $\angle BCA$; BF — биссектриса $\angle ABC$; D — точка их пересечения (см. рис. 57). Введем обозначения: $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = 2\beta$, $\angle BCA = 2\gamma$. Исходя из условия, требуется рассмотреть два случая:

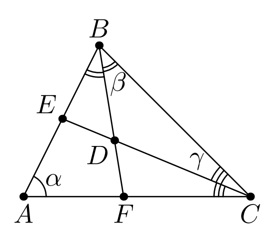


Рис. 57

1) Если $\angle BAC = \angle BDC$, то из $\triangle ABC$ $\alpha = 180^\circ - (2\beta + 2\gamma)$, а из $\triangle BDC$ $\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma)$. Значит, $\beta + \gamma = 0$, то есть, этот случай невозможен.

2) Если $\angle BAC = \angle BDE$, то из $\triangle ABC$ $\alpha = 180^\circ - 2(\beta + \gamma)$ и $\alpha = \beta + \gamma$, так как $\angle BDE$ — внешний для $\triangle BDC$. Следовательно, $\alpha = 180^\circ - 2\alpha$, то есть, $\alpha = 60^\circ$.

2.3. *Ответ*: $\underbrace{11\ldots1}_{300\text{ цифр}}$.

Так как $\underbrace{33\ldots3}_{100\text{ цифр}} = 3 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{100\text{ цифр}}$ и эти множители — взаимно просты, то искомое число N должно быть кратно каждому из них. Для того, чтобы число N было кратно трем, необходимо, чтобы сумма цифр в его десятичной записи делилась на 3, то есть, количество единиц в записи числа N должно быть кратно трем. Для того, чтобы число N было кратно второму сомножителю, необходимо, чтобы количество единиц в его десятичной записи делилось на 100. Действительно, разобьем число, десятичная запись которого содержит только единицы, слева направо на группы по сто цифр в каждой (в последней группе может оказаться k цифр, где $k \leqslant 100$): $11\ldots1 = \underbrace{11\ldots1}_{100\text{ цифр}}\,\underbrace{11\ldots1}_{100\text{ цифр}}\ldots\underbrace{11\ldots1}_{k\text{ цифр}} = \underbrace{11\ldots1}_{100\text{ цифр}} \cdot (10^{100} + 10^{200} + \ldots) + \underbrace{11\ldots1}_{k\text{ цифр}}$. Тогда, если $k < 100$, то записанное число не делится на $\underbrace{11\ldots1}_{100\text{ цифр}}$, значит, и N не делится на это число. Таким образом, количество единиц в десятичной записи числа N должно быть не менее трехсот, причем число $\underbrace{11\ldots1}_{300\text{ цифр}}$, очевидно, удовлетворяет условию.

3.1. *Ответ*: $\dfrac{2002}{2003} < \dfrac{20022003}{20032002}$.

Первый способ. Используем следующие свойства дробей: 1) если числитель и знаменатель дроби умножить на одно и то же, отличное от нуля, число, то значение дроби не изменится; 2) если к числителю и знаменателю правильной дроби прибавить одно и то же положительное число, то значение дроби увеличится.

Поэтому, $\dfrac{2002}{2003} = \dfrac{20020000}{20030000} < \dfrac{20020000 + 2002}{20030000 + 2002} = \dfrac{20022002}{20032002} < \dfrac{20022003}{20032002}$. Можно и короче: $\dfrac{2002}{2003} = \dfrac{20022002}{20032003} < \dfrac{20022003}{20032002}$.

Второй способ. Для того, чтобы сравнить данные дроби, достаточно сравнить числа $X = 2002 \cdot 20032002$ и $Y = 2003 \cdot 20022003$. Пусть

$a = 2002$, тогда $X = a \cdot ((a+1) \cdot 10^4 + a)$; $Y = (a+1) \cdot (a \cdot 10^4 + a + 1)$. Следовательно, $X - Y = a^2 - (a+1)^2 < 0$, поэтому $X < Y$, значит, $\frac{2002}{2003} < \frac{20022003}{20032002}$.

3.2. *Ответ*: объединение двух окружностей с центрами в точках A и B и радиусами, равными AB, и серединного перпендикуляра a к отрезку AB с «выколотыми» точками A, B, C, A_1 и B_1 (см. рис. 58).

Искомые точки M могут являться как вершинами, противолежащими основанию равнобедренного треугольника, так и концами основания.

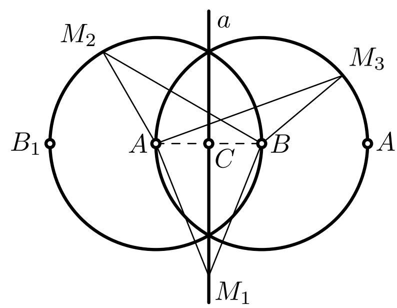


Рис. 58

1) Точка M является вершиной равнобедренного треугольника ABM с основанием AB тогда и только тогда, когда она равноудалена от точек A и B, но не лежит на отрезке AB. Следовательно, M принадлежит серединному перпендикуляру a к отрезку AB, но не совпадает с точкой C — серединой этого отрезка.

2) Точка M является вершиной равнобедренного треугольника ABM с основанием BM тогда и только тогда, когда она удалена от точки A на расстояние AB, но не лежит на прямой AB. Следовательно, M принадлежит окружности с центром в точке A и радиусом AB, но не совпадает с точками B или B_1, где B_1 — точка, симметричная точке B относительно A.

Аналогично, точка M является вершиной равнобедренного треугольника ABM с основанием AM тогда и только тогда, когда она принадлежит окружности с центром в точке B и радиусом AB, но не совпадает с точками A или A_1, где A_1 — точка, симметричная точке A относительно B. Таким образом, искомое геометрическое место точек является объединением полученных фигур.

3.3. *Ответ*: нет, не может.

Так как число $2n+1$ является точным квадратом, то точным квадратом является и число $8n+4 = 4(2n+1)$. Пусть $8n+4 = m^2$; $3n+1 = k^2$, где m и k — натуральные числа, тогда $5n+3 = (8n+4) - (3n+1) = m^2 - k^2 = (m+k)(m-k)$. Предположим, что $m - k = 1$, то есть, $m = k+1$. Тогда, используя неравенство $k^2 + 1 \geqslant 2k$, получим: $5n+3 = 2k+1 \leqslant k^2 + 2 = 3n+3$, что невозможно ни при каких натуральных n. Таким образом, $m - k \neq 1$, то есть, при число $5n+3$ — составное.

4.1. *Ответ*: составным.

Преобразуем: $4^9+6^{10}+3^{20}=(2^9)^2+2\cdot(2^9\cdot 3^{10})+(3^{10})^2=(2^9+3^{10})^2$. Следовательно, данное число является составным.

4.2. *Ответ*: $\angle ACD=70^\circ$.

Пусть ABC — данный треугольник. Вычислим углы при основании: $\angle A=\angle B=(180^\circ-20^\circ):2=80^\circ$. Дальнейшие рассуждения требуют дополнительных построений, которые могут различаться, но так или иначе используют равенство: $80^\circ-20^\circ=60^\circ$.

Первый способ. Построим равносторонний $\triangle AMC$ (см. рис. 59а), тогда $\triangle ABM=\triangle CBM$ (по III признаку), следовательно, $\angle ABM==10^\circ$. Так как $\angle BAM=20^\circ=\angle DBC$, то $\triangle DBC=\triangle MAB$ (по I признаку), значит, $\angle BCD=\angle ABM=10^\circ$. Следовательно, $\angle ACD=80^\circ--10^\circ=70^\circ$.

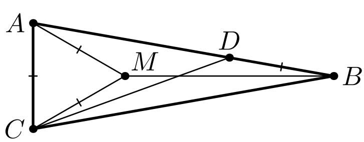


Рис. 59а

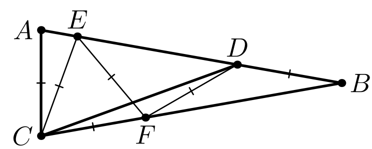


Рис. 59б

Второй способ. Построим последовательно точки E, F и D' так, что $AC=CE=EF=FD'$ (см. рис. 59б). Последовательно вычисляем углы: $\angle AEC=80^\circ$; $\angle ACE=20^\circ$; $\angle ECB=60^\circ$; $\angle CEF=\angle CFE=60^\circ$; $\angle D'EF=40^\circ$; $\angle ED'F=40^\circ$; $\angle D'FB=40^\circ-20^\circ=20^\circ$, следовательно, $BD'=D'F=AC$, то есть, точка D' совпадает с данной точкой D. Так как $\triangle DFC$ — равнобедренный, то $\angle DCF=20^\circ:2=10^\circ$, тогда $\angle ACD=80^\circ-10^\circ=70^\circ$.

Третий способ. Достроим $\triangle ABC$ до параллелограмма $ABFC$ и построим равносторонний треугольник BMF (см. рис. 59в). Тогда, из равенства треугольников DBC и MBC (по I признаку), следует, что $\angle DCB=\angle MCB=\angle MCF=10^\circ$, следовательно, $\angle ACD=80^\circ-10^\circ==70^\circ$.

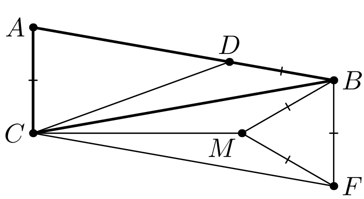


Рис. 59в

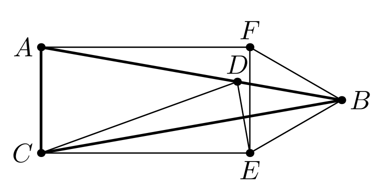


Рис. 59г

Четвертый способ. Построим перпендикуляры к AC в точках A и C и отложим $\angle ABF = \angle CBE = 20^\circ$ (см. рис. 59г). Тогда, $\angle EBF = 60^\circ$ и $\triangle ABF = \triangle CBE$ (по II признаку), значит, $\triangle FBE$ — равносторонний. $\triangle BCD = \triangle BCE$ (по I признаку), $\angle BCD = 90^\circ - 80^\circ = 10^\circ$, следовательно, $\angle ACD = 80^\circ - 10^\circ = 70^\circ$.

Пятый способ. Вне треугольника ABC построим равносторонний треугольник ACK и проведем $DM \parallel AK$ (см. рис. 59д). Тогда, $\angle ADM = 180^\circ - 80^\circ - 60^\circ = 40^\circ$; $\angle BMD = 40^\circ - 20^\circ = 20^\circ$. Следовательно, $DM = DB = AC = AK$, то есть, $ADMK$ — параллелограмм. Значит, $\angle DMK = 180^\circ(40^\circ = 140^\circ$; $\angle CMK = 20^\circ = \angle CKM$; $MC = KC = AC = DM$. Тогда, $\angle DCM = 20^\circ : 2 = 10^\circ$, следовательно, $\angle ACD = 80^\circ - 10^\circ = 70^\circ$.

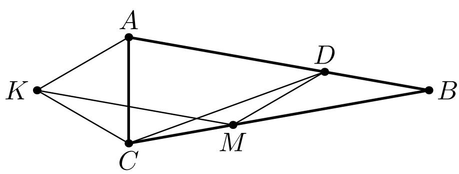


Рис. 59д

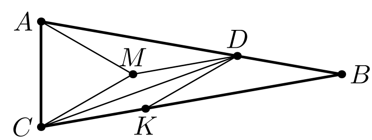


Рис. 59е

Шестой способ. Построим равносторонний треугольник AMC, соединим точки M и D, а на стороне BC выберем точку K так, чтобы $KD = BD$ (см. рис. 59е). Тогда, $CMDK$ — параллелограмм, поэтому, $\angle ADM = \angle ABC$, $\angle DAM = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$; значит, $AM = MD$. Таким образом, $MDKC$ — ромб; $\angle DCK = 0,5\angle MCD = 10^\circ$; следовательно, $\angle ACD = 60^\circ + 10^\circ = 70^\circ$.

4.3. *Ответ*: 34 (считая и тот случай, когда все тома стоят на своем месте).

Решим более общую задачу. Пусть энциклопедия состоит из n томов. Количество расстановок n-томной энциклопедии, удовлетворяющих условию задачи, обозначим S_n. Рассмотрим варианты расстановки последнего тома энциклопедии. Если мы его поставим на свое место, то остальные $n-1$ томов можно поставить на первые $n-1$ мест S_{n-1} способом. Если же мы поставим n-й том на $(n-1)$-е место, то n-е место мы обязаны занять $(n-1)$-м томом, при этом количество расстановок остальных $(n-2)$-х томов на первые $n-2$ места равно S_{n-2}. Таким образом, $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$. Ясно, что $S_1 = 1$, $S_2 = 2$ (два тома можно либо поставить правильно, либо поменять местами). Далее, $S_3 = S_2 + S_1 = 2 + 1 = 3$; $S_4 = 3 + 2 = 5$; $S_5 = 5 + 3 = 8$; $S_6 = 8 + 5 = 13$; $S_7 = 13 + 8 = 21$; $S_8 = 21 + 13 = 34$.

Числовая последовательность (S_n), *полученная в процессе решения задачи, называется последовательностью чисел Фибоначчи. Она задается начальными условиями* $S_1 = 1$; $S_2 = 2$ *и рекуррентным соотношением* $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$ *для всех* $n > 2$, *то есть, каждый член этой последовательности, начиная с третьего, равен сумме двух предшествующих.*

2003/2004 учебный год

1.1. Так как $\frac{1}{11} > \frac{1}{100}$, $\frac{1}{12} > \frac{1}{100}$, $\ldots$, $\frac{1}{99} > \frac{1}{100}$, то $\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + {}$ $+ \ldots + \frac{1}{100} > \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \ldots \frac{1}{100} = \frac{1}{10} + \frac{90}{100} = 1$.

1.2. *Ответ*: да, может (см. рис. 60).

Отметим, что в любом параллелограмме, не являющемся прямоугольником, основания высот, проведенных из вершины острого угла, лежат на продолжениях сторон, а основание одной из высот, проведенных из вершины тупого угла, может попасть на продолжение стороны параллелограмма, если угол между меньшей диагональю и одной из сторон — тупой.

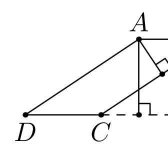


Рис. 60

1.3. *Ответ*: да, существуют.

Приведем несколько примеров: 1) $48 = 3 \cdot 4^2$; $49 = 7^2$; $50 = 2 \cdot 5^2$; 2) $98 = 2 \cdot 7^2$, $99 = 11 \cdot 3^2$, $100 = 2^2 \cdot 5^2$; 3) $124 = 31 \cdot 2^2$, $125 = 5^3$, $126 = 14 \cdot 3^2$.

Указанные «тройки» чисел — наименьшие из возможных.

2.1. *Ответ*: верно.

Если $a+b = c+d$, то $(a+b)^2 = (c+d)^2 \Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 = c^2+2cd+d^2$, откуда, учитывая что $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, получим, что $ab = cd$.

Далее возможны различные способы, например:
1) $a^3 + b^3 = (a + b)\,(a^2 - ab + b^2) = (c + d)\,(c^2 - cd + d^2) = c^3 + d^3$.
2) Так как $a + b = c + d \Leftrightarrow (a + b)^3 = (c + d)^3 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = {}$ $= c^3 + d^3 + 3cd(c + d)$, то $a^3 + b^3 = c^3 + d^3$.

2.2. *Ответ*: 3 см.

Первый способ. Проведем прямую через вершину B, параллельную AC, которая пересечет прямую AD в точке K (см. рис. 61а). Тогда $\triangle KBD$ — прямоугольный, M лежит на его гипотенузе KD и равноудалена от вершин B и D, следовательно M — середина KD. Так как $BCAK$ — параллелограмм, то $BC = AK$. Следовательно, длина средней линии составляет половину длины KD, то есть, равна 3 см.

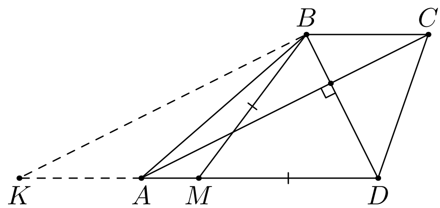


Рис. 61а

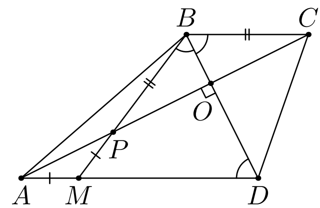


Рис. 61б

Второй способ. Пусть O — точка пересечения диагоналей трапеции; P — точка пересечения BM и AC (см. рис. 61б). По условию, $\triangle BMD$ — равнобедренный, значит, $\angle MBD = \angle MDB = \alpha$. Так как $\angle CBD = \angle MDB = \alpha$ и $BO \perp PC$, то BO — высота и биссектриса треугольника PBC, поэтому, этот треугольник — также равнобедренный, то есть, $BP = BC$. Так как $\angle APM = \angle BPO = 90^\circ - \alpha = \angle OAD$, то равнобедренным является и треугольник AMP: $AM = PM$. Таким образом, средняя линия трапеции равна: $\dfrac{AD + BC}{2} = \dfrac{AM + MD + BP}{2} = \dfrac{BM + MD}{2} = 3$ (см).

2.3. *Ответ*: нет, не может.

До дисквалификации Петрова Иванов опережал Сидорова не менее чем на пол-очка, а после — уступил ему не менее, чем пол-очка. Следовательно, Иванов выиграл у Петрова. Так как после дисквалификации Сидоров опередил Иванова, то при пересчете Сидоров очков не терял, значит, Сидоров проиграл Петрову. Следовательно, при дисквалификации Сидорова Петров потеряет одно очко и опередить Иванова не сможет (даже если Иванов выиграл у Сидорова и также потеряет это очко).

3.1. *Ответ*: $x = 2$; $y = 1$.

Преобразуем данное уравнение: $(x^2 - 4xy + 4y^2) + (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 2y + 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 2y)^2 + (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 0$. Так как каждое слагаемое в левой части принимает только неотрицательные значения, то полученное равенство выполняется тогда, и только тогда, когда каждое слагаемое равно нулю: $(y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow y = 1$; $(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$; $(x - 2y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2y$. При $x = 2$, $y = 1$ последнее равенство верно.

3.2. *Первый способ.* Пусть K — середина стороны AB (см. рис. 62). Тогда, так как $BK \parallel ND$ и $BK = ND$, то $KBND$ — параллелограмм. Следовательно, $KD \parallel BN$, то есть, $\angle BPM = \angle KDM$. Соединим точку M с точками N и K. Так как $\triangle KDM = \triangle NAM$ (по трем сторонам), то $\angle KDM = \angle MAN$. Следовательно, $\angle BPM = \angle MAN$, что и требовалось доказать.

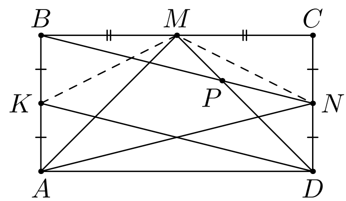


Рис. 62

Второй способ. Так как $AM = MD$ и $BC \parallel AD$, то $\angle MAD = \angle MDA = \angle DMC$ (см. рис. 62). Кроме того, из равенства прямоугольных треугольников BCN и ADN следует, что $\angle NBM = \angle NAD$. По теореме о внешнем угле для $\triangle BMP$: $\angle BPM = \angle DMC - \angle NBM = \angle MAD - \angle NAD = \angle MAN$, что и требовалось доказать.

3.3. *Ответ*: 6 знакомых.

Первый способ. Выпишем в ряд всех знакомых Золотой рыбки и учитывая, что все знакомые с номерами, делящимися на 4, — караси разделим их на части (**К** — карась, **Р** — другая рыба):

Р Р Р К Р Р | **Р К Р Р Р** | **К Р Р Р** | **К Р Р Р** | **К Р Р Р** | ...

(все части, начиная с третьей, — одинаковые, но в последней части может быть и менее четырех знакомых). Тогда в первой части караси составляют $\frac{1}{6}$ от общего количества, во второй части — $\frac{1}{5}$, а в остальных — $\frac{1}{4}$ (в последней части может быть и больше, чем $\frac{1}{4}$). Из условия следует, что караси не могут составлять больше, чем $\frac{1}{6}$ от общего количества, поэтому, выписанный ряд должен ограничиться первой частью.

Второй способ. Из условия следует, что количество знакомых Золотой рыбки является числом вида $6n$, где n — натуральное; из них $3n$ щук и $2n$ окуней, поэтому карасей — не больше, чем n. Пусть k — количество карасей, тогда $6n = 4k + r$, где $0 \leqslant k \leqslant 4$. Заметим, что $r \neq 0$, так как в противном случае караси составляли бы четвертую часть от всех знакомых, что невозможно, поскольку $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > 1$. Кроме того, так как $6n$ — четное число, то $r \neq 1$ и $r \neq 3$. Следовательно, $r = 2$, то есть, $6n = 4k + 2 \Leftrightarrow 3n = 2k + 1 \Leftrightarrow n = \frac{2k+1}{3}$. Так как $n \geqslant k$, то $k \leqslant 1$. При $k = 0$ число n не является целым, поэтому $k = 1$, тогда $n = 1$, то есть, $6n = 6$.

Третий способ. Заметим, что количество знакомых Золотой рыбки не может быть кратно четырем, так как $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > 1$. Вместе с тем, оно должно быть чётным (так половина ее знакомых — щуки). Поэтому, количество ее знакомых должно быть числом вида $4k + 2$, где k — натуральное число ($k \neq 0$, так как в этом случае общее количество знакомых равно двум, то есть, не кратно трем). Тогда количество щук равно $2k + 1$, количество окуней — $\frac{4k+2}{3}$, а количество карасей — k. Общее количество щук, карасей и окуней не превосходит общего количества знакомых, следовательно, $2k + 1 + \frac{4k+2}{3} + k \leqslant 4k + 2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{4k+2}{3} \leqslant k+1 \Leftrightarrow 4k+2 \leqslant 3k+3 \Leftrightarrow k \leqslant 1$. Так как k — натуральное число, то $k = 1$, то есть, общее количество знакомых равно $4 \cdot 1 + 2 = 6$.

4.1. *Ответ*: да, верно.

$$\frac{x-ab}{a+b}+\frac{x-bc}{b+c}+\frac{x-ca}{c+a}=a+b+c\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{x-ab}{a+b}-c\right)+\left(\frac{x-bc}{b+c}-a\right)+\left(\frac{x-ca}{c+a}-b\right)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{x-ab-ac-bc}{a+b}+\frac{x-bc-ab-ac}{b+c}+\frac{x-ca-cb-ab}{c+a}=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x-(ab+bc+ca))\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)=0.$$

Из условия следует, что второй множитель — положительное число, значит, $x-(ab+bc+ca)=0 \Leftrightarrow x = ab+bc+ca$, то есть, x — целое число. Эту же идею можно реализовать иначе:

$$\frac{x-ab}{a+b}+\frac{x-bc}{b+c}+\frac{x-ca}{c+a}=a+b+c\Leftrightarrow\frac{x}{a+b}-\frac{ab}{a+b}+\frac{x}{b+c}-$$
$$-\frac{bc}{b+c}+\frac{x}{c+a}-\frac{ca}{c+a}=a+b+c\Leftrightarrow\frac{x}{a+b}+\frac{x}{b+c}+\frac{x}{c+a}=$$
$$=\left(a+\frac{bc}{b+c}\right)+\left(b+\frac{ca}{c+a}\right)+\left(c+\frac{ab}{a+b}\right)\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)=$$
$$=(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\Rightarrow x=ab+bc+ca.$$

Отметим, что попытки непосредственного умножения обеих частей уравнения на общий знаменатель левой части приводят к очень громоздким преобразованиям.

4.2. Разрежем данный четырехугольник по диагонали BD (см. рис. 63а) и, «перевернув» треугольник BCD, вновь приложим его к диагонали BD (см. рис. 63б). Получился равнобедренный треугольник $AB'C'$ ($AB' = B'C'$). Следовательно $\angle B'AD' = \angle B'C'D'$, то есть, $\angle BAD = \angle BCD$, что и требовалось доказать.

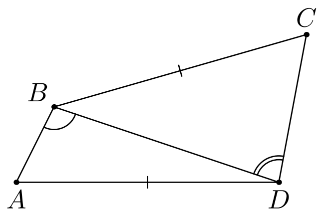


Рис. 63а

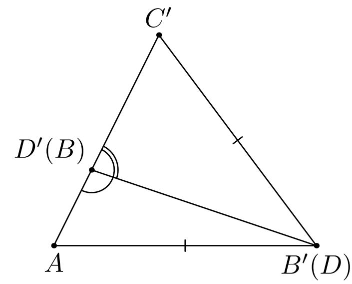


Рис. 63б

Отметим, что выходя за рамки материала, уже изученного восьмиклассниками, можно предложить другой способ решения (см. рис. 63а).

Пусть $\angle ABD = \alpha$, тогда $\angle CDB = 180^\circ - \alpha$. По теореме синусов из $\triangle ABD$: $\dfrac{BD}{\sin\angle A} = \dfrac{AD}{\sin\alpha}$. Аналогично, из $\triangle BCD$: $\dfrac{BD}{\sin\angle C} = \dfrac{BC}{\sin(180^\circ - \alpha)}$.

Учитывая, что $AD = BC$ и $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, получим, что $\sin\angle A = \sin\angle C$. Так как $\angle ABD + \angle CDB = 180^\circ$, то либо каждый из этих углов — прямой, либо один из них — острый, а другой — тупой. В первом случае ясно, что углы A и C — острые, поэтому, из равенства их синусов следует равенство углов.

Во втором случае, без ограничения общности можно считать, что $\angle ABD = \alpha$ — острый, а $\angle CDB$ — тупой. Тогда $\angle C$ — острый, следовательно, из $\triangle BCD$ получим, что $BD < BC$. Предположим, что $\angle A$ — не острый, тогда в $\triangle ABD$: $\angle A > \alpha$, то есть, $BD > AD$. Значит, $BC > AD$, что противоречит условию.

Таким образом, $\angle A$ — острый, поэтому $\angle A = \angle C$, что и требовалось доказать.

4.3. Проведем четыре концентрические окружности с тем же центром и радиусами 2, 4, 6 и 8 см. Затем разрежем самый маленький круг и каждое из четырех полученных колец на 5 равных частей (см. рис. 64, «кусочки» одной части пронумерованы одинаково).

Очевидно, что при таком разрезании существует радиус данного круга, пересекающий все полученные части, на котором и расположены данные точки.

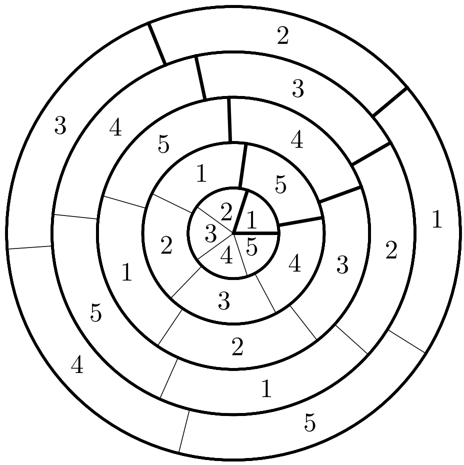


Рис. 64

2004/2005 учебный год

1.1. *Ответ*: 3.

Первый способ. Так как $(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 = (x^3+y^3)+ + 3(x^2y+xy^2) = 9+18 = 27$, то $x+y = 3$.

Второй способ. Так как $x^3+y^3 = (x+y)\,(x^2-xy+y^2) = (x+y)\,((x+ +y)^2-3xy) = (x+y)^3-3xy(x+y)$, а $3xy(x+y) = 3(x^2y+xy^2) = 18$, то $9 = (x+y)^3-18$, то есть, $x+y = 3$.

1.2. *Ответ*: 6.

Пусть F — точка пересечения AD и BE (см. рис. 65). В треугольнике ABE биссектриса AF является высотой, поэтому этот треугольник — равнобедренный. Следовательно, $AB = = AE = \dfrac{1}{2}\,AC = 6$.

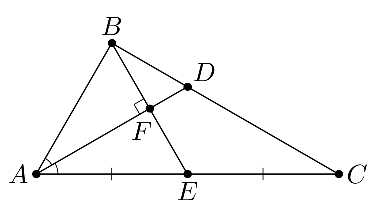


Рис. 65

1.3. *Ответ*: 41312432 или 23421314.

2.1. *Ответ*: 1,9.

Перемножим почленно данные верные равенства:
$$\frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a} = 4,9 \;\Leftrightarrow\; 1+\frac{c}{a+b}+1+\frac{a}{b+c}+1+ +\frac{b}{c+a} = 4,9 \;\Leftrightarrow\; \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} = 1,9.$$

2.2. *Ответ*: 4 см.

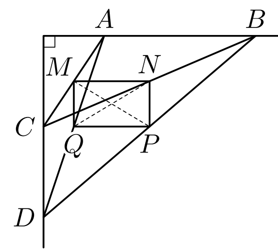


Рис. 66

Рассмотрим четырехугольник $MNPQ$ (см. рис. 66). Из условия задачи следует, что MN — средняя линия треугольника ACB, поэтому $MN \parallel AB$ и $MN = 0,5AB$. Аналогично, так как PQ — средняя линия треугольника ADB, то $PQ \parallel AB$ и $PQ = 0,5AB$. Таким образом, $MN \parallel PQ$ и $MN = PQ$, то есть, $MNPQ$ — параллелограмм. Кроме того, так как MQ — средняя линия треугольника CAD, то $MQ \parallel CD$. Из того, что $AB \perp CD$, $MN \parallel AB$ и $MQ \parallel CD$, следует, что $MN \perp MQ$, то есть, $MNPQ$ — прямоугольник. По свойству диагоналей прямоугольника: $QN = MP = 4$.

2.3. *Ответ*: да, верно.

Так как после удаления одного участника оставшиеся шахматисты по-прежнему имеют одинаковый результат, то с этим участником все сыграли одинаково. Если бы этот шахматист выиграл все партии или проиграл все партии, то количество набранных им очков не могло бы быть таким же, что и у остальных участников, как это сказано в условии задачи. Следовательно, удаленный участник закончил все свои партии вничью. Поскольку аналогичное рассуждение можно провести для каждого из шахматистов, то все партии турнира закончились вничью.

3.1. *Ответ*: при $a = -1$.

Данное уравнение имеет вид $cx = d$, где c и d — некоторые числа, то есть является линейным. Такое уравнение не имеет корней тогда и только тогда, когда $c = 0$, $d \neq 0$. Следовательно,

$$\begin{cases} (a^2-1)(b-1) = 0 \\ (a-1)(b^2-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \text{ или } b = 1 \\ a \neq 1 \text{ и } b \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b \neq \pm 1. \end{cases}$$

Таким образом, при $a = -1$ найдется значение b (любое, кроме чисел 1 и -1), удовлетворяющее условию.

3.2. *Ответ*: см. рис. 67.

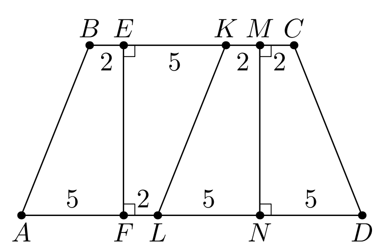


Рис. 67

Пусть $ABCD$ — данная равнобокая трапеция, у которой $AD = 17$, $BC = 11$ (см. рис. 67). Выберем на её основаниях BC и AD соответственно точки K и L так, что $BK = AL = 7$. Тогда $ABKL$ — параллелограмм, а $DCKL$ — равнобокая трапеция с основаниями 4 и 10. Отрезок EF проходит перпендикулярно BK и AL через центр симметрии параллелограмма, а MN — ось симметрии трапеции $DCKL$, поэтому в трапециях $ABEF$, $KLFE$, $LKMN$ и $DCMN$ равны соответствующие стороны и равны соответствующие углы.

3.3. *Ответ*: нет, не может.

Пусть на гранях записано шесть последовательных натуральных чисел, n — наименьшее из них, а S — их сумма. Тогда $S = n+(n+1)+ + \ldots + (n+5) = 6n+15$. Так как каждая вершина принадлежит трем граням куба, то каждое число от 1 до 8 входит в три суммы, записанные на гранях. Поэтому, $S = (1+2+\ldots+8)\cdot 3 = 108$. Уравнение $6n+15 = 108$ не имеет натуральных решений, так как в его левой части — нечетное число, а в правой части — четное.

4.1. *Ответ*: 9 человек.

Первый способ. Пусть в третьем ряду сидит x человек. Так как средний возраст равен сумме возрастов, деленной на количество человек, то после пересаживания суммарный возраст детей на первом ряду увеличился на 12 недель, на втором ряду — увеличился на 24 недели, а на третьем ряду — уменьшился на $4x$ недель. Поскольку сумма возрастов всех учеников изменится не могла, то $4x = 12+24$, то есть, $x = 9$.

Второй способ. Пусть до пересаживания учеников средний возраст сидящих на первом, втором и третьем ряду составлял a, b и c недель соответственно. Обозначим также: количество человек, сидящих в третьем ряду — x, возраст Вовочки — V недель, возраст Ванечки — W недель, возраст Машеньки — M недель. Исходя из условия задачи, составим три уравнения:

1) $\dfrac{12a+M-V}{12} = 1$;

2) $\dfrac{12b+V-W}{12} = 2$;

3) $\dfrac{xc+W-M}{x} = -4$.

Упростив эти уравнения и объединив их в систему, получим:

$$\begin{cases} M - V = 12, \\ V - W = 24, \\ W - M = -4x. \end{cases}$$

Сложив все уравнения почленно, получим, что $12+24-4x = 0$, то есть, $x = 9$.

4.2. *Ответ*: три угла по 60°.

Первый способ. Отложим на луче AD отрезок AK, равный AB (см. рис. 68а). Тогда $\triangle BAK$ — равнобедренный с углом 60°, то есть, $\triangle BAK$ — равносторонний. Следовательно, $BK = BA$, $DK = AD - AK = AD - AB = CA$ и $\angle BKD = 180^\circ - \angle BKA = 120^\circ = \angle BAC$. Тогда $\triangle BKD = \triangle BAC$ (по двум сторонам и углу между ними), поэтому $BD = BC$ и $\angle DBC = \angle DBK + \angle CBK = \angle CBA + \angle CBK = 60^\circ$. Таким образом, $\triangle BDC$ — равнобедренный с углом 60°, то есть, $\triangle BDC$ — равносторонний.

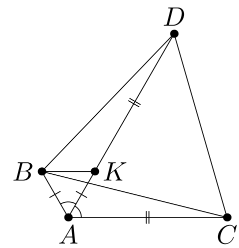


Рис. 68а

Второй способ. Проведем прямые DE и DF, соответственно параллельные прямым AB и AC (см. рис. 68б), тогда $AEDF$ — параллелограмм, в котором диагональ AD является биссектрисой угла, то есть, $AEDF$ — ромб. Из условия задачи следует, что $\angle DAF = \angle DAE = \angle DEA = 60^\circ$, то есть, сторона ромба равна его диагонали, в частности, $AD = AE = ED$. Следовательно, $EC = AE - AC = AD - AC = AB$. Тогда $\triangle ABD = \triangle ECD$ (по двум сторонам и углу между ними), поэтому, $BD = CD$. Кроме того, $\angle BDC = \angle BDA + \angle ADC = \angle EDC + \angle ADC = 60^\circ$. Таким образом, $\triangle BDC$ — равнобедренный с углом 60°, то есть, $\triangle BDC$ — равносторонний.

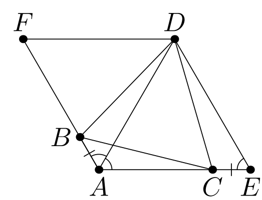


Рис. 68б

Возможны и другие способы решения, использующие различные дополнительные построения. Все эти способы, так или иначе, связаны с идеей поворота на плоскости вокруг некоторой точки. В частности, приведенные решения основаны на рассмотрении следующих поворотов: 1) *с центром* B *на угол* 60°; 2) *с центром* D *так, чтобы прямая* AB *перешла в прямую* AC (*то есть также на* 60°).

4.3. *Ответ*: 198.

Докажем, что в таблице не может быть больше, чем 198 крестиков. Действительно, количество крестиков, единственных в строке, не превышает количества строк, то есть, их не больше ста. Если их ровно 100, то в каждой строке такой крестик есть, и тогда ни в какую из строк нельзя поставить еще крестик, поэтому, других крестиков в таблице быть не может. Аналогичное рассуждение можно провести, если имеется 100 крестиков, единственных в столбце. Если же и тех и других имеется не более чем по 99, то всего крестиков в таблице не больше, чем

$99 \cdot 2 = 198$. Такое количество крестиков, удовлетворяющих условию, поставить можно. Например, заполним крестиками одну строку и один столбец, исключая их пересечение.

2005/2006 учебный год

1.1. *Ответ*: 0.

Заметим, что значение выражения $b-a$ является значением данной функции при $x=-1$. Из графика видно, что это значение равно нулю.

Возможен также более громоздкий способ решения: вычислить значения коэффициентов a и b, подставив в уравнение, задающее функцию, координаты любых двух точек графика.

1.2. *Ответ*: да, верно.

Рассмотрим четырехугольник $ABCD$, в котором $BC||AD$, O — точка пересечения AC и BD, и $AO=OC$ (см. рис. 69). Так как $BC||AD$, то $\angle OCB = \angle OAD$, кроме того, $\angle COB = \angle AOD$. Следовательно, треугольники BOC и AOD равны по стороне и прилежащим углам, поэтому $BC = AD$. Таким образом, стороны BC и AD рассматриваемого четырехугольника равны и параллельны, то есть $ABCD$ — параллелограмм.

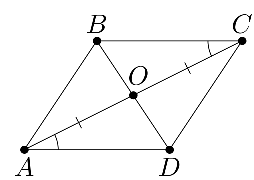


Рис. 69

1.3. *Ответ*: 9.

Получившееся при умножении число делится на 3, поэтому сумма его цифр делится на 3. Значит, число N делится на 3, тогда $3N$ делится на 9. Следовательно, сумма цифр числа $3N$ делится на 9, то есть N делится на 9. Таким образом, $N \geqslant 9$, причем число 9 удовлетворяет условию: $9 \cdot 3 = 27$ и сумма цифр числа 27 равна 9.

Отметим, что задачу можно решить непосредственным перебором, умножая на 3 числа от 1 до 9 и проверяя их сумму цифр.

2.1. *Ответ*: нет, не может.

Предположим, что указанная сумма равна 18. Из условия следует, что $(a+b+c+d)^2 = 36$. Преобразуем: $(a+b+c+d)^2 = ((a+b)+(c+d))^2 = (a+b)^2+2(a+b)(c+d)+(c+d)^2 = a^2+2ab+b^2+2ac+2ad+2bc+2bd+c^2+ 2cd+d^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$. Подставив числовые значения, получим, что $a^2+b^2+c^2+d^2 = 0 \Leftrightarrow a=b=c=d=0$, что противоречит условию.

2.2. *Ответ*: 30°.

Рассмотрим треугольник ABC с прямым углом C. Возможны два случая: 1) медиана проведена к гипотенузе; 2) медиана проведена к одному из катетов.

1) Пусть медиана CM равна, например, катету BC (см. рис. 70а). Кроме того, $CM = \frac{1}{2}AB = BM$, поэтому треугольник BMC — равносторонний, следовательно, $\angle BCM = 60°$. Значит, искомый угол ACM равен $30°$.

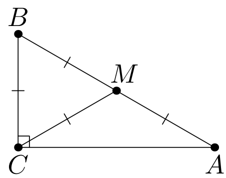


Рис. 70а

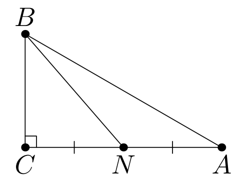


Рис. 70б

2) Пусть BN — рассматриваемая медиана (см. рис. 70б). Так как $BN > BC$, то остается принять, что $BN = AC$. Тогда $CN = \frac{1}{2}BN$, то есть в прямоугольном треугольнике BCN $\angle CBN = 30°$. Этот угол — искомый.

2.3. *Ответ*: нет, не сможет.

Заметим, что если в шеренге стоит n дуболомов, то в результате указанной операции их станет $2n - 1$. После первой операции количество дуболомов станет равно 131. Если число, оканчивающееся на 1, умножить на 2 и вычесть 1, то снова получится число, оканчивающееся на 1. Поэтому в дальнейшем количество дуболомов всегда оканчивается цифрой 1, следовательно, это число не будет делиться на 5.

3.1. *Ответ*: 99 рублей и 98 копеек.

Первый способ. Пусть у Пети было x рублей и y копеек, тогда общая сумма его денег — $(100x + y)$ копеек. После покупки продуктов у Пети осталась половина этой суммы, то есть $(50x + 0,5y)$ копеек. По условию, рублей у Пети стало $0,5y$, а копеек — x, то есть всего $(50y + x)$ копеек. Составляем уравнение: $50x + 0,5y = 50y + x$. Упростив его, получим: $98x = 99y \Leftrightarrow 98(x - y) = y$. Так как x и y — натуральные числа, то y делится на 98. Но копеек у Пети было меньше, чем на рубль, поэтому $y < 100$, следовательно, $y = 98$, тогда $x = 99$.

Второй способ. Пусть после покупок у Пети осталось a рублей и b копеек, тогда сумма его денег вначале была равна $2a$ рублей и $2b$ копеек. Рассмотрим два случая:

1) $b < 50$, тогда $2b < 100$. Из условия следует, что $\begin{cases} b = 2a, \\ a = b \end{cases}$, что возможно только при $a = b = 0$.

2) $b \geqslant 50$, тогда $2b \geqslant 100$. В этом случае один из рублей, который был у Пети вначале, оказался размененным на копейки, поэтому: $\begin{cases} b = 2a + 1, \\ 2a = 2b - 100 \end{cases}$. Решением этой системы уравнений является: $\begin{cases} b = 99, \\ a = 49 \end{cases}$. Таким образом, у Пети осталось 49 рублей 99 копеек, а было — 99 рублей 98 копеек.

3.2. *Ответ*: $90°$.

Первый способ. Отметим на стороне CD точку E так, что $BC = CE$ (см. рис. 71а). Так как $CD = AD + BC$, то $ED = AD$. Треугольники MDE и MDA равны по двум сторонам и углу между ними, следовательно, $\angle MED = \angle MAD = 90°$. (*Заметим, что из этого равенства следует, что точка M лежит на отрезке AB, а не на его продолжении.*) Прямоугольные треугольники MBC и MEC равны по катету и гипотенузе, следовательно, $\angle BCM = \angle ECM$. Так как сумма углов четырехугольника равна $360°$, то: $\angle C + \angle D = 180°$, поэтому $\angle DCM + \angle CDM = \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle D = 90°$, тогда из треугольника CMD получим, что $\angle CMD = 90°$.

Отметим, что этот способ решения не использует в явном виде тот факт, что $ABCD$ является трапецией.

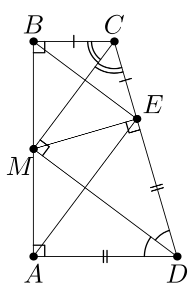


Рис. 71а

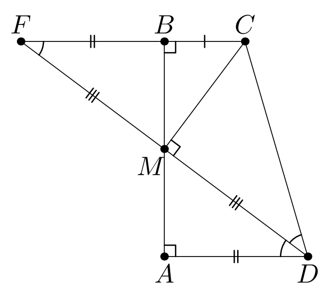


Рис. 71б

Второй способ. Из того, что $\angle A + \angle B = 180°$ следует, что $ABCD$ — трапеция. Пусть прямые DM и BC пересекаются в точке F (см. рис. 71б). Так как $BC||AD$, то $\angle BFM = \angle ADM = \angle CDM$, следовательно, треугольник FCD — равнобедренный. Поскольку $CD = BC + AD = CF = BC + BF$, то $BF = AD$. Тогда прямоугольные треугольники BMF и AMD равны по катету и острому углу, следовательно, $MF = MD$. Таким образом, CM — медиана равнобедренного треугольника CDE, следовательно, она также является его высотой, то есть $\angle CMD = 90°$.

При этом способе решения расположение точки M внутри отрезка AB следует из того, что треугольник FCD — равнобедренный.

Доказав, что M — середина AB, можно закончить решение и по-другому. Проведем среднюю линию трапеции MK (см. рис. 71в), тогда $MK = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}CD$. Получим, что в треугольнике CMD медиана равна половине стороны, к которой проведена, то есть этот треугольник — прямоугольный с прямым углом M.

Третий способ. Построим трапецию $ABC'D'$, симметричную данной относительно прямой AB (см. рис. 71в). Тогда $CC'D'D$ — равнобокая трапеция, причем $CC' + DD' = 2BC + 2AD = 2CD = CD + C'D$'. Полученное равенство означает, что в трапецию $CC'D'D$ можно вписать окружность. Центр этой окружности принадлежит оси симметрии равнобокой трапеции и одновременно является точкой пересечения биссектрис ее углов, поэтому совпадает с точкой M. Тогда CM — биссектриса угла BCD, следовательно, $\angle CMD = 90°$.

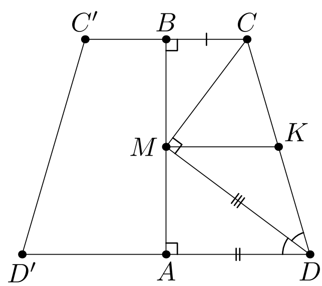


Рис. 71в

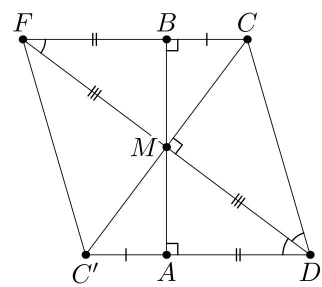


Рис. 71г

Четвертый способ. Построим четырехугольник $ABD'C'$, симметричный данному относительно середины отрезка AB (см. рис. 71г). Так как $C'D' = CD = BC + AD = CD' = C'D$, то $CDC'D'$ — ромб. Диагонали $C'C$ и $D'D$ ромба перпендикулярны, являются биссектрисами его углов и пересекают отрезок AB в его середине, поэтому M — точка их пересечения. Следовательно, $\angle CMD = 90°$.

3.3. *Ответ*: 5391.

Заметим, что среди трехзначных чисел замечательными являются те и только те числа, которые оканчиваются на 99. Действительно, пусть трехзначное число N оканчивается на 99. Докажем, что оно замечательное. В любом меньшем числе на каждом месте стоит цифра не большая, чем в числе N, причем на каком-то месте стоит меньшая цифра либо первая цифра отсутствует (если число не трехзначное). Поэтому меньшие числа имеют меньшую сумму цифр, то есть число N — замечательное.

Теперь докажем, что других трехзначных замечательных чисел нет. Любое трехзначное число имеет сумму цифр не больше чем $9 \cdot 3 = 27$. Суммы цифр замечательных трехзначных чисел 199, 299, ..., 999, равны соответственно 19, 20, ..., 27. Все меньшие суммы цифр уже встречаются у однозначных или двузначных чисел. Поэтому если трехзначное число не оканчивается на 99, то оно не является замечательным. Осталось подсчитать сумму трехзначных чисел, оканчивающихся на 99: $S = 199 + 299 + \ldots + 999 = (200 + 300 + \ldots + 1000) - 9 = (2 + 3 + \ldots + 10)100 - 9 = 5391$.

4.1. *Ответ*: 0.

Проверим, что $x = 1$ не является корнем данного уравнения. Действительно, при $x = 1$ левая часть принимает значение 48, а правая часть равна 49.

Умножим обе части исходного уравнения на $(x-1)^2$. Используем формулу: $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1)$, где n — натуральное число. Так как $(1+x+\ldots+x^5)(x-1) = x^6-1$; $(1+x+\ldots+x^6)(x-1) = x^7-1$ и $(1+x+\ldots+x^7)(x-1) = x^8-1$, то получим уравнение $(x^8-1)(x^6-1) = (x^7-1)^2$. Раскроем скобки: $x^{14}-x^8-x^6+1 = x^{14}-2x^7+1 \Leftrightarrow x^8+x^6 = 2x^7 \Leftrightarrow x^6(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ или $x = 1$.

Таким образом, $x = 0$ — единственное решение данного уравнения.

Отметим, что если проверку делать в завершающей фазе решения, то необходимо проверять оба корня.

4.2. *Ответ*: 60°.

Построим вне квадрата на стороне BC равносторонний треугольник $BE'C$ (см. рис. 72). Тогда треугольник ABE' — равнобедренный с углом 150° при вершине B, следовательно, $\angle BE'A = \angle BAE' = 15^\circ$. Поэтому $\angle E'AD = 90^\circ - \angle BAE' = 75^\circ$. Следовательно, точка E лежит на луче AE'. Кроме того, точки E и E' лежат на серединном перпендикуляре к отрезку BC. Так как этот перпендикуляр не может пересекать луч AE' более, чем в одной точке, то E' совпадает с E, следовательно, $\angle BEC = 60^\circ$.

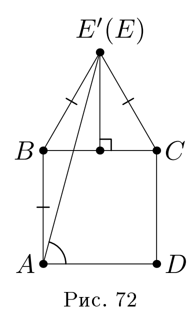


Рис. 72

4.3. *Ответ*: 103.

Так как шашка ходит по диагонали, то она все время остается на клетках одного цвета (в данном случае — черного). Пусть некоторая черная клетка x находится не на первой горизонтали. Если при этом она находится на крайней вертикали, то пойти на эту клетку можно только с одной клетки y, поэтому маршрутов от клетки $e1$ до клетки x существует столько же, сколько от $e1$ до клетки y. Если клетка x находится не на крайней вертикали, то пойти на нее можно из двух клеток, причем если к этим клеткам от $e1$ приводило m и n маршрутов, то к клетке x от $e1$ ведет $m + n$ маршрутов.

Двигаясь последовательно от второй до восьмой горизонтали, поставим в каждую из клеток, в которые может попасть шашка, число, равное количеству приводящих в нее маршрутов (см. рис. 73). Таким образом, количество маршрутов, приводящих к клеткам восьмой горизонтали: $20 + 35 + 34 + 14 = 103$.

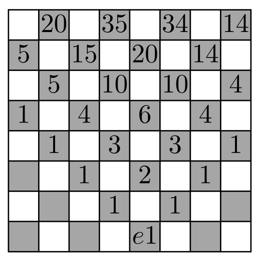


Рис. 73

9 класс

1998/1999 учебный год

1.1. *Ответ*: $[-3;3]$.

$$\begin{cases}\sqrt{(x+3)^2}=3+x,\\ \sqrt{(x-3)^2}=3-x\end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases}|x+3|=3+x,\\ |x-3|=3-x\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases}x+3\geqslant 0,\\ x-3\leqslant 0\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad -3\leqslant x\leqslant 3.$$

1.2. *Первый способ.* Проведем CK — биссектрису треугольника ABC (см. рис. 74а). Так как $\angle BCK=\angle BED$, то $CK \parallel ED$. По теореме о пропорциональных отрезках получим, что $BD:DK=BE:EC=2$. Следовательно, $BK = 1{,}5BD = 0{,}5AB$, то есть CK — медиана треугольника. Так как CK — медиана и биссектриса, то ABC — равнобедренный треугольник, что и требовалось доказать.

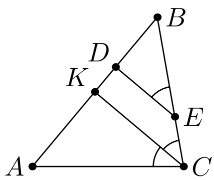


Рис. 74а

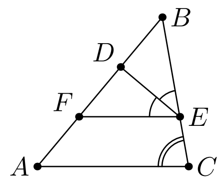


Рис. 74б

Второй способ. Проведем $EF \parallel AC$ (см. рис. 74б). По теореме о пропорциональных отрезках, получим, что: $BF:AF=BE:EC=2$. Следовательно, $BF=2BD$, то есть D — середина BF. Так как ED — биссектриса и медиана треугольника FBE, то он — равнобедренный, но этот треугольник подобен данному, значит, и треугольник ABC — равнобедренный, что и требовалось доказать.

1.3. *Ответ*: такого треугольника не существует.

Предположим, что такой треугольник существует. Тогда, умножив каждую часть данного равенства на выражение $2R$, где R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC, получим равенство: $BC+AC=AB$, которое противоречит неравенству треугольника.

2.1. *Ответ*: в доме — 8 этажей.

Представим себе, что в доме — только один подъезд. Так как $83 = 4\cdot 20+3$, а $169 = 4\cdot 42+1$, то в этом случае, Коля жил бы на 21 этаже, а Вася — на 43 этаже. Пусть n — реальное количество этажей в доме, тогда из условия задачи и предыдущего рассуждения следует, что $21 \equiv 5 \pmod n$ и $43 \equiv 3 \pmod n$. Следовательно, $21-5=16$ кратно числу n и $43-3=40$ кратно числу n. Учитывая, что $n \geqslant 5$, получим, что $n=8$.

2.2. *Ответ*: площадь четырехугольника может быть равной 12, 7,5 или $6\frac{2}{3}$.

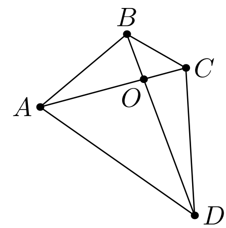


Рис. 75

Пусть дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, O — точка пересечения его диагоналей (см. рис. 75). Воспользуемся утверждением: $S_{AOB} \cdot S_{COD} = S_{BOC} \cdot S_{COD}$, которое несложно доказать, если записать площадь каждого из этих треугольников как половину произведения длин их сторон и синуса угла между ними.

Возможны три различных случая взаимного расположения треугольников с известными площадями, поэтому обозначив за x площадь четвертого из получившихся треугольников, получим совокупность трех уравнений: $1 \cdot x = 2 \cdot 3$ или $2 \cdot x = 1 \cdot 3$ или $3 \cdot x = 1 \cdot 2$. Ее решения: $x = 6$ или $x = 1{,}5$ или $x = 2/3$. Сложив площади четырех треугольников, получим искомую площадь.

2.3. Из условия и неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом для двух положительных чисел следует, что $a+b < ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. Обозначив $x = a+b$, имеем неравенство $x < \left(\frac{x}{2}\right)^2$, решая которое для $x > 0$, получим, что $x > 4$, что и требовалось доказать.

3.1. *Ответ*: сплавы надо взять в отношении 9 : 35.

Пусть масса третьего сплава равна 1 и в нем содержится x частей первого сплава и $(1-x)$ частей второго сплава. Выразив количество цинка в каждом из данных сплавов, составляем уравнение: $\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}(1-x) = \frac{17}{44}$. Отсюда, $x = \frac{9}{44}$, а $1 - x = \frac{35}{44}$.

3.2. *Ответ*: 60°.

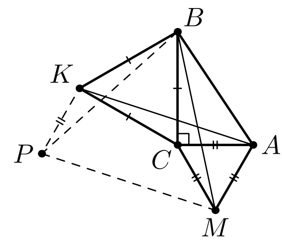


Рис. 76

Первый способ. Рассмотрим поворот с центром в точке C на угол 60°. Образами точек B и M при этом преобразовании будут точки K и A соответственно, то есть при таком повороте прямая BM перейдет в прямую AK, следовательно, угол между ними равен 60° (см. рис. 76).

Второй способ. Проведя через точки K и M прямые, соответственно параллельные AM и AK, достроим треугольник AKM до параллелограмма $AKPM$ (см. рис. 76). Треугольники BCM, KCA и BKP равны между собой (по двум сторонам и углу величиной 150° между ними), следовательно, $BM = AK = BP$. Так как $MP = AK$, то треугольник BMP — равносторонний, то есть, $\angle BMP = 60^\circ$, но $MP \parallel AK$, значит, угол между прямыми BM и AK равен 60°.

3.3. *Ответ*: при $a \in (-2-\sqrt{11}; -2+\sqrt{11})$.

Так как для любого действительного числа a верно неравенство $a^2+a+1>0$, то функция $f(x) = (a^2+a+1)x^2+(2a-3)x+a-5$ является квадратичной. Ее график — парабола, расположенная «ветвями» вверх. Условие задачи равносильно тому, что график имеет две точки пересечения с осью абсцисс, а число 1 лежит на этой оси между точками пересечения (см. рис. 77). Для этого, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие: $f(1) < 0$. Так как $f(1) = a^2+4a-7$, то, решая неравенство $a^2+4a-7<0$, получим: $-2-\sqrt{11} < a < -2+\sqrt{11}$.

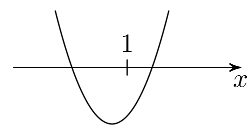


Рис. 77

4.1. *Ответ*: 20.

Общее количество лжеконтролеров и лжекондукторов в пять раз меньше количества необычных пассажиров (то есть контролеров, кондукторов, лжеконтролеров и лжекондукторов). Следовательно, количество необычных пассажиров кратно 5. Аналогично, количество кондукторов и лжекондукторов в восемь раз меньше количества необычных пассажиров, следовательно, количество необычных пассажиров кратно 8. Таким образом, количество необычных пассажиров кратно 40 и при этом не превосходит 60. Значит, всего имеется 40 необычных пассажиров, а остальные 20 пассажиров — обычные.

4.2. *Ответ*: не может.

Пусть в трапеции $ABCD$: $BC \parallel AD$, $BC = 4$, $AD = 5$ и диагональ AC является биссектрисой одного из углов. Возможны два случая:

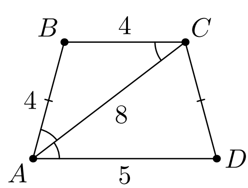


Рис. 78а

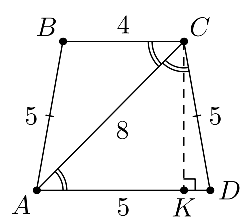


Рис. 78б

1) AC — биссектриса острого угла BAD (см. рис. 78а). Тогда, в треугольнике ABC: $AB = BC = 4$, а $AC = 8$, что противоречит неравенству треугольника.

2) CA — биссектриса тупого угла BCD (см. рис. 78б). Тогда, $AB = CD = AD = 5$. Проведем высоту трапеции CK. Сторона $DK = 0{,}5(AD - BC) = 0{,}5$; $AK = 4{,}5$. CK — общий катет двух прямоугольных треугольников ACK и DCK, значит, должно выполняться числовое равенство: $5^2 - 0{,}5^2 = 8^2 - 4{,}5^2$, которое, на самом деле, неверно.

4.3. *Ответ*: $(3; 3)$.

Рассмотрим функцию $f(t) = t + \sqrt[6]{t}$. Она определена на $[0; +\infty)$ и возрастает на этом промежутке, следовательно, каждое свое значение принимает только при одном значении аргумента. Поэтому, из первого уравнения системы следует, что $x = y$. Тогда, из второго уравнения получаем, что $x = y = 3$.

5.1. Рассмотрим произвольный «кусок» x. Из определения «куска» следует, что для него существует натуральное число n такое, что $12 \times 10^n < x < 13 \cdot 10^n$. Аналогично, для второго «куска» y существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $12 \cdot 10^k < y < 13 \cdot 10^k$. Поэтому,

$$144 \cdot 10^{n+k} < xy < 169 \cdot 10^{n+k}.$$

Следовательно, вторая цифра в записи числа xy это 4, 5 или 6. Так как в записи любого «куска» второй слева должна быть цифра 2, то произведение двух «кусков» не является «куском», что и требовалось доказать.

5.2. *Ответ*: $\angle ACB = 60^\circ$.

Проведем отрезок CK (см. рис. 79). $\angle LCK = \angle LAK$ (эти углы вписаны в окружность и опираются на одну и ту же дугу). Аналогично, $\angle MCK = \angle MBK$. Так как $\angle ACB = \angle LCK + \angle MCK$, то искомый угол ACB в три раза меньше, чем сумма углов треугольника ABC, то есть равен 60°.

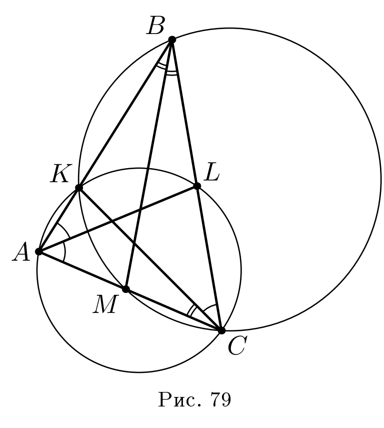


Рис. 79

5.3. *Ответ*: см. рис. 80.

$\dfrac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Существует такое α, что $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\alpha$, а $\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\alpha$. Имеем: $\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) \leqslant \sqrt{2}$, причем значение $\sqrt{2}$ достигается, если $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=1$, то есть, при $\alpha=-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$. Декартовы координаты искомых точек находим, решая систему уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\[2mm] \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}y=-x\\ x>0\\ y<0\end{cases}$$

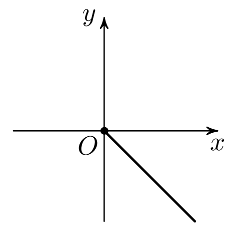


Рис. 80

1999/2000 учебный год

1.1. *Ответ*: например,

$$f(x)=\frac{\sqrt{(x-1)(x-2)}}{x-2}\quad\text{или}\quad f(x)=\frac{\sqrt{|x-1{,}5|-0{,}5}}{x-2}.$$

1.2. *Ответ*: нет.

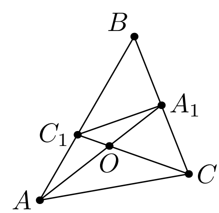


Рис. 81

Пусть $AA_1\cap CC_1=O$ (см. рис. 81). Предположим, что $AO=OA_1$ и $CO=OC_1$. Тогда AC_1A_1C — параллелограмм, следовательно, $AC_1\parallel A_1C$, но тогда прямые AC_1 и A_1C не пересекаются, то есть, треугольника ABC не существует. Таким образом наше предположение неверно и точка O не является серединой отрезков AA_1 и CC_1.

1.3. *Ответ*: $m=0$; $n=0$.

Разложим левую часть уравнения на множители. Имеем: $(1+m)(1+m^2)=3^n$. При любых целых n выражение 3^n принимает положительные значения, следовательно $(1+m)(1+m^2)>0$, а, значит, $1+m>0\Leftrightarrow m>-1$. Если $m=0$, то получим одно решение: $m=0$; $n=0$. Если же $m>0$, то левая часть уравнения (значит, и правая) принимает только натуральные значения (причем каждый из сомножителей в левой части больше единицы), значит, n — натуральное число. Тогда, значение каждого множителя из левой части уравнения должно быть натуральной степенью трех. Но одновременно делиться на три оба множителя не могут. Это можно доказать несколькими способами:

Первый способ. Если $1+m$ делится на 3, то $m=3k-1$, где $k\in\mathbb{N}$. Тогда, $1+m^2=9k^2-6k+2$ не делится на 3.

Второй способ. Так как $1+m^2=(1+m)^2-2m$, то числа $1+m^2$ и $1+m$ имеют те же общие делители, что и числа $1+m$ и $2m$. Учитывая, что $1+m$ и m — взаимно простые, получим, что общими делителями рассматриваемых натуральных чисел могут являться только числа 2 или 1, в зависимости от четности m. Следовательно, других целых решений уравнение не имеет.

Возможно также использование алгоритма Евклида или легко доказываемого факта: $m^2 \neq 3k-1$ *ни при каких натуральных* m *и* k.

2.1. *Ответ*: при $a=0$ $\quad x=0$; при $a \neq 0$ решений нет.

В левой части уравнения стоит сумма неотрицательных величин, следовательно, для параметра a должно выполняться условие $-a \geqslant 0$ (то есть, $a \leqslant 0$). Так как при $a<0$ выражение $\sqrt{a-|x|}$ не определено ни при каких значениях x, то единственное значение параметра, при котором уравнение может иметь корни, это $a=0$. При $a=0$ получим $\sqrt{-|x|}+\sqrt{x^2}=0 \Leftrightarrow \sqrt{-|x|}=-|x| \Leftrightarrow x=0$.

2.2. *Ответ*: к вершине A.

Первый способ. Пусть O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, значит, O является точкой пересечения биссектрис треугольника (см. рис. 82). 1) Рассмотрим треугольник AOB. Так как $\frac{1}{2}\angle A > \frac{1}{2}\angle B$, то $\angle OAB > \angle OBA$. Так как в треугольнике против большего угла лежит большая сторона, то $OB > OA$. 2) Аналогично, из треугольника AOC получим, что $OC > OA$. 3) Так как $OB > OA$ и $OC > OA$, то OA — наименьшее из расстояний от центра вписанной окружности до вершин треугольника.

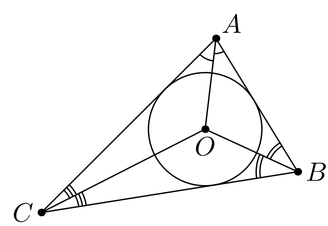


Рис. 82

Второй способ. Пусть $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$, $\angle BCA = 2\gamma$. Тогда из условия задачи следует, что $90^\circ > \alpha > \beta > \gamma$. Также $OA = \dfrac{r}{\sin\alpha}$, $OB = \dfrac{r}{\sin\beta}$, $OC = \dfrac{r}{\sin\gamma}$. Поскольку функция $\sin x$ возрастает от 0 до 90°, то $OA < OB < OC$.

2.3. *Ответ*: многоугольников, имеющих красную вершину, больше.

Если к многоугольнику, все вершины которого белого цвета, «добавить» красную вершину, то получится многоугольник с красной вершиной. То есть, для всех n, таких что $3 < n \leqslant 2000$ каждому выпуклому $(n-1)$-угольнику, все вершины которого — белые, соответствует выпуклый n-угольник с красной вершиной. Но, кроме того, существуют треугольники, имеющие красную вершину.

Значит, многоугольников с красной вершиной больше, чем многоугольников без красной вершины.

Можно подсчитать, на сколько больше: на столько, сколько существует отрезков с белыми концами, то есть на $\frac{1998 \cdot 1999}{2}$.

3.1. *Первый способ.* Так как $xyz = 1$, то x, y и z отличны от 0. Тогда

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} =$$
$$= \frac{1}{1+x+xy} + \frac{x}{x+xy+xyz} + \frac{xy}{xy+xyz+xyzx} =$$
$$= \frac{1}{1+x+xy} + \frac{x}{x+xy+1} + \frac{xy}{xy+1+x} = \frac{1+x+xy}{1+x+xy} = 1.$$

Второй способ.

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} =$$
$$= \frac{1}{xyz+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} =$$
$$= \frac{1}{x(yz+1+y)} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} =$$
$$= \frac{1+x}{x(yz+1+y)} + \frac{1}{xyz+z+zx} =$$
$$= \frac{1+x}{xyz+x+xy} + \frac{1}{z(1+x+xy)} = \frac{z+xz+1}{z+xz+xyz} = 1.$$

3.2. *Ответ*: см. рис. 83 (сравните с «классическим» доказательством теоремы Пифагора, использующим площади квадратов и прямоугольных треугольников).

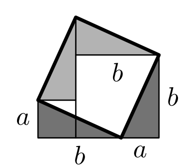


Рис. 83

3.3. *Ответ*: 15; 30; 60.

Рассмотрим следующие случаи:

1) Пусть x делится на 45. Тогда x делится на 15, на 9, на 5 и на 3. Следовательно, имеем более трех истинных утверждений, что противоречит условию задачи. Значит, x не делится на 45.

2) Если x делится на 25, то x делится и на 5. Если при этом x делится на 3, то оно кратно и числу 15, следовательно, истинных утверждений уже будет четыре; если же x в рассматриваемом случае не делится на 3, то оно не кратно ни одному из оставшихся чисел, что противоречит условию. Значит, x не делится на 25.

3) Если x делится на 15, то оно кратно числам 3 и 5, то есть, имеем уже три истинных утверждения. Следовательно, искомые числа, должны быть кратны числу 15, но не кратны числам 9 и 25.

4.1. *Ответ*: при $a = \dfrac{1}{4}$.

Уравнение имеет действительные корни, если $1 - 4a \geqslant 0$, то есть, $a \leqslant \dfrac{1}{4}$. При $a \leqslant \dfrac{1}{4}$ $\quad x_1 + x_2 = 1$ и $x_1x_2 = a$.

$$\begin{aligned} x_1^4 + x_2^4 &= (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = \\ &= \big((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\big)^2 - 2(x_1x_2)^2 = (1^2 - 2a)^2 - 2a^2 = \\ &= 1 - 4a + 4a^2 - 2a^2 = 2a^2 - 4a + 1 = 2(a-1)^2 - 1. \end{aligned}$$

Функция $f(a) = 2(a-1)^2 - 1$ убывает на промежутке $(-\infty; 1]$ и возрастает на промежутке $[1; +\infty)$. Так как $a \leqslant \dfrac{1}{4}$, то свое наименьшее значение на промежутке $\left(-\infty; \dfrac{1}{4}\right]$ функция $f(a)$ принимает при $a = \dfrac{1}{4}$.

4.2. *Ответ*: $\dfrac{1}{4}\,c$.

Первый способ. Треугольник CHB — прямоугольный, следовательно $KC = KB = KH$ (см. рис. 84а). Пусть M — точка пересечения окружности с прямой AC. $\angle MCK$ — прямой, следовательно, MK — диаметр окружности, а так как хорды KC и KH равны, то $MK \perp CH$, а значит, $MK \parallel AB$. Следовательно, MK — средняя линия треугольника ABC; $MK = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{c}{2}$. Искомый радиус: $R = \dfrac{1}{2}MK = \dfrac{c}{4}$.

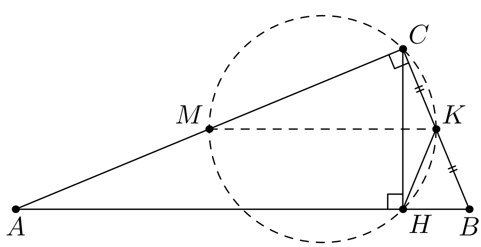


Рис. 84а

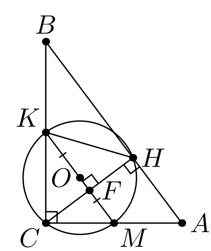


Рис. 84б

Второй способ. 1) Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника CKH, то есть точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам этого треугольника (см. рис. 84б). Пусть M — точка пересечения отрезка AC и окружности с центром O и радиусом OC. $\angle KCM$ — вписан в окружность и равен 90°, следовательно, KM — диаметр окружности, значит $O \in KM$.

2) Треугольник BCH — прямоугольный; HK — его медиана, проведенная к гипотенузе, следовательно, $HK = \dfrac{1}{2}BC = CK$. То есть, тре-

угольник CKH — равнобедренный и $(KO) \perp (CH)$. $F = (KO) \cap (CH)$ и F — середина CH, следовательно, KF — средняя линия треугольника BCH, отсюда $(KF) \parallel (AB)$, значит, KM — средняя линия треугольника CAB. Тогда, $KM = \dfrac{1}{2}\,c$, то есть, $R = \dfrac{1}{4}\,c$.

4.3. *Ответ*: 101.

Пусть в короля попало x яиц, y кочанов и 64 кошки. Тогда, герцогу досталось $4x$ яиц и $6y$ кочанов. Так как предметов, угодивших в них, равное количество, то составляем уравнение: $x+y+64 = 4x+6y$, которое равносильно уравнению $3x + 5y = 64$. Из условия задачи следует, что общее количество яиц делится на 3, а общее количество кочанов — на 2. Следовательно, $5x$ кратно трем, а $7y$ кратно двум. С учетом того, что числа 5 и 3, а также числа 7 и 2 образуют пары взаимно простых чисел, имеем, что $x = 3k$, а $y = 2n$, где $k \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$. Подставляя в исходное уравнение, получаем: $9k + 10n = 64$. Перебором находим, что его решением в натуральных числах является только $n = 1$; $k = 6$. То есть, $x = 18$; $y = 2$. Значит, на представление было принесено $5x = 90$ (яиц), $7y = 14$ (кочанов) и 64 кошки. Следовательно, количество зрителей, пришедших на представление, равно: $90 : 3 + 14 : 2 + 64 = 101$.

5.1. *Ответ*: $a_1 > a_2$; $b_1 < b_2$; $c_1 > c_2$.

Так как $f(0) = c_1$ и $g(0) = c_2$, то $c_1 > c_2 > 0$. Так как «ветви» парабол направлены вверх и парабола $g(x)$ более «пологая», то $a_1 > a_2 > 0$. Рассмотрим функцию $h(x) = f(x) - g(x)$. Пусть x_1 и x_2 — абсциссы точек пересечения данных парабол, тогда x_1 и x_2 — нули функции $h(x)$. Так как $h(x) = (a_1 - a_2)x^2 + (b_1 - b_2)x + (c_1 - c_2)$, то по теореме Виета имеем, что $x_1 + x_2 = -\dfrac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}$. Учитывая, что $a_1 - a_2 > 0$, $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$, получим: $b_1 - b_2 = -(x_1 + x_2)(a_1 - a_2) < 0$. Следовательно, $b_1 < b_2$.

5.2. *Ответ*: существует.

Проведем дополнительные построения: $MK \parallel AC$, $MF \parallel AB$, $MN \parallel BC$ (см. рис. 85). Тогда:

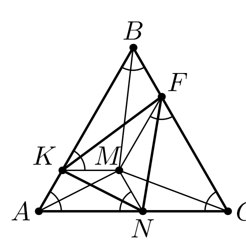


Рис. 85

1) $AKMN$ — равнобокая трапеция, следовательно, $AM = KN$.

2) $BFMK$ — равнобокая трапеция, следовательно, $BM = KF$.

3) $MFCN$ — равнобокая трапеция, следовательно, $MC = FN$. Тогда треугольник KFN — искомый.

5.3. Один из возможных способов решения:

$$1 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2\right) +$$

$$+ \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \left(\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2\right) = \left(\frac{9}{25}\right)^2 + \left(\frac{12}{25}\right)^2 + \left(\frac{4}{13}\right)^2 + \left(\frac{48}{65}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{9}{25}\right)^2 + \left(\frac{12}{25}\right)^2 + \left(\frac{4}{13}\right)^2 \cdot \left(\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2\right) + \left(\frac{48}{65}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{9}{25}\right)^2 + \left(\frac{12}{25}\right)^2 + \left(\frac{12}{65}\right)^2 + \left(\frac{16}{65}\right)^2 + \left(\frac{48}{65}\right)^2.$$

Еще один вариант ответа: $1 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{25}\right)^2 + \left(\frac{36}{125}\right)^2 + \left(\frac{81}{625}\right)^2 + \left(\frac{108}{625}\right)^2$.

Задача легко обобщается: аналогичные представления единицы возможны для любого конечного количества слагаемых.

2000/2001 учебный год

1.1. *Ответ*: нет, не прав.

Трехчлен x^2+x+1 не имеет действительных корней. Следовательно, при заданном условии вычислить значение выражения невозможно.

1.2. *Ответ*: прямоугольники подобны тогда, и только тогда, когда они являются квадратами.

Пусть a и b — измерения меньшего прямоугольника, x — ширина рамки. Если два данных прямоугольника подобны, то $\frac{a+2x}{a} = \frac{b+2x}{b}$. Решая пропорцию, получим, что $ax = bx$. Так как $x > 0$, то равенство выполняется только, если $a = b$.

1.3. Определим, сколько цифр записано в первых 2000 разрядах нашего числа после того момента, как начнутся трехзначные числа: $2000 - 9 \cdot 1 - 90 \cdot 2 = 1811$. Поскольку $1811 : 3 = 603$ (остаток 2), то на 2000-м месте стоит вторая цифра 604-го по счету трехзначного числа. Это число — 703, поэтому искомая цифра — 0.

2.1. Данный трехчлен не имеет корней, значит, его график не пересекает ось x. Так как $y(1) = a+b+c > 0$, то график трехчлена располагается в верхней полуплоскости (см. рис. 86), следовательно, $y(0) = c > 0$.

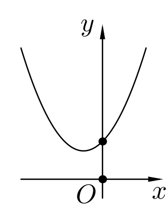


Рис. 86

2.2. *Ответ*: периметр треугольника больше 16 см, но меньше 40 см.

Пусть BD — биссектриса треугольника ABC, $AD = 3$ см; $CD = 5$ см (см. рис. 87). По свойству биссектрисы треугольника, $AB = 3x$ см, $BC = 5x$ см, где x — коэффициент пропорциональности. Периметр треугольника равен: $P = 8+8x = 8(x+1)$ см. Применив неравенство треугольника, получим: $5x - 3x < 8 < 5x + 3x \Leftrightarrow 1 < x < 4$. Следовательно, $16 < P < 40$.

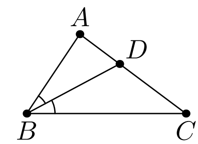


Рис. 87

2.3. *Ответ*: девять.

«Замечательными» являются трехзначные числа, сумма цифр которых находится в границах от 19 до 27 (меньшую сумму цифр могут иметь двузначные или однозначные числа). Следовательно, трехзначных «замечательных» чисел — девять.

3.1. *Ответ*: см. рис. 88.

$y^2 - |y| = x^2 - |x| \Leftrightarrow y^2 - x^2 = |y| - |x| \Leftrightarrow (|y| - |x|)(|y| + |x|) = |y| - |x| \Leftrightarrow (|y| - |x|)(|y| + |x| - 1) = 0 \Leftrightarrow |y| + |x| = 1$ или $|y| = |x|$.

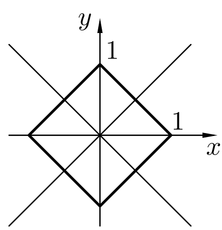


Рис. 88

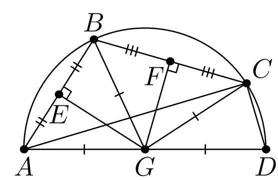


Рис. 89

3.2. *Ответ*: $90°$.

Так как каждый из отрезков GE и GF является одновременно высотой и медианой в треугольниках AGB и BGC соответственно (см. рис. 89), то $DG = AG = BG = CG$. Следовательно, G — центр окружности, описанной около данного четырехугольника. $\angle ACD = 90°$, так как это вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности.

3.3. *Ответ*: 26 человек.

Выберем пять студентов, по одному с каждого курса. Так как количество придуманных ими задач — различно, то этими студентами придумано не менее, чем $1+2+3+4+5 = 15$ задач. Тогда, остальные 25 студентов придумали не более, чем $40-15 = 25$ задач. То есть, каждый из них придумал по одной задаче, следовательно, всего по одной задаче придумали 26 человек.

4.1. Пусть $x = a^2 + b^2$; $y = c^2 + d^2$, где a, b, c и d — целые числа. Тогда $xy = (a^2+b^2)(c^2+d^2) = a^2c^2 + b^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2 = (a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2) + (b^2c^2 - 2abcd + a^2d^2) = (ac+bd)^2 + (bc-ad)^2$, что и требовалось доказать (числа $ac + bd$ и $bc - ad$ являются целыми).

4.2. *Ответ*: да, верно.

Пусть O — центр окружности, описанной около трапеции (см. рис. 90). Тогда, по свойству угла, вписанного в окружность, $\angle AOB = 2\angle ADB = \angle PAD + \angle PDA = \angle APB$ (так как трапеция — равнобокая). Из равенства углов AOB и APB следует, что точки A, B, O и P лежат на одной окружности, значит, O лежит на окружности, описанной около треугольника ABP.

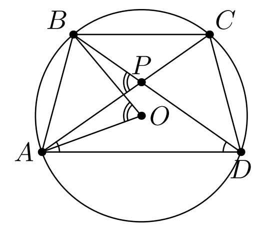


Рис. 90

4.3. Запишем данное квадратное уравнение в стандартном виде: $x^2 + ax + (1-b) = 0$. По теореме Виета: $x_1 + x_2 = -a$, $x_1x_2 = 1-b$, где x_1 и x_2 — корни данного уравнения. Значит, $a = -(x_1+x_2)$, $b = 1 - x_1x_2$. Следовательно, $a^2 + b^2 = (x_1+x_2)^2 + (1-x_1x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 1 + x_1^2x_2^2 = (x_1^2+1)(x_2^2+1)$.

Полученное число является составным, так как, если x_1 и x_2 — целые отличные от нуля, то каждый из множителей принимает целое значение, отличное от единицы.

5.1. Так как $f(0) = f(1) = 1$, то графиком трехчлена является парабола, симметричная относительно прямой $x = 0,5$ (см. рис. 91). Из условия $|f(x)| \leqslant 1$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$ следует, что «ветви» параболы направлены вверх, а наибольшее значение a достигается в случае, когда наименьшее значение функции равно -1. Из того, что $f(0,5) = -1$, получаем, что $a = 8$.

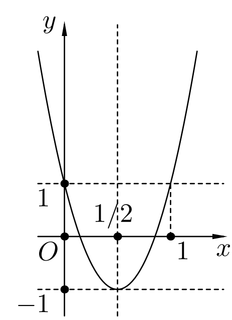


Рис. 91

5.2. Рассмотрим окружность, описанную около треугольника ABC (см. рис. 92). На стороне AC выберем произвольную точку M. На луче BM от точки M отложим отрезок MK, равный BM. Через точку K проведем прямую, параллельную AC, которая пересечет окружность в двух точках, P_1 и P_2 (поскольку угол B — тупой). D_1 и D_2 — точки пересечения хорд BP_1 и BP_2 с отрезком AC, которые делят эти хорды пополам (теорема Фалеса). Они и будут искомыми, так как для каждой из них выполняется равенство $DA \cdot DC = DB \cdot DP$, из которого, учитывая, что $DB = DP$, получаем, что $BD^2 = AD \cdot CD$.

Никакие другие точки отрезка AC указанным свойством не обладают. Действительно, для какой-нибудь точки X отрезка AC верно равенство $BX^2 = AX \cdot CX$ (см. рис. 92). Так как $BX \cdot XY = AX \cdot CX$, то $BX = XY$, что невозможно.

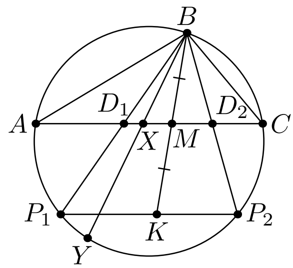


Рис. 92

5.3. Рассмотрим 2002 числа: 1999; 19991999; 199919991999 .... Среди них найдутся *хотя бы два* числа, имеющие одинаковые остатки от деления на 2001 (так как существует ровно 2001 остаток от деления на 2001). Тогда, разность этих двух чисел делится на 2001 и является числом вида 19991999...199900...0. Поскольку числа 10 и 2001 взаимно просты, то и одно из чисел вида 19991999...1999 делится на 2001.

2001/2002 учебный год

1.1. *Ответ*: -1.

Если a — корень уравнения $x^3 + 7x - 9 = 0$, то $a^3 = 9 - 7a$, следовательно,

$$\frac{2a^3 + 3a}{11a - 18} = \frac{2(9 - 7a) + 3a}{11a - 18} = \frac{18 - 11a}{11a - 18} = -1.$$

Кроме того, необходимо проверить, что $a \neq \dfrac{18}{11}$. Это действительно так, поскольку $9 - 7\dfrac{18}{11} < 0$, а $\left(\dfrac{18}{11}\right)^3 > 0$.

1.2. *Ответ*: могут.

Например, $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{2}$, $c = 1$. В прямоугольном треугольнике с катетами $c = 1$ и $b = \sqrt{2}$ гипотенуза $a = \sqrt{3}$.

1.3. *Ответ*: 64 числа.

Рядом как с цифрой 1, так и с цифрой 3 может стоять только цифра 2, поэтому в любом из рассматриваемых десятизначных чисел каждая вторая цифра — двойка. На каждое из оставшихся пяти мест можно поставить либо единицу, либо тройку. Количество способов это сделать равно $2^5 = 32$. Кроме того, мы можем выбрать, будут ли двойки стоять на чётных или на нечётных местах. Поэтому полученное количество способов нужно удвоить.

2.1. *Ответ*: при всех.

$n^2 + (n-1)^2 + n^2(n-1)^2 = n^2 + n^2 - 2n + 1 + n^4 - 2n^3 + n^2 = n^4 + n^2 + 1 - 2n^3 + 2n^2 - 2n = (n^2 - n + 1)^2$.

2.2. *Ответ*: 1: 3.

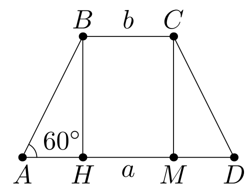


Рис. 93

1) Так как трапеция $ABCD$ — вписанная, то она равнобокая, то есть $AB = CD$.

2) Так как трапеция $ABCD$ — описанная, то $AB + CD = BC + AD$. Следовательно, $AB = \frac{AD + BC}{2}$. Пусть $AD = a$, $BC = b$. Проведем высоты BH и CM (см. рис. 93). $AH = DM = \frac{a-b}{2}$. Так как $\angle BAH = 60^\circ$, $\angle ABH = 30^\circ$, следовательно, $AB = 2AH$. Получим, что $\frac{a+b}{2} = a - b$, а это равносильно тому, что $a = 3b$.

2.3. *Ответ*: $A > B$.

$B < 1\,000\,000 \cdot 1\,000\,000 = 10^{12} < 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 19 \cdot 20 < 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 19 \cdot 20 = A$.

3.1. *Ответ*: $x = 0$.

Числа 1, 2, 3, 4, 5 разбивают числовую прямую на шесть промежутков.

Первый способ.

Если $x \in [5, +\infty)$, то $15x + 15 = 5x - 15,\ x = -3 \notin [5, +\infty)$;
если $x \in [4, 5)$, то $15x + 15 = 3x - 5,\ x = -20/3 \notin [4, 5]$;
если $x \in [3, 4)$, то $15x + 15 = x + 3,\ x = -12/14 \notin [3, 4]$;
если $x \in [2, 3)$, то $15x + 15 = -x + 9,\ x = -3/8 \notin [2, 3]$;
если $x \in [1, 2)$, то $15x + 15 = -3x + 13,\ x = -1/9 \notin [1, 2]$;
если $x \in (-\infty, 1]$, то $15x + 15 = -5x + 15,\ x = 0 \in (-\infty, 1]$.

Второй способ. Заметим, что $x = 0$ — корень уравнения. Докажем, что других корней нет. Рассмотрим функцию

$$y = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4| + |x-5| - 15x - 15.$$

Так как на каждом из шести промежутков при раскрытии модулей функция имеет вид $y = k_i x + b_i$, причем все $k_i < 0$, то на каждом из этих промежутков функция убывает. График функции представляет собой ломаную. Для того, чтобы ломаная пересекала ось x хотя бы дважды, необходимо, чтобы хотя бы на одном промежутке ломаная «шла вверх» (функция на этом промежутке должна возрастать). Противоречие.

3.2. *Ответ*: центр расположен ближе к стороне BC.

1) Пусть O — центр описанной окружности (см. рис. 94). Соединим точку O с вершинами треугольника и опустим перпендикуляры на стороны: $OH_1 \perp CB$, $OH_2 \perp AB$, $OH_3 \perp AC$. Тогда H_1, H_2 и H_3 — середины сторон треугольника.

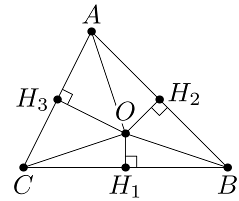


Рис. 94

2) Так как $\angle A > \angle B > \angle C$, то $CB > AC > AB$; следовательно $CH_1 > AH_3 > BH_2$. Так как в прямоугольных треугольниках OCH_1, OBH_2 и OAH_3 гипотенузы равны, то $OH_1 < OH_3 < OH_2$.

Данное решение не зависит от того, расположен ли центр описанной окружности внутри или вне треугольника, то есть не зависит от вида треугольника.

3.3. *Ответ*: да, можно.

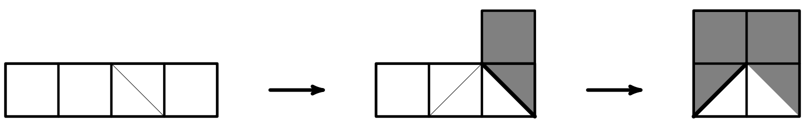


Рис. 95

Сторона каждого квадратика на рисунке 95 равна 5. Тонкие линии показывают, по каким отрезкам фигуру разрезают, а жирные — линии склейки.

4.1. *Ответ*: $(1, 1, 1)$.

Первый способ. Из первого уравнения: $z = 3 - x - y$. Подставив это выражение во второе уравнение, получим $x^2 + y^2 + 9 + x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2xy = 3$. Данное уравнение можно рассматривать как квадратное относительно x: $x^2 + (y-3)x + (y^2 - 3y + 3) = 0$. Тогда его дискриминант $D = (y-3)^2 - 4(y^2 - 3y + 3) = -3y^2 + 6y - 3 = -3(y-1)^2 \leqslant 0$. Следовательно, уравнение имеет решение только если $D = 0$, то есть $y = 1$. Полученное квадратное уравнение примет вид $x^2 - 2x + 1 = 0$, значит $x = 1$. Из первого уравнения системы получим, что и $z = 1$.

Второй способ. Возведем первое уравнение системы в квадрат:

$$\begin{cases} (x+y+z)^2 = 9, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3. \end{cases}$$

Раскроем скобки:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz = 9, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе, и домножим второе уравнение на 2:

$$\begin{cases} 2xy + 2yz + 2xz = 6, \\ 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 6. \end{cases}$$

Приравняем полученные выражения: $2x^2+2y^2+2z^2 = 2xy+2yz+2xz$. Перенеся все члены в левую часть, выделим полные квадраты: $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0$. Отсюда: $x = y = z$. Из первого уравнения получим, что $x = y = z = 1$. Найденное решение удовлетворяет и второму уравнению системы.

4.2. *Ответ*: см. рис. 96.

I. Пусть M — точка плоскости, удовлетворяющая условию.

1) Так как $\angle ABM$ — наибольший в $\triangle ABM$, то сторона AM — наибольшая, то есть $AM > AB$ и $AM > BM$.

2) Так как $AM > AB$, то точка M находится вне круга с центром A и радиусом AB.

3) Так как $AM > BM$, то точки M и B лежат в одной полуплоскости относительно серединного перпендикуляра к отрезку AB.

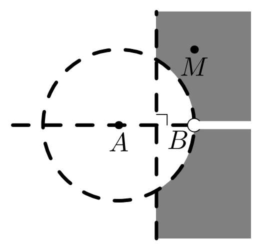


Рис. 96

4) Так как AMB — треугольник, то точка M не лежит на прямой AB.

II. Пусть M принадлежит заштрихованной области.

1) Так как M не лежит на прямой AB, то AMB — треугольник.

2) Так как M вне круга с центром A и радиусом AB, то $AM > AB$.

3) Так как точки M и B лежат в одной полуплоскости относительно серединного перпендикуляра к отрезку AB, то $AM > BM$. Итак, в $\triangle AMB$ сторона AM — наибольшая, следовательно, и $\angle ABM$ — наибольший.

4.3. *Ответ*: при N, кратных 4.

Стаканы, стоящие на нечетных местах, покрасим в красный цвет, а остальные — в белый. Каждая операция позволяет перевернуть два стакана одного цвета. Поэтому чётность количества стаканов одного цвета, стоящих вниз дном, не изменяется. Вначале дном вниз не стоит ни одного стакана, значит, для того чтобы все стаканы оказались перевернутыми, необходимо, чтобы стаканов каждого цвета было четное количество, то есть N должно делиться на 4. Если N делится на 4, то все стаканы можно перевернуть: разделим ряд стаканов на группы по 4, и в каждой группе перевернем сначала два белых, а затем два красных стакана.

5.1. *Ответ*: при $a = 2$.

Первый способ. Исходное уравнение равносильно уравнению $(x - 3)^2 + (a - 2)^2 = 1$. Графиком этого уравнения в системе координат (x, a) является окружность с центром в точке $(3; 2)$ и радиусом 1 (см. рис. 97). Рассмотрим произвольную прямую, параллельную оси x и пересекающую окружность в двух точках. Абсциссы этих точек x_1 и x_2 являются корнями уравнения, а разность $x_2 - x_1$ равна длине хорды окружности. Эта разность будет наибольшей, в случае, если хорда является диаметром, то есть, при $a = 2$.

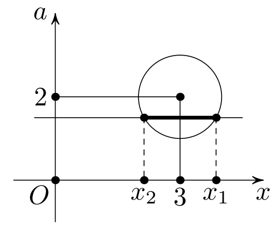


Рис. 97

Второй способ. Данное уравнение имеет два различных корня, если $D/4 = 9 - 12 - a^2 + 4a = -a^2 + 4a - 3 > 0$. Разность $x_2 - x_1 = 3 + \sqrt{D/4} - (3 - \sqrt{D/4}) = \sqrt{D}$ принимает наибольшее значение при наибольшем значении дискриминанта. Рассмотрим квадратный трехчлен $D/4 = -a^2 + 4a - 3 = -(a - 2)^2 + 1$. Он принимает наибольшее значение при $a = 2$, и это значение положительно.

5.2. *Ответ*: $r = 6,5$.

1) Рассмотрим точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Пусть B_1 и D_1 — точки касания (см. рис. 98). Тогда BB_1D_1D — прямоугольная трапеция. Перпендикуляр ON к отрезку B_1D_1 является ее средней линией. Следовательно, $ON = \dfrac{BB_1 + DD_1}{2} = \dfrac{6 + 7}{2} = 6,5$. Перпендикуляр OP, опущенный на другую касательную к той же паре окружностей, равен ON.

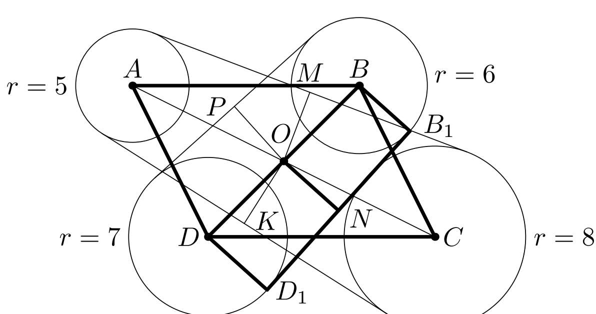


Рис. 98

2) Аналогично, перпендикуляры OK и OM, опущенные на две другие касательные, равны $\frac{5+8}{2}=6,5$.

Таким образом, точка O равноудалена от всех касательных, следовательно, она является центром окружности, радиус которой равен 6, 5.

5.3. *Ответ*: 55000.

Будем отдельно считать суммы единиц, десятков, сотен и т. д., встречающихся в этих палиндромах. Любой палиндром имеет вид $\overline{abcba}$. Для каждой цифры в разряде сотен существует $90 = 9 \cdot 10$ вариантов выбора a и b ($a \neq 0$). Поэтому общее количество палиндромов равно $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$.

Сумма всех сотен в палиндромах равна

$$(0+100+200+\ldots+800+900)\cdot 90 = \\ = (1+2+\ldots+8+9)\cdot 100\cdot 90 = 45\cdot 90\cdot 100.$$

Аналогично, сумма всех тысяч и десятков равна

$$(0+1010+2020+\ldots+8080+9090)\cdot 90 = \\ = (1+2+\ldots+8+9)\cdot 1010\cdot 90 = 45\cdot 90\cdot 1010,$$

сумма всех десятков тысяч и единиц равна

$$(10001+20002+30003+\ldots+80008+90009)\cdot 100 = \\ = (1+2+3+\ldots+8+9)\cdot 10001\cdot 100 = 45\cdot 100\cdot 10001.$$

Таким образом среднее арифметическое всех чисел-палиндромов равно

$$\frac{45\cdot 90\cdot 100+45\cdot 90\cdot 1010+45\cdot 100\cdot 10001}{900} = \\ = \frac{45\cdot(9000+90\,900+1\,000\,100)}{900} = \frac{1\,100\,000}{20} = 55\,000.$$

2002/2003 учебный год

1.1. *Ответ*: 41.

Пусть p — искомое простое число, тогда $p + 400 = n^2$, где n — натуральное. Следовательно, $p = n^2 - 400 \Leftrightarrow p = (n-20)(n+20)$. Так как $n + 20$ — натуральное число, отличное от 1, а число p — простое, то $n - 20 = 1$. Значит, $n = 21$, тогда $p = 41$.

1.2. *Первый способ.* Соединим центр O данной окружности с точками B и C (см. рис. 99а). Из равенства прямоугольных треугольников OAC и OBC следует, что OC — биссектриса внешнего угла AOB треугольника BOD. Так как $\triangle BOD$ — равнобедренный ($OB = OD$), то $OC \parallel BD$, тогда, по теореме Фалеса, C — середина отрезка AE, что и требовалось доказать.

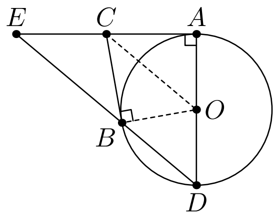


Рис. 99а

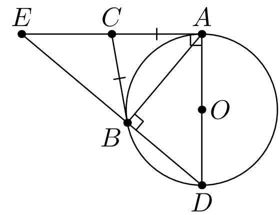


Рис. 99б

Второй способ. Соединим точки A и B, тогда $\angle ABD = 90°$, так как этот угол — вписанный и опирается на диаметр окружности (см. рис. 99б). Так как $CA = CB$, то в прямоугольном треугольнике ABE точка C, лежащая на гипотенузе AE, равноудалена от вершин A и B. Значит, эта точка лежит на серединном перпендикуляре к катету AB, то есть, является серединой гипотенузы, что и требовалось доказать.

1.3. *Ответ*: нет, нельзя.

Пусть $2002 = m + n$, где m и n — натуральные числа, причем mn делится на 2002. Разложим 2002 на простые множители: $2002 = 2 \cdot 7 \times \times 11 \cdot 13$. Так как mn делится на 2002 и 2 — простое число, то хотя бы одно из чисел m или n делится на 2, а так как их сумма также кратна 2, то каждое из этих чисел делится на 2.

Аналогичными рассуждениями получим, что каждое из чисел m и n делится также на 7, на 11 и на 13. Таким образом, каждое из них делится на 2002, но тогда их сумма больше чем 2002. Полученное противоречие показывает, что искомое представление невозможно.

2.1. Если $x > 0$, $y > 0$, то $\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leqslant \frac{1}{xy} \Leftrightarrow \frac{2x^2y}{x^4 + y^2} + \frac{2y^2x}{y^4 + x^2} \leqslant 2 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}\right) + \left(1 - \frac{2y^2x}{y^4 + x^2}\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2 - y)^2}{x^4 + y^2} + \frac{(y^2 - x)^2}{y^4 + x^2} \geqslant 0$. Последнее неравенство выполняется при всех положительных значениях x и y, поэтому, выполняется и данное неравенство.

Можно также составить частное левой и правой части доказываемого неравенства и аналогичными преобразованиями доказать, что значение частного не превосходит 1. Этого достаточно для доказательства данного неравенства, так как оно содержит только положительные числа.

Как указанные, так и другие возможные способы доказательства, сводятся к доказательству неравенств $\frac{2x^2y}{x^4+y^2} \leqslant 1$ *и* $\frac{2xy^2}{y^4+x^2} \leqslant 1$, *которые, в свою очередь, являются следствиями верного неравенства* $a^2+b^2 \geqslant 2ab$.

Отметим также, что традиционный способ доказательства неравенств, связанный с преобразованием разности его левой и правой части, приводит к очень громоздким выкладкам.

2.2. *Ответ*: верно.

Первый способ. Продолжим стороны AB и DC до пересечения в точке M (см. рис. 100а). Тогда $AMDK$ — описанный параллелограмм, то есть — ромб. Следовательно, O — середина AD.

Аналогично доказывается, что O — середина BE и середина CF. Равенство противолежащих сторон шестиугольника следует из равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними: $\triangle AOB = \triangle DOE$; $\triangle BOC = \triangle EOF$; $\triangle COD = \triangle FOA$ (см. рис. 100б).

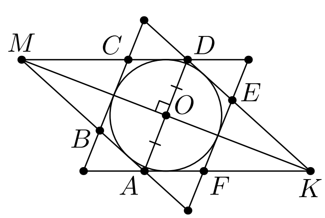


Рис. 100а

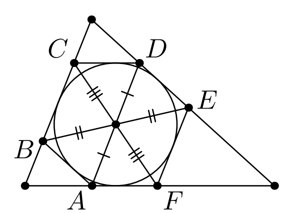


Рис. 100б

Второй способ. Параллельные касательные к окружности симметричны относительно ее центра O, поэтому, точки их пересечения также попарно симметричны относительно O (см. рис. 100б). Значит, отрезки AB и ED, BC и EF, CD и FA попарно симметричны, следовательно, $AB = ED$, $BC = EF$, $CD = FA$, что и требовалось доказать.

2.3. *Ответ*: все составные числа, большие 5.

Никакое простое число решением являться не может, так как число $(n-1)!$ не содержит простой множитель n.

Пусть n — составное число, большее пяти, тогда $n = ab$, где a и b — различные натуральные числа, отличные от 1, или $n = p^2$, где p —

простое. В первом случае $(n-1)! = 1 \cdot 2 \ldots (n-2) \cdot (n-1)$ содержит сомножители a и b, значит, делится на n. Во втором случае, если $n > 5$, то $(n-1)!$ содержит сомножители p и $2p$ (так как $2p < p^2 = n$), то есть, делится на n. Осталось проверить число 4 — единственное составное, меньшее 5. Оно не является решением, так как $3! = 6$ не делится на 4.

3.1. *Ответ*: существуют, например, $x = 2\sqrt{2}$; $y = 1 - \sqrt{2}$.

Пусть $x + y^2 = p$, $x + 2y = q$, где p и q — рациональные числа. Вычитая почленно, получим, что $y^2 - 2y + r = 0$, где $r = q - p \in$ $\in Q$. Выберем значение r так, чтобы это квадратное уравнение имело иррациональные корни, например, $r = -1$. Тогда, корни уравнения: $y = 1 \pm \sqrt{2}$. Для того, чтобы выражение $x + 2y$ принимало какое-либо рациональное значение, например, $q = 2$, можно выбрать $x = \mp 2\sqrt{2}$. Тогда, первое из данных условий выполняется автоматически при $p =$ $= q - r = 3$.

Из приведенного рассуждения следует, что пар $(x; y)$, удовлетворяющих условию, — бесконечное множество, в частности, к указанному значению x можно прибавить любое рациональное число.

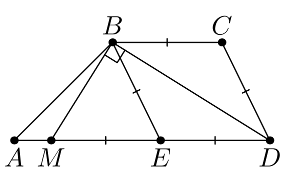


Рис. 101

3.2. Проведем в данной трапеции $ABCD$ отрезок BE, параллельный стороне CD (см. рис. 101), который разбивает трапецию на ромб $BCDE$ и треугольник ABE. На стороне AE треугольника ABE отложим отрезок ME, равный стороне ромба. Так как $BE = ME = DE$, то $\angle MBD = 90°$. По условию, $AD > 2BC$, поэтому, точка M лежит между A и E. Следовательно, $\angle ABD > \angle MBD = 90°$, то есть, $\angle ABD$ — тупой, что и требовалось доказать.

3.3. *Ответ*: три точки.

Один из возможных примеров указанного расположения точек показан на рис. 102. Меньшим количеством точек обойтись не удастся, так как существуют три треугольника с вершинами A, B, C, D и E, не имеющие общих внутренних точек, например, ABC, ACD и ADE. В каждом из этих треугольников должна быть отмечена хотя бы одна точка.

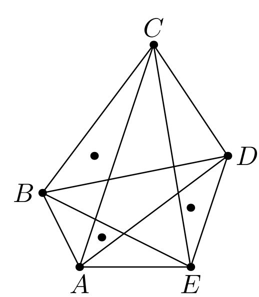


Рис. 102

4.1. *Ответ*: $x^7 + x^5 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^3 - x + 1)$.

Первый способ. $x^7 + x^5 + 1 = (x^7 + x^5 + x^3) - (x^3 - 1) = x^3(x^4 +$ $+ x^2 + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^3(x^2 - x + 1) - x + 1) =$

$= (x^2+x+1)\,(x^5-x^4+x^3-x+1)$, так как $x^4+x^2+1 = (x^4+2x^2+1)-x^2 = (x^2+1)^2-x^2 = (x^2+x+1)\,(x^2-x+1)$.

Второй способ. $x^7+x^5+1 = (x^7+x^6+x^5)-(x^6-1) = x^5(x^2+x+1)-(x^3+1)\,(x^3-1) = x^5(x^2+x+1)-(x^3+1)\,(x-1)\,(x^2+x+1) = (x^2+x+1)\,(x^5-x^4+x^3-x+1)$.

Если исходить из предположения, что все коэффициенты искомых множителей — целые числа, то ответ также можно получить, воспользовавшись методом «неопределенных коэффициентов».

4.2. *Ответ*: существует.

Рассмотрим, например, квадрат $ABCD$ и через его центр O проведем две взаимно перпендикулярные прямые, не параллельные сторонам квадрата и не содержащие его вершин (см. рис. 103). При повороте с центром O на 90° в любом направлении образом квадрата $ABCD$ является тот же квадрат, а образом одной из проведенных прямых — другая. Например, если рассмотреть поворот с центром O, при котором образом вершины A является вершина B, то $D \to A$, а $B \to C$. В этом случае образом точки M является точка K, а образом точки K — точка P. Следовательно, при таком повороте $OMAK \to OKBP$, то есть, эти четырехугольники равны. Значит, четырехугольник $ABPM$ — искомый.

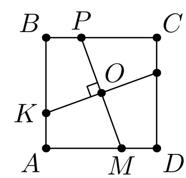


Рис. 103

Из приведенного рассуждения следует, что примером искомого четырехугольника может являться прямоугольная трапеция, в которой сумма оснований равна меньшей боковой стороне. Серединный перпендикуляр к большей боковой стороне разбивает ее на два равных четырехугольника.

4.3. *Ответ*: да.

Первый способ. Выберем произвольным образом двух человек и спросим у одного из них про другого. В случае положительного ответа, тот, о ком спрашивали — не «шпион», в случае отрицательного — тот, кого спрашивали — не «шпион». Значит, одного человека можно исключить из числа «подозреваемых» и их останется $(n-1)$. Повторяя эту операцию, мы на каждом «шаге» будем уменьшать количество «подозреваемых» на одного. Таким образом, после того, как будет задано $(n-1)$ вопросов, останется один «подозреваемый», который и является «шпионом».

Метод, использованный при доказательстве, называется «методом спуска».

Второй способ. Докажем утверждение методом математической индукции, присвоив членам компании номера от 1 до n. Для $n = 2$

утверждение очевидно. Пусть утверждение верно для компании, в которой $(n-1)$ человек. Спросим первого человека, знает ли он человека с номером n. Если знает, то человек с номером n — не «шпион». Тогда, по предположению индукции, мы сумеем найти «шпиона» среди людей с номерами от 1 до $n-1$, задав $(n-2)$ вопроса. Если же первый не знает n-го, то первый — не «шпион», значит, задав $(n-2)$ вопроса, мы сумеем найти «шпиона» среди людей с номерами от 2 до n. Таким образом, задав $(n-1)$ вопрос, можно выявить «шпиона».

Отметим, что меньшим количеством вопросов выявить «шпиона» невозможно. Доказать это можно, например, так. За любой вопрос мы сможем получить следующую информацию: не более, чем про одного человека узнать, что он не «шпион» и увеличить количество людей, которых знает второй человек, не более, чем на 1. *«Шпион» будет найден в одном из двух случаев:* 1) *если мы выяснили, что количество людей, которых знает какой-то человек, равно* $(n-1)$; 2) *если мы выяснили, что* $(n-1)$ *человек не являются «шпионами». За один вопрос каждый из этих параметров увеличивается не более, чем на* 1, *поэтому, и вопросов потребуется не менее, чем* $(n-1)$.

5.1. *Ответ*: $(0; 0; \ldots; 0)$; $(0,01; 0,01; \ldots; 0,01)$.

Так как каждое из чисел x_0, x_1, ..., x_{10} является квадратом, то все числа в наборе неотрицательны и поэтому их сумма также неотрицательна. Далее возможны различные способы рассуждений.

Первый способ. Пусть x — любое из чисел искомого набора, а s — сумма всех чисел этого набора. Тогда, по условию, x — корень уравнения $x = (s-x)^2$, которое, в данном случае (так как $x \geqslant 0$ и $s \geqslant x$), равносильно уравнению $\sqrt{x} = s - x$. При $x \geqslant 0$ левая часть полученного уравнения возрастает, а правая — убывает, следовательно, уравнение имеет не более одного корня. Это означает, что искомый набор состоит из одинаковых чисел. Решив уравнение $x = (10x)^2$, получим, что $x = 0$ или $x = 0,01$. Доказать, что уравнение $x = (s-x)^2$ при $x \geqslant 0$ и $s \geqslant x$ имеет не более одного корня можно и по-другому: уравнение $x = (s-x)^2$ равносильно квадратному уравнению $x^2 - (2s+1)\,x + s^2 = 0$, один из корней которого $x_1 = \dfrac{2s+1+\sqrt{4s+1}}{2}$ — посторонний, так как $x_1 > s$. Следовательно, при указанных условиях уравнение $x = (s-x)^2$ не может иметь более одного корня.

Второй способ. Из условия следует, что $\sqrt{x_0} = x_1 + x_2 + \ldots + x_9 + x_{10}$ и $\sqrt{x_1} = x_0 + x_2 + \ldots + x_9 + x_{10}$. Вычтем из одного из этих равенств другое: $\sqrt{x_0} - \sqrt{x_1} = x_1 - x_0 \Leftrightarrow x_0 + \sqrt{x_0} = x_1 + \sqrt{x_1}$. Так как функции $y = x$ и $y = \sqrt{x}$ — возрастающие, то возрастающей является и функция

$y = x + \sqrt{x}$, значит, каждое свое значение она принимает только при одном значении аргумента. Следовательно, равенство $x_0 + \sqrt{x_0} = x_1 + \sqrt{x_1}$ выполняется тогда и только тогда, когда $x_0 = x_1$. Аналогичными рассуждениями доказывается, что $x_1 = x_2$, и так далее, то есть, все числа искомого набора между собой равны. Таким образом, мы получим уже решенное уравнение $x = (10x)^2$.

Третий способ. «Упорядочим» числа в наборе: пусть, $x_{10} \geqslant x_9 \geqslant \ldots \geqslant x_1 \geqslant x_0$. По условию, $x_0 = (x_1 + x_2 + \ldots + x_9 + x_{10})^2$ и $x_1 = (x_0 + x_2 + \ldots + x_9 + x_{10})^2$, поэтому, $(x_0 + x_2 + \ldots + x_9 + x_{10})^2 \geqslant (x_1 + x_2 + \ldots + x_9 + x_{10})^2 \Rightarrow x_0 + x_2 + \ldots + x_9 + x_{10} \geqslant x_1 + x_2 + \ldots + x_9 + x_{10} \Leftrightarrow x_0 \geqslant x_1$. Таким образом, $x_0 = x_1$. Рассуждая аналогично, получим, что искомый набор состоит из одинаковых чисел, то есть, вновь приходим к уравнению $x = (10x)^2$.

5.2. Пусть M — середина отрезка AB, тогда, эта точка является и серединой отрезка CD, так как по условию, $AC = BD$. (*Заметим, что это не зависит от порядка расположения точек C и D на отрезке AB*). Рассмотрим точку P, симметричную точке O относительно M. Соединим точки O и P с точками A, B, M, C и D (см. рис. 104а), тогда M — точка пересечения диагоналей параллелограммов $AOBP$ и $CODP$. По свойству параллелограмма: $OA + OB = OA + AP$; $OC + OD = OC + CP$.

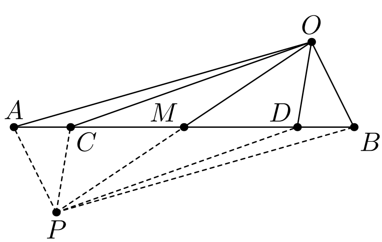


Рис. 104а

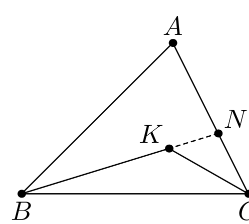


Рис. 104б

Таким образом, задача сводится к доказательству следующего утверждения: сумма расстояний от вершин O и P треугольника AOP до вершины A больше, чем сумма расстояний от этих же вершин до точки C, лежащей на медиане AM. Обобщим это утверждение. Рассмотрим произвольный треугольник ABC и докажем, что *для любой точки K, лежащей внутри треугольника*, выполняется неравенство: $AB + AC > KB + KC$. Пусть N — точка пересечения луча BK со стороной AC (см. рис. 104б). Тогда, в $\triangle ABN$: $AB + AN > BN = KB + KN$; в $\triangle KNC$: $KN + NC > KC$. Сложим полученные неравенства почленно: $AB+AN+KN+NC > BK+KN+KC \Leftrightarrow AB+AC+KN > KB + KN + KC \Leftrightarrow AB + AC > KB + KC$, что и требовалось доказать.

Отметим, что рассмотренная вспомогательная задача является леммой, используемой при доказательстве многих утверждений, связанных с неравенством треугольника. Например, с ее помощью доказывается «классическое» неравенство $p < AK + BK + CK < 2p$, *где* K *— произвольная точка внутри* $\triangle ABC$, *а* p *— его полупериметр. Действительно, так как* $AK + BK > AB$, $BK + CK > BC$, $CK + AK > CA$, *то, сложив эти неравенства, получим, что* $2(AK + BK+CK) > 2p \Leftrightarrow AK+BK+CK > p$. *С другой стороны, используя доказанную лемму, получим три неравенства*: $AB + AC > KB + KC$, $BA+BC > KA+KC$, $CA+CB > KA+KB$. *Сложив эти неравенства, получим, что* $4p > 2(KA + KB + KC) \Leftrightarrow AK + BK + CK < 2p$, *что и требовалось доказать.*

5.3. *Ответ*: 256.

При любой расстановке скобок данное выражение можно представить в виде дроби. Тогда, так как все данные числа — простые, результат вычислений будет однозначно определяется тем, куда «попало» каждое из этих чисел: в числитель или в знаменатель. Очевидно, что независимо от расстановки скобок, число 2 попадает в числитель, а число 3 — в знаменатель. Каждое из следующих чисел может «попасть» как в числитель, так и в знаменатель, например, при такой расстановке скобок $2 : (3 : 5)\ldots$ число 5 окажется в числителе дроби, а если скобки поставить так $(2 : 3) : 5\ldots$ — в знаменателе.

Докажем, что существуют расстановки скобок, при которых каждое из чисел 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 «попадает» как в числитель, так и в знаменатель, независимо от расположения остальных чисел. Для этого, например, разобьем все данные числа, начиная с числа 3, на группы следующим образом: каждая группа начинается с числа, которое должно «попасть» в знаменатель, и может содержать еще несколько (в том числе, и ноль) чисел, идущих следом за ним, которые все должны «попасть» в числитель. Эти группы заключаем в скобки и больше нигде скобок не ставим. Тогда первое число каждой группы попадет в знаменатель, так как на него непосредственно делится двойка, а остальные числа группы «попадут» в числитель, так как на них делится первое число из этой группы, «попавшее» в знаменатель.

Таким образом, количество чисел, которые могут являться значением данного выражения при всех возможных расстановках скобок, равно $2^8 = 256$.

Эту задачу можно обобщить для любого количества чисел, причем они не обязательно должны быть простыми. Расставляя всеми возможными способами скобки в выражении $a_1 : a_2 : \ldots : a_n$, где каждые два числа взаимно просты, можно получить 2^{n-2} различных значения.

2003/2004 учебный год

1.1. *Ответ*: 1.

Воспользуемся тем, что сумма коэффициентов произвольного многочлена $S(x)$ равна $S(1)$. Тогда, если $S(x) = P(x) \cdot Q(x)$, то сумма коэффициентов многочлена $S(x)$ равна $P(1) \cdot Q(1) = 1$.

1.2. *Ответ*: 90°.

Пусть a и b — длины сторон параллелограмма, а h_a и h_b — длины проведенных к ним высот. По условию, $h_a \geqslant a$ и $h_b \geqslant b$. Кроме того, $a \geqslant h_b$ и $b \geqslant h_a$ (см. рис. 105). Таким образом, $h_a \geqslant a \geqslant h_b \geqslant b \geqslant h_a$, следовательно, $h_a = a = h_b = b$. Это означает, что данный параллелограмм является квадратом, то есть, угол между диагоналями — прямой.

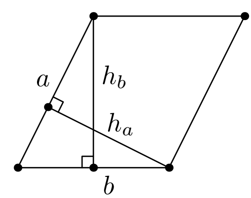


Рис. 105

1.3. *Ответ*: 128.

Участники, выбывшие после первого круга, проиграли по одному бою и не выиграли ни одного. Участники, выбывшие после второго круга, по одному бою выиграли и по одному бою проиграли. Поэтому боксеры, которые выиграли больше боев, чем проиграли — это те, которые выиграли хотя бы по два боя, то есть прошли в третий круг. Во второй круг прошла половина участников, а в третий — четверть (см. рис. 106). Следовательно, 32 человека составляют четверть от всех участников турнира, а общее количество боксеров равно 128.

Выбыли в первом круге	
32 человека	Выбыли во втором круге

Рис. 106

2.1. Так как $a+b>0$, то данное неравенство равносильно неравенству $1+ab<a+b \Leftrightarrow (1-a)-(b-ab)<0 \Leftrightarrow (1-a)\,(1-b)<0 \Leftrightarrow \begin{cases} a<1, \\ b>1 \end{cases}$

или $\begin{cases} a>1, \\ b<1 \end{cases}$, что и требовалось доказать.

2.2. *Ответ*: да, можно.

Пусть ABC — данный треугольник, в котором $\angle BAC = 30°$. Проведем медиану CM, после чего точку K — центр равностороннего треугольника BCM соединим с его вершинами (см. рис. 107). Треугольники AMC, MKC, BKM и CKB — равнобедренные с углом $120°$ при вершине, поэтому являются подобными.

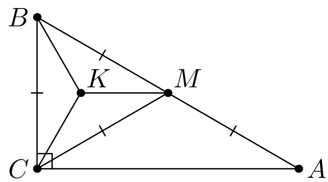


Рис. 107

2.3. *Ответ*: 8.

Пусть a, b и c — длины сторон треугольника ($a \geqslant b \geqslant c$). Докажем, что $6 < a < 10$. Предположим, что $a \leqslant 6$, тогда $b \leqslant 6$ и $c \leqslant 6$, то есть, $P = a + b + c < 20$ — противоречие. Предположим, что $a \geqslant 10$, тогда $b + c > a \geqslant 10$, то есть, $P > 20$ — противоречие. Все возможные треугольники, у которых большая сторона имеет длину 9, 8 или 7, находим перебором (см. таблицу).

a	9	9	9	9	8	8	8	7
b	9	8	7	6	8	7	6	7
c	2	3	4	5	4	5	6	6

3.1. *Ответ*: 0.

Так как трехчлен $bx^2 + ax + c$ имеет один корень, то $a^2 - 4bc = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a^2 = 4bc$. Аналогично, так как трехчлен $ax^2 + cx + b$ также имеет один корень, то $c^2 - 4ab = 0 \Leftrightarrow c^2 = 4ab$. Перемножив полученные равенства и разделив обе части на ас, получим, что $ac = 16b^2$. Дискриминант данного трехчлена: $D = b^2 - 4ac = b^2 - 64b^2 = -63b^2 < 0$ при $b \neq 0$. Следовательно, данный трехчлен корней не имеет.

Можно доказать, что любой трехчлен, удовлетворяющий условию задачи, имеют вид: $4kx^2 + kx + 4k$, *где* $k \neq 0$.

3.2. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, причем $BC = 4$. Воспользуемся тем, что в любой трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой (это можно доказать, используя, например, векторы или гомотетию). Проведем диагонали трапеции AC и BD (O — точка их пересечения) и продолжим боковые стороны до пересечения в точке P (см. рис. 108а). Тогда прямая OP пересечет основания трапеции в их серединах, точках M и K, поэтому $BM = 2$. Выполнив аналогичное построение, например, для трапеции $ABMK$, получим, что $BF = FM = 1$ (см. рис. 108б).

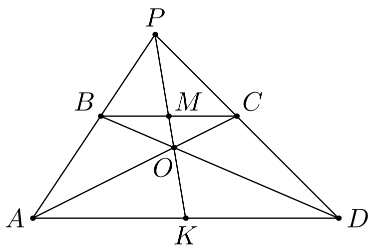


Рис. 108а

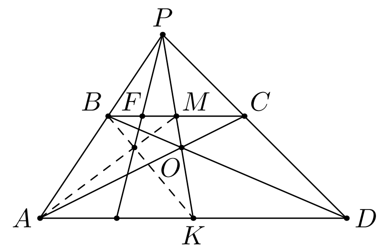


Рис. 108б

3.3. *Ответ*: 73.

Пусть исходное число $\overline{ab} = 10a + b$. Тогда число $\overline{ab} - \overline{ba} = (10a + b) - (10b + a) = 9(a - b)$ является квадратом натурального. Поэтому число $a - b$ также должно являться полным квадратом, то есть, $a - b = 1$ или $a - b = 4$. Поскольку числа $\overline{ab}$ и $\overline{ba}$ — простые, то обе цифры a и b — нечетные, значит, $a - b = 4$. Перебирая все варианты, находим числа 51, 73 и 95, из которых простым является только 73, причем число 37 — также простое.

4.1. *Ответ*: наибольшее значение равно 13, а наименьшее значение равно -169.

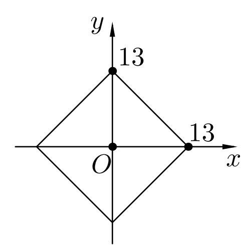


Рис. 109

Построим график уравнения $|x|+|y| = 13$, тогда данному неравенству удовлетворяют координаты всех точек, принадлежащих этому графику и точек, лежащих внутри ограниваемой им области (см. рис. 109). Пусть $y-x^2 = t$, тогда решение задачи сводится к тому, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения переменной t, для которых график функции $y = x^2+t$ имеет общие точки с найденным множеством. Так как график указанной функции получается из параболы $y = x^2$ параллельным переносом вдоль оси y, то: 1) наибольшее значение t достигается, если вершиной параболы $y = x^2 + t$ является точка $(0; 13)$, то есть, при $t = 13$; 2) наименьшее значение t достигается, если парабола $y = x^2+t$ проходит через точки $(13; 0)$ и $(-13; 0)$, то есть, при $t = -169$.

4.2. Пусть M и K — середины сторон AB и BC данного треугольника ABC соответственно (см. рис. 110а). Тогда DM — медиана прямоугольного треугольника ADB, проведенная к гипотенузе, то есть, $DM = 0,5AB$. Аналогично, так как EK — медиана треугольника BEC, то $EK = 0,5BC$. MK — средняя линия треугольника ABC, значит, $MK = 0,5AC$. Так как длина ломаной не меньше длины отрезка, соединяющего ее концы, то $DE \leqslant DM + MK + KE = 0,5(AB + AC + BC) = 0,5P_{ABC}$, что и требовалось доказать.

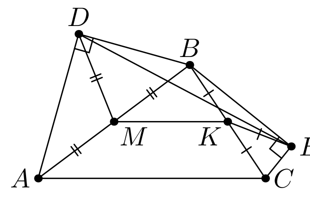


Рис. 110а

Те же идеи можно реализовать и по-другому.

Пусть R и r — радиусы окружностей, построенных на сторонах AB и BC данного треугольника, как на диаметрах, а d — длина средней линии MK (см. рис. 110б). Тогда полупериметр треугольника ABC равен: $p = \dfrac{AB + BC + CA}{2} = R + r + d$.

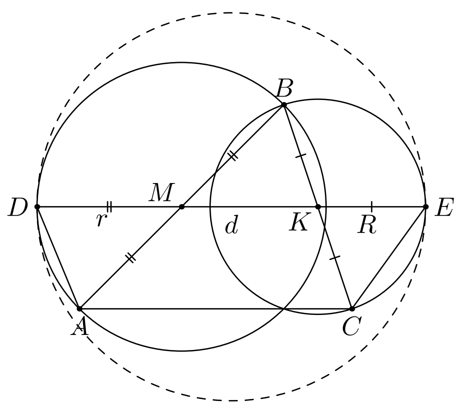


Рис. 110б

Рассмотрим еще одну окружность с центром на прямой MK, которая касается обеих уже построенных окружностей. Из условия следует, что точки D и E лежат на окружностях с центрами M и K соответственно, поэтому, расстояние DE будет наибольшим, если эти точки являются точками попарного касания окружностей. В этом случае, DE — диаметр большой окружности, причем, $DE = R + r + d$.

4.3. *Ответ*: нет, не может.

Рассмотрим произвольное n-значное число, такое, что $n \geqslant 2$: $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1} \geqslant \overline{a_n 0 \ldots 00} = a_n \cdot 10^{n-1} > a_n \cdot (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots a_{n-1})$, последнее неравенство выполняется, так как каждый сомножитель в скобках меньше 10.

5.1. *Ответ*: 2.

$\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{1}{y^2+1}=\dfrac{2}{xy+1}\Leftrightarrow\dfrac{1}{x^2+1}-\dfrac{1}{xy+1}=\dfrac{1}{xy+1}-\dfrac{1}{y^2+1}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\dfrac{xy-x^2}{(x^2+1)(xy+1)}=\dfrac{y^2-xy}{(y^2+1)(xy+1)}$. Так как $x\neq y$, то из полученного равенства следует, что $\dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{y}{y^2+1}\Leftrightarrow xy^2+x=x^2y+y\Leftrightarrow(x-$ $-y)(1-xy)=0$. Учитывая условие $x\neq y$, получим, что $xy=1$. Тогда $\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{1}{y^2+1}+\dfrac{2}{xy+1}=2\cdot\dfrac{2}{xy+1}=2$.

5.2. *Ответ*: 2 см или 4 см.

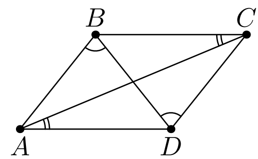


Рис. 111а

Из условия следует, что $ABCD$ — параллелограмм. Рассмотрим осевую симметрию относительно прямой BD, при которой образом точки A является точка A'. Тогда $BA'=BA$; $DA'=DA$; $\angle A'BD=\angle ABD=60^\circ$; $\angle BA'A=$ $=\angle BAA'=30^\circ$. Так как $\angle ABD$ — острый, то отрезок AA' пересекает луч BD.

Возможны два случая:

1) Точка A' совпала с точкой C (см. рис. 111а). Тогда, $ABCD$ — ромб с острым углом 60°, значит, $BD=AB=2$ (см).

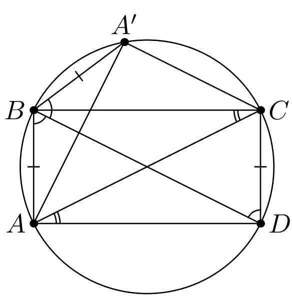


Рис. 111б

2) Точка A' не совпала с точкой C (см. рис. 111б). В этом случае рассмотрим окружность, описанную около треугольника ABC. Точка A' лежит на этой окружности, так как $\angle BA'A=\angle BCA$, а точка D — поскольку BD и $A'C$ — основания равнобокой трапеции. Следовательно, $\angle BDA=\angle BCA=30^\circ$, поэтому, $ABCD$ — прямоугольник. Из прямоугольного треугольника ABD, в котором $\angle BDA=30^\circ$, находим, что $BD=2AB=4$ (см).

Для тех учащихся 9 классов, кто знаком с простейшими тригонометрическими формулами, можно предложить другой способ решения, использующий теорему синусов.

Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ и $\angle ADB=\alpha$ (см. рис. 111в). Тогда $\angle AOB=30^\circ+\alpha$; $\angle BAC=90^\circ-\alpha$. Из $\triangle AOD$: $\dfrac{AO}{\sin\alpha}=\dfrac{DO}{\sin 30^\circ}$; из $\triangle AOB$: $\dfrac{AO}{\sin 60^\circ}=\dfrac{BO}{\sin(90^\circ-\alpha)}$. Разделим первое равенство на второе, учитывая, что $BO=DO$ и $\sin(90^\circ-\alpha)=$

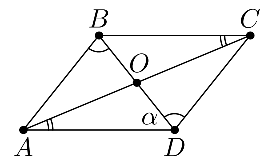


Рис. 111в

$= \cos\alpha$. Получим, что $\dfrac{\sin 60^\circ}{\sin\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin 30^\circ}$, то есть, $\sin 2\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, $2\alpha = 60^\circ$ или $2\alpha = 120^\circ \Leftrightarrow \alpha = 30^\circ$ или $\alpha = 60^\circ$. Таким образом, мы получили оба случая, рассмотренных в основном решении.

Аналогичные соотношения можно получить, если использовать равновеликость треугольников AOD и AOB, дважды вычислив их площади по формуле $S = \dfrac{1}{2}\, ab\sin\gamma$.

5.3. Предположим, что это не так. Пусть a_1, a_2, …, a_{70} — данные 70 чисел. Рассмотрим другой набор чисел: a_1, a_2, …, a_{70}, a_1+4, a_2+4, …, $a_{70}+4$, a_1+9, a_2+9, …, $a_{70}+9$.

В этом наборе 210 натуральных чисел, все они различны (по нашему предположению) и самое большое из них не превосходит $200+9=209$. Получено противоречие (принцип Дирихле!), поэтому хотя бы два из данных чисел отличаются на 4, 5 или 9, что и требовалось доказать.

2004/2005 учебный год

1.1. *Ответ*: $\dfrac{\sqrt{-a}+\sqrt{-a-1}}{\sqrt{2}}$.

Найдем область определения данного выражения:

$$\begin{cases} a^2-a \geqslant 0 \\ a^2-1 \geqslant 0 \\ 2-2a>0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a(a-1) \geqslant 0 \\ (a-1)\,(a+1) \geqslant 0 \\ a<1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad a \leqslant -1.$$

Используя тождество $\sqrt{xy} = \sqrt{|x|}\cdot\sqrt{|y|}$, получим:

$$\frac{\sqrt{a^2-a}+\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{2-2a}} = \frac{\sqrt{a(a-1)}+\sqrt{(a-1)\,(a+1)}}{\sqrt{2(1-a)}} =$$
$$= \frac{\sqrt{-a}\cdot\sqrt{1-a}+\sqrt{1-a}\cdot\sqrt{-a-1}}{\sqrt{2(1-a)}} = \frac{\sqrt{-a}+\sqrt{-a-1}}{\sqrt{2}}.$$

1.2. *Ответ*: $CK : KD = 1 : 1$.

Пусть E — точка пересечения прямых BK и AD (см. рис. 112). Тогда BAE — равнобедренный прямоугольный треугольник, поэтому $AD + BC = AB = AE = AD + DE$, то есть, $BC = DE$. Следовательно, треугольники BKC и EKD равны по стороне и двум прилежащим углам, поэтому, $CK = KD$.

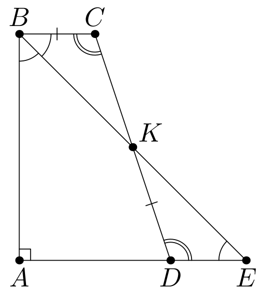


Рис. 112

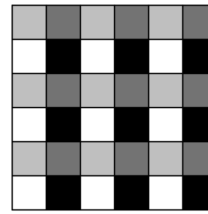


Рис. 113

1.3. *Ответ*: в четыре цвета.

Разобьем доску на квадраты 2×2 и покрасим каждый квадрат в четыре цвета одинаковым образом (см. рис. 113). В этом случае условие задачи выполняется. Обойтись меньшим количеством цветов невозможно, так как внутри такого квадрата каждая клетка соседствует с тремя остальными.

2.1. *Ответ*: $b = c = 1$.

Так как каждое уравнение имеет хотя бы один корень, то $D/4 = b^2 - c \geqslant 0 \Leftrightarrow b^2 \geqslant c$ и $c^2 - b \geqslant 0 \Leftrightarrow c^2 \geqslant b$. Кроме того, по теореме Виета, произведение корней первого уравнения равно c, а произведение корней второго уравнения равно b. Из условия следует, что $bc = 1$. Подставим $b = \dfrac{1}{c}$ в каждое из полученных неравенств. Учитывая, что $b > 0$ и $c > 0$, получим, что $c \leqslant 1$ и $c \geqslant 1$ соответственно, то есть, $c = 1$, значит, и $b = 1$.

Отметим, что при найденных значениях b и c каждое из данных уравнений имеет вид $x^2 + 2x + 1 = 0$, то есть, имеет один корень (с точки зрения применения теоремы Виета — два совпадающих корня).

2.2. *Ответ*: нет, не существуют.

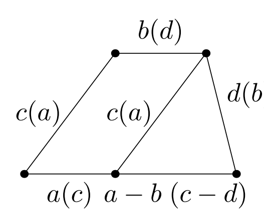


Рис. 114

Так как основания трапеции не могут быть равными, то без ограничения общности можно считать, что $a > b$ и $c > d$. Предположим, что первая трапеция построена (см. рис. 114). Проведем из ее вершины отрезок, параллельный соответствующей боковой стороне, который разбивает трапецию на параллелограмм и треугольник со сторонами c, d и $a - b$. В силу неравенства треугольника, $d + (a - b) > c \Leftrightarrow a - b > c - d$. Пусть существует и вторая трапеция, тогда, рассуждая аналогично, получим, что $b+(c-d) > a \Leftrightarrow c-d > a-b$. Полученное противоречие показывает, что две трапеции, удовлетворяющие условию, составить нельзя.

2.3. *Ответ*: нет, не существует.

Преобразуем: $n^{2004}-1 = (n^{2002})^2-1 = (n^{2002}-1)(n^{2002}+1)$. Предположим, что данное число является степенью двойки, тогда каждый из двух полученных множителей также является степенью двойки, причем эти множители отличаются на 2. Это возможно только в одном случае, если $n^{2004}-1 = 2$, а $n^{2004}+1 = 4$, но таких натуральных n не существует.

3.1. *Ответ*: 4.

Заметим, что $a = x+\frac{1}{x} = x+\frac{xyz}{x} = x+yz$. Аналогично, $b = y+zx$ и $c = z+xy$. Тогда $a^2 = x^2+2xyz+y^2z^2 = x^2+y^2z^2+2$; $b^2 = y^2+z^2x^2+2$; $c^2 = z^2+x^2y^2+2$; $abc = (x+yz)(y+zx)(z+xy) = xyz+x^2y^2z^2+x^2y^2+$ $+y^2z^2+x^2z^2+xy^3z+xyz^3+x^3yz = 2+x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2+x^2+y^2+z^2$. Следовательно, $a^2+b^2+c^2-abc = 4$.

3.2. *Ответ*: $0,5d$.

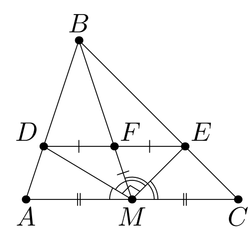


Рис. 115

По свойству биссектрисы из треугольников AMB и CMB (см. рис. 115) получим, что $\frac{AD}{BD} = \frac{AM}{BM}$ и $\frac{CE}{BE} = \frac{CM}{BM}$. По условию, $AM = CM$, значит, $\frac{AD}{BD} = \frac{CE}{BE}$, следовательно, $DE \parallel AC$ (по теореме, обратной теореме Фалеса, для угла ABC или же из подобия треугольников DBE и ABC). Тогда F — середина отрезка DE. Так как MD и ME — биссектрисы смежных углов, то треугольник DME — прямоугольный. Его медиана MF, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы DE.

3.3. *Ответ*: 199.

Отмеченные вначале сто точек образуют, помимо прочих, 99 отрезков с концами в соседних точках. Середины этих отрезков не могли быть отмечены ранее, поэтому меньше, чем 99 точек к уже отмеченным ста точкам добавиться не могут. Покажем, что 199 точек получиться могло. Пусть отмеченные сначала 100 точек расположены на координатной прямой так, что имеют координаты 1, 2, 3, ..., 99, 100. Координата середины отрезка AB вычисляется по формуле $\frac{x_A+x_B}{2}$, поэтому середина любого отрезка с концами в этих точках имеет либо целую, либо полуцелую координату x такую, что $1 \leqslant x \leqslant 100$. Таких значений x ровно 199.

4.1. Заметим, что если $n \neq \pm 1$, то $\dfrac{1}{n^2-1} = \dfrac{1}{(n-1)(n+1)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}\right)$. Тогда $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{15} + \ldots + \dfrac{1}{2004^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{3}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5}\right) + \ldots + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2003} - \dfrac{1}{2005}\right) = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2004} - \dfrac{1}{2005}\right) < \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{4}$, что и требовалось доказать.

4.2. *Ответ*: да, существует.

Рассмотрим, например, равнобедренный прямоугольный треугольник ABC (см. рис. 116а). Возможны различные способы доказательства того, что он удовлетворяет условию.

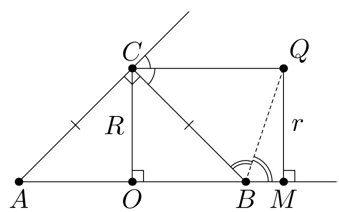


Рис. 116а

Первый способ. Середина O гипотенузы AB треугольника является центром описанной около него окружности, а ее радиус $R = CO$, причем CO является также и высотой треугольника. Центр Q окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AC и AB, является точкой пересечения биссектрис внешних углов B и C треугольника. Так как биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна его основанию, то $CQ \parallel AB$. Расстояние QM от точки Q до прямой AB равно радиусу r вневписанной окружности и равно CO.

Второй способ. Пусть a, b и c — длины сторон треугольника ABC (см. рис. 116б), тогда радиус описанной окружности $R = \dfrac{1}{2}c$. Рассмотрим вневписанную окружность с центром Q и радиусом r, касающуюся стороны BC. Если B_1 и C_1 — точки ее касания с продолжениями сторон AC и AB, то из равенства касательных, проведенных к окружности из одной точки, следует, что $AB_1 = AC + CA_1 = AC_1 = AB + BA_1$, откуда $AB_1 =$

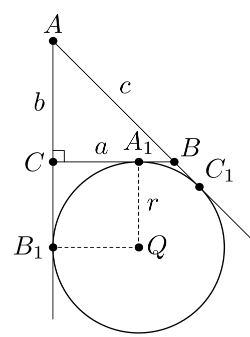


Рис. 116б

$= AC_1 = p = \dfrac{a+b+c}{2}$. Кроме того, так как в нашем примере $\angle B_1CB = 90^\circ$, то QA_1CB_1 — квадрат, поэтому $CB_1 = r$. Таким образом, $r = p - b = \dfrac{a+b+c}{2} - b = \dfrac{1}{2}\,c$, поскольку мы рассматриваем треугольник, в котором $a = b$.

Существуют и другие примеры, в том числе не равнобедренных и не прямоугольных треугольников, удовлетворяющие условию, но построить их существенно сложнее.

4.3. *Ответ*: нет, не могут.

Предположим, что все цифры полученного числа различны, тогда это цифры $0, 1, 2, \ldots, 9$, взятые по одному разу. Сумма этих цифр равна 45, то есть, полученное десятизначное число делится на 9. Простое число, которое возвели в четвертую степень, очевидно, не равно трем, поэтому не делится на 3. Следовательно, и десятизначное число не делится на 3, а значит не делится и на 9. Таким образом, оно имеет в своей записи хотя бы две одинаковые цифры.

5.1. *Ответ*: нет, не существуют.

Первый способ. Так как все коэффициенты данных уравнений — положительные числа, то неотрицательных корней эти уравнения иметь не могут. Пусть число x_0 является общим корнем данных уравнений, тогда $x_0^4 + bx_0 + c = 0$ и $x_0^4 + ax_0 + d = 0$ — верные числовые равенства. Вычтем из одного равенства другое, тогда $(b-a)\,x_0 + (c-d) = 0$ — также верное числовое равенство. Следовательно, $x_0 = \dfrac{d-c}{b-a} > 0$. Полученное противоречие показывает, что общих корней данные уравнения не имеют.

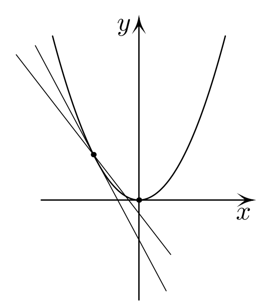


Рис. 117

Второй способ. Используем графические соображения. Запишем данные уравнения в виде $x^4 = -bx - c$ и $x^4 = -ax - d$. Уравнения имеют общий корень тогда и только тогда, когда графики линейных функций $y = -bx - c$ и $y = -ax - d$ пересекают график функции $y = x^4$ в одной и той же точке. С одной стороны, так как все коэффициенты в формулах, задающих линейные функции, отрицательны, то эта точка должна лежать во II координатной четверти (см. рис. 117). С другой стороны, ее абсцисса является решением уравнения $-bx - c = -ax - d$, то есть $x = \dfrac{d-c}{b-a} > 0$. Получено противоречие.

5.2. *Ответ*: 30°.

Проведем в данном квадрате диагональ AC (см. рис. 118). Из условия следует, что $\angle EKC = \angle AKB = 60^\circ$, значит $\angle AEC = 45^\circ = \frac{1}{2}\angle ABC$. Поэтому, если провести окружность с центром в точке B и радиусом $R = BA = BC$, то точка E будет лежать на этой окружности. Следовательно, $BE = BC$, то есть, треугольник BEC — равнобедренный с углом 30° при вершине.

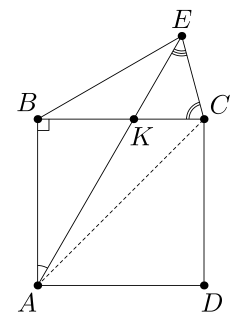


Рис. 118

Отметим, что задачу также можно решить «обратным ходом», то есть, сначала угадать ответ, а затем с помощью подсчета величин углов доказать, что данная конструкция — «жесткая».

5.3. *Ответ*: 1430 способами.

Предположим, что на окружности последовательно отмечено $2n$ точек: A_1, A_2, A_3, A_4, ..., A_{2n-1}, A_{2n}. Пусть x_n — количество способов провести n непересекающихся хорд. Заметим, что любая хорда, удовлетворяющая условию, должна быть проведена так, чтобы по обе стороны от нее располагалось четное количество данных точек. При этом, если какая-то хорда зафиксирована, то группы точек с одной и с другой стороны от нее можно рассматривать независимо, и решать задачу отдельно для каждой группы. Тогда количество способов провести $n-1$ хорду равно произведению количества способов провести хорды в каждой из образовавшихся групп точек.

Будем последовательно фиксировать хорды A_1A_2, A_1A_4, A_1A_6, ..., A_1A_{2n}. Тогда число x_n будет складываться из количества способов провести оставшиеся хорды в каждом из этих n случаев, то есть $x_n = x_{n-1} + x_1x_{n-2} + x_2x_{n-3} + x_3x_{n-4} + \ldots + x_{n-2}x_1 + x_{n-1}$. Заметим, что ни один из способов расстановки хорд мы не подсчитали дважды, так как в каждом из случаев можно провести только одну хорду с концом A_1. Итак, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ (это можно было заметить и без общей формулы), $x_3 = 5$, $x_4 = 14$, $x_5 = 42$, $x_6 = 132$, $x_7 = 429$, $x_8 = 1430$.

Числа, полученные в процессе решения задачи, называются числами Каталана. Их общая формула: $x_n = \dfrac{1}{2n+1}\,C_{2n+1}^{n}$, *где* C_{2n+1}^{n} — *количество сочетаний из* $2n+1$ *по* n, *то есть, количество способов выбрать* n *предметов из* $2n+1$. *Более подробно о числах Каталана — см., например, Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник «Конкретная математика» или Н.Б. Алфутова, А.В. Устинов «Алгебра и теория чисел».*

2005/2006 учебный год

1.1. *Ответ*: 68.

Так как $x+y+x^2y+xy^2 = x+y+xy(x+y) = (x+y)(xy+1) = 24$, то, используя условие $x+y=5$, получим, что $xy = 3,8$. Далее можно действовать по разному:

Первый способ. $x^3+y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 125 - 3\cdot 3,8\cdot 5 = 68$.

Второй способ. $x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2) = (x+y)((x+y)^2-3xy) = 5(25-3\cdot 3,8) = 68$.

1.2. *Ответ*: 90°.

Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — медианы треугольника ABC, пересекающиеся в точке G, и $AA_1 = 1,5BC$ (см. рис. 119).

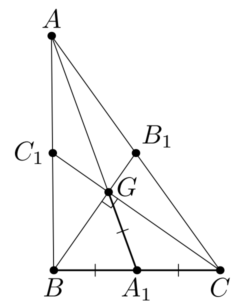


Рис. 119

По свойству медиан треугольника получим, что $GA_1 = \frac{1}{3}AA_1 = \frac{1}{2}BC$. Таким образом, в треугольнике BGC медиана GA_1 равна половине стороны BC, к которой она проведена. Следовательно, этот треугольник — прямоугольный с прямым углом G, то есть медианы BB_1 и CC_1 пересекаются под прямым углом.

1.3. *Ответ*: нет, нельзя.

Пусть такие числа a, b и c существуют, причём $c = ab$. Тогда произведение последних цифр чисел a и b оканчивается на ту же цифру, что и число c. Это произведение может быть равно одному из чисел: $7\cdot 7$; $7\cdot 3$; $7\cdot 2$; $3\cdot 3$; $3\cdot 2$ или $2\cdot 2$. Ни в одном из этих случаев оно не оканчивается цифрой 7, 3 или 2.

2.1. *Ответ*: $\frac{1}{p}$ и $\frac{p}{2}$.

Заметим, что дискриминанты указанных уравнений одинаковы: $D = b^2 - 200$, поэтому, независимо от значения b, если первое уравнение имеет корни, то и второе также имеет корни. Далее можно действовать различными способами.

Первый способ. Из условия следует, что выполняется числовое равенство: $5p^2 + bp + 10 = 0$, где $p \neq 0$. Разделив его почленно на p^2, получим: $5 + \frac{b}{p} + \frac{10}{p^2} = 0 \Leftrightarrow 10\left(\frac{1}{p}\right)^2 + b\frac{1}{p} + 5 = 0$, то есть, число $\frac{1}{p}$ является корнем второго уравнения. Другой корень второго уравнения находим по теореме Виета $\frac{1}{2} : \frac{1}{p} = \frac{p}{2}$ или $1 : \frac{2}{p} = \frac{p}{2}$.

Отметим, что можно также использовать, что оба корня второго уравнения являются числами, обратными корням первого.

Второй способ. Запишем корни каждого из уравнений по формулам: 1) $\dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{10}$; 2) $\dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{20}$. Следовательно, если один из корней первого уравнения равен p, то соответствующий корень второго уравнения равен $\dfrac{p}{2}$. Другой корень находим по теореме Виета.

2.2. Пусть точка P лежит внутри треугольника ABC, серединами сторон которого являются точки A_1, B_1 и C_1 (см. рис. 120). Введем следующие обозначения: $BA_1 = CA_1 = \dfrac{a}{2}$; $CB_1 = AB_1 = \dfrac{b}{2}$; $AC_1 = BC_1 = \dfrac{c}{2}$; $PA_1 = x$; $PB_1 = y$; $PC_1 = z$.

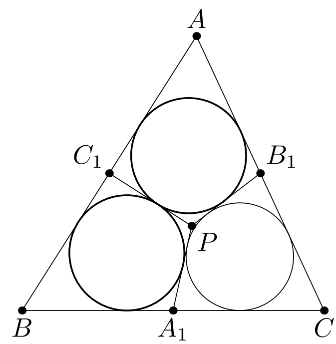


Рис. 120

Если для выпуклых четырехугольников PB_1AC_1 и PC_1BA_1 выполняется условие задачи, то в каждом из них равны суммы противолежащих сторон, то есть: $\begin{cases} \dfrac{c}{2} + y = \dfrac{b}{2} + z, \\ \dfrac{c}{2} + x = \dfrac{a}{2} + z. \end{cases}$ Вычитая из первого равенства второе, получим: $y - x = \dfrac{b}{2} - \dfrac{a}{2} \Leftrightarrow y + \dfrac{a}{2} = x + \dfrac{b}{2}$. Последнее равенство есть достаточное условие того, что в выпуклый четырехугольник A_1CB_1P можно вписать окружность.

2.3. *Ответ*: у десяти детей.

Каждый ребёнок имеет хотя бы две одинаковые карточки, поэтому может сложить слово МАМА (20 детей) или слово НЯНЯ (30 детей). Ни один ребёнок не может сложить оба слова, так как для этого требуется четыре карточки. Следовательно, всего детей $20 + 30 = 50$. Сложить слово МАНЯ (40 детей) могут те и только те дети, у которых имеются карточки обоих видов. Значит, количество детей, у которых все три карточки одинаковые, равно $50 - 40 = 10$.

3.1. *Первый способ.* Сложим почленно первое и второе равенства. После приведения подобных слагаемых получим: $a^2 + b^2 = 2ab \Leftrightarrow (a - b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$. Аналогично, сложив первое и третье равенства, получим, что $a = c$.

Второй способ. Сложим три данных равенства почленно. После приведения подобных слагаемых получим: $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac = 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow a = b = c$.

3.2. *Ответ*: семь.

Если многоугольник можно разрезать на параллелограммы, то, выбрав произвольную его сторону, можно выстроить некоторую цепочку параллелограммов, начинающуюся на этой стороне и оканчивающуюся на какой-то другой из сторон (см. рис. 121а). Это означает, что в многоугольниках такого типа стороны распадаются на группы отрезков, параллельных некоторым прямым.

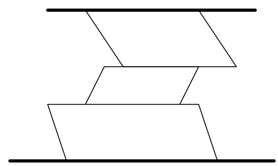


Рис. 121а

Поскольку треугольник не имеет параллельных сторон, разбить его на параллелограммы нельзя. Предположим, что пятиугольник можно разбить на параллелограммы, тогда для каждой стороны найдется параллельная ей сторона, следовательно, у пятиугольника есть пара параллельных сторон и тройка параллельных сторон (см. рис. 121б). Последнее невозможно, так как среди любых трех сторон пятиугольника найдутся две соседние. Пример семиугольника, разрезанного на параллелограммы, привести несложно (см. рис. 121в).

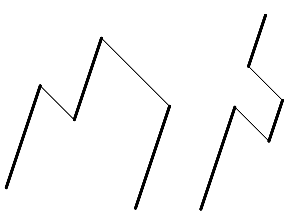


Рис. 121б

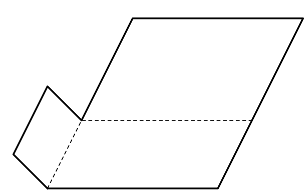


Рис. 121в

3.3. *Ответ*: $82,5°$ или $97,5°$.

Минутная стрелка за полчаса поворачивается на $180°$, то есть меняет направление на противоположное. За это время часовая стрелка поворачивается на $\frac{1}{24}$ полного оборота, то есть на $360° : 24 = 15°$. Схематически изобразим возможные положения минутной и часовой стрелок (OM и OC — начальные положения, OM' и OC' — через полчаса). Возможны два случая: в начальный момент часовая стрелка «опережала» минутную (см. рис. 122а) или часовая «отставала» от минутной (см. рис. 122б).

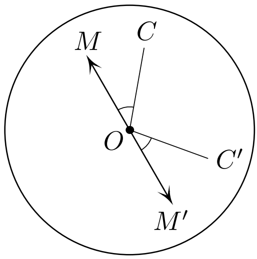


Рис. 122а

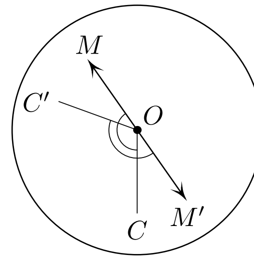


Рис. 122б

Пусть α — искомый угол между стрелками. Для каждого случая составим уравнение: а) $2\alpha + 15° = 180° \Leftrightarrow \alpha = 82,5°$; б) $2\alpha - 15° = 180° \Leftrightarrow \alpha = 97,5°$.

4.1. *Ответ*: отрезок AB, где $A(-3;-2)$; $B(1;1)$ (см. рис. 123).

Пусть $M(x;y)$, $A(-3;-2)$, $B(1;1)$. Тогда $AM = \sqrt{(x+3)^2 + (y+2)^2}$; $BM = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$. Так как $AB = \sqrt{(1+3)^2 + (1+2)^2} = 5$, то условие задачи равносильно тому, что $AM + BM = AB$. Таким образом, точка M удовлетворяет условию тогда и только тогда, когда она принадлежит отрезку AB.

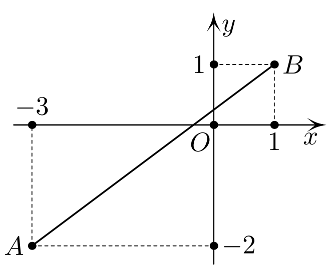


Рис. 123

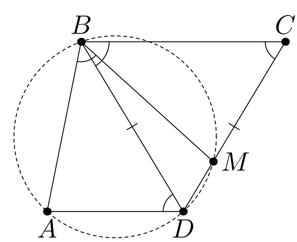


Рис. 124

4.2. *Ответ*: $BM = 2b\cos\alpha$.

Первый способ. Из равенства $\angle CBD = \angle BCD$ следует, что $BD = CD$ (см. рис. 124). Так как основания трапеции AD и BC параллельны, то $\angle ADB = \angle CBD = \alpha$. Кроме того, если $\angle ABM = \angle CBD$, то $\angle ABD = \angle MBC$. Следовательно, треугольники ABD и MBC подобны (по двум углам). Тогда $\dfrac{BM}{AB} = \dfrac{BC}{BD} \Rightarrow BM = b\dfrac{BC}{BD}$. Учитывая, что треугольник BDC равнобедренный, получим: $\dfrac{\frac{1}{2}BC}{BD} = \cos\alpha$, поэтому, $BM = 2b\cos\alpha$.

Второй способ. Рассмотрим четырехугольник $ABMD$ (см. рис. 124). Так как $\angle ADM + \angle ABM = \angle ADM + \angle BCD = 180^\circ$, то этот четырехугольник — вписанный. Заметим, что окружность радиуса R, описанная около $ABMD$, совпадает с окружностями, описанными около треугольников ABD и MBD. Кроме того, из треугольника BDC получим, что $\angle BDM = 180^\circ - 2\alpha$. По следствию из теоремы синусов $\dfrac{AB}{\sin\alpha} = \dfrac{BM}{\sin(180^\circ - 2\alpha)}$, то есть, $BM = \dfrac{b\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = 2b\cos\alpha$.

4.3. *Ответ*: на третью степень числа 3.

Обозначим данную сумму S_n. Заметим, что $S_7 = 5913$ и это число делится на $3^3 = 27$. При меньших значениях n или при $n = 8$ S_n не делится на 27: $S_1 = 1$; $S_2 = 3$; $S_3 = 9$; $S_4 = 33$; $S_5 = 153$; $S_6 = 873$; $S_8 = 46233$. Если $k \geqslant 9$, то $k!$ включает в себя произведение $3 \cdot 6 \cdot 9$, поэтому делится на 27. Таким образом, при $n \geqslant 9$ получим: $S_n = S_7 + 8! + 9! + 10! + \ldots$ В этой сумме одно из слагаемых не делится на 27, а остальные — делятся, поэтому такая сумма не делится на 27.

5.1. *Ответ*: да, существуют.

Рассмотрим три квадратных трехчлена, сумма которых, увеличенная на 1, тождественно равна нулю. Например, трехчлены: $f(x) = x^2 + x - 1$; $g(x) = x^2 + 2x - 1$; $h(x) = -2x^2 - 3x + 1$. Для этих трехчленов выполняется условие задачи, так как: 1) $f(x) + g(x) + 1 = -h(x)$; 2) $f(x) + h(x) + 1 = -g(x)$; 3) $g(x) + h(x) + 1 = -f(x)$.

5.2. *Ответ*: внутренние точки дуги окружности с концами в точках A и B и центром в точке C пересечения касательных к большей окружности в точках A и B (см. рис. 125а).

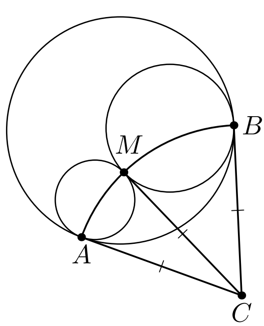


Рис. 125а

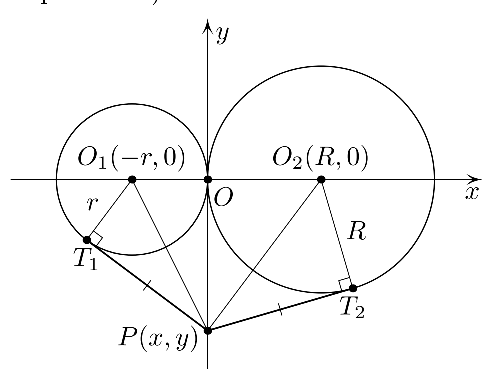


Рис. 125б

Лемма. Пусть две окружности касаются в некоторой точке O. Тогда геометрическое место точек P таких, что отрезки касательных, проведенных из этих точек к обеим окружностям, равны, есть общая касательная к этим окружностям, проходящая через точку O.

Доказательство. 1) Если точка P лежит на общей касательной, то она обладает требуемым свойством, поскольку отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны.

2) Пусть точка P обладает данным свойством. Докажем, что она лежит на общей касательной. Для этого, например, введем систему координат так, чтобы центры окружностей лежали на оси x, а общая касательная окружностей совпала с осью y (см. рис. 125б). Тогда $PT_1^2 = PT_2^2 \Leftrightarrow PO_1^2 - r^2 = PO_2^2 - R^2 \Leftrightarrow (x+r)^2 + y^2 - r^2 = (x-R)^2 + y^2 - r^2 \Leftrightarrow 2x(R+r) = 0 \Rightarrow x = 0$, то есть точка P лежит на оси y.

Отметим, что доказанная лемма справедлива и в случае внутреннего касания двух окружностей. Более того, аналогичное ГМТ можно рассмотреть и в случае непересекающихся неконцентрических окружностей. В этом случае искомым ГМТ также является прямая, перпендикулярная линии центров данных окружностей. Такая прямая называется **радикальной осью** *двух окружностей.*

Пусть даны три окружности, попарно касающиеся друг друга (внутренним или внешним образом). Из доказанной леммы следует, что точка пересечения любых двух общих касательных (проведенных через общие точки касания) также будет принадлежать и третьей касательной, то есть все три общие касательные пересекаются в одной точке.

Теперь решим данную задачу.

1) Рассмотрим точку M, принадлежащую искомому ГМТ (см. рис. 125а). Проведем общие касательные к окружностям в точках A и B, и отметим точку C их пересечения. Через эту же точку пройдет и касательная, проведенная из точки M. Так как $CA = CB = CM$, то M — внутренняя точка дуги AB окружности с центром C и радиусом CA.

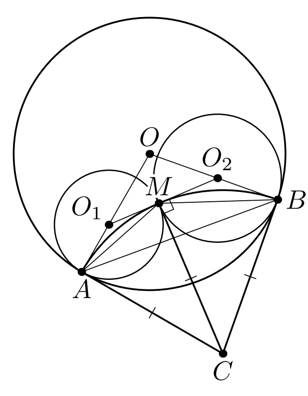


Рис. 125в

2) Рассмотрим какую-нибудь внутреннюю точку M указанной дуги (см. рис. 125в). Проведем через точку M отрезок, перпендикулярный CM до пересечения с радиусами OA и OB большей окружности в точках O_1 и O_2 соответственно. Очевидно, что эти пересечения и будут являться центрами двух окружностей, касающихся друг друга в точке M, и исходной — в точках A и B.

Доказать, что искомое ГМТ является дугой некоторой окружности, можно и другим способом. Пусть $\angle AOB = \alpha$, *тогда* $\angle AMB = 180^\circ - (\angle AMO_1 + \angle BMO_2) = (90^\circ - \angle AMO_1) + (90^\circ - \angle BMO_2) = \frac{1}{2}\angle AO_1M + \frac{1}{2}\angle BO_2M = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle OO_1O_2) + \frac{1}{2}(180^\circ - \angle OO_2O_1) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle OO_1O_2 + \angle OO_2O_1) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$ (*см. рис.* 125*в*). *Найденный угол* AMB *не зависит от выбора окружностей, поэтому точка* M *принадлежит ГМТ, из которых отрезок* AB *виден под углом* $\varphi = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$.

5.3. *Ответ*: нет, невозможна.

Пусть такая компания возможна и состоит из n человек. Тогда в ней имеется $\frac{n(n-1)}{2}$ пар, у каждой из которых список общих друзей состоит из 4 человек. Если записать эти списки подряд, то получим список, в котором $2n(n-1)$ позиций. При этом каждый участник компании является общим другом для каждой пары своих друзей (всего таких пар — $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$) и ни для какой другой пары. Поэтому он упомянут в списке 45 раз, и всего в списке $45n$ позиций. Таким образом, должно выполняться равенство $2n(n-1) = 45n$, что невозможно ни при каких натуральных значениях n.

10 класс

1995/1996 учебный год

К$_1$. *Ответ*: 0,1.

Данная функция определена при любом действительном x. Если $x = 0$, то $y = 0$. Если $x \neq 0$, то $\dfrac{x^2}{x^4+25} = \dfrac{1}{x^2+\dfrac{25}{x^2}} = \dfrac{0{,}2}{\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{5}{x^2}} \leqslant 0{,}1$, так как $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{5}{x^2} \geqslant 2$, причем равенство достигается при $x = \pm\sqrt{5}$. Следовательно, наибольшее значение функции равно 0,1.

К$_2$. *Ответ*: $1:2$.

Пусть в трапеции $ABCD$: $AB = CD$, $AC \perp CD$, $AC \cap BD = O$ и AC — биссектриса $\angle BAD$ (см. рис. 126). Тогда, $\angle BCA = \angle CAD = \angle CAB = \alpha$, значит $BC = BA$; $\angle BAD = 2\alpha$; $\angle CDA = 90^\circ - \alpha$. Так как трапеция равнобокая, то $\angle BAD = \angle CDA$, то есть, $90^\circ - \alpha = 2\alpha$, откуда $\alpha = 30^\circ$. Из треугольника ACD получим, что $AD = 2CD = 2BC$, а так как треугольники AOD и COB — подобны, то $\dfrac{BO}{OD} = \dfrac{CO}{OA} = \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{1}{2}$.

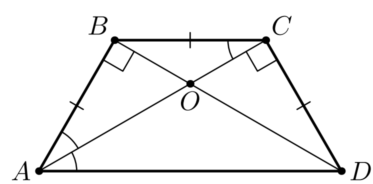


Рис. 126

К$_3$. *Ответ*: $\left(1\dfrac{2}{3}; 3\dfrac{1}{3}\right)$; $(-2; -4)$.

Произведя почленное сложение и вычитание данных уравнений, получим систему, равносильную данной:

$$\begin{cases} (x+y)^2 + (x+y) = 30, \\ (x^2-y^2) + (x-y) = -10. \end{cases}$$

Тогда из первого уравнения получим, что $x + y = 5$ или $x + y = -6$. Приведя второе уравнение к виду: $(x-y)(x+y+1) = -10$, получим, что:

$$\begin{cases} x+y = 5, \\ x-y = -\dfrac{5}{3} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x+y = -6, \\ x-y = 2. \end{cases}$$

Применив для каждой из систем почленное сложение и вычитание уравнений, получаем ответ.

У$_1$. *Ответ*: нет, не верно.

Например, при $a = -99$ значение выражения равно 2.

У$_2$. *Ответ*: большую площадь занимает красный цвет.

Вследствие симметрии, достаточно рассмотреть полукруг, и сравнить три площади: равнобедренного треугольника с углом $120°$ при вершине, сектора с углом $60°$ и сегмента. Площадь сектора больше, чем площадь рассматриваемого треугольника, так как этот треугольник равновелик треугольнику с углом $60°$, являющемуся частью сектора. Так как площадь сектора с углом $60°$ в два раза меньше площади сектора с углом $120°$, от которого рассматриваемый треугольник составляет меньшую часть, а сегмент — большую часть, то наибольшую площадь имеет сегмент.

У$_3$. *Ответ*: 1.

Сумма коэффициентов многочлена $P(x)$ равна значению этого многочлена при $x = 1$.

I$_1$. *Ответ*: точка $M(-1; 3)$.

$A = x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 \geqslant 3$, причем равенство достигается только при $x = -1$, $B = y^2 - 6y + 11 = (y-3)^2 + 2 \geqslant 2$, причем равенство достигается только при $y = 3$. Следовательно, $A \cdot B \geqslant 6$, то есть, решением уравнения является ровно одна пара чисел: $(-1; 3)$.

I$_2$. Пусть K и L — точки, в которых шар ударился о борта AB и BC соответственно (см. рис. 127). Так как угол «падения» равен углу «отражения», то K и L должны принадлежать отрезку $M'N'$, где M' и N' — образы точек M и N при осевой симметрии относительно прямых AB и BC соответственно.

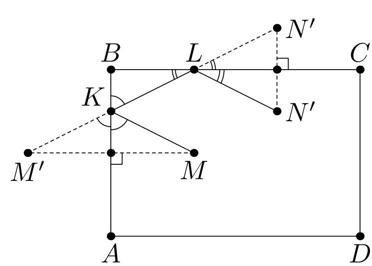


Рис. 127

I$_3$. *Ответ*: -1; 0.

Так как $|\sin 2x| \leqslant 1$, то $1 - 2\sin 2x \leqslant 3$, следовательно, $x^2 < 3$. Поскольку $x \in \mathbb{Z}$, то $x = 0$ или $x = \pm 1$. Непосредственной проверкой получаем ответ.

II$_1$. Для доказательства воспользуемся неравенством $x^2 + 1 \geqslant 2x$ и неравенством для суммы взаимно-обратных величин:

$$\frac{(a+1)^2}{b} + \frac{(b+1)^2}{a} \geqslant \frac{4a}{b} + \frac{4b}{a} = 4\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geqslant 8.$$

II$_2$. *Ответ*: 90°, 45° и 45°.

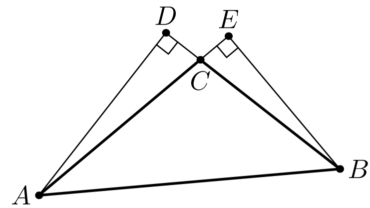


Рис. 128

Пусть AD и BE — высоты треугольника ABC (см. рис. 128). Рассмотрев прямоугольные треугольники ADC и BEC, получим, что $AC \geqslant AD$ и $BC \geqslant BE$. По условию, $AD \geqslant BC$ и $BE \geqslant AC$, следовательно, $AC \geqslant AD \geqslant BC \geqslant BE \geqslant AC$, что означает, что знаки неравенства надо везде заменить на равенства. Получаем, что треугольник ABC — равнобедренный ($AC = BC$) и высоты AD и BE совпадают со сторонами AC и BC соответственно, то есть ABC — прямоугольный.

II$_3$. Нет, нельзя.

Действительно, «ход козла» не меняет цвета клетки (в шахматной раскраске), на которой стоит фигура.

III$_1$. Из условия следует, что $n = \dfrac{p_1 + p_2}{2}$, следовательно $p_1 < n < p_2$. Так как p_1 и p_2 — последовательные простые числа, то промежуток (p_1, p_2) не содержит простых чисел, то есть n — составное, что и требовалось доказать.

III$_2$. Используя для каждой из окружностей (см. рис. 129) свойство секущей, получим, что $NC^2 = NA \cdot NB = ND^2$. Следовательно, $NC = ND$, что и требовалось доказать.

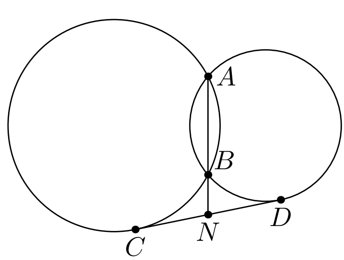


Рис. 129

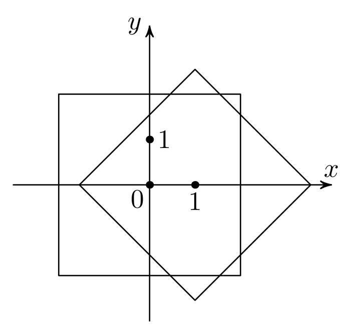


Рис. 130

III$_3$. *Ответ*: 6.

Графиком первого уравнения является граница квадрата с центром в начале координат и длиной стороны — 4 единичных отрезка. График второго уравнения — граница квадрата с центром $(1;0)$, длина стороны которого меняется в зависимости от значения параметра a. Построив эти графики в одной системе координат, находим расположение, при котором количество точек пересечения графиков — наибольшее (см. рис. 130).

1997/1998 учебный год

1.1. *Ответ*: 4.

Действительно, $x=4$ — корень уравнения, что проверяется подстановкой. Других решений нет, так как в левой части уравнения записана возрастающая функция.

1.2. *Ответ*: нет, неверно.

Рассмотрим, например, два треугольника: один со сторонами 3, 4 и 5, а другой со сторонами 6, 8 и 10. Это неравные прямоугольные треугольники, в которых равные (прямые) углы лежат против неравных сторон.

Возможны и другие примеры, в частности, любая пара подобных, но не равных треугольников.

1.3. *Ответ*: 2^2.

$n^2+4n-33=n(n+4)-33$. Так как числа n и $n+4$ имеют одинаковую четность, то исходное выражение делится на 2 тогда и только тогда, когда n — нечетное число. Подставив $n=2k-1$, получаем, что данное выражение равно $(2k-1)(2k+3)-33=4k^2+4k-36=4(k^2+4k-36)=$ $=4(k^2+k-9)=4(k(k+1)-9)$, а значит, оно делится на $4=2^2$. Так как k и $k+1$ — числа одной четности, то $k(k+1)-9$ – нечетное число. Поэтому на бóльшую степень двойки исходное выражение делиться не может.

2.1. *Ответ*: $x\in(-\infty,-2]\cup[1;3]$.

Обозначим: $a=x^2+x-2$, $b=3-x$. Тогда $a+b=x^2+1$. Так как $a+b>0$ и, по условию, $|a+b|=|a|+|b|$, то $a\geqslant 0$ и $b\geqslant 0$. Следовательно, данное уравнение равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2+x-2\geqslant 0,\\ 3-x\geqslant 0,\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\geqslant 1,\\ x\leqslant -2,\end{array}\right.\\ x\leqslant 3.\end{cases}$$

2.2. *Ответ*: $S_{A_1B_1C_1}=1$.

Проведем отрезки AB_1, BC_1 и CA_1 (см. рис. 131). Используя свойство медианы треугольника, получим, что все семь образовавшихся треугольников имеют равные площади. Следовательно, площадь треугольника $A_1B_1C_1$ равна 1.

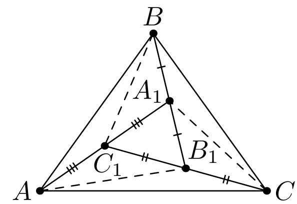


Рис. 131

2.3. *Ответ*: нет, нельзя.

Предположим, что такую сетку сплести можно, тогда количество узлов (пересечений двух ниток) равно $\frac{37 \cdot 5}{2}$, а это число не является целым.

3.1. *Ответ*: решений нет.

Используя неравенство для взаимно обратных величин, получим:

$$\frac{|x|}{2} + \frac{1}{2|x|} = \frac{1}{2}\left(|x| + \frac{1}{|x|}\right) \geqslant \frac{1}{2} \cdot 2 = 1,$$

причем равенство достигается только при $|x| = 1$.

Пусть $x > 0$, тогда $\sin^2 x + \frac{x}{2} + \frac{1}{2x} > 1$ (неравенство строгое, поскольку $\sin^2 1 > 0$). Поскольку $\cos^2 3x \leqslant 1$, то уравнение не имеет положительных корней.

Пусть $x < 0$, тогда $\frac{x}{2} + \frac{1}{2x} \leqslant -1$. Используя неравенство $\sin^2 x \leqslant 1$, верное при любых значениях x, получим: $\sin^2 x + \frac{x}{2} + \frac{1}{2x} < 0$ (неравенство строгое, поскольку $\sin^2(-1) < 1$). Поскольку $\cos^2 3x \geqslant 0$ при любых значениях x, то и в этом случае уравнение не имеет корней.

3.2. *Ответ*: $BD = 8$.

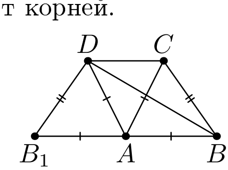


Рис. 132

Продолжим отрезок BA за точку A на расстояние, равное BA (см. рис. 132). Полученную точку B_1 соединим с точкой D. Рассмотрим треугольник BDB_1. Поскольку $AB = AD = AB_1$, то $\angle BDB_1 = 90^\circ$. Так как $\angle CAB = \angle DCA = \angle CDA = \angle DAB_1$, то треугольники CAB и DAB_1 равны, откуда $B_1D = BC = 6$, $BB_1 = 10$. Тогда из прямоугольного треугольника BDB_1 получим, что $BD = 8$.

3.3. *Ответ*: -18; -10; -6; -4; -3; -1; 0; 2; 6; 14.

$\frac{a^3 - 8}{a + 2} = a^2 - 2a + 4 - \frac{16}{a + 2}$. Значит, для того, чтобы данное выражение принимало целые значения, необходимо и достаточно, чтобы $(a+2)$ являлось делителем 16. Следовательно, знаменатель дроби принимает значения: ± 16; ± 8; ± 4; ± 2; ± 1.

4.1. *Ответ*: см. рис. 133.

При $x = 3$ и $x = -3$ данное неравенство верно для всех y. Если $|x| > 3$, то $y \geqslant \dfrac{1}{x+3}$; если $-3 < x < 3$, то $y \leqslant \dfrac{1}{x+3}$.

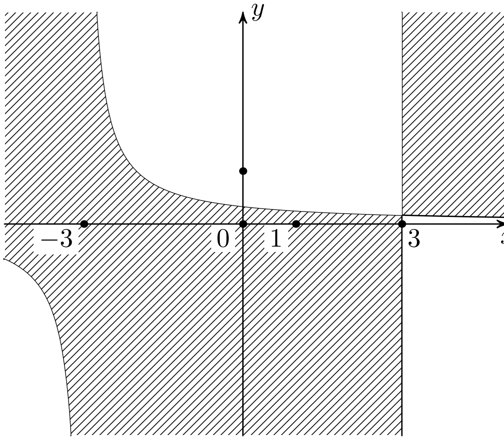


Рис. 133

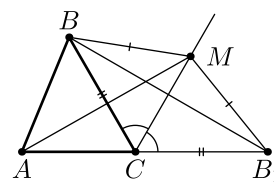


Рис. 134

4.2. Рассмотрим осевую симметрию относительно прямой CM (см. рис. 134); B_1 — образ точки B. Тогда $B_1C = BC$, $B_1M = BM$. Используя неравенство треугольника, получим, что $AM + MB = AM + MB_1 > AB_1 = AC + CB_1 = AC + CB$.

4.3. Занумеруем столбцы в таблице слева направо цифрами от 1 до 8. Тогда представим числа первой строки в виде суммы 0 и номера столбца; числа, записанные во второй строке, в виде суммы 8 и номера столбца; числа в третьей строке в виде суммы 16 и номера столбца и так далее. Поскольку в каждой строке и в каждом столбце закрашено ровно по одной клетке, то, (независимо от того, какие клетки были закрашены) сумма восьми чисел набора равна:

$$(0 + 8 + 16 + \ldots + 56) + (1 + 2 + \ldots + 8) = 260.$$

5.1. *Ответ*: да, существует.

При сложении данных уравнений получим:

$$x + y = x^2 + y^2 + x + y - 167 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 167.$$

Любая пара (x, y), являющаяся решением каждого из данных уравнений, является и решением полученного, значит, все общие точки графиков этих уравнений лежат на окружности радиуса $\sqrt{167}$ с центром в начале координат.

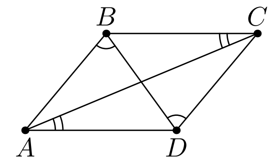


Рис. 135а

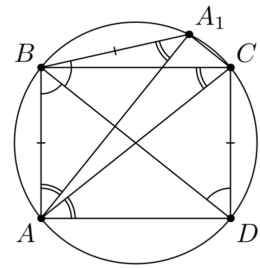


Рис. 135б

5.2. *Ответ*: четыре угла по $90°$ или два угла по $80°$ и два угла по $100°$.

Из условия следует, что $ABCD$ — параллелограмм. Рассмотрим осевую симметрию относительно прямой BD. Образом точки A является точка A_1. Тогда $\angle A_1BD = \angle ABD = 50°$, а $BA_1 = BA$. Возможны два случая:

1) Точка A_1 совпала с точкой C (см. рис. 135а). Тогда $ABCD$ — ромб с углами $100°$ и $80°$.

2) Точка A_1 не совпала с точкой C (см. рис. 135б). В этом случае рассмотрим окружность, описанную около треугольника ABC. Поскольку $\angle BA_1A = \angle BAA_1 = 90° - \angle ABD = 40° = \angle BCA$, то точка A_1 лежит на этой окружности. Так как BA_1CD — равнобокая трапеция, то этой окружности принадлежит и точка D. Следовательно, $\angle BDA = \angle BCA = 40°$, то есть, $ABCD$ — прямоугольник, и каждый его угол равен $90°$.

5.3. Рассмотрим разность:

$$\sin 2 + \cos 2 + 2(\sin 1 - \cos 1) - 1 =$$
$$= 2\sin 1 \cdot \cos 1 + \cos^2 1 - \sin^2 1 + 2\sin 1 - 2\cos 1 - \sin^2 1 - \cos^2 1 =$$
$$= 2\sin 1(\cos 1 - \sin 1) - 2(\cos 1 - \sin 1) = 2(\cos 1 - \sin 1)(\sin 1 - 1) > 0,$$

так как $\cos 1 < \sin 1$, а $\sin 1 < 1$. Следовательно, левая часть данного неравенства больше правой, что и требовалось доказать.

1998/1999 учебный год

1.1. *Ответ*: при $b < 4$ уравнение корней не имеет, а при $b \geqslant 4$ — имеет один корень.

Приведем уравнение к виду: $\sqrt{3x-5} + \sqrt{3x+11} = b$. Функция, стоящая в левой части уравнения, определена на $\left[1\frac{2}{3}; +\infty\right)$ и возрастает на этом промежутке, так как является суммой возрастающих функций. Значит, свое наименьшее значение, равное 4, она принимает при $x = \frac{5}{3}$. Кроме того, эта функция непрерывна, следовательно, областью значения левой части уравнения является $[4; +\infty)$, причем каждое свое значение эта функция принимает только при одном значении аргумента.

1.2. *Ответ*: два угла по 75° и два угла по 105°.

Пусть точки O, M, N и K являются серединами отрезков AD, AB, CD и MN соответственно (см. рис. 136). Тогда, трапеция $AMND$ вписана в данную окружность, следовательно, эта трапеция — равнобокая. Так как MN — средняя линия трапеции $ABCD$, то и трапеция $ABCD$ — равнобокая. K — середина MN, значит, $\angle OKM = 90^\circ$, то есть треугольник OMK является прямоугольным. $OK = 0{,}5R = 0{,}5OM$. Значит, $\angle KMO = 30^\circ = \angle AOM$, а так как $OA = OM$, то $\angle MAO = 75^\circ$. Отсюда получаем, что $\angle A = \angle D = 75^\circ$; $\angle B = \angle C = 105^\circ$.

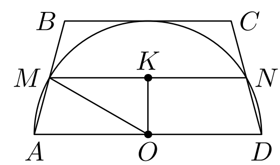


Рис. 136

1.3. *Ответ*: $(\sin 5; \sin 4)$.

Поскольку левая часть неравенства есть произведение $(x-\sin 5)(x-\sin 4)$, то решениями неравенства являются все x, лежащие между числами $\sin 5$ и $\sin 4$. Так как $\sin 5 - \sin 4 = 2\sin(0{,}5)\cdot\cos(4{,}5) > 0$, то $\sin 5 < x < \sin 4$.

2.1. *Ответ*: $2\sin\dfrac{\alpha}{2} = -\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}$.

Так как $\dfrac{3\pi}{2} < \dfrac{19}{11}\pi < 2\pi$, то при $\alpha = \dfrac{19}{11}\pi$ выполняются неравенства: $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$, $\sin\dfrac{\alpha}{2} > 0$. Следовательно, $1+\sin\alpha < 1-\sin\alpha$, значит, $\sqrt{1+\sin\alpha} < \sqrt{1-\sin\alpha}$. Возведем в квадрат обе части данного равенства. Получим следствие из него:

$$4\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1+\sin\alpha \pm 2\sqrt{1+\sin\alpha}\cdot\sqrt{1-\sin\alpha} + 1 - \sin\alpha \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2(1-\cos\alpha) = 2 \pm 2\cos\alpha,$$

значит, в исходном равенстве должны быть разные знаки перед радикалами в правой части. Учитывая, что $\sin\dfrac{\alpha}{2} > 0$ и $\sqrt{1+\sin\alpha} < \sqrt{1-\sin\alpha}$, получаем окончательный ответ: $2\sin\dfrac{\alpha}{2} = -\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}$.

2.2. *Ответ*: если треугольник ABC не является прямоугольным, то таких точек шесть; если ABC — прямоугольный, то таких точек три.

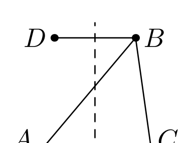


Рис. 137а

Если четырехугольник имеет ось симметрии, то образом любой его вершины при симметрии относительно этой оси является вершина этого же четырехугольника. Следовательно, ось симметрии должна либо являться серединным перпендикуляром к стороне данного треугольника, либо содержать его сторону (см. рис. 137а, б). Поэтому, если данный треугольник не является прямоугольным, то имеем шесть различных вариантов расположения точки D.

Если данный треугольник — прямоугольный, то возможно только три различных варианта расположения точки D, так как при симметриях относительно прямых, содержащих катеты, не образуется четырехугольников, а образы вершин A и B при симметриях относительно серединных перпендикуляров к катетам совпадают (см. рис. 137в–д).

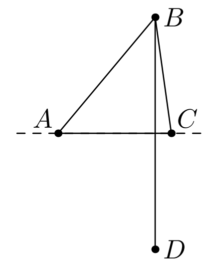


Рис. 137б

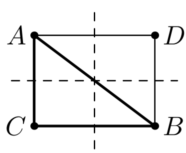


Рис. 137в

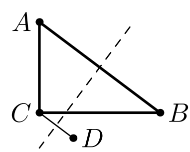


Рис. 137г

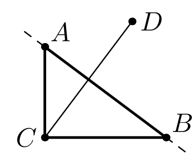


Рис. 137д

2.3. Рассмотрим и преобразуем выражение: $\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\left(b-\frac{a}{2}\right)^2=$ $=\frac{5}{4}(a^2+b^2)>a^2+b^2$. То есть, при каждом выполнении указанной в условии операции, сумма квадратов всех данных чисел увеличивается, значит, мы уже не сможем получить исходный набор чисел, что и требовалось доказать.

3.1. *Первый способ.* Так как данные параболы имеют противоположные коэффициенты при x^2, то существует точка C, при симметрии относительно которой одна из парабол переходит в другую. $\Big($Точка $A(0;4)$ — «вершина» параболы $y=x^2+4$; $B(1;1)$ — «вершина» параболы $y=-(x-1)^2+1$. Поэтому, $C\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)\Big)$. Общие касательные двух парабол являются неподвижными прямыми этой центральной симметрии, то есть проходят через точку C (для обоснования этого факта достаточно рассмотреть K — точку касания на одной из парабол и прямую KC, которая пройдет через точку касания другой параболы, так как при любом движении образ пересечения фигур равен пересечению их образов). Четырехугольник с вершинами в точках касания является параллелограммом, так как диагонали этого четырехугольника точкой C их пересечения делятся пополам.

Второй способ. Пусть прямая касается параболы $y = x^2 + 4$ в точке с абсциссой a, тогда уравнение этой касательной: $y = 2ax - a^2 + 4$. Пусть прямая касается параболы $y = -x^2 + 2x$ в точке с абсциссой b, тогда уравнение этой касательной: $y = (-2b + 2)x + b^2$. Так как эта прямая одновременно является касательной к двум параболам, то можно составить систему уравнений: $\begin{cases} 2a = -2b + 2, \\ -a^2 + 4 = b^2. \end{cases}$ Ее решения: $\begin{cases} a = \dfrac{1+\sqrt{7}}{2}, \\ b = \dfrac{1-\sqrt{7}}{2}, \end{cases}$ или $\begin{cases} a = \dfrac{1-\sqrt{7}}{2}, \\ b = \dfrac{1+\sqrt{7}}{2}. \end{cases}$ Координаты вершин четырехугольника: $\left(\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}; \dfrac{12+\sqrt{7}}{2}\right)$; $\left(\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}; \dfrac{12-\sqrt{7}}{2}\right)$; $\left(\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}; -\dfrac{2+\sqrt{7}}{2}\right)$; $\left(\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}; \dfrac{-2+\sqrt{7}}{2}\right)$. Координаты середины отрезка с координатами концов $\left(\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}; \dfrac{12+\sqrt{7}}{2}\right)$ и $\left(\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}; -\dfrac{2+\sqrt{7}}{2}\right)$ — $\left(\dfrac{1}{2}; 2\dfrac{1}{2}\right)$. Координаты середины отрезка с координатами концов $\left(\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}; \dfrac{12-\sqrt{7}}{2}\right)$ и $\left(\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}; \dfrac{-2+\sqrt{7}}{2}\right)$ — $\left(\dfrac{1}{2}; 2\dfrac{1}{2}\right)$. Следовательно, четырехугольник с вершинами в точках касания — параллелограмм.

3.2. *Ответ*: наибольшее значение площади треугольника равно 15.

Площадь треугольника можно вычислять по формуле: $S = 0{,}5ab \times \sin\gamma$. Следовательно, $S \leqslant 0{,}5ab \leqslant 0{,}5 \cdot 5 \cdot 6 = 15$, так как наибольшее возможное значение a равно 5, а наибольшее значение b равно 6. Наибольшее значение площади достигается в случае, когда данный треугольник — прямоугольный с катетами 5 и 6. Это возможно, так как гипотенуза такого прямоугольного треугольника имеет длину $\sqrt{61}$, а $7 < \sqrt{61} < 8$.

3.3. Пусть первоначально вдоль окружности расположено n чисел. Искомое число обозначим $f(n)$. Тогда, по условию, имеем рекуррентные соотношения: $f(2n) = 2f(n) - 1$ и $f(2n+1) = 2f(n) + 1$. Применяя эти соотношения, последовательно получим:

$$\begin{array}{rrr} f(1511) = 2f(755) + 1; & f(188) = 2f(94) - 1; & f(11) = 2f(5) + 1; \\ f(755) = 2f(377) + 1; & f(94) = 2f(47) - 1; & f(5) = 2f(2) + 1; \\ f(377) = 2f(188) + 1; & f(47) = 2f(23) + 1; & f(2) = 2f(1) - 1. \\ & f(23) = 2f(11) + 1; & \end{array}$$

Очевидно, что $f(1)=1$. Далее, $f(2)=1$; $f(5)=3$; ...; $f(1511)=975$.

Используя метод математической индукции, можно доказать, что если вдоль окружности расположено n чисел, причем $n=2^k+m$, где $m<2k$, то при последовательном вычеркивании каждого второго числа последним останется число $2m+1$. Поскольку $1511=1024+$ $+487=210+487$, то в нашем случае останется число $2\cdot487+1=975$.

4.1. Преобразуем:

$$\begin{gathered}(b-c)(bc-a^2)=b^2c-a^2b-bc^2+a^2c;\\(c-a)(ca-b^2)=ac^2-a^2c-b^2c+ab^2;\\(a-b)(ab-c^2)=a^2b-ab^2-ac^2+bc^2;\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}&(b-c)(bc-a^2)+(c-a)(ca-b^2)+(a-b)(ab-c^2)=\\&\quad=b^2c-a^2b-bc^2+a^2c+ac^2-a^2c-b^2c+\\&\quad+ab^2+a^2b-ab^2-ac^2+bc^2=0.\end{aligned}$$

Сумма трех чисел равна нулю, то есть ни при каких действительных a, b и c они не могут быть одновременно положительными, что и требовалось доказать.

4.2. *Ответ*: $\sqrt{38}$.

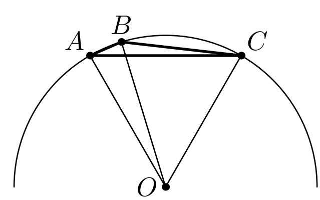


Рис. 138

Независимо от способов чередования сторон данного многоугольника найдутся две стороны разной длины, имеющие общую вершину, например, AB и BC (см. рис. 138). Тогда точки A, B и C однозначно определяют окружность. Следовательно, искомый радиус окружности не зависит от порядка расположения остальных сторон многоугольника. Тогда, соединив центр окружности с каждой вершиной двенадцатиугольника, имеем два типа равнобедренных треугольников: с основаниями $\sqrt{2}$ и $\sqrt{24}$ соответственно. Сумма углов, противолежащих основаниям, у двух треугольников разных типов равна $360^\circ : 6 = 60^\circ$, поэтому, применяя свойство вписанного угла, получим: $\angle ABC = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle AOC = 150^\circ$. В треугольнике ABC сторона AC равна $\sqrt{38}$ (по теореме косинусов). Треугольник AOC — равносторонний, поэтому радиус окружности равен $\sqrt{38}$.

4.3. *Ответ*: двумя нулями.

При $n=1$ $x=10$; при $n=2$ $x=30$; при $n=3$ $x=100$. Докажем, что число x не может оканчиваться тремя нулями. Для этого достаточно показать, что это число не кратно 8. Если $n > 2$, то каждое из чисел 2^n и 4^n кратно 8, число $1^n = 1$ дает при делении на 8 остаток 1, а число 3^n при делении на 8 дает либо остаток 3 (при нечетных n), либо остаток 1 (при четных n). Следовательно, число x при делении на 8 имеет остаток 4 или остаток 2, то есть тремя нулями оканчиваться не может.

5.1. *Ответ*: $1 < \cos A + \cos B + \cos C \leqslant 1{,}5$.

Нижнюю оценку можно доказать при помощи тригонометрических преобразований, например, так:

$$\begin{aligned}\cos A + \cos B + \cos C - 1 &= \cos A + \cos B + \cos(180^\circ - (A+B)) - 1 = \\ &= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - (1 + \cos(A+B)) = \\ &= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\cos^2\frac{A+B}{2} = \\ &= 2\cos\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right) > 0.\end{aligned}$$

Последнее неравенство верно, так как оба сомножителя положительны. Это следует из того, что $-90^\circ < \dfrac{A-B}{2} < 90^\circ$, $0^\circ < \dfrac{A+B}{2} < 90^\circ$ и $\left|\dfrac{A+B}{2}\right| > \left|\dfrac{A-B}{2}\right|$.

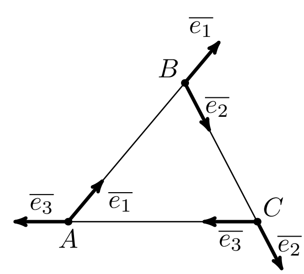


Рис. 139

Для оценки «сверху» значения данного выражения рассмотрим: $\overline{e_1} \parallel \overline{AB}$; $\overline{e_2} \parallel \overline{BC}$; $\overline{e_3} \parallel \overline{AC}$, где $|\overline{e_1}| = |\overline{e_2}| = |\overline{e_3}| = 1$. Тогда, $\angle(\overline{e_1}, \overline{e_2}) = 180^\circ - B$; $\angle(\overline{e_2}, \overline{e_3}) = 180^\circ - C$; $\angle(\overline{e_1}, \overline{e_3}) = 180^\circ - A$ (см. рис. 139). Очевидно, что $(\overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{e_3})^2 \geqslant 0$. Но

$$\begin{aligned}(\overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{e_3})^2 &= \overline{e_1}^2 + \overline{e_2}^2 + \overline{e_3}^2 + 2\overline{e_1}\cdot\overline{e_2} + 2\overline{e_2}\cdot\overline{e_3} + 2\overline{e_1}\cdot\overline{e_3} = \\ &= 1 + 1 + 1 + 2\cos(180^\circ - B) + 2\cos(180^\circ - A) + 2\cos(180^\circ - C) = \\ &= 3 - 2(\cos A + \cos B + \cos C).\end{aligned}$$

Далее, $3 - 2(\cos A + \cos B + \cos C) \geqslant 0 \Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C \leqslant 1{,}5$.

5.2. *Первый способ* (см. рис. 140а). Применив для каждого из треугольников PBC, PAC и PAB свойство биссектрисы угла треугольника, получим: $\dfrac{AC_1}{BC_1} = \dfrac{PA}{PB}$; $\dfrac{BA_1}{CA_1} = \dfrac{PB}{PC}$; $\dfrac{CB_1}{AB_1} = \dfrac{PC}{PA}$. Следовательно, $\dfrac{BA_1}{CA_1}\cdot\dfrac{CB_1}{AB_1}\cdot\dfrac{AC_1}{BC_1} = \dfrac{PB}{PC}\cdot\dfrac{PC}{PA}\cdot\dfrac{PA}{PB} = 1$, то есть по теореме Чевы прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, что и требовалось доказать.

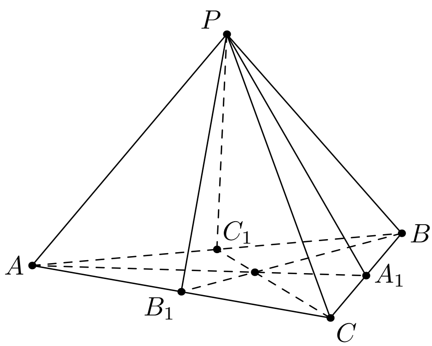


Рис. 140а

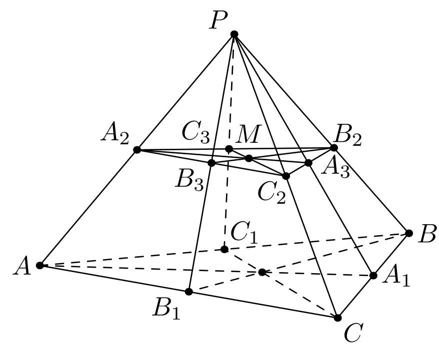


Рис. 140б

Второй способ. Проведем плоскость, пересекающую лучи PA, PB и PC в точках A_2, B_2 и C_2 соответственно, так что $PA_2 = PB_2 = PC_2$ (см. рис. 140б). Получим тетраэдр $PA_2B_2C_2$: лучи PA_1, PB_1 и PC_1 пересекают ребра его основания в серединах — точках A_3, B_3 и C_3 соответственно. Тогда прямые A_2A_3, B_2B_3 и C_2C_3 содержат медианы треугольника $A_2B_2C_2$, следовательно, пересекаются в некоторой точке M. Прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются образами прямых A_2A_3, B_2B_3 и C_2C_3 при центральном проектировании с центром P плоскости $A_2B_2C_2$ на плоскость ABC. Поскольку такое отображение является взаимно–однозначным, то образом точки M является точка пересечения прямых AA_1, BB_1 и CC_1 (если f — взаимно–однозначное соответствие, то образ пересечения равен пересечению образов). Следовательно, AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, что и требовалось доказать.

5.3. *Ответ*: 1511 раз.

$$\left[\sqrt{2n} + \frac{1}{2}\right] = 1511 \Leftrightarrow 1511 \leqslant \sqrt{2n} + \frac{1}{2} < 1512 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1510{,}5 \leqslant \sqrt{2n} < 1511{,}5 \Leftrightarrow 2281610{,}25 \leqslant 2n < 2284632{,}25 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1140805{,}125 \leqslant n < 1142316{,}125.$$

Учитывая, что n — натуральное число, имеем: $1140805 < n \leqslant \leqslant 1142316$. Количество натуральных решений этого неравенства равно: $1142316 - 1140805 = 1511$.

1999/2000 учебный год

1.1. *Ответ*: нет, не может.

Это можно доказать несколькими способами.

Первый способ. Пусть график имеет указанный вид, тогда существует прямая, пересекающая его в четырех точках. Пусть ее уравнение имеет вид $y = mx + n$, тогда уравнение $\dfrac{ax^2 + bx + c}{kx + l} = mx + n$ имеет четыре корня, но его следствием является квадратное уравнение, то есть, оно не может иметь более двух корней. Получено противоречие, следовательно, график данной функции не может иметь такой вид.

Второй способ. Формулу, задающую данную функцию, можно привести к виду: $y = px + \dfrac{qx + t}{kx + l}$. При $k \neq 0$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{qx + t}{kx + l} = \dfrac{q}{k}$, поэтому прямая $y = px + \dfrac{q}{k}$ должна являться асимптотой графика данной функции как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$, что не соответствует виду графика данной функции.

1.2. *Ответ*: $\dfrac{2r}{\operatorname{tg}\alpha}$.

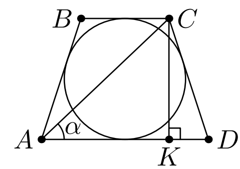


Рис. 141

Пусть $ABCD$ — данная трапеция (см. рис. 141). Проведем диагональ AC и высоту CK. Тогда, $\angle CAD = \alpha$, $CK = 2r$, следовательно, $AK = \dfrac{2r}{\operatorname{tg}\alpha}$. Используя свойство описанного четырехугольника, легко доказать, что в данной трапеции боковая сторона равна средней линии, которая, в свою очередь, равна AK.

1.3. *Ответ*: 4.

Существует всего пять различных видов многоугольников, состоящих из четырех клеток. Четыре возможных варианта приведены на рис. 142 а–г. Еще один вид получить указанным разрезанием невозможно.

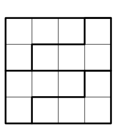


Рис. 142а

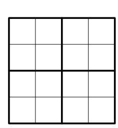


Рис. 142б

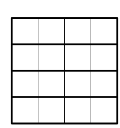


Рис. 142в

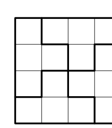


Рис. 142г

2.1. Да, например, функция $f(x) = 2x + \sin x$ является возрастающей, а функция $g(x) = -2x$ — убывающей. Их сумма: $y = \sin x$ — периодическая функция. Несложно также привести какой-либо пример, задав функции графически.

2.2. *Ответ*: 9.

Проведем отрезок $KM \parallel CN$ (см. рис. 143). M — середина BN, то есть, KM — средняя линия треугольника BCN. Следовательно, $KM = \frac{1}{2}CN = \frac{1}{3}AB$. Треугольники KTM и ATB подобны, $\frac{KT}{AT} = \frac{KM}{AB} = \frac{1}{3}$.

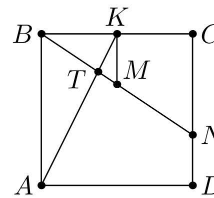


Рис. 143

Пусть $S_{BTA} = S$, тогда $S_{BTK} = \frac{1}{3}S$, а $S_{BCN} = \frac{4}{3}S_{ABK} = \frac{16}{9}S$. Так как $S_{BCN} = S_{BTK} + S_{KCNT}$, то составляем уравнение: $\frac{16}{9}S = \frac{1}{3}S + 13$. Решая это уравнение, получим, что $S = 9$.

2.3. *Ответ*: $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Для любых x выполняются неравенства: $\cos^5 x \leqslant \cos^2 x$ и $\sin^3 x \leqslant \sin^2 x$. Следовательно,

$$5\cos^5 x + 3\sin^3 x \leqslant 5\cos^2 x + 3\sin^2 x = \\ = 2\cos^2 x + 3(\cos^2 x + \sin^2 x) = 2\cos^2 x + 3 \leqslant 5.$$

Таким образом, решениями исходного уравнения являются значения x, при которых все неравенства можно заменить на равенства. Это возможно тогда и только тогда, когда $\cos x = 1$, а $\sin x = 0$.

3.1. *Ответ*: $\left(8; 4; 2; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

Из первого уравнения системы следует, что $(x; y; z; u; s; t)$ — геометрическая прогрессия. Из второго уравнения получим, что ее знаменатель равен 0,5. Тогда, используя формулу для вычисления суммы первых членов геометрической прогрессии, приводим третье уравнение системы к виду:

$$\frac{x\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{63}{4}.$$

Получим, что $x = 8$ и последовательно вычислим значения остальных переменных: $y = 4$, $z = 2$, $u = 1$, $s = \frac{1}{2}$, $t = \frac{1}{4}$.

3.2. Предположим, что такой тетраэдр $ABCD$ существует (см. рис. 144). Тогда, для его ребер должны выполняться четыре неравенства:

$$AB + BC + AC > DA + DB + DC;$$
$$AB + BD + AD > CA + CB + CD;$$
$$AC + CD + AD > BA + BC + BD;$$
$$BC + CD + BD > AB + AC + AD.$$

Сложив их почленно, получаем ложное неравенство:

$$2AB + 2BC + 2AC + 2AD + 2BD + 2CD >$$
$$> 2AB + 2BC + 2AC + 2AD + 2BD + 2CD.$$

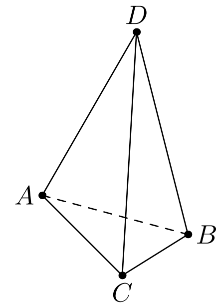


Рис. 144

Получено противоречие, следовательно, тетраэдра, удовлетворяющего условию задачи, не существует.

3.3. *Ответ*: 16.

Предположим, что мы составили набор, удовлетворяющий условию и он содержит наибольшее возможное количество чисел. Докажем, что в этом наборе нет составных чисел. Пусть это не так, тогда рассмотрим любое составное число из этого набора и разложим его на простые множители. Эти множители не могут уже находится в рассматриваемом наборе (иначе не будет выполняться условие), поэтому, если мы заменим рассматриваемое составное число на эти множители, то количество чисел в наборе увеличится. Получили противоречие, то есть составных чисел в искомом наборе нет.

Следовательно, искомым является набор, состоящий из 1 и всех простых чисел, меньших пятидесяти. Таких чисел ровно 16.

4.1. *Ответ*: ± 1.

Первый способ. Перенесем выражение $2001x^{2000}$ в левую часть уравнения, и, сложим его с x^{2000}. Разобьем получившееся выражение $-2000x^{2000}$ на 1000 одинаковых слагаемых, каждое из которых равно $-2x^{2000}$, и сгруппируем:

$$(1-2x^{2000}+x^{4000})+(x^2-2x^{2000}+x^{3998})+\ldots+(x^{1998}-2x^{2000}+x^{2002}) = 0.$$

Применив формулу квадрата разности, получаем:

$$(1 - x^{2000})^2 + (x - x^{1999})^2 + \ldots + (x^{999} - x^{1001})^2 = 0.$$

Следовательно, каждое из слагаемых в левой части уравнения равно нулю, то есть, одновременно выполняются равенства: $x^{2000} = 1$; $x^{1999} = x$; $\ldots$; $x^{1001} = x^{999}$. Получаем ответ: $x = \pm 1$.

Второй способ. Проверив, что $x = 0$ не является корнем данного уравнения, разделим обе его части на x^{2000}. Получим:

$$\frac{1}{x^{2000}} + \frac{1}{x^{1998}} + \ldots + 1 + \ldots + x^{1998} + x^{2000} = 2001.$$

Левая часть этого уравнения является суммой единицы и тысячи слагаемых вида $x^{2n} + \frac{1}{x^{2n}}$, где $n = 1, 2, \ldots, 1000$. Воспользуемся тем, что сумма взаимно обратных положительных чисел не меньше двух, и получим, что левая часть уравнения принимает значения, бóльшие или равные 2001, причем равенство возможно тогда и только тогда, когда $x^{2n} = 1$ при всех указанных значениях n, то есть, $x = \pm 1$.

4.2. *Первый способ.* Рассмотрим поворот вокруг точки B на 90° против часовой стрелки. Образом точки M будет являться точка A, а образом точки K — точка L, лежащая на прямой CB, причем $LB = BC$ (см. рис. 145). Так как BE — средняя линия треугольника ALC, то $BE \parallel AL$. AL — образ прямой KM при данном повороте, значит, $AL \perp KM$, следовательно, и $BE \perp KM$, то есть, продолжение BE будет являться высотой треугольника BMK, что и требовалось доказать.

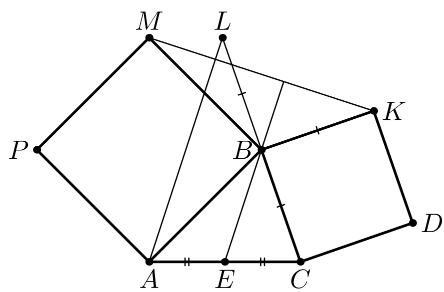


Рис. 145

Второй способ. Рассмотрим векторы: $\overline{BA} = \overline{a}$, $\overline{BC} = \overline{b}$, $\overline{BM} = \overline{x}$, $\overline{BK} = \overline{y}$. Тогда, $\overline{BE} = \frac{1}{2}(\overline{a} + \overline{b})$. Так как $\overline{x} \perp \overline{a}$, $\overline{y} \perp \overline{b}$, то $\overline{a} \cdot \overline{x} = \overline{b} \cdot \overline{y} = 0$. Кроме того, эти четыре вектора имеют одинаковые модули и $\angle(\overline{a}, \overline{y}) = 90^\circ + \angle ABC = \angle(\overline{b}, \overline{x})$, следовательно, $\overline{a} \cdot \overline{y} = \overline{b} \cdot \overline{x}$. Используя полученные факты, имеем:

$$\overline{BE} \cdot \overline{MK} = \frac{1}{2}(\overline{a} + \overline{b})(\overline{y} - \overline{x}) = \frac{1}{2}(\overline{a} \cdot \overline{y} + \overline{b} \cdot \overline{y} - \overline{a} \cdot \overline{x} - \overline{b} \cdot \overline{x}) = 0,$$

то есть, $\overline{BE} \perp \overline{MK}$, а это и означает, что прямая BE содержит высоту треугольника BMK, что и требовалось доказать.

4.3. *Ответ*: $(1; 1)$; $(2; 31)$; $(3; 29)$.

Выразим y через x и разделим числитель на знаменатель:

$$y = \frac{12x^2 - 4x - 9}{2x - 3} = 6x + 7 + \frac{12}{2x - 3}.$$

Для того, чтобы значение y было натуральным, необходимо, чтобы $2x-3$ являлось делителем числа 12. Учитывая, что при натуральных значениях x это выражение принимает только нечетные значения, достаточно рассмотреть значения $2x-3$, равные ± 1 или ± 3; решаем соответствующие уравнения, отбираем натуральные корни и для них проверяем, является ли значение y натуральным.

5.1. *Ответ*: нет, не существует.

Воспользуемся формулой

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(k\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

которую можно вывести, умножив и разделив левую часть на $2\sin\frac{\alpha}{2}$ или доказать, используя метод математической индукции. При любых значениях α числитель этой дроби не превосходит единицы. При $\alpha = \sqrt{2}$ знаменатель этой дроби принимает значение, большее, чем 0,5, так как $\sin\frac{\sqrt{2}}{2} > \sin\frac{\pi}{6}$. Следовательно, данная сумма меньше двух.

5.2. *Ответ*: да, существует.

В любом правильном пятиугольнике точки попарного пересечения диагоналей обладают указанным свойством. Рассмотрим правильный пятиугольник F и его невырожденную параллельную проекцию F_1 на некоторую плоскость, не параллельную плоскости пятиугольника F. Так как параллельное проектирование сохраняет параллельность прямых и отношение длин параллельных отрезков, то F_1 — пятиугольник, удовлетворяющий условию задачи.

5.3. *Ответ*: корней нет.

Первый способ. Перенесем слагаемое -1 в левую часть уравнения и рассмотрим функцию $f(x) = x^2+[x]+1$. Тогда, данное уравнение можно записать в виде: $f(f(x)) = x$. Так как $\forall x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $[x] \leqslant x < [x]+1$, то $f(x) > x$. Следовательно, $f(f(x)) > f(x) > x$, то есть, данное уравнение корней не имеет.

Заключительный вывод может быть получен и из других соображений. Справедливость равенства $f(f(x)) = x$ означает, что функцией, обратной к $f(x)$ является она сама. Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$, причем, из неравенства $f(x) > x$ следует, что график функции $f(x)$ должен располагаться выше этой прямой, значит, график обратной ей функции — ниже. Следовательно, совпасть эти два графика не могут.

Второй способ. Пусть $x^2+[x]+1 = y$, тогда, $y^2+[y] = x-1$. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} y^2 + [y] + 1 = x, \\ x^2 + [x] + 1 = y. \end{cases}$$

Ее следствием является уравнение $(y^2 - x^2) + ([y] - [x]) = x - y$. Пусть $x \geqslant y$, тогда, $x^2 \geqslant y^2$ и $[x] \geqslant [y]$, то есть, правая часть этого уравнения принимает неотрицательные значения, а левая часть — неположительные. Аналогичная ситуация возникает и в случае, когда $y \geqslant x$. Таким образом, равенство возможно только, если $x = y$. Следовательно, данное уравнение равносильно уравнению $x^2+[x]+1 = x$, которое не имеет решений, так как $\forall x \in \mathbb{R}$ верно неравенство $x < [x] + 1$.

2000/2001 учебный год

1.1. *Ответ*: если $b \geqslant a$, то b — наибольшее значение, a — наименьшее значение; если $b < a$, то a — наибольшее значение, b — наименьшее значение.

Первый способ. $g(x) = a\sin^2 x + b\cos^2 x = a + (b - a)\cos^2 x$. Так как $0 \leqslant \cos^2 x \leqslant 1$, то при $b \geqslant a$ выполняется неравенство $a \leqslant g(x) \leqslant b$; при $b < a$ выполняется неравенство $b \leqslant g(x) \leqslant a$.

Второй способ. $g(x) = a\sin^2 x + b\cos^2 x = 0,5a(1 - \cos 2x) + 0,5b(1 + {}$ ${}+ \cos 2x) = 0,5(a + b + (b - a)\cos 2x)$. Так как $-1 \leqslant \cos 2x \leqslant 1$, то при $b \geqslant a$ выполняется неравенство $a \leqslant g(x) \leqslant b$; при $b < a$ выполняется неравенство $b \leqslant g(x) \leqslant a$.

1.2. *Ответ*: $S = \dfrac{\pi R^2}{6}$.

Из равенства соответствующих дуг следует равенство хорд $AB = BC = CD$, значит, $BC \parallel AD$ (см. рис. 146). Следовательно, $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle OBC}$, значит, площадь искомой фигуры равна площади сектора OBC и составляет одну шестую часть от площади круга.

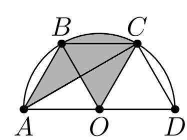


Рис. 146

1.3. *Ответ*: 1977.

Если десятичная запись числа x содержит не более трех цифр, то сумма этих цифр не превосходит 27. Следовательно, $x + S(x) < 2001$. Таким образом, x — четырехзначное число, первая цифра которого равна 1, то есть, $1 \leqslant S(x) \leqslant 28$, значит, $1973 \leqslant x \leqslant 2000$. Дальнейший поиск решения осуществляется перебором, который можно облегчить любым из следующих соображений:

1) число 2001 кратно трем, а числа x и $S(x)$ имеют одинаковые остатки от деления на 3, значит, x кратно трем.

2) Числа x и $S(x)$ имеют одинаковые остатки от деления на 9, число 2001 при делении на 9 дает остаток 3, значит, x и $S(x)$ при делении на 9 дают остаток 6, то есть, $x = 9n + 6$, где $n \in \mathbb{N}$.

2.1. *Ответ*: один корень.

Первый способ. Пусть квадратный трехчлен $P(x) = x^2+bx+c$ имеет дискриминант $D = b^2-4c > 0$. Тогда, $P(x)+P(x+\sqrt{D}) = (x^2+bx+c)+((x+\sqrt{D})^2+b(x+\sqrt{D})+c) = 2x^2+2(b+\sqrt{D})x+2c+b\sqrt{D}+D$. Упрощенный дискриминант нового квадратного трехчлена равен: $(b+\sqrt{D})^2-4c-$ $-2b\sqrt{D}-2D = b^2-4c-D = 0$. Следовательно, данное уравнение имеет один корень.

Второй способ. Если x_1 и x_2 — корни приведенного квадратного трехчлена ($x_1 > x_2$), то $x_1 - x_2 = \sqrt{D}$. Это следует из того, что $x_1 =$ $= \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2}$. Рассмотрим графики функций $P(x)$ и $P(x+$ $+\sqrt{D})$ в одной системе координат. Из сказанного выше следует, что они пересекаются на оси Ox в точке x_2 (см. рис. 147а). Следовательно, x_2 является корнем квадратного трехчлена $f(x) = P(x) + P(x+\sqrt{D})$.

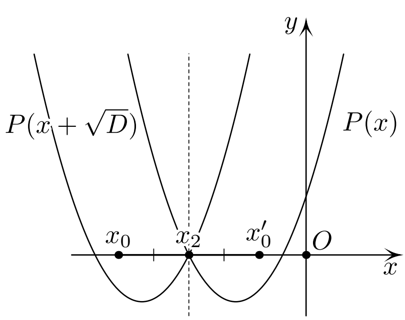


Рис. 147а

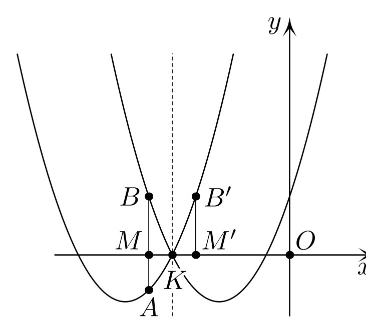


Рис. 147б

Полученная фигура симметрична относительно прямой $x = x_2$, следовательно, если $f(x)$ имеет корень x_0, отличный от x_2, то существует еще один корень x_0', симметричный x_0 относительно этой прямой. Но квадратный трехчлен трех корней он иметь не может.

Заключительный этап рассуждения можно было провести и по-другому: предположим, что существует корень $f(x)$, отличный от x_2. Тогда существует вертикальная прямая, пересекающая параболы в точках A и B, а ось Ox — в точке M так, что $AM = MB$ (см. рис. 147б). Рассмотрим точку B', симметричную B относительно прямой

$x = x_2$. Эта точка должна быть симметрична A относительно точки K, следовательно, A, K и B' должны лежать на одной прямой, что невозможно.

2.2. *Ответ*: 30°; 60°; 90°.

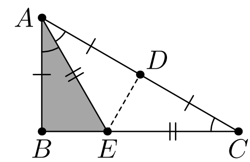


Рис. 148

Первый способ. Из условия следует, что $\angle ACE = \angle EAC = \angle EAB$ (см. рис. 148). Пусть D — середина AC. Тогда, ED — высота и медиана равнобедренного треугольника AEC. $\triangle ABE = \triangle ADE$ (по двум сторонам и углу между ними), следовательно, $\angle ABE = \angle ADE = 90°$, то есть, $\triangle ABC$ — прямоугольный. Так как $AB = 0,5AC$, то $\angle ACB = 30°$, $\angle BAC = 60°$.

Второй способ. Пусть $\angle ACE = \angle EAC = \angle EAB = \gamma$ (см. рис. 148). Тогда, $\angle ABC = 180° - 3\gamma$. В треугольнике ABC по теореме синусов: $\dfrac{AC}{\sin(180° - 3\gamma)} = \dfrac{AB}{\sin\gamma}$. Так как $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{2}{1}$, то $\sin 3\gamma = 2\sin\gamma$. Воспользуемся формулой тройного аргумента, и учтем, что искомый угол — острый: $3\sin\gamma - 4\sin^3\gamma = 2\sin\gamma \Rightarrow \sin\gamma = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \gamma = 30°$.

Возможны также другие аналитические решения, использующие свойство биссектрисы треугольника и подобие треугольников BAE и BCA.

2.3. *Ответ*: да, существуют. Например, 11, 12, 13, 14, 15, 16.

Рассмотрим числа: $n - 2$; $n - 1$; n; $n + 1$; $n + 2$; $n + 3$. Соседние числа натурального ряда взаимно просты, а числа, различающиеся на два, либо взаимно просты (если они нечетные), либо их наибольший общий делитель равен двум (если они четные). Следовательно, для того, чтобы описанная ситуация была возможна, необходимо, чтобы среди первых трех чисел было ровно одно нечетное, то есть, искомая последовательность должна начинаться с нечетного числа. Исходя из этих соображений, искомые числа можно подобрать. В частности, «наименьшей» среди таких последовательностей является такая: 11; 12; 13; 14; 15; 16. НОК$(11; 12; 13) = 11\cdot 12\cdot 13 = 1716$; НОК$(14; 15; 16) = 2\cdot 7\cdot 8\cdot 15 = 1680$.

Если НОК $(n-2; n-1; n) = (n-2)(n-1)n$; НОК $(n+1; n+2; n+3) = \dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)(n+3)$, *то все искомые значения* n *являются решениями неравенства* $(n-2)(n-1)n > \dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)(n+3)$.

3.1. *Ответ*: $a = -2$ или $a = 0$.

1) При $a = 0$ данное уравнение имеет единственное решение: $x = -2$, которое является целым.

2) При $a \neq 0$ уравнение является квадратным. Если $\dfrac{D}{4} = 1 - 2a^3 + 4a \geqslant 0$, то оно имеет корни x_1 и x_2 такие, что: $x_1 + x_2 = \dfrac{2}{a}$ и $x_1x_2 = 2a - \dfrac{4}{a}$. Если числа x_1 и x_2 — целые, то целыми являются также числа $\dfrac{2}{a}$ и $2a - \dfrac{4}{a}$. Если число $\dfrac{2}{a}$ — целое, то число $\dfrac{4}{a}$ — также целое, значит, целым является и число $2a$. Так как $\dfrac{2}{a} \cdot 2a = 4$, то $2a$ может принимать следующие значения: ± 4; ± 2 или ± 1, то есть, $a = \pm 0,5$ или $a = \pm 1$ или $a = \pm 2$. При $a = 2$, $a = -1$ и $a = -0,5$ данное уравнение не имеет решений $\left(\dfrac{D}{4} < 0\right)$. При $a = 1$ и $a = 0,5$ значения $\dfrac{D}{4}$ равны соответственно 3 и $\dfrac{11}{4}$, что не приводит к целым решениям. При $a = -2$ уравнение имеет целые корни: -2 и 1.

3.2. *Ответ*: $AD = \dfrac{c^2}{b}$.

Проведем диаметр AE (см. рис. 149). Пусть $\angle ABD = \alpha$. Тогда $\angle BAE = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \Rightarrow \angle BEA = \alpha$ ($\angle ABE$ — вписанный и опирается на диаметр, значит, $\angle ABE = 90^\circ$). Тогда $\angle ACB = \angle BEA = \alpha$ (вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу). Следовательно, $\triangle ABC$ и $\triangle ADB$ — подобны (по двум углам). Значит, $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow c^2 = b \cdot AD \Rightarrow AD = \dfrac{c^2}{b}$.

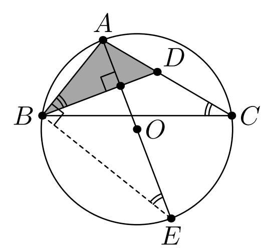


Рис. 149

3.3. *Ответ*: 6 рублей.

Из условия задачи следует, что кучку из 2^k камней можно разбить на кучки по одному камню не подвергаясь штрафу, а любую другую — нельзя (k — любое натуральное число). Следовательно, «оптимальная стратегия разбиения» состоит в том, что мы постепенно разбиваем исходную кучку камней на наименьшее возможное количество кучек, количество камней в которых является степенью числа 2. Это соответствует переводу числа 2001 в «двоичную» систему исчисления: $2001 = 1024+512+256+128+64+16+1$. Данная сумма содержит 7 слагаемых, значит потребуется ровно 6 разбиений, за которые придется платить штраф. Остальные разбиения не повлекут за собой оплаты штрафа.

4.1. *Ответ*: 1/3.

При $x = -\sqrt{2}$ получим: $2f(-\sqrt{2}) + f(1) = 1$. Для того, чтобы найти $f(1)$, рассмотрим данное соотношение при $x = 0$; ± 1. Тогда

$$\begin{cases} 2f(0)+f(-1)=1, \\ 2f(1)+f(0)=1, \\ 2f(-1)+f(0)=1. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим: $f(0) = f(1) = f(-1) = 1/3$. Значит, $f(-\sqrt{2}) = 1/3$.

4.2. *Ответ*: существуют.

Первый способ. Рассмотрим правильную пирамиду $ABCD$ с основанием BCD такую, что плоские углы при вершине A — тупые (см. рис. 150а). Пусть AO — высота пирамиды, тогда, чем меньше длина AO, тем величины углов BAC, CAD и DAB ближе к $120°$.

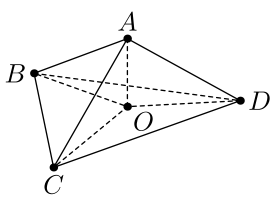


Рис. 150а

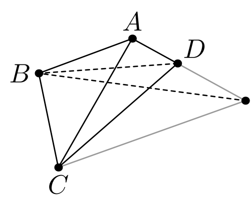


Рис. 150б

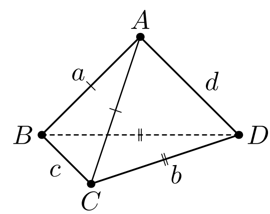


Рис. 150в

«Устремим» точку D к точке A (см. рис. 150б). Тогда величина $\angle BDC$ будет мало отличаться от величины $\angle BAC$, то есть, этот угол также будет тупым. Таким образом, каждый из треугольников ABC, ABD, ACD и BCD будет тупоугольным.

Второй способ. Рассмотрим лучи AB, AC и AD, выбрав точки B, C и D так, что $AB = AC = a$; $DB = DC = b$; $BC = c$; $AD = d$ (см. рис. 150в). Тогда $\triangle ABD = \triangle ACD$. Используя следствие из теоремы косинусов для треугольника ABD запишем условие того, что $\angle DAB$ — тупой: $a^2 + d^2 < b^2$.

Аналогично, из треугольников CAB и CDB получим, что $2a^2 < c^2$ и $2b^2 < c^2$. Преобразовав эти неравенства, получим систему:

$$\begin{cases} d < \sqrt{b^2 - a^2}, \\ c > a\sqrt{2}, \\ c > b\sqrt{2}. \end{cases}$$

Осталось подобрать какое-либо решение системы так, чтобы для каждого треугольника выполнялось неравенство треугольника, а тупые углы имели величину, меньшую $120°$. Один из возможных примеров:

$a = 9$; $b = 10$; $c = 15$; $d = 4$. Проверка: $\cos\angle DAB = \cos\angle DAC = -\frac{1}{24} > > -\frac{1}{2}$; $\cos\angle BAC = -\frac{7}{30} > -\frac{1}{2}$; $\cos\angle BDC = -\frac{1}{12} > -\frac{1}{2}$, то есть, величина каждого из этих углов лежит в границах от 90° до 120°.

4.3. *Ответ*: 60°.

Рассмотрим все отрезки, соединяющие точки данного множества. Так как количество точек — конечно, то и количество отрезков — конечно, значит, среди этих отрезков есть наибольший и наименьший. Пусть A_1B_1 — наибольший отрезок, а A_2B_2 — наименьший. Тогда, точка M_1, для которой $\angle A_1M_1B_1 = \alpha$, не может лежать на прямой A_1B_1, так как, в этом случае, $\alpha = 180^\circ$, но точки M_2 такой, что $\angle A_2M_2B_2 = 180^\circ$ в данном множестве нет. Аналогично, и точка M_2, для которой $\angle A_2M_2B_2 = \alpha$, не может лежать на прямой A_2B_2. Следовательно, точки A_1, M_1 и B_1 являются вершинами треугольника, в котором $\angle M_1$ — наибольший (следствие из теоремы синусов). Следовательно, его величина не меньше, чем 60°, то есть $\alpha \geqslant 60^\circ$. С другой стороны, в треугольнике $A_2M_2B_2$ $\angle M_2$ — наименьший, значит, $\alpha \leqslant 60^\circ$. Следовательно, $\alpha = 60^\circ$.

Одним из возможных и наиболее очевидных примеров конструкции, описанной в условии, является множество вершин правильного треугольника.

Отметим, что в приведенном решении был дважды использован принцип «крайнего».

5.1. *Ответ*: один корень.

Первый способ. Сделаем замену переменных: $x = 1/y$. Получим уравнение: $y^{37} + y^{29} + 1 = 0$. Функция $f(y) = y^{37} + y^{29} + 1$ является непрерывной и возрастающей (сумма непрерывных возрастающих функций), значит, уравнение $f(y) = 0$ имеет не более одного корня. Так как эта функция принимает как положительные, так и отрицательные значения (например, при $y = 0$ и $y = -1$ соответственно), то уравнение $f(y) = 0$ имеет корень, причем, отличный от нуля. Следовательно, и данное уравнение имеет один корень.

*Второй способ.*Рассмотрим функцию $f(x) = x^{37} + x^8 + 1$ Исследуем ее на монотонность и экстремумы. Функция определена и непрерывна на $\mathbb{R}$, её производная $f'(x) = 37x^{36} + 8x^7 = 37x^7\left(x^{29} + \frac{8}{37}\right)$. $f'(x) = 0$ при $x = 0$ или $x = -\sqrt[29]{\frac{8}{37}} \approx -0,9$. Рассмотрев знаки производной, получим, что на $\left(-\infty; -\sqrt[29]{\frac{8}{37}}\right]$ и на $[0; +\infty)$ функция возрастает, на

$\left[-\sqrt[29]{\frac{8}{37}};0\right]$ — убывает. Так как $f(0) = 1$ — минимум, а $f\left(-\sqrt[29]{\frac{8}{37}}\right) > 1$ — максимум функции, и, кроме того, функция может принимать отрицательные значения (например, при $x = -2$), то значение 0 функция принимает только при одном значении аргумента, на $\left(-\infty;-\sqrt[29]{\frac{8}{37}}\right)$. Эскиз графика — см. рис. 151.

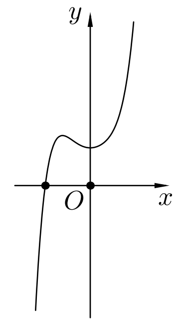


Рис. 151

5.2. *Ответ*: существуют.

Один из возможных примеров таких четырехугольников — два равных между собой параллелограмма, которые получаются следующим построением: возьмем произвольный квадрат и «пристроим» к нему четыре прямоугольных равнобедренных треугольника (см. рис. 152а). Выполнение условия задачи очевидным образом следует из построения, а также из свойств квадрата и равнобедренного прямоугольного треугольника.

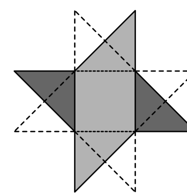


Рис. 152а

Другой возможный пример искомых четырехугольников — два одинаковых ромба, острые углы которых равны по 45° (см. рис. 152б). Для построения таких четырехугольников возьмем правильный восьмиугольник (углы которого равны по 135°), и продолжим некоторые его стороны до пересечения, как показано на рисунке.

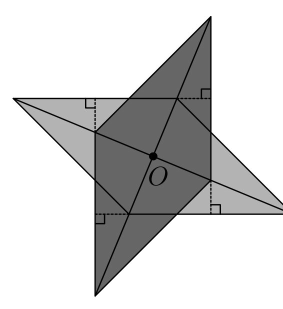


Рис. 152б

Для того, чтобы доказать, что построенные ромбы — искомые, рассмотрим центр O правильного восьмиугольника, являющийся также центром симметрии каждого из ромбов.

Первый способ. Так как центральный угол, соответствующий стороне восьмиугольника равен 45°, то при повороте с центром O на 90° вершины восьмиугольника «переходят» друг в друга (через одну). Следовательно, образом любой из сторон восьмиугольника является также сторона восьмиугольника, значит, эти стороны лежат на перпендикулярных прямых, то есть, стороны одного ромба лежат на прямых, перпендикулярных сторонам другого. Кроме того, при рассмотренном повороте, образами вершин одного из ромбов являются вершины другого ромба, образами сторон одного — стороны другого, значит образами середин сторон одного ромба являются середины сторон другого. Следовательно, рассматриваемые перпендикуляры являются серединными, что и требовалось доказать.

Второй способ. Рассмотрим любой из прямоугольных треугольников, на которые один из ромбов разбивается своими диагоналями. Пусть AOD — такой треугольник, AB и BC — стороны восьмиугольника, тогда CE — прямая, на которой лежат следующая сторона восьмиугольника и сторона другого ромба (см. рис. 152в). $CE \perp AD$, так как $\angle EBC = \angle ECB = 45^\circ$ (внешние углы восьмиугольника). Кроме того, $\angle DAC = 0,5\angle EBC = 22,5^\circ$. Так как $OA = OC$, то $\angle CAO = 45^\circ$, значит, $\angle ADO = 90^\circ - (\angle CAO + \angle DAC) = 22,5^\circ$. Следовательно, $AC = CD$, то есть, CE — серединный перпендикуляр к AD, что и требовалось доказать.

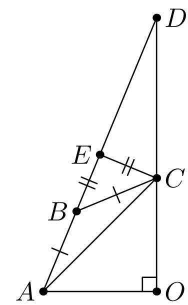


Рис. 152в

5.3. *Ответ*: $S = \dfrac{N(N-1)}{2}$.

Первый способ. Свяжем все спички попарно нитками. Каждый раз, разбивая одну из кучек на две, будем разрезать все нитки, соединяющие спички из разных кучек. Если мы разбиваем кучку из $m + k$ спичек на кучки по m и k спичек, то разрезано будет mk ниток, то есть, в точности столько, какое число будет записано на этом шаге. Таким образом, сумма S всех записанных чисел равна общему количеству разрезанных ниток. Так как сначала все спички были соединены попарно, то было использовано $\dfrac{N(N-1)}{2}$ ниток. По окончании процесса все нитки будут разрезаны, значит, $S = \dfrac{N(N-1)}{2}$.

Второй способ. Заметим, что $mk = \dfrac{(m+k)^2 - (m^2+k^2)}{2}$. То есть, если на каком-то шаге мы разбиваем кучку из $m + k$ спичек на кучки по m и k спичек, то вместо произведения mk можно записать такую дробь. Так как каждую кучку, в которой больше одной спички, мы обязательно разделим на две, то, записав сумму всех таких дробей, можно заметить, что все «промежуточные» числа взаимно уничтожатся. Значит, искомую сумму можно найти следующим образом: из квадрата количества спичек вначале вычесть сумму квадратов количеств спичек в конце (N слагаемых) и разделить на 2, то есть, $S = \frac{N^2 - (1^2 + 1^2 + \ldots + 1^2)}{2} = \frac{N^2 - N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$.

Третий способ. То, что искомая сумма S не зависит от порядка выполнения операций и равна $\frac{N(N-1)}{2}$ можно доказать, используя метод математической индукции. При $N = 1$ утверждение очевидно. Пусть оно верно при всех количествах спичек, меньших N. Первым шагом мы разбиваем кучку спичек на две кучки меньших размеров: по m и k спичек. Независимо от способов разбиения получившихся кучек, для каждой из них искомые суммы равны $\frac{m(m-1)}{2}$ и $\frac{k(k-1)}{2}$ соответственно (по предположению индукции). Тогда, $S = mk + \frac{m(m-1)}{2} + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{(2mk + m^2 + k^2) - (m+k)}{2} = \frac{(m+k)^2 - (m+k)}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$, что и требовалось доказать.

2001/2002 учебный год

1.1. *Ответ*: да, верно.

Дискриминант второго трехчлена: $D = b^6 - 4a^3c^3$. Если $ac \leqslant 0$, то $-4a^3c^3 \geqslant 0$, то есть, $D \geqslant 0$. Если $ac > 0$, то рассмотрим первый трехчлен. Так как он имеет действительные корни, то $b^2 - 4ac \geqslant 0 \Leftrightarrow b^2 \geqslant 4ac \Leftrightarrow b^6 \geqslant 64a^3c^3$. Так как $ac > 0$, то $64a^3c^3 > 4a^3c^3$, следовательно, $b^6 > 4a^3c^3$, то есть, $D > 0$. Таким образом, второй трехчлен имеет действительные корни.

1.2. *Ответ*: 1.

Первый способ. Пусть O — центр квадрата $ABCD$. Рассмотрим перпендикуляры AM и BN к произвольной прямой, проходящей через точку O (см. рис. 153).

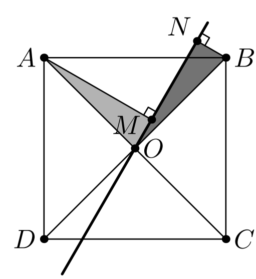


Рис. 153

Так как $\angle MAO = 90° - \angle AOM = \angle NOB$ и $OA = OB$, то $\triangle OAM = \triangle OBN$, значит $OM = BN$. По теореме Пифагора: $AM^2 + BN^2 = AM^2 + OM^2 = AO^2 = \frac{1}{2}AB^2$. Учитывая, что O — центр симметрии квадрата, получим, что искомая сумма равна 1.

Второй способ. Пусть $\angle MAO = \angle NOB = \alpha$. Так как $AO = OB = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $AM^2 + BN^2 = (AO\cos\alpha)^2 + (BO\sin\alpha)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0,5$.

1.3. *Ответ*: 1 и 3.

Рассмотрим последовательность $a_n = n!$ Все ее члены, начиная с a_5, оканчиваются нулем, а начиная с a_{10} — двумя нулями (при $n \geqslant 10$ число $n!$ содержит множители 2, 5 и 10). Поэтому, две последние цифры искомого числа совпадают с двумя последними цифрами суммы первых девяти членов последовательности, которые находятся непосредственным подсчетом: $1+2+6+24+120+720+5040+40320+362880 = \ldots 13$.

2.1. Ответ: $\left(-\frac{1}{2001}; -\frac{1}{2002}\right)$.

Так как $S_n = S_{n-1} + a_n$, то S_{2002} является наибольшей тогда, и только тогда, когда $\begin{cases} a_{2002} > 0, \\ a_{2003} < 0. \end{cases}$ В арифметической прогрессии $a_n = a_1 + (n-1)\,d$, где d — разность прогрессии. В данном случае, $a_n = 1 + (n-1)\,d$, поэтому, $\begin{cases} 1 + 2001d > 0, \\ 1 + 2002d < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2001} < d < -\frac{1}{2002}$.

2.2. *Ответ*: нет, не верно.

Рассмотрим, например, равнобедренный треугольник ABC с основанием $AC = 8$ и высотой $BD = 0,5$ (см. рис. 154). $S_{ABC} = 0,5AC \cdot BD = 2$, а высоты, проведенные из вершин A и C, равны. Так как $BC > DC = 4$, то $AE = \frac{2S_{ABC}}{BC} < 1$.

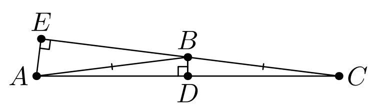


Рис. 154

2.3. *Ответ*: например, см. рис. 155, где A, B, C, D, E и F — искомые точки.

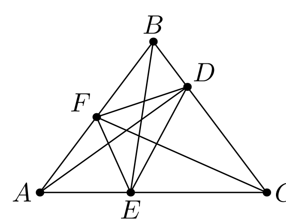


Рис. 155

В том, что треугольников с вершинами в этих точках ровно 17, можно убедится непосредственным подсчетом.

Для того, чтобы найти искомое расположение точек, можно сначала подсчитать количество треугольников в случае, если никакие три из шести точек не лежат на одной прямой. Возможны различные способы подсчета, например, выписать все различные «тройки» точек, либо использовать формулу числа сочетаний: $C_6^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$. Для того, чтобы треугольников было на 3 меньше, необходимо чтобы ровно три «тройки» точек лежали на одной прямой. В приведенном примере: $F \in (AB)$; $E \in (AC)$; $D \in (BC)$.

3.1. *Ответ*: 1.

Так как для всех x верно неравенство $|\sin x| \leqslant 1$, то $\sin x \cos y \cos z \leqslant$ $\leqslant |\sin x \cos y \cos z| = |\sin x| \cdot |\cos y \cos z| \leqslant |\cos y \cos z|$. Аналогично, так как $|\cos x| \leqslant 1$, то $\cos x \sin y \sin z \leqslant |\sin y \sin z|$. Сложим полученные неравенства: $\sin x \cos y \cos z + \cos x \sin y \sin z \leqslant |\cos y \cos z| + |\sin y \sin z|$. Полученное в правой части выражение может быть равно одному из четырех выражений: $\pm\cos(y \pm z)$, каждое из которых не превосходит 1. Значение 1 данное выражение может принимать, например, при $x = 0$, $y = z = \dfrac{\pi}{2}$.

Возможны также аналогичные способы решения, использующие область значения выражений $\cos y$ *или* $\cos z$.

3.2. *Ответ*: верно.

Рассмотрим $\triangle ABC$, в котором проведены медианы AA_1, BB_1 и CC_1, M — точка их пересечения (см. рис. 156). $S_{ABC} = 3S_{BMC}$ (так как у этих треугольников — общее основание BC, а отношение их высот, проведенных из вершин A и M, равно отношению $AA_1 : MA_1 = 3 : 1$).

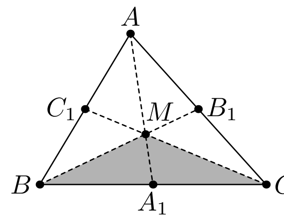


Рис. 156

Так как площадь любого треугольника равна половине произведения двух сторон и синуса угла между ними, то она не превосходит половины произведения двух любых его сторон.

Следовательно, если $BB_1 < 1$ и $CC_1 < 1$, то $S_{ABC} = 3S_{BMC} \leqslant$ $\leqslant 3 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\,BB_1\right) \cdot \left(\dfrac{2}{3}\,CC_1\right) < \dfrac{2}{3}$.

3.3. *Ответ*: например, см. рис. 157 (значения функции в любых двух точках экстремума, между которыми находятся ровно две другие точки экстремума должно быть одинаковыми).

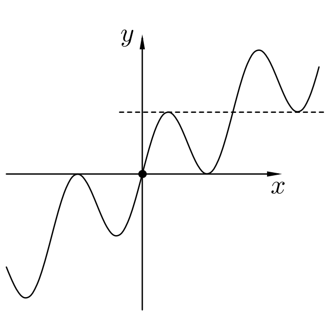


Рис. 157

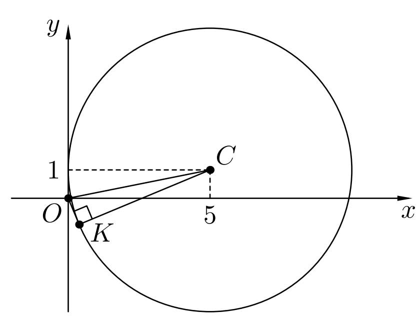


Рис. 158

4.1. Ответ: $-2\dfrac{2}{5}$.

Первый способ. Так как $x^2 - 10x + y^2 - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 + (y-1)^2 = 5^2$, то данное уравнение задает в координатной плоскости окружность с центром $C(5;1)$ и радиусом 5 (см. рис. 158). Для любой точки K этой окружности отношение $\dfrac{y}{x}$ задает тангенс угла α между положительным направлением оси абсцисс и лучом OK, причем, если точка K лежит в I координатной четверти, то $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, а если K лежит в IV координатной четверти, то $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; 0\right)$. В данном случае, тангенс принимает наименьшее значение, если (OK) — одна из касательных к окружности (см. рис. 158).

Координаты точки K можно находить различными способами, например: $OK^2 = OC^2 - CK^2 = (1^2 + 5^2) - 5^2 = 1$, поэтому точка $K(x;y)$ лежит также на окружности с центром $O(0;0)$ и радиусом 1. (Этот же результат можно получить из равенства двух касательных к окружности, проведенных из точки O). Находим координаты точек пересечения двух окружностей: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^2 - 10x + y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 10x + 2y - 1 = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = 1 - 5x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{5}{13}, \\ y = -\dfrac{12}{13}. \end{cases} \end{array} \right.$$

Так как $K\left(\dfrac{5}{13}; -\dfrac{12}{13}\right)$, то искомое отношение $\dfrac{y}{x} = -\dfrac{12}{5}$.

Можно также вычислить тангенс угла KOX, не находя координат точки K. Так как $\angle KOX = \angle COK - \angle COX$, $\operatorname{tg} \angle COK = 5$, $\operatorname{tg} \angle COX = \dfrac{1}{5}$, то по формуле $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \dfrac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$ получим, что $\operatorname{tg} \angle KOX = \dfrac{12}{5}$. Учитывая, что K лежит в IV координатной четверти, получим, что искомое отношение $\dfrac{y}{x} = -\dfrac{12}{5}$.

Второй способ. Пусть $k = \dfrac{y}{x}$, тогда задача сводится к тому, чтобы найти наименьшее значение k, при котором имеет решение система уравнений:

$$\begin{cases} y = kx, \\ x^2 - 10x + y^2 - 2y + 1 = 0. \end{cases}$$

Подставим значение y во второе уравнение и преобразуем: x^2-10x+ $+k^2x^2-2kx+1=0 \Leftrightarrow (1+k^2)\,x^2-2(5+k)\,x+1=0$. Рассматриваемая система уравнений имеет решения тогда и только тогда, когда имеет решения полученное квадратное уравнение, то есть, когда это уравнение имеет неотрицательный дискриминант. Значит, $(5+k)^2-(1+k^2)\geqslant$ $\geqslant 0 \Leftrightarrow 10k \geqslant -24 \Leftrightarrow k \geqslant -2\frac{2}{5}$. Наименьшее значение k, удовлетворяющее этому условию, равно $-2\frac{2}{5}$.

4.2. *Ответ*: да, могут.

Рассмотрим, например, два правильных треугольника, лежащих в перпендикулярных плоскостях, причем высота одного из них является стороной другого (см. рис. 159). Искомой фигурой является объединение этих треугольников.

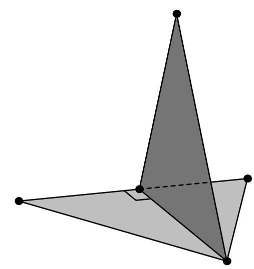


Рис. 159

4.3. *Ответ*: нет, нельзя.

Предположим, что представить можно, то есть, существуют функции $f(x)$ — четная и $g(x)$ — периодическая, такие что при всех значениях x выполняется равенство $x^3=f(x)+g(x)$.

Пусть T — период функции $g(x)$. При $x=T$ равенство примет вид: $T^3=f(T)+g(T)$, а при $x=-T$: $-T^3=f(-T)+g(-T)$. Так как $f(-T)=f(T)$ и $g(-T)=g(0)=g(T)$, то получим, что $T^3=-T^3$, то есть, $T=0$, что невозможно.

5.1. Ответ: $\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4}$.

Преобразуем данное уравнение: $(2x+2)\,(5-2x)\,(4x^2+8x+11)=$ $=10(2x+3)^2 \Leftrightarrow (-4x^2+6x+10)\,(4x^2+8x+11)=10(2x+3)^2$. Так как $x=-1,5$ не является корнем уравнения (проверяется подстановкой), то полученное уравнение равносильно уравнению $\dfrac{-4x^2+6x+10}{2x+3}\times$ $\times\dfrac{4x^2+8x+11}{2x+3}=10$. Пусть $\dfrac{-4x^2+6x+10}{2x+3}=y$, $\dfrac{4x^2+8x+11}{2x+3}=z$, тогда $y+z=\dfrac{14x+21}{2x+3}=7$. Таким образом, $\begin{cases} yz=10,\\ y+z=7,\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} y=2,\\ z=5\end{cases}\\ \begin{cases} y=5,\\ z=2.\end{cases}\end{array}\right.$.

Далее, в каждой из полученных систем достаточно рассмотреть одно из уравнений.

1) $\dfrac{4x^2+8x+11}{2x+3} = 5 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$;

2) $\dfrac{4x^2+8x+11}{2x+3} = 2 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 5 = 0$. Это квадратное уравнение не имеет корней.

5.2. *Ответ*: нет, не могут.

Пусть даны две перпендикулярные плоскости, пересекающиеся по прямой m. Рассмотрим треугольник ABC и его проекции на эти плоскости (см. рис. 160а). Через точки A, B и C проведем плоскости, перпендикулярные m, которые пересекут одну из данных плоскостей по прямым a_1, b_1 и c_1, а другую — по прямым a_2, b_2 и c_2 соответственно. K, L и N — точки пересечения этих прямых с прямой m.

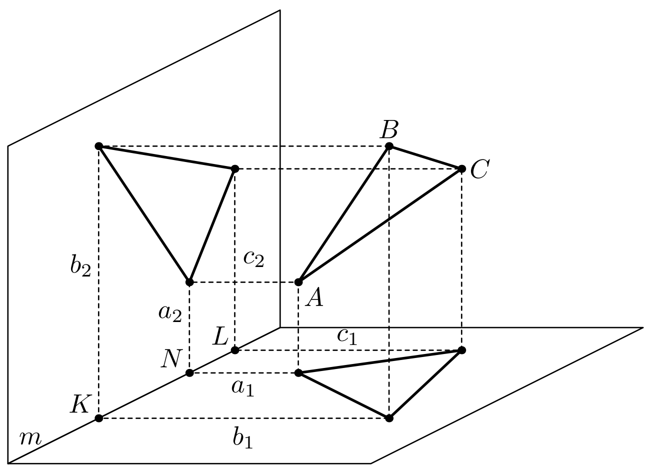


Рис. 160а

Так как каждая из рассматриваемых прямых перпендикулярна m, то $a_1 \parallel b_1 \parallel c_1$ и $a_2 \parallel b_2 \parallel c_2$. Расстояние между прямыми a_1 и b_1 равно длине отрезка KL и равно расстоянию между прямыми a_2 и b_2. Аналогично: расстояние между a_1 и c_1 равно расстоянию между a_2 и c_2; расстояние между b_1 и c_1 равно расстоянию между b_2 и c_2. Таким образом, исходная задача сводится к планиметрической.

Даны три параллельные прямые a, b и c. Существуют ли неравные правильные треугольники ABC такие, что $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$?

Для того, чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим задачу на построение правильного треугольника, вершины которого лежат на заданных параллельных прямых. Зафиксируем точку A на прямой a, и рассмотрим поворот плоскости вокруг точки A на угол $\varphi = 60^\circ$ (см. рис. 160б). При таком повороте образом вершины C служит вершина B и, так как $C \in c$, то $B \in d$ — образу прямой c при указанном повороте. Таким образом, искомая вершина B является пересечением прямых b и d, после чего однозначно определяется положение вершины C.

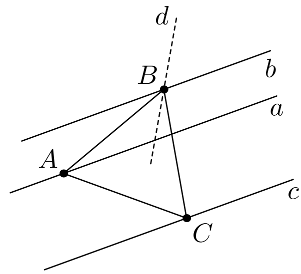


Рис. 160б

Так как прямые b и d имеют одну общую точку, то, с точностью до ориентации, существует единственный правильный треугольник с фиксированной вершиной A, удовлетворяющий условию (треугольник с вершиной A, ориентированный по другому, получится при рассмотрении поворота на угол $\varphi = -60^\circ$). Остальные правильные треугольники, удовлетворяющие условию, получаются из них параллельным переносом вдоль прямой a, то есть, все такие треугольники равны. Значит, три параллельные прямые, лежащие в плоскости, задают правильный треугольник с фиксированной длиной стороны. Следовательно, если проекциями какого-то треугольника являются правильные треугольники, то эти правильные треугольники равны.

Отметим, что планиметрическую часть доказательства можно осуществить и другими способами, не связанными с рассмотренной задачей на построение.

Утверждение задачи будет верным и в более общем случае, когда двугранный угол между данными плоскостями — произвольный, а треугольник проектируется параллельно сторонам его линейного угла.

5.3. *Ответ*: решений нет.

Пусть существуют натуральные числа, удовлетворяющие данной системе уравнений, тогда $n > k$ и $m > p$. В натуральном ряду чисел после k^2 следующий полный квадрат равен $(k+1)^2$, значит, $p = n^2 - k^2 \geqslant (k+1)^2 - k^2 = 2k+1$. Аналогично, $k = m^2 - p^2 \geqslant (p+1)^2 - p^2 = 2p+1$. Сложим неравенства $p \geqslant 2k+1$ и $k \geqslant 2p+1$ почленно: $p+k \geqslant 2k+2p+2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow p+k+2 \leqslant 0$. Полученное неравенство не имеет натуральных решений.

2002/2003 учебный год

1.1. *Ответ*: пять.

$$\sqrt{x+6-2x^2}\cdot\cos(\pi x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x+6-2x^2=0,\\ \begin{cases}\cos(\pi x)=0,\\ x+6-2x^2\geqslant 0,\end{cases}\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} 2x^2-x-6=0,\\ \begin{cases}\pi x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\\ 2x^2-x-6\leqslant 0,\end{cases}\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases}x=2,\\ x=-1,5,\end{cases}\\ \begin{cases}x=0,5+k,\ k\in\mathbb{Z},\\ -1,5\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Таким образом, корнями данного уравнения являются числа: $-1,5$; $-0,5$; 0,5; 1,5; 2.

1.2. Рассмотрим, например, четырехугольник AB_1CB (см. рис. 161). Так как $\angle B_1AB = \angle B_1CB = 90^\circ$, то этот четырехугольник — вписанный, причем BB_1 — диаметр окружности, которая совпадает с окружностью, описанной около треугольника ABC. Аналогично, CC_1 и AA_1 также являются диаметрами окружности, описанной около треугольника ABC. Все диаметры окружности пересекаются в одной точке — центре окружности.

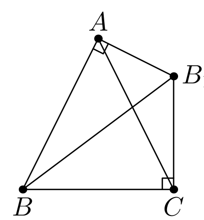


Рис. 161

1.3. *Ответ*: на вторую.

Первый способ. Сумма двух одинаковых нечетных степеней раскладывается на множители по формуле

$$a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)\left(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2-\ldots-ab^{2n-1}+b^{2n}\right).$$

Применяя эту формулу к сумме $3^{2003}+1^{2003}$, получим первый множитель 4, а второй множитель — нечетное число.

Второй способ. Используя формулу бинома Ньютона для выражения $(2+1)^{2003}$, получим: $3^{2003}+1=(2+1)^{2003}+1=2^{2003}+2003\times 2^{2002}+\ldots+\dfrac{2001\cdot 2002\cdot 2003}{6}\cdot 2^3+\dfrac{2002\cdot 2003}{2}\cdot 2^2+2003\cdot 2+1+1 = 2^{2003}+2003\cdot 2^{2002}+\ldots+1001\cdot 2003\cdot 2^2+2004\cdot 2 = 4\cdot(2^{2001}+2003\cdot 2^{2000}+\ldots+1001\cdot 2003+1002)$. Так как все слагаемые в скобках — четные числа, за исключением предпоследнего, то значение выражения, стоящего в скобках — нечетное число.

Третий способ. $9 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 8) \Rightarrow 3^{2003} = 3 \cdot 3^{2002} = 3 \cdot 9^{1001} \equiv 3 \cdot 1^{1001} \equiv \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 8) \Rightarrow 3^{2003} + 1 \equiv 4 (\mathrm{mod}\ 8)$, то есть, данное число кратно 4, но не кратно 8.

2.1. *Ответ*: 2003.

Из условия следует, что $p^3 - 3p - 1 = 0 \Leftrightarrow p^3 - 3p = 1$, поэтому, $p^4 - 3p^2 = p$. Следовательно, $p^4 + 2p^3 - 3p^2 - 7p + 2001 = 2p^3 - 6p + 2001 = = 2(p^3 - 3p) + 2001 = 2003$.

2.2. *Ответ*: да, существует.

Рассмотрим, например, правильный двенадцатиугольник $A_1 \ldots A_{12}$, вписанный в окружность (см. рис. 162а). Соединив его вершины через одну, получим правильный шестиугольник $A_1 A_3 \ldots A_{11}$, в котором сторона (то есть, диагональ двенадцатиугольника) будет равна радиусу описанной около него окружности.

Сумма длин двух таких диагоналей равна длине диаметра $A_1 A_7$ описанной окружности, который, в свою очередь, является большей диагональю двенадцатиугольника.

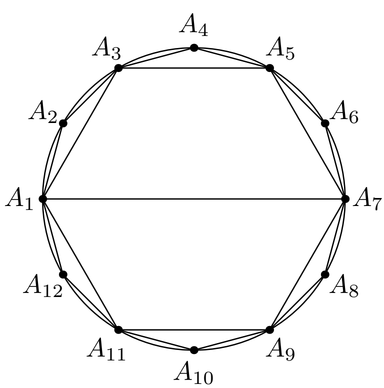


Рис. 162а

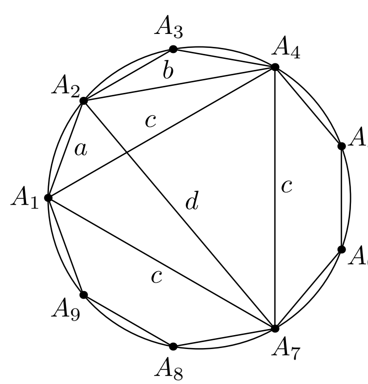


Рис. 162б

Другой возможный пример: рассмотрим правильный девятиугольник $A_1 A_2 \ldots A_9$, вписанный в окружность (см. рис. 162б), и докажем, что для него выполняется равенство: $A_1 A_2 + A_2 A_4 = A_2 A_7$.

Геометрическое доказательство. Пусть $A_1 A_2 = a$, $A_2 A_4 = b$, $A_1 A_4 = A_4 A_7 = A_7 A_1 = c$, $A_2 A_7 = d$. Для вписанного четырехугольника $A_1 A_2 A_4 A_7$ по теореме Птолемея, получим: $ac + bc = dc \Leftrightarrow a + b = d$, что и требовалось доказать.

Тригонометрическое доказательство. Пусть R — радиус окружности. Так как $A_1 A_2 = 2R \sin 20^\circ$, $A_2 A_4 = 2R \sin 40^\circ$, $A_2 A_7 = 2R \sin 80^\circ$, то доказываемое равенство равносильно равенству $\sin 20^\circ + \sin 40^\circ = \sin 80^\circ$. Полученное равенство верно, так как $\sin 20^\circ + \sin 40^\circ = 2\sin 30^\circ \cdot \cos 10^\circ = \cos 10^\circ = \sin 80^\circ$.

Понятно, что если построены примеры для правильных девятиугольника и двенадцатиугольника, то диагонали, удовлетворяющие условию, есть в любых правильных многоугольниках, количество сторон которых кратно 9 *или* 12.

2.3. *Ответ*: да, верно.

Из условия следует, что функция $f(x)$ определена для всех значений x и $f(b) = \dfrac{f(a+b)+f(a-b)-2f(a)}{2}$. Так как при любых b верно равенство $f(-b) = \dfrac{f(a-b)+f(a+b)-2f(a)}{2} = f(b)$, то $f(x)$ — четная функция.

3.1. *Ответ*: $(-1;-1)$; $(-1;1)$.

Пусть $y^2 = z \geqslant 0$. Получим уравнение $2z^2 + 4xz + (x^4+1) = 0$, которое можно считать квадратным относительно переменной z. $\dfrac{D}{4} = 4x^2 - 2x^4 - 2 = -2(x^4 - 2x^2 + 1) = -2(x^2-1)^2 \leqslant 0$. Следовательно, квадратное уравнение имеет корни тогда, и только тогда, когда $x^2 = 1$.

При $x = 1$ получим уравнение $z^2 + 2z + 1 = 0$, решением которого является $z = -1$. То есть, в этом случае исходное уравнения корней не имеет. При $x = -1$ получим уравнение $z^2 - 2z + 1 = 0$, решением которого является $z = 1$. Следовательно, $y = \pm 1$.

3.2. *Ответ*: нет.

Предположим, что существует прямоугольник $ABCD$ (E — точка пересечения его диагоналей) и точка S, удовлетворяющие условию (см. рис. 163).

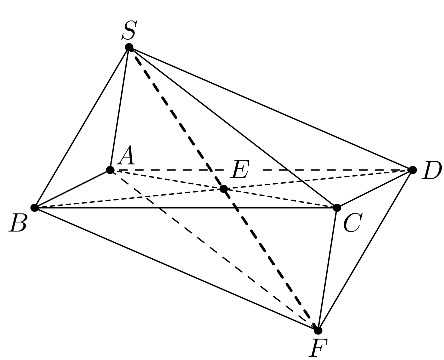


Рис. 163

На продолжении отрезка SE за точку E отложим отрезок EF, равный SE, и соединим точки S и F с вершинами прямоугольника. Тогда четырехугольник $SAFC$ — параллелограмм. По свойству диагоналей параллелограмма: $2(SA^2 + SC^2) = SF^2 + AC^2$. Аналогично, $2(SB^2 + SD^2) = SF^2 + BD^2$. Учитывая, что $AC = BD$, получим, что $SA^2 + SC^2 = SB^2 + SD^2$. Данные числа 1, 3, 5 и 7 не удовлетворяют этому равенству, в каком бы порядке мы их не взяли.

По сути, при решении задачи была построена пирамида $FABCD$, симметричная пирамиде $SABCD$ относительно точки E.

3.3. *Ответ*: да, верно.

Квадрат любого натурального числа при делении на 4 дает в остатке либо 0, либо 1. Действительно, если n — четно, то есть, $n = 2k$, где $k \in \mathbb{N}$, то $n^2 = 4k^2$ — кратно 4. Если n — нечетно, то есть, $n = 2k - 1$, где $k \in \mathbb{N}$, то $n^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 4(k^2 - k) + 1$ дает остаток 1 при делении на 4. Поэтому, сумма квадратов двух натуральных чисел при делении на 4 может иметь остатки: 0, 1 или 2. Следовательно, все числа вида $4m + 3$, где $m \in \mathbb{N}$, не представимы в виде суммы квадратов двух натуральных чисел.

4.1. *Ответ*: 2.

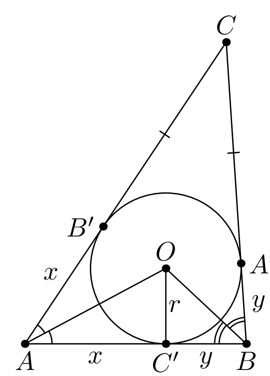


Рис. 164

Первый способ. Рассмотрим окружность радиуса r, вписанную в данный треугольник ABC. Соединим ее центр O с вершинами A и B треугольника, а точки касания окружности со сторонами обозначим A', B' и C' (см. рис. 164). По свойству касательных, проведенных из одной точки к окружности, получим, что $AB' = AC' = x$; $BA' = BC' = y$. Тогда $x = p - a$; $y = p - b$, где p — половина периметра треугольника ABC.

Так как AO и BO — биссектрисы углов A и B соответственно, то из треугольников AOC' и BOC' получим, что $\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2} = \dfrac{x}{r}$; $\operatorname{ctg}\dfrac{B}{2} = \dfrac{y}{r}$. Так как $r = \dfrac{S}{p}$, где $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ — площадь треугольника ABC, то $r^2 = \dfrac{S^2}{p^2} = \dfrac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2} = \dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$. Тогда $\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2} \times \operatorname{ctg}\dfrac{B}{2} = \dfrac{xy}{r^2} = \dfrac{(p-a)(p-b)p}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \dfrac{p}{p-c}$. (*Отметим, что полученное соотношение справедливо для любого треугольника*!)

По условию, $a + b = 3c$, поэтому, $p = \dfrac{a+b+c}{2} = 2c$. Следовательно, $\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{B}{2} = 2$.

Второй способ. Из равенства $a + b = 3c$ следует, что $\dfrac{a}{2R} + \dfrac{b}{2R} = \dfrac{3c}{2R}$, где R — радиус окружности, описанной около ABC. Используя следствие из теоремы синусов, получим, что $\sin A + \sin B = 3\sin C$.

Преобразуем полученное тригонометрическое равенство: $\sin A + \sin B = 3\sin(A+B) \Leftrightarrow 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} = 6\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A+B}{2}$. Так как $\sin\dfrac{A+B}{2} \neq 0$, то получим, что $\cos\dfrac{A-B}{2} = 3\cos\dfrac{A+B}{2} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \cos\dfrac{A-B}{2} - \cos\dfrac{A+B}{2} = 2\cos\dfrac{A+B}{2} \Leftrightarrow 2\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2} = 2\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2} - 2\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2} \Leftrightarrow 2\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2} = \cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}$. Так как $\sin\dfrac{A}{2} \neq 0$ и $\sin\dfrac{B}{2} \neq 0$, то $\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{B}{2} = 2$.

4.2. Пусть точка N симметрична точке B относительно прямой AM, а точка K симметрична точке C относительно прямой MD (см. рис. 165).

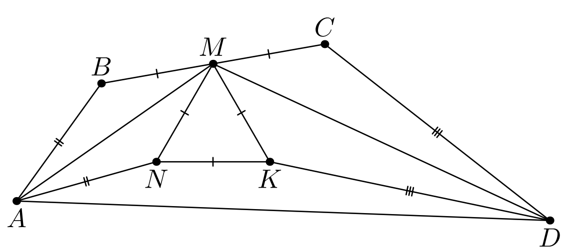


Рис. 165

Так как $\angle AMD = 120^\circ$, то $\angle AMN + \angle DMK = \angle BMA + \angle CMD = 60^\circ$. Кроме того, $NM = MB = MC = MK$. Таким образом, $\triangle MNK$ — равносторонний, поэтому $NK = \dfrac{1}{2}BC$. То есть, $AB + \dfrac{1}{2}BC + CD = AN + NK + KD \geqslant AD$, что и требовалось доказать.

4.3. *Ответ*: да, сможет.

Назовем числа, входящие в первую сумму, «пиками», а числа, входящие во вторую сумму, — «впадинами». Выберем какой-нибудь пик X_1, и будем двигаться от него по кругу, например, по часовой стрелке. Числа будут уменьшаться до тех пор, пока мы не попадем во впадину

Y_1. Количество чисел от «пика» до «впадины» будет равно $X_1 - Y_1$ (если считать «пик», но не считать «впадину»). Продолжим движение по кругу, пока не попадем на следующий пик X_2. Количество чисел от «впадины» до нового «пика» равно $X_2 - Y_1$ (если считать «впадину», но не считать «пик»).

Пусть общее количество «пиков» равно n, тогда количество «впадин» также n. Продолжая движение по кругу и подсчет чисел, получим, что искомое количество чисел равно: $(X_1 - Y_1) + (X_2 - Y_1) + (X_2 - Y_2) + {} + (X_3 - Y_2) + \ldots + (X_{n-1} - Y_{n-1}) + (X_n - Y_{n-1}) + (X_n - Y_n) + (X_1 - Y_n) = {} = 2(X_1 + X_2 + \ldots + X_n - Y_1 - Y_2 - \ldots - Y_n) = 2(A - B)$. Таким образом, зная числа A и B, можно определить количество чисел на окружности.

5.1. Введем обозначения: $a_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$, $a_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$, $\ldots$, $a_5 = \operatorname{tg}\alpha_5$, причем, без ограничения общности можно считать, что $-\frac{\pi}{2} < \alpha_1 \leqslant {} \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_5 < \frac{\pi}{2}$. Тогда, согласно принципу Дирихле, среди чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5$ найдутся два числа, разность между которыми не превышает $\frac{\pi}{4}$. Действительно, если промежуток длиной π разбить на четыре равные части, то из пяти чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5$ хотя бы два окажутся в одной части. Эти два числа обозначим α_i и α_k, причем $\alpha_i \leqslant \alpha_k$.

Пусть $x = a_i$, $y = a_k$, тогда $\frac{x-y}{1+xy} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_i - \operatorname{tg}\alpha_k}{1 + \operatorname{tg}\alpha_i \operatorname{tg}\alpha_k} = \operatorname{tg}(\alpha_i - \alpha_k)$, причем $0 \leqslant \alpha_i - \alpha_k \leqslant \frac{\pi}{4}$, откуда $0 \leqslant \operatorname{tg}(\alpha_i - \alpha_k) \leqslant 1$. Следовательно, $0 \leqslant \frac{x-y}{1+xy} \leqslant 1$, что и требовалось доказать.

5.2. *Ответ*: $BC = 3$.

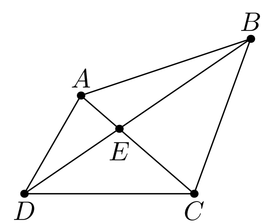


Рис. 166

Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник (см. рис. 166). Так как $S_{ABE} = S_{DCE}$, то $S_{ABD} = S_{ACD}$, следовательно, $AD \parallel BC$. Пусть $S_{AED} = x$, тогда, так как $S_{ADE} : {} : S_{ABE} = DE : BE = S_{DCE} : S_{BCE}$ и $S_{ABE} = {} = S_{DCE} = 1$, то $S_{BCE} = \frac{1}{x}$. Следовательно, $S_{ABCD} = 2 + x + \frac{1}{x}$. По условию $S_{ABCD} \leqslant 4$, то есть, $2 + x + \frac{1}{x} \leqslant {} \leqslant 4 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} \leqslant 2 \Leftrightarrow x = 1$. Это означает, что $S_{ABCD} = 4$, причем $S_{AED} = S_{BCE} = 1 = S_{ABE} = S_{DCE}$. Следовательно, $ABCD$ — параллелограмм, поэтому, $BC = AD = 3$.

5.3. *Ответ*: да, существует.

Рассмотрим данный квадрат $ABCD$ и произвольное звено MK данной ломаной длины p (см. рис. 167). Сумма длин ортогональных проекций этого звена на стороны AD и CD квадрата равна: $OM + OK \geqslant p$. Следовательно, сумма длин проекций всех звеньев ломаной на стороны AD и CD не менее 1000, значит, хотя бы на одну из этих сторон — не менее 500.

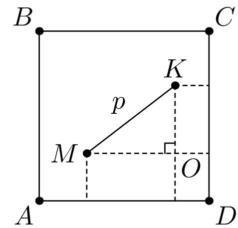


Рис. 167

Поскольку длина стороны квадрата равна 1, а сумма длин проекций на нее всех звеньев ломаной не менее 500, то на этой стороне найдется точка, которая принадлежит не менее чем пятистам проекциям. Прямая, проходящая через эту точку перпендикулярно выбранной стороне, является искомой.

2003/2004 учебный год

1.1. *Ответ*: да, верно.

Поскольку $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} = \dfrac{(a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)}{a+b+c} = (a+b+c) - 2\cdot\dfrac{ab+bc+ca}{a+b+c}$, то это число является целым.

1.2. *Ответ*: см. рис. 168а.

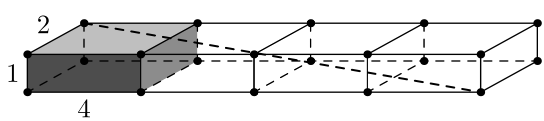


Рис. 168а

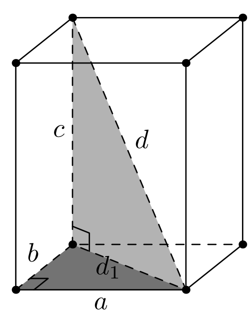


Рис. 168б

В прямоугольном параллелепипеде, имеющем измерения a, b и c, $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, где d — длина его диагонали (см. рис. 168б).

Существуют два принципиально различных способа сборки параллелепипеда из четырех кирпичей размером $a \times b \times c$.

Первый способ: кирпичи укладываются последовательно в один ряд, например, см. рис. 168а. При такой укладке измерения параллелепипеда будут равны $4a$, b и c. Тогда $d^2 = 16a^2 + b^2 + c^2 = (a^2 + b^2 + c^2) + 15a^2$, поэтому выгоднее всего увеличивать наибольшее измерение параллелепипеда, то есть прикладывать данные кирпичи друг к другу гранями 1×2.

Второй способ: укладка кирпичей в два ряда (см. рис. 168в). При этом $d^2 = 4a^2 + 4b^2 + c^2 = (a^2+b^2+c^2) + 3a^2 + 3b^2 < (a^2+b^2+c^2) + 15a^2$, если $a > b$, поэтому такая укладка менее выгодна.

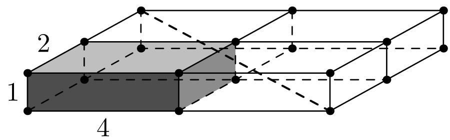


Рис. 168в

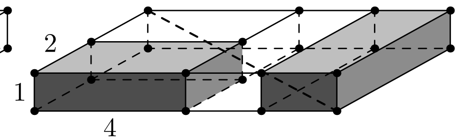


Рис. 168г

Для данных размеров кирпича возможно изменение предыдущей конструкции, сохраняющее результат сборки (см. рис. 168г), поэтому и в этом случае диагональ параллелепипеда не будет наибольшей из возможных.

1.3. *Ответ*: 1; 3; 4; 8; 13; 28.

Так как $n^5+2=(n^5+2^5)-30$ и n^5+2^5 делится на $n+2$, то данное число делится на $n+2$ тогда и только тогда, когда $n+2$ является делителем числа 30. Учитывая, что n — натуральное, получим: $n=1$, 3, 4, 8, 13 или 28.

Для доказательства того, что $n+2$ является делителем числа 30, можно также применить теорему Безу, или деление многочленов (по схеме Горнера или «в столбик»), или алгоритм Евклида.

2.1. *Ответ*: 0.

Так как $|\cos\sqrt{x}|\leqslant 1$ и $|\sqrt{\cos x}|\leqslant 1$, то уравнение $\cos\sqrt{x}+\sqrt{\cos x}=2$ равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases}\sqrt{\cos x}=1,\\ \cos\sqrt{x}=1.\end{cases}$$

Из первого уравнения системы получим, что $x=2\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$, а из второго уравнения получим, что $\sqrt{x}=2\pi n\Leftrightarrow x=4\pi^2n^2$, где $n\in\mathbb{Z}$, $n\geqslant 0$. Найдем пересечение полученных множеств: $2\pi k=4\pi^2n^2\Leftrightarrow k=$ $=2\pi n^2$. Так как π — иррациональное число, то последнее равенство выполняется тогда, и только тогда, когда $n=k=0$. Следовательно, единственным решением данного уравнения является $x=0$.

2.2. *Ответ*: $32\sqrt{34}$.

Первый способ. Пусть T — общее начало векторов, O — центр квадрата, образующего шахматную доску, а R — точка, симметричная T относительно O (см. рис. 169а). Для любой пары центров клеток P и Q, симметричных относительно точки O, выполняется равенство: $\overline{TP}+\overline{TQ}=\overline{TR}$. Всего таких пар — 32, поэтому, сумма всех рассматриваемых векторов равна $32\overline{TR}$, где $|\overline{TR}|=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$.

Второй способ. Введем прямоугольную систему координат с началом в центре клетки $c2$ (см. рис. 169б). В рассматриваемой системе координат центр каждой клетки имеет целочисленные координаты вида $(i;j)|\ -2 \leqslant i \leqslant 5;\ -1 \leqslant j \leqslant 6$. Пусть сумма $\overline{S}$ указанных векторов имеет координаты $(a;b)$. Так как абсциссу и ординату суммы можно вычислять независимо друг от друга, то $a = 8\sum\limits_{i=-2}^{5} i = 8\cdot 12 = 96$; $b = 8\sum\limits_{j=-1}^{6} j = 8\cdot 20 = 160$. Тогда $|\overline{S}| = \sqrt{a^2+b^2} = 32\sqrt{34}$.

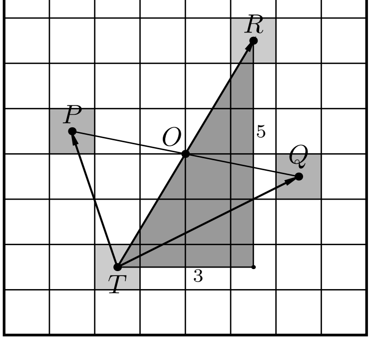


Рис. 169а

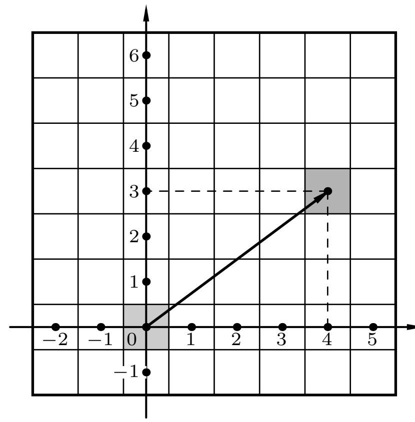


Рис. 169б

2.3. *Ответ*: нет, не прав.

Предположим, что Незнайка смог отметить на плоскости 15 точек с таким условием. Рассмотрим три прямые, на одной из которых лежат 7 точек, на другой — 6 точек, а на третьей — 5 точек. Эти прямые различны и имеют не более трех общих точек, поэтому они содержат не менее чем $(7+6+5)-3 = 15$ отмеченных точек, то есть, все точки, отмеченные Незнайкой. Любая прямая, отличная от уже рассмотренных, не может иметь более одной общей точки с каждой из них, то есть, содержит не более трех отмеченных точек. Следовательно, прямой, содержащей ровно 4 отмеченные точки, не существует.

3.1. *Ответ*: 14952.

Заметим, что последовательность (x_n), в которой разности соседних членов образуют арифметическую прогрессию, можно записать в виде: $x;\ x+a;\ x+2a+d;\ x+3a+3d;\ \ldots;\ x+(n-1)\,a+(1+2+\ldots+(n-2))\,d$, где a и d — первый член и разность этой прогрессии соответственно. Тогда $x_n = x+(n-1)\,a+(1+2+\ldots+(n-2))\,d = x+(n-1)\,a+\dfrac{(n-2)\,(n-1)}{2}\,d$.

В нашем случае: $x = 3$, $a = 4$, $d = 3$. Тогда на сотом месте в данной последовательности стоит число: $3 + 99 \cdot 4 + \dfrac{99 \cdot 98 \cdot 3}{2} = 14952$.

3.2. *Первый способ.* Рассмотрим гомотетию с центром в точке O и коэффициентом $k = -\dfrac{BC}{AD}$. При этой гомотетии образом треугольника DOA является треугольник BOC (см. рис. 170а). Так как гомотетия сохраняет прямолинейность, величины углов и отношение длин отрезков, расположенных на одной прямой, то серединные перпендикуляры к сторонам одного треугольника перейдут в серединные перпендикуляры к сторонам другого треугольника. Таким образом, O_1 — центр окружности, описанной около треугольника BOC, перейдет в O_2 — центр окружности, описанной около треугольника DOA. Следовательно, точки O_1, O и O_2 лежат на одной прямой, то есть, окружности, описанные около треугольников AOD и BOC, касаются друг друга.

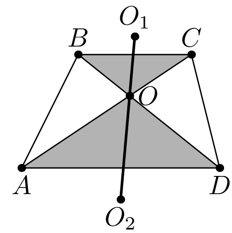


Рис. 170а

Второй способ. Рассмотрим окружность, описанную около треугольника BOC, и заметим, что хотя бы один из углов BCA или CBD является острым, так как они лежат в одном треугольнике BOC. Пусть, например, острым является $\angle CBD = \varphi = \angle ADB$ (см. рис. 170б). Тогда $\angle CO_1O = 2\varphi$, как центральный угол, опирающийся на ту же дугу. Так как треугольник CO_1O — равнобедренный, то $\angle COO_1 = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$. Аналогично, рассматривая окружность, описанную около треугольника AOD, получим, что $\angle AOO_2 = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$.

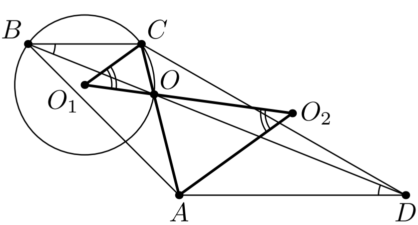


Рис. 170б

Так как точки C, O и A лежат на одной прямой, то полученное равенство углов означает, что и точки O_1, O и O_2 также лежат на одной прямой, то есть, окружности, описанные около треугольников AOD и BOC, касаются друг друга.

3.3. *Ответ*: нет, не сможет.

Предположим, что Вася смог раскрасить круги требуемым образом. Выберем один из использованных цветов и рассмотрим все круги в которых он присутствует. В каждом из этих кругов использовано еще по два цвета, причем все эти цвета — различны. Следовательно, их количество — четно. Это противоречит тому, что Васе требуется использовать еще 23 цвета.

4.1. *Ответ*: $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $-\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Первый способ. Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 4x^3 - 3x \geqslant 0, \\ 1 - x^2 = 16x^6 - 24x^4 + 9x^2. \end{cases}$$

Решим уравнение системы, сделав замену $y = x^2$: $16y^3 - 24y^2 + 10y - -1 = 0$. Заметим, что $y = \dfrac{1}{2}$ является корнем этого уравнения. Разделив уравнение на $y - \dfrac{1}{2}$, получим, что $16y^2 - 16y + 2 = 0$. Корни полученного уравнения: $y_1 = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$, $y_2 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$. Тогда $x = \pm\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ или $x = \pm\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ или $x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Подстановкой в неравенство убеждаемся, что корнями исходного уравнения являются только числа $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $-\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ и $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Второй способ. Заметим, что если x — корень данного уравнения, то $|x| \leqslant 1$. Пусть $x = \cos t$, где $t \in [0;\pi]$, тогда исходное уравнение принимает вид: $\sqrt{1-\cos^2 t} = 4\cos^3 t - 3\cos t \Leftrightarrow |\sin t| = \cos 3t$. Так как $t \in [0;\pi]$, то $\sin t \geqslant 0$, то есть полученное уравнение равносильно: $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) - \cos 3t = 0 \Leftrightarrow \sin\left(t + \dfrac{\pi}{4}\right)\,\sin\left(2t - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$ или $t = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{1}{2}\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Условию $t \in [0;\pi]$ удовлетворяют числа: $t_1 = \dfrac{\pi}{8}$, $t_2 = \dfrac{5\pi}{8}$ и $t_3 = \dfrac{3\pi}{4}$. Следовательно, $x_1 = \cos\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{\dfrac{1+\cos(\pi/4)}{2}} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$; $x_2 = \cos\dfrac{5\pi}{8} = -\sin\dfrac{5\pi}{8} = \sqrt{\dfrac{1-\cos(\pi/4)}{2}} = -\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)} = -\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $x_3 = = \cos\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

4.2. Пусть r — радиус окружностей, перечисленных в условии (см. рис. 171). Так как $S = \dfrac{1}{2}\,Pr$, где S — площадь треугольника, а P — его периметр, то $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = \dfrac{1}{2}\,(P_{ABCD} + 2BD)r$.

С другой стороны, $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2}(P_{ABCD} + 2AC)r$. Приравнивая полученные выражения и упрощая равенство, получим, что $AC = BD$, что и требовалось доказать.

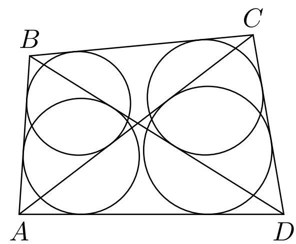


Рис. 171

4.3. *Ответ*: нет, не является.

Заметим, что любое простое число, кроме числа 2, является нечетным. Нечетное число в любой натуральной степени — также нечетно, поэтому и их произведение является нечетным числом. Следовательно, полученное число можно записать в виде: $2^2 \cdot (2k+1) + 1 = 8k + 5$, где k — некоторое натуральное число. Дальнейшие рассуждения можно провести различными способами.

Первый способ. Последовательно возводя в квадрат числа вида: $8n$, $8n\pm1$, $8n\pm2$, $8n\pm3$ и $8n+4$, получим, что полный квадрат при делении на 8 может давать только остатки 0, 1 или 4. Таким образом, полученное число не является точным квадратом.

Второй способ. Пусть $2^2 \cdot (2k+1) + 1 = n^2$, где n — натуральное число. Тогда $4(2k+1) = (n-1)(n+1)$. Число, стоящее в левой части этого равенства, делится на 4, но не делится на 8. Множители, стоящие в правой части равенства, имеют одинаковую четность и отличаются на 2. Так как число в левой части — четное, то оба этих множителя — четные, причем один из них (и только один) делится на 4. Следовательно, число в правой части равенства должно делиться на 8. Полученное противоречие показывает, что число, указанное в условии, не является точным квадратом.

5.1. Так как $xyz = 0,5$ и $y^2 + z^2 \geqslant 2yz$, то

$$\frac{xy^2}{x^3+1} = \frac{xy^2}{x^3+2xyz} = \frac{y^2}{x^2+2yz} \geqslant \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

Аналогично:

$$\frac{yz^2}{y^3+1} \geqslant \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2} \quad \text{и} \quad \frac{zx^2}{z^3+1} \geqslant \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

Сложим полученные неравенства:

$$\frac{xy^2}{x^3+1}+\frac{yz^2}{y^3+1}+\frac{zx^2}{z^3+1}\geqslant\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}+\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}+\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}=1,$$

что и требовалось доказать.

5.2. *Ответ*: 5,5 см.

Рассмотрим треугольник ABC, выбрав вершину C произвольно. Точку M на отрезке AB также выберем произвольным образом (см. рис. 172а). Затем опустим из центров O_1 и O_2 данных окружностей перпендикуляры к прямой AB, обозначив их основания P и Q соответственно. Так центры описанных окружностей лежат на серединных перпендикулярах к сторонам треугольников, то $AP = PM$; $MQ = QB$, то есть, вне зависимости от положения точки M верно равенство $PQ = 0,5AB = 5,5$ (см). Кроме того, $O_1O_2 \geqslant PQ$ (иначе катет соответствующего прямоугольного треугольника оказался бы меньше гипотенузы).

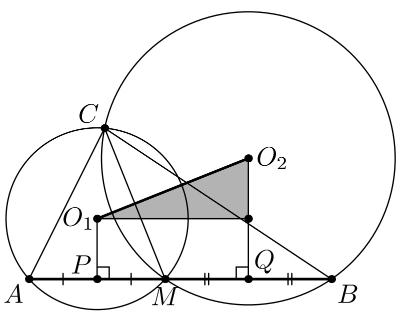


Рис. 172а

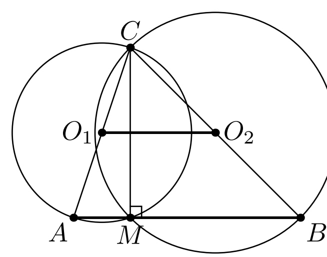


Рис. 172б

Равенство достигается, если $CM \perp AB$ (см. рис. 172б). В этом случае, точки O_1 и O_2 являются серединами гипотенуз прямоугольных треугольников CMA и CMB, а отрезок O_1O_2 будет средней линией треугольника ABC, то есть, $O_1O_2 = 0,5AB = 5,5$ (см).

5.3. Мысленно разобьем шахматную доску на четыре квадрата размером 4×4. Так как белых фигур — 10, то найдется квадрат, в котором стоит не более двух фигур. Без ограничения общности можно считать, что это левый верхний квадрат (см. рис. 173).

x_1	x_2		3
	x_3	1	2
2	1	2	3
3		3	

Рис. 173

Рассмотрим угловую клетку x_1, прилегающую к ней клетку x_2 и клетку x_3 по диагонали от угловой.

Цифрами 1, 2 и 3 отметим клетки, которые бьет конь, если он стоит в клетках x_1, x_2 и x_3 соответственно.

Заметим, что эти три множества клеток (типа 1, типа 2 и типа 3) не пересекаются. Кроме того, если конь стоит в одной из клеток x_1, x_2 или x_3, то ни на одну из фигур, стоящих вне рассматриваемого квадрата, он нападать не может.

Таким образом: 1) если обе белые фигуры стоят в клетках одного типа, например, типа 2, ставим черного коня либо в клетку x_1, либо в клетку x_3; 2) если белые фигуры стоят в клетках разного типа, например, 1 и 2, то ставим коня в клетку x_3; 3) если обе белые фигуры стоят в двух клетках, отмеченных знаком x_k, то ставим коня в третью клетку, отмеченную таким знаком. Случаи, когда одна фигура стоит в клетке, отмеченной знаком x_k, а другая — в какой-то другой клетке, сводятся к уже разобранным.

2004/2005 учебный год

1.1. *Ответ*: $(3; 1)$.

Пусть $(x; y)$ — решение неравенства. Тогда из условия задачи следует, что $|x-3y| < 1$. Так как x и y — целые числа, то $x = 3y$. Подставим этот результат в исходное неравенство, тогда: $|6y - 5,5| \leqslant \dfrac{2005}{2006} \Rightarrow$ $\Rightarrow |6y-5,5| < 1 \Leftrightarrow -1 < 6y - 5,5 < 1 \Leftrightarrow \dfrac{3}{4} < y < \dfrac{13}{12}$. Таким образом, $y = 1$; $x = 3$. Проверка показывает, что $(3; 1)$ является решением исходного неравенства.

Возможно также «лобовое решение», основанное на раскрытие модулей, но тогда придется рассмотреть четыре случая, поэтому такое решение является очень трудоемким.

1.2. *Ответ*: нет, не обязательно.

Например, рассмотрим квадрат $ABCD$ и вписанную в него окружность. Проведем две касательные к окружности, симметричные относительно ее центра O (см. рис. 174). Тогда шестиугольник $EFBE'F'D$ удовлетворяет условию задачи, но не является правильным, так как в нем есть прямые углы.

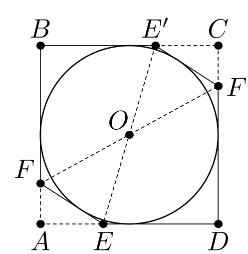


Рис. 174

Можно привести и более общий пример: достаточно рассмотреть окружность с центром O и построить описанную около нее ломаную $EFBE'$, у которой не все звенья между собой равны, а точки E и E' симметричны относительно O. Искомый шестиугольник получится *из этой ломанной симметрией относительно точки O и не будет правильным.*

1.3. Пусть A — исходное число, B — число, полученное после перестановки цифр. Тогда, по условию, $A = 3B$, то есть A кратно трем, следовательно сумма цифр числа A делится на 3. Поскольку число B записывается теми же цифрами, что и число A, то оно также кратно трем, следовательно, A делится на 9, тогда и B делится на 9. Таким образом, $A = 3B$ делится на 27.

Отметим, что числа, указанные в условии, существуют, например, $A = 3105$; $B = 1035$.

2.1. *Ответ*: $a = 0$.

Заметим, что если $(m; n)$ — решение данной системы, то $(n; m)$ — также решение этой системы. Следовательно, если данная система имеет единственное решение, то оно имеет вид $(m; m)$. Таким образом:

$$\begin{cases} 2m^4 = a, \\ 1 + m^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0, \\ a = 0. \end{cases}$$

При $a = 0$ данная система действительно имеет единственное решение, так как

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 0, \\ \cos(x - y) + xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = y = 0.$$

2.2. Из условия задачи следует, что точки A, C_1, A_1 и C лежат на окружности с центром в точке E и радиусом EA. Поэтому, вписанный в нее угол C_1A_1A в два раза меньше центрального угла C_1EA, опирающегося на ту же дугу. С другой стороны, треугольник C_1DA_1 — равнобедренный (см. рис. 175), следовательно его внешний угол C_1DA в два раза больше угла C_1A_1A. Таким образом, $\angle C_1DA = \angle C_1EA$, поэтому точки A, C_1, D и E лежат на одной окружности.

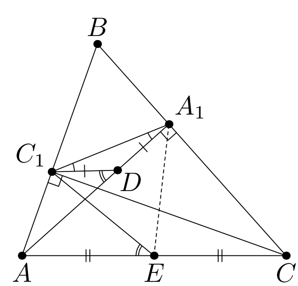


Рис. 175

2.3. *Ответ*: нет, не имеет.

При целых значениях y правая часть уравнения при делении на 4 дает остаток 3. Левая часть уравнения при четных значениях x делится на 4, а при нечетных значениях x при делении на 4 дает остаток 1.

Действительно, если $x = 2k + 1$, где k — целое число, то $5x^4 = (4 + 1)(2k+1)^4 = (4+1)(4k^2+4k+1)^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$.

Полученное противоречие показывает, что данное уравнение не имеет целочисленных решений.

3.1. Так как $0 < x < \frac{\pi}{6}$, то все слагаемые в данной бесконечной сумме положительны и их можно произвольно группировать, кроме того, $0 < \sin^2 x < \frac{1}{4}$ и $0 < \operatorname{tg}^2 x < \frac{1}{3}$. Пусть данная сумма $S = S_1 + S_2$, где $S_1 = \sin x + \sin^3 x + \ldots$; $S_2 = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x + \ldots$, то есть, S_1 — сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $\sin x$ и знаменателем $\sin^2 x$, а S_2 — сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $\operatorname{tg}^2 x$ и знаменателем $\operatorname{tg}^2 x$. Тогда $S_1 = \frac{\sin x}{1-\sin^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$; $S_2 = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$. Так как на $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ функция $y = \sin x$ возрастает, а функция $y = \cos^2 x$ убывает, то наибольшее значение S_1 достигается при $x = \frac{\pi}{6}$. Следовательно, если $0 < x < \frac{\pi}{6}$, то $S_1 = \frac{\sin x}{\cos^2 x} < \frac{0,5}{0,75} = \frac{2}{3}$. Аналогично, на $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ функция $y = \operatorname{tg}^2 x$ возрастает, а функция $y = 1 - \operatorname{tg}^2 x$ убывает, то есть и наибольшее значение S_2 достигается при $x = \frac{\pi}{6}$. Следовательно, если $0 < x < \frac{\pi}{6}$, то $S_2 = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1-\operatorname{tg}^2 x} < \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$. Таким образом, если $0 < x < \frac{\pi}{6}$, то $S < \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6} < 1,2$.

Справедливость использованных при решении неравенств $S_1 < \frac{2}{3}$ и $S_2 < \frac{1}{2}$ для $0 < x < \frac{\pi}{6}$ можно доказать и без использования монотонности тригонометрических функций, например:

$$1)\ \begin{cases} \dfrac{\sin x}{1-\sin^2 x} < \dfrac{2}{3}, \\ 0 < \sin x < \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sin x < 2 - 2\sin^2 x, \\ 0 < \sin x < \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 < 0, \\ 0 < \sin x < \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sin x + 2)(2\sin x - 1) < 0, \\ 0 < \sin x < \dfrac{1}{2} \end{cases};$$

$$2)\ \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1-\operatorname{tg}^2 x} < \dfrac{1}{2}, \\ 0 < \operatorname{tg}^2 x < \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\operatorname{tg}^2 x < 1 - \operatorname{tg}^2 x, \\ 0 < \operatorname{tg}^2 x < \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\operatorname{tg}^2 x < 1, \\ 0 < \operatorname{tg}^2 x < \dfrac{1}{3} \end{cases}.$$

(*Полученные системы неравенств выполняются для всех указанных значений* x). *Отметим также, что существенным моментом решения является ссылка на то, что все члены данной бесконечной суммы положительны. В противном случае разбиение бесконечной суммы на несколько сумм может приводить к неожиданным результатам. Например, рассмотрим бесконечную сумму*: $S = 1-1+1-1+1-1+\ldots$. *Группируя слагаемые по два, начиная с первого*: $S = (1-1)+(1-1)+$ $+(1-1)+\ldots$, *получим, что* $S = 0$. *Группируя их по два, начиная со второго*: $S = 1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots$, *получим, что* $S = 1$. *Переставив соседние слагаемые местами, и группируя их, начиная со второго*: $S = -1+(1-1)+(1-1)+\ldots$, *получим, что* $S = -1$. *И наконец, можно записать данную сумму так*: $S = 1-(1-1+1-1+\ldots)$ *и составить уравнение* $S = 1-S$, *откуда* $S = 0{,}5$.

3.2. *Ответ*: 7.

Первый способ. Пусть a, b и c — длины сторон данного треугольника ABC, а S — его площадь. Проведем отрезки, соединяющие одну из данных точек M с вершинами треугольника (см. рис. 176а). Тогда: $a+3b+15c = 2S$. Аналогично, соединив другую данную точку с вершинами треугольника, получим, что $4a+5b+11c = 2S$. Умножим второе уравнение на 2 и вычтем первое. Получим: $7a+7b+7c = 2S$, откуда найдем радиус окружности, вписанной в треугольник: $r = \dfrac{2S}{a+b+c} = 7$.

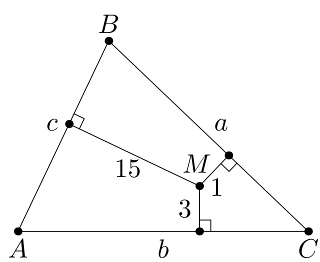


Рис. 176а

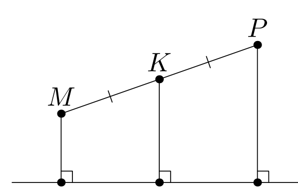


Рис. 176б

Второй способ. Пусть M и K, соответственно — точки, указанные в условии. Рассмотрим точку P, симметричную точке M относительно K. Воспользуемся тем, что если отрезок не пересекает прямую, то расстояние от его середины до этой прямой равно полусумме расстояний от его концов до этой прямой. Этот факт непосредственно следует из теоремы Фалеса и свойства средней линии трапеции (см. рис. 176б). Тогда расстояния от точки P до каждой из прямых, содержащих стороны треугольника, равно 7, то есть P равноудалена от этих прямых. При этом точка P лежит внутри данного треугольника (если бы отрезок MP пересекал какую-то из сторон треугольника, то расстояние от его середины K до прямой, содержащей эту сторону, было бы равно модулю полуразности расстояний от M и P), поэтому искомый радиус вписанной окружности равен 7.

3.3. *Ответ*: 99.

Рассмотрим все натуральные числа от $A = 100 \cdot 100 + 1$ до $B = 100 \cdot 101 - 1$. Ни одно из таких чисел нельзя разложить в произведение двух трехзначных, так как числа 100 и 101 — наименьшие трехзначные. Таким образом получим 99 «неразложимых» чисел, идущих подряд. Большего количества «неразложимых» чисел, идущих подряд, быть не может, так как из любых ста идущих подряд пятизначных чисел одно будет делиться на 100, причем частное от деления пятизначного числа на 100 будет трехзначным.

4.1. 1) При $x = 0$ данное неравенство, очевидно, выполняется.

2) Заметим, что значение левой части неравенства при любом отрицательном значении x больше, чем при противоположном положительном значении x, поэтому достаточно доказать, что неравенство выполняется при $x > 0$.

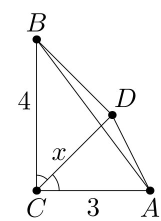


Рис. 177

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C и катетами $AC = 3$; $BC = 4$ (см. рис. 177). На биссектрисе угла C отметим точку D такую, что $CD = x$.

Применяя теорему косинусов для треугольников ADC и BDC, соответственно получим: $AD = \sqrt{AC^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD \cdot \cos \angle ACD} = \sqrt{9 + x^2 - 2 \cdot 3x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}$ и $BD = \sqrt{BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos \angle BCD} = \sqrt{16 + x^2 - 2 \cdot 4x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}$. Согласно неравенству треугольника $AD + BD \geqslant AB$, откуда $\sqrt{9 + x^2 - 3x\sqrt{2}} + \sqrt{16 + x^2 - 4x\sqrt{2}} \geqslant 5$, что и требовалось доказать.

4.2. *Ответ*: да, можно.

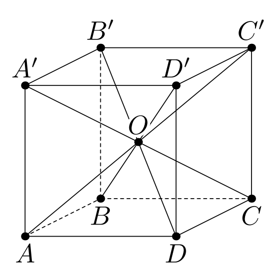


Рис. 178

Первый способ. Проведем отрезки, соединяющие центр O куба $ABCDA'B'C'D'$ с его вершинами (см. рис. 178). Проходящие через них плоскости разобьют куб на шесть равных четырехугольных пирамид, у которых основаниями являются грани куба, а вершиной — точка O. Объединив по две соседние пирамиды, например, $OABCD$ и $OAA'B'B$; $OA'B'C'D'$ и $OAA'D'D$; $OBB'C'C$ и $OCC'D'D$, получим три равные фигуры, не являющиеся ни параллелепипедами, ни пирамидами.

Второй способ. Рассмотрим одну из диагоналей куба, например, $B'D$. Проведем три полуплоскости с границей $B'D$ так, чтобы угол между каждыми двумя был равен $120°$. Они разобьют куб на три равные части, так как одна из другой получается поворотом вокруг прямой $B'D$ на $120°$. Несложно выбрать полуплоскости таким образом, чтобы они не содержали ребра куба, тогда получившиеся части не окажутся пирамидами.

4.3. *Ответ*: нет, не существует.

Заметим, что если в некоторый момент обе шашки находятся на клетках одного цвета, то после любого допустимого хода шашки окажутся на клетках разного цвета, и наоборот. Таким образом, позиции, в которых шашки стоят на клетках одного цвета, и позиции, в которых шашки стоят на клетках разного цвета, чередуются. Если требуемая последовательность ходов существует, то либо позиций обоих типов одинаковое количество, либо позиций одного типа на одну больше, чем позиций другого типа.

Подсчитаем сначала количество позиций, когда обе фишки стоят на клетках одного цвета. Белую фишку можно поставить на любую из 64 клеток, после чего черную можно поставить на любую свободную клетку того же цвета, которых — 31. Итого: 64×31 позиций.

Теперь подсчитаем количество позиций другого типа. Белую фишку опять можно поставить на любую из 64 клеток, а черную — на любую из 32 клеток другого цвета. Итого: 64×32 позиций. Так как $64 \times 32 - 64 \times \times 31 = 64 > 1$, то требуемой последовательности ходов не существует.

5.1. *Ответ*: да, существует.

Например, если $P(x) = x + \sqrt{2}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$, то такой многочлен, очевидно, принимает значения, указанные в условии. При $x = n$, где $n \in \mathbb{N}$ и $n > 5$, его значения имеют вид: $P(n) = n + m\sqrt{2}$, где m — также натуральное число, поэтому $P(n)$ — иррационально.

5.2. *Ответ*: $4\sqrt{3}$.

Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник (см. рис. 179а). Отразим вершину B симметрично относительно серединного перпендикуляра к отрезку AC и получим точку B'. Тогда $B'A = BC$, $CB' = AB$ и $S_{AB'C} = S_{ABC}$. Следовательно, $S_{AB'CD} = S_{ABCD} = \dfrac{AB \cdot CD + BC \cdot AD}{2} = \dfrac{CB' \cdot CD + B'A \cdot AD}{2}$. С другой стороны,

$S_{AB'CD} = \dfrac{CB' \cdot CD \cdot \sin\angle B'CD + B'A \cdot AD \cdot \sin\angle B'AD}{2}$. Таким образом, $\angle B'AD = \angle B'CD = 90°$. Так как $\angle B'AD = \angle BAD = 90°$, то лучи AB' и AB совпадают, следовательно, симметричные точки B и B' также совпадают (см. рис. 179б). Тогда $BA = BC$, $\angle BAC = \angle BCA$ и $\angle DAC = \angle DCA = 60°$, то есть $\triangle ADC$ — равносторонний. Следовательно, $\angle BAC = \angle BCA = 30°$, значит, $CD = CA = 4\sqrt{3}$.

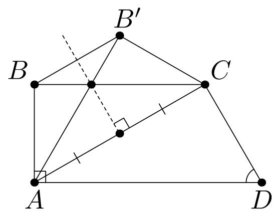


Рис. 179а

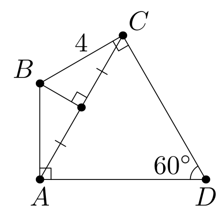


Рис. 179б

5.3. *Ответ*: одинаково.

1) Каждому треугольнику со сторонами $a \leqslant b \leqslant c$ и периметром 2005 поставим в соответствие треугольник со сторонами $a+1 \leqslant b+1 \leqslant c+1$ и периметром 2008. Такой треугольник существует, так как $(a+1)+(b+1) > (a+b)+1 > c+1$.

2) Пусть есть треугольник со сторонами $x \leqslant y \leqslant z$ и периметром 2008, тогда рассмотрим отрезки с длинами $x-1$; $y-1$; $z-1$. Очевидно, что эти числа — натуральные (если, например, $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$, то $y+z=2007$ и треугольника со сторонами 1, y и z, где y и z — целые, не существует). Кроме того, $(x-1)+(y-1) = (x+y)-2 > z-2$. Так как эти числа — натуральные, то отсюда следует, что $(x-1)+(y-1) \geqslant z-1$. Поэтому, рассматриваемые отрезки не образуют треугольника только в случае, когда $(x-1)+(y-1) = (z-1) \Leftrightarrow x+y = z+1$. Тогда $P = x+y+z = 2z+1$ — нечетное число, поэтому не может быть равно 2008. Следовательно, $(x-1)+(y-1) > z-1$, то есть каждому треугольнику со сторонами $x \leqslant y \leqslant z$ и периметром 2008 поставлен в соответствие треугольник со сторонами $x-1 \leqslant y-1 \leqslant z-1$ и периметром 2005.

Таким образом, указанное соответствие между множествами треугольников взаимно однозначное, и треугольников с целыми сторонами и периметром 2005 столько же, сколько с периметром 2008.

2005/2006 учебный год

1.1. *Ответ*: три корня.

Из условия задачи следует, что коэффициенты a и c должны быть отличны от нуля. Действительно, если $a = 0$, то первое уравнение примет вид $bx^4 = -c$. Такое уравнение имеет либо бесконечно много действительных корней (при $b = c = 0$), либо не более двух. Если $c = 0$, то первое уравнение примет вид $x^4(ax + b) = 0$. Такое уравнение также имеет либо бесконечно много действительных корней (при $a = b = 0$), либо не более двух.

Так как $a \neq 0$ и $c \neq 0$, то среди корней обоих данных уравнений нет нуля. Пусть $t \neq 0$ — корень исходного уравнения, тогда $\dfrac{1}{t}$ — корень уравнения $cx^5 + bx + a = 0$. Действительно,

$$\begin{cases} at^5 + bt^4 + c = 0, \\ t \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a + b\frac{1}{t} + c\left(\frac{1}{t}\right)^5 = 0.$$

Аналогично, если $m \neq 0$ — корень второго уравнения, то $\dfrac{1}{m}$ — корень первого уравнения. Таким образом, данные уравнения имеют одинаковое количество корней.

1.2. *Ответ*: да, существует.

Например, рассмотрим прямую треугольную призму $ABCA'B'C'$, в основании которой лежит равнобедренный прямоугольный треугольник, а боковое ребро равно катету этого треугольника (см. рис. 180а). Тогда замкнутая ломаная $ABCC'B'A'A$ имеет звенья одинаковой длины, а угол между любыми соседними звеньями — прямой.

Рассмотренная призма является «половиной» куба, поэтому аналогичный пример искомой ломаной может быть приведен на кубе.

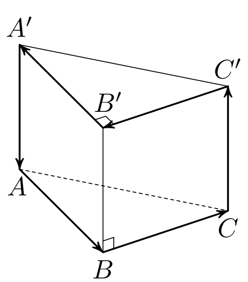


Рис. 180а

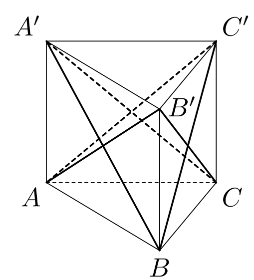


Рис. 180б

В качестве примера можно также рассмотреть правильную треугольную призму $ABCA'B'C'$, у которой боковое ребро равно ребру основания (см. рис. 180б). Тогда в качестве искомой ломаной можно взять, например, ломаную $AB'CA'BC'A$. Ее звеньями являются диагонали равных квадратов, а равенство углов между соседними звеньями следует из равенства треугольников $AB'C$, $B'CA'$, $CA'B$, $A'BC'$, $BC'A$ и $C'AB'$ (по трем сторонам).

Существуют и другие примеры.

1.3. *Ответ*: да, можно.

Например, раскрасим ребра каждого основания одинаковым образом, чередуя цвета (см. рис. 181). Образуются боковые грани трех типов. Так как число 99 делится на 3, то чередование цветов образует цикл. Боковые ребра красим по следующему правилу: в гранях с ребрами оснований первого цвета боковые ребра красятся во второй и третий цвет; в гранях с ребрами оснований второго цвета боковые ребра красятся в третий и первый цвет, и так далее. Тем самым, цвета боковых ребер также чередуются, причем выполняются все условия задачи.

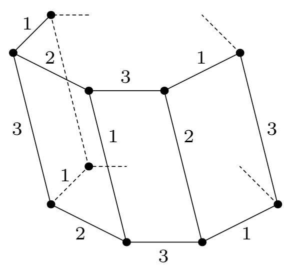


Рис. 181

2.1. *Ответ*: $a = b = c = d = 0$.

Сложив почленно данные уравнения, получим следствие из системы:

$$8a^2 + 9b^2 + 7c^2 + 4d^2 = 16ab + 8cd \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (8a^2 - 16ab + 8b^2) + (4c^2 - 8cd + 4d^2) + b^2 + 3c^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 8(a-b)^2 + 4(c-d)^2 + b^2 + 3c^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0, \\ c - d = 0, \\ b = 0, \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = d = 0.$$

Полученная четверка чисел удовлетворяет исходной системе уравнений.

2.2. *Ответ*: нет, не могут.

Первый способ. Пусть прямая EF пересекает прямые AB и CD в точках P и Q соответственно (см. рис. 182а). Так как $BE = EC$ (по условию), $\angle PBE = \angle ECF$ ($AB \parallel CD$) и $\angle BEP = \angle CEF$, то равны треугольники BEP и CEF. Аналогично доказывается равенство треугольников DFQ и CFE. Следовательно, $PE = EF = FQ$.

Предположим, что равны углы BAE, EAF и FAD. Тогда, из доказанного равенства получим, что AE — биссектриса и медиана треугольника PAF, а AF — биссектриса и медиана треугольника EAQ, то есть каждый из этих отрезков является также и высотой треугольника. Таким образом, из точки A проведены два различных перпендикуляра к прямой EF, что невозможно.

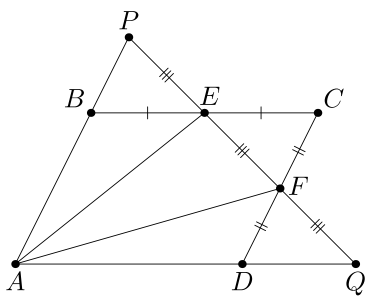


Рис. 182а

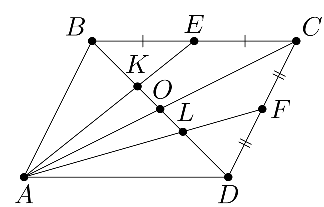


Рис. 182б

Второй способ. Пусть отрезки AE и AF пересекают диагональ BD данного параллелограмма в точках K и L соответственно (см. рис. 182б). Тогда $BK = KL = LD$. Это равенство можно доказать многими способами. Например, пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма, тогда с учетом равенства $AO = OC$ получим, что K — точка пересечения медиан треугольника ABC, поэтому $BK = 2OK$. Аналогично, L — точка пересечения медиан треугольника ADC, поэтому $DL = 2OL$. Учитывая, что $BO = OD$, получим требуемое равенство. Дальнейшие рассуждения аналогичны приведенным выше. Получим, что из точки A проведены два различных перпендикуляра к прямой BD, что невозможно.

Другие возможные способы доказательства равенства $BK = KL = LD$ *— использование теоремы Фалеса, площадей или векторов.*

В заключение заметим, что поскольку середины отрезков и прямые, параллельные данным, строятся циркулем и линейкой, а задача о трисекции угла (деление угла на три равные части с помощью циркуля и линейки) в общем случае неразрешима, то сразу возникает *мысль, что описанная в условии конструкция невозможна. Тем не менее, это непосредственно не следует из неразрешимости задачи о трисекции угла, так как некоторые углы трисекцию допускают. Известна, например, следующая теорема: угол* $\dfrac{360^\circ}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ *можно циркулем и линейкой разделить на три равные части тогда и только тогда, когда n не делится нацело на 3. В частности, отсюда следует, что угол величиной 45° можно разделить на три равные части, а угол величиной 60° — нельзя.*

2.3. *Ответ*: три числа.

Заметим, что больше трех последовательных упрощенных чисел быть не может. Действительно, среди четырех последовательных натуральных чисел ровно одно кратно четырем. Среди чисел, делящихся на 4, упрощенным является только само число $4 = 2 \cdot 2$, но соседние с ним числа 3 и 5 упрощенными не являются.

Первая тройка последовательных упрощенных чисел: $33 = 3 \cdot 11$, $34 = 2 \cdot 17$ и $35 = 5 \cdot 7$. Для двузначных чисел есть еще два примера: $85 = 5 \cdot 17$, $86 = 2 \cdot 43$ и $87 = 3 \cdot 29$; $93 = 3 \cdot 31$, $94 = 2 \cdot 47$ и $95 = 5 \cdot 19$.

Существует бесконечно много троек последовательных упрощенных чисел, но доказать это достаточно сложно.

3.1. *Первый способ.* Заметим, что выполняются следующие числовые неравенства: $\dfrac{1}{2^2} < \dfrac{1}{1 \cdot 2}$; $\dfrac{1}{3^2} < \dfrac{1}{2 \cdot 3}$; $\ldots$; $\dfrac{1}{99^2} < \dfrac{1}{98 \cdot 99}$; $\dfrac{1}{100^2} < \dfrac{1}{99 \cdot 100}$. Кроме того, для любых натуральных k выполняется равенство $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$. Таким образом, $\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{99^2} + \dfrac{1}{100^2} < \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{98 \cdot 99} + \dfrac{1}{99 \cdot 100} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{98} - \dfrac{1}{99} + \dfrac{1}{99} - \dfrac{1}{100} = 1 - \dfrac{1}{100} = \dfrac{99}{100}$, что и требовалось доказать.

Второй способ. Докажем, что для любого натурального $n \geqslant 2$ справедливо неравенство: $\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2} < 1 - \dfrac{1}{n}$. Воспользуемся методом математической индукции.

1) При $n = 2$ получим верное неравенство $\dfrac{1}{2^2} < 1 - \dfrac{1}{2}$.

2) Предположим, что доказываемое неравенство верно при $n = k$, то есть $\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{k^2} < 1 - \dfrac{1}{k}$. Докажем, что это неравенство будет верным и при $n = k + 1$. Действительно, $\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{k^2} + \dfrac{1}{(k+1)^2} < 1 - \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{(k+1)^2} < 1 - \dfrac{1}{k+1}$, так как $\dfrac{1}{(k+1)^2} < \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.

Следовательно, рассматриваемое неравенство выполняется для всех натуральных $n \geqslant 2$. Исходное неравенство получается из доказанного при $n = 100$.

Для тех, кто уже знает простейшие интегралы, можно предложить еще один способ.

Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ *на* $[1; 100]$. *Тогда* $\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots +$
$+ \dfrac{1}{99^2} + \dfrac{1}{100^2} = \sum\limits_{k=2}^{100} f(k) = \sum\limits_{k=2}^{100} (k - (k-1)) f(k).$

Полученная сумма представляет собой площадь «ступенчатой» фигуры, расположенной под графиком $y = f(x)$ *(см. рис. 183). Рассматриваемая функция непрерывна и убывает на* $[1; 100]$, *поэтому площадь полученной фигуры меньше, чем площадь* S *соответствующей ей криволинейной трапеции. Учитывая, что*

$$S = \int_1^{100} f(x)dx = \int_1^{100} x^{-2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^{100} = -\frac{1}{100} + 1 = \frac{99}{100},$$

получим требуемое неравенство.

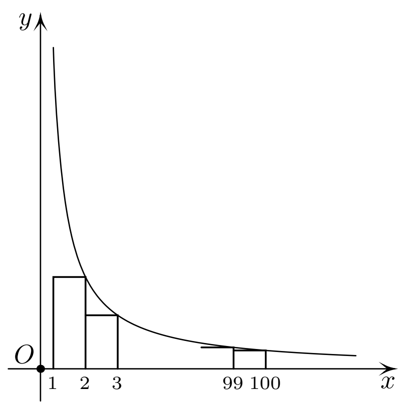


Рис. 183

3.2. Пусть O — центр полуокружности. Для определенности, рассмотрим случай, когда H — точка пересечения прямых AQ и BP, расположена внутри полуокружности (см. рис. 184а, б; для случая расположения точки H вне полуокружности доказательство аналогично). Так как $\angle APB = \angle BQA = 90^\circ$, то AQ и BP являются высотами треугольника ABC. Так как высоты треугольника пересекаются в одной точке, то $CH \perp AB$. Таким образом, для решения задачи достаточно доказать, что точка X лежит на прямой CH. Рассмотрим точку X_1 — середину отрезка CH и докажем, что она совпадает с точкой X.

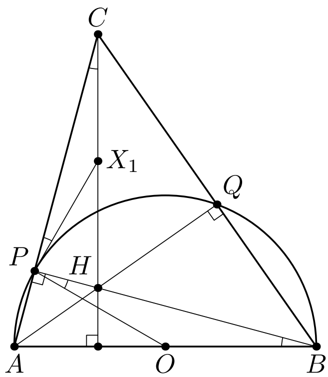


Рис. 184а

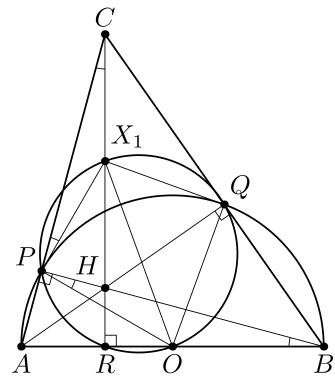


Рис. 184б

Первый способ. Так как PX_1 — медиана прямоугольного треугольника CPH, проведенная к его гипотенузе (см. рис. 184а), то $\angle X_1PB = 90^\circ - \angle X_1PC = 90^\circ - \angle X_1CP = \angle PAB$. При этом, $\angle PAB$ — вписанный и опирается на дугу BP. Следовательно, X_1P — касательная к данной полуокружности. Аналогично доказывается, что X_1Q — также касательная к полуокружности.

Второй способ. Воспользуемся следующей классической теоремой: в любом треугольнике середины его сторон, основания высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами, лежат на одной окружности, которую обычно называют *окружностью девяти точек*. В нашем случае окружность девяти точек треугольника ABC будет проходить, в частности, через точки P, Q, X_1, O и R — основание высоты, проведенной к стороне AB (см. рис. 184б). Так как $\angle X_1RO = 90^\circ$, то X_1O — диаметр этой окружности, поэтому $\angle X_1PO = \angle X_1QO = 90^\circ$. Это и означает, что X_1P и X_1Q — касательные к данной полуокружности.

3.3. *Ответ*: 4.

Раскрасим клетки данной таблицы в шахматном порядке. Из условия следует, что в клетках одного цвета будут стоять нечетные числа, а в клетках другого цвета — четные. Следовательно, в любых двух соседних клетках стоят числа разной четности.

17	18	19	20	21
16	15	14	13	22
9	10	11	12	23
8	1	2	3	24
7	6	5	4	25

Рис. 185

Таким образом, в любом столбце должно быть не менее двух четных чисел, поэтому простых чисел в столбце не более четырех, среди которых обязательно должно быть число 2.

Одна из возможных расстановок, удовлетворяющих условию задачи, приведена на рис. 185 (четыре простых числа — в третьем столбце).

Несложно также доказать, что для раскраски, приведенной в таблице, четные числа стоят в клетках белого цвета, но для решения задачи это не требуется.

4.1. *Ответ*: да, существует.

Пусть α, β и γ — углы треугольника, тогда по условию:

$$\begin{cases} \sin\alpha = \cos\beta = \operatorname{tg}\gamma, \\ \alpha + \beta + \gamma = \pi, \\ \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma > 0. \end{cases}$$

Так как $\sin\alpha > 0$ при $0 < \alpha < \pi$, то $\cos\beta > 0$ и $\operatorname{tg}\gamma > 0$, то есть, углы β и γ — острые.

1) Если $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, то из равенства $\sin\alpha = \cos\beta$ следует, что $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$. Тогда $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg}\gamma$ не существует, то есть этот случай невозможен.

2) Если $\dfrac{\pi}{2} \leqslant \alpha < \pi$, то $\sin\alpha = \cos\beta \Leftrightarrow \sin(\pi - \alpha) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \beta\right)$, где углы $\pi - \alpha$ и $\dfrac{\pi}{2} - \beta$ не тупые. Следовательно, полученное равенство равносильно тому, что $\pi - \alpha = \dfrac{\pi}{2} - \beta \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2} + \beta$. В этом случае $\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\pi - (\alpha + \beta)) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\beta\right) = \operatorname{ctg} 2\beta$, то есть исходная система уравнений имеет решения тогда, и только тогда, когда имеет решения система

$$\begin{cases} \cos\beta = \operatorname{ctg} 2\beta, \\ 0 < \beta < \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2\beta \cos\beta = \cos 2\beta, \\ 0 < \beta < \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin\beta\cos^{\beta} = 1 - 2\sin^2\beta, \\ 0 < \beta < \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin^3\beta - 2\sin^2\beta - 2\sin\beta + 1 = 0, \\ 0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Пусть $\sin\beta = t$, тогда получим уравнение $2t^3 - 2t^2 - 2t + 1 = 0$. Рассмотрим $f(t) = 2t^3 - 2t^2 - 2t + 1$, тогда $f(0) = 1 > 0$; $f(1) = -1 < 0$, поэтому такое уравнение имеет хотя бы один корень на $(0; 1)$. Это означает, что существует β, удовлетворяющее полученной системе, значит существует и треугольник, удовлетворяющий условию задачи.

Получив, что $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + \beta$, *можно рассуждать и по-другому. Пусть угол* β *близок к нулю, тогда угол* α *немного больше* $\dfrac{\pi}{2}$, *а угол* γ *немного меньше* $\dfrac{\pi}{2}$. *В этом случае* $\sin\alpha$ *и* $\cos\beta$ *близки к* 1, *а* $\operatorname{tg}\gamma$ *очень велик, то есть,* $\sin\alpha = \cos\beta < \operatorname{tg}\gamma$.

Если же угол β *выбрать немного меньше* $\dfrac{\pi}{4}$, *то угол* α *будет немного меньше* $\dfrac{3\pi}{4}$, *а угол* γ *будет близок к нулю. Тогда* $\sin\alpha = \cos\beta > \operatorname{tg}\gamma$. *Так как функции* $\sin x$ *и* $\cos x$ *— непрерывные, и функция* $\operatorname{tg} x$ *на* $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ *также непрерывна, то в какой-то момент выполняется равенство* $\sin\alpha = \cos\beta = \operatorname{tg}\gamma$, *то есть существует треугольник, удовлетворяющий условию задачи.*

4.2. *Ответ*: $R = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2 \pm 2ab\cos\varphi}}{2\sin\varphi}$.

Пусть в данном четырехугольнике $ABCD$: $AD = a$; $BC = b$; E — точка пересечения диагоналей. Вначале рассмотрим случай, когда $\angle CED = \varphi$ (см. рис. 186).

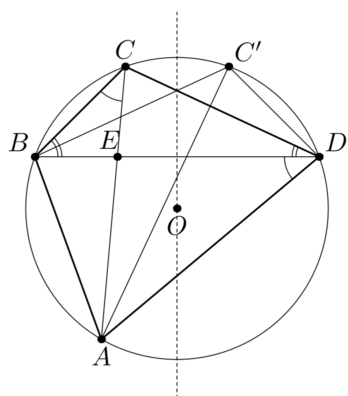


Рис. 186

Рассмотрим симметрию, ось которой — серединный перпендикуляр к диагонали BD. При такой симметрии точки B и D переходят друг в друга, а окружность, описанная около $ABCD$, — в себя, так как центр O этой окружности лежит на оси. Поэтому образом точки C, лежащей на окружности, является точка C_1, также лежащая на окружности.

Симметрия сохраняет расстояния и величины углов, следовательно, $DC_1 = BC = b$ и $\angle C_1DB = \angle CBD$. Кроме того, равны вписанные углы BDA и BCA. Следовательно, $\angle C_1DA = \angle C_1DB + \angle BDA = \angle CBD +$

$+ \angle BCA = \angle CED = \varphi$, так как $\angle CED$ — внешний угол треугольника BEC. Рассмотрим треугольник ADC_1: по теореме косинусов $C_1A^2 = DA^2 + DC_1^2 - 2DA \cdot DC_1 \cdot \angle C_1DA = a^2 + b^2 - 2abcos\varphi = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi$. Тогда, по следствию из теоремы синусов, $R = \dfrac{C_1A}{2\sin\angle C_1DA} = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\varphi}}{2\sin\varphi}$, где R — искомый радиус окружности.

Если данный угол φ — смежный с углом CED, то в полученном выражении φ заменяется на угол $180^\circ - \varphi$.

4.3. *Ответ*: нет, не может.

Предположим, что существует функция $f(x)$, удовлетворяющая условию задачи. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - x$ и докажем, что она принимает только иррациональные значения. Действительно, пусть $g(a)$ рационально при некотором a. Если a — рационально, то $f(a) = g(a) + a$ также рационально, что противоречит условию. Если a — иррационально, то по условию $f(a)$ — рационально, тогда $a = f(a) - g(a)$ должно быть рационально — противоречие.

Так как между любыми двумя иррациональными числами имеются рациональные, а функция $g(x)$ — непрерывна (разность непрерывных функций), то она тождественно равна некоторой иррациональной константе c. Тогда $f(c) = g(c) + c = 2c$, но число $2c$ иррациональное, что противоречит условию задачи. Поэтому функции $f(x)$, удовлетворяющей условию задачи, не существует.

Для тех, кто знаком с понятием мощности множества, можно предложить другое решение, основанное на том, что множество рациональных чисел счетное, а множество точек любого числового промежутка — не счетное.

Если функция $f(x)$, удовлетворяющая условию задачи, существует, то она принимает какие-то рациональные значения, причем множество этих значений счетное. Кроме того, она принимает еще какие-то значения в рациональных точках и множество этих значений также счетное. Таким образом, множество значений функции $f(x)$ — счетное. Так как $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, то это возможно только, если множество значений состоит из одного числа, то есть $f(x) = C$, что противоречит условию задачи.

5.1. *Ответ*: наибольшее значение 3; наименьшее значение 0, 5.

Первый способ. 1) Воспользовавшись очевидным неравенством $xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, получим, что $x^2 + xy + y^2 \leqslant \frac{3}{2}(x^2 + y^2) \leqslant 3$. Равенство достигается, например, при $x = y = 1$.

2) Воспользовавшись очевидным неравенством $xy \geqslant -\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, получим, что $x^2+xy+y^2 \geqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2) \geqslant \frac{1}{2}$. Равенство достигается, например, при $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Второй способ. Из условия задачи следует, что существуют такие $a \in [1; \sqrt{2}]$ и $\alpha \in (-\pi; \pi]$, что $x = a\cos\alpha$; $y = a\sin\alpha$. Тогда $x^2+xy+ +y^2 = a^2 + a^2\sin\alpha\cos\alpha = a^2(1+0,5\sin 2\alpha)$. Так как $-1 \leqslant \sin 2\alpha \leqslant 1$, то наибольшее значение полученного выражения достигается при $a = \sqrt{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ и равно 3, а наименьшее значение достигается при $a = 1$, $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ и равно 0,5.

5.2. *Ответ*: $BC = \sqrt{ab}$.

Первый способ. Из параллельности прямых BA и CM следует, что $\angle ABM = \angle BMC$, а из параллельности прямых BM и CD следует, что $\angle BMC = \angle DCM$ и $\angle AMB = \angle MDC$ (см. рис. 187а). Кроме того, так как $ABCD$ — вписанный четырехугольник, то $\angle BCM = 180^\circ - -\angle DCM - \angle DAB = 180^\circ - (\angle ABM + \angle MAB) = \angle AMB$.

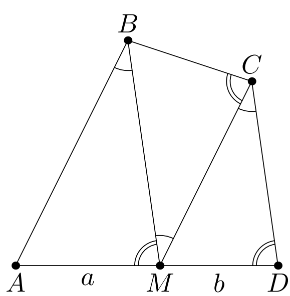


Рис.187а

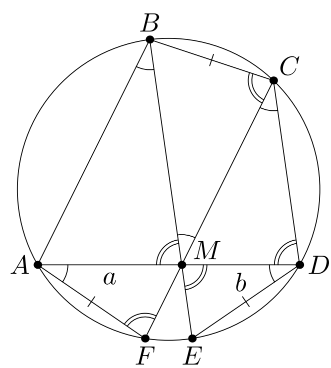


Рис. 187б

Таким образом, треугольники ABM, BMC и MCD подобны (по двум углам). Из подобия первой пары треугольников следует, что $\frac{AM}{BC} = \frac{BM}{MC}$, а из подобия второго и третьего треугольников следует, что $\frac{DM}{BC} = \frac{MC}{BM}$. Перемножив эти равенства почленно, получим, что $\frac{AM}{BC} \cdot \frac{DM}{BC} = 1$, то есть $BC^2 = ab$.

Второй способ. Продолжим прямые BM и CM и отметим точки их вторичного пересечения с окружностью — E и F соответственно (см.

рис. 187б). Получим две вписанные трапеции: $ABCF$ и $BCDE$. Около трапеции можно описать окружность тогда и только тогда, когда она равнобокая, поэтому $BC = AF = DE$.

Используя равенство вписанных углов, опирающихся на одну дугу, и параллельность прямых BM и CD, получим: $\angle DAF = \angle FCD = \angle ABE = \angle ADE$ и $\angle AFC = \angle ADC = \angle AMB = \angle DME$. Тогда треугольники AFM и DME подобны (по двум углам), следовательно, $\frac{AM}{DE} = \frac{AF}{DM}$. Учитывая, что $BC = AF = DE$, получим: $BC^2 = ab$.

5.3. *Ответ*: нет, не может.

Пусть отмечены вершины равностороннего треугольника ABC. Рассмотрим декартову систему координат на плоскости, начало которой точка O — середина стороны AC, ось абсцисс содержит сторону AC, а ось ординат проходит через вершину B, причем $B(0;1)$ (см. рис. 188). Тогда ординаты точек A и C равны нулю, а ордината центра исходного треугольника равна $\frac{0+1+0}{3} = \frac{1}{3}$.

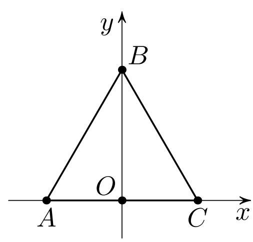


Рис. 188

На каждом шаге отмечается точка, ордината которой равна среднему арифметическому ординат концов отрезка. Поэтому ордината любой вновь отмеченной точки — рациональное число, записываемое обыкновенной дробью со знаменателем вида 2^n, где n — натуральное. Полученное противоречие показывает, что центр данного треугольника не может оказаться отмеченным.

11 класс

1998/1999 учебный год

1.1. *Ответ*: 0.

Для любого действительного числа x верно неравенство $2\cos(0{,}1x) \leqslant \leqslant 2$, а $2^x + 2^{-x} \geqslant 2$, причем равенство в последнем случае достигается только при $x = 0$. Следовательно корнем уравнения может являться только число 0, в чем и убеждаемся непосредственной проверкой.

1.2. Пусть M и K — центры окружностей (см. рис. 189). Так как отрезок MK является средней линией трапеции, то $MK = \frac{1}{2}(AD + BC) = = \frac{1}{2}(AB+CD) = R+r$. Следовательно, окружности касаются, что и требовалось доказать.

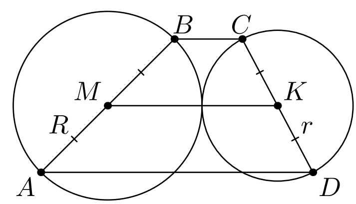


Рис. 189

1.3. *Ответ*: могут.

Например, у идущих подряд чисел 444999 и 445000 суммы цифр равны 39 и 13 соответственно.

2.1. *Ответ*: 2.

Разделив обе части уравнения на выражение $3^x > 0$, получим уравнение $\left(\frac{5}{3}\right)^x - 1 = \frac{16}{3^x}$, равносильное данному. Так как функция $f(x) = = \left(\frac{5}{3}\right)^x - 1$ является возрастающей, а функция $g(x) = \frac{16}{3^x}$ — убывающей, то уравнение имеет не более одного корня, который легко подобрать (например, можно вспомнить египетский треугольник).

2.2. *Ответ*: утверждение неверно.

Один из возможных примеров: построим правильный пятиугольник $ABCDE$, вписанный в окружность, и проведем отрезок MK, параллельный DE (см. рис. 190). В пятиугольнике $ABCMK$ все внутренние углы равны, но он не является вписанным, так как существует единственная окружность, содержащая точки A, B и C.

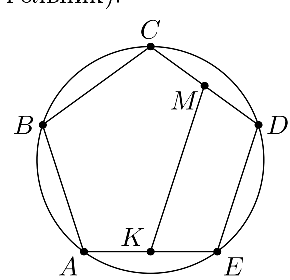


Рис. 190

2.3. Например: 1; 2; 3; 6; 12; 24; 48; 96; 192; 384.

3.1. 1) Если среди данных уравнений хотя бы одно не является квадратным, то другое уравнение имеет корень 0. Например, если первое уравнение — не квадратное, то $a = 0$, значит, число 0 является корнем второго уравнения.

2) Предположим, что все три уравнения — квадратные, но ни одно из них не имеет действительных корней. Тогда, справедливы неравенства: $b^2 - ac < 0$; $c^2 - ab < 0$ и $a^2 - bc < 0$. Сложив эти неравенства почленно, имеем:

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac < 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac < 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 < 0,$$

что неверно ни при каких a, b и c. Следовательно, хотя бы одно из данных уравнений имеет хотя бы один действительный корень, что и требовалось доказать.

3.2. *Ответ*: периметр треугольника ABC меньше.

Продолжим AK до пересечения с лучом CB в точке E. Так как BK — высота и биссектриса треугольника ABE, то $AB = BE$ и $AK = KE$ (см. рис. 191). $P_{ABC} = AC + CE$, а $P_{AKC} = AC + CK + KE$. Применяя для $\triangle CKE$ неравенство треугольника, имеем: $CK + KE > CE$, следовательно, $P_{ABC} < P_{AKC}$.

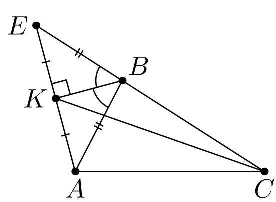


Рис. 191

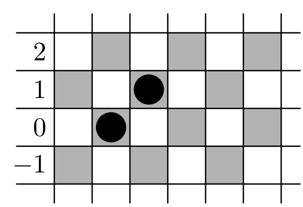


Рис. 192

3.3. *Ответ*: нет, нельзя.

Пронумеруем горизонтали шашечной доски так, чтобы одна из данных черных шашек стояла на линии с номером 0, а другая — на линии с номером 1 (см. рис. 192). При «съедании» любой черной шашки, белая шашка перемещается на две горизонтали вверх или вниз, значит четность номера линии при таком ее перемещении не изменяется. Поскольку две данные черные шашки находятся на горизонталях разной четности, то одним ходом их «съесть» невозможно.

4.1. *Ответ*: 5.

Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{3^x - 1}{3^x + 1}$, которая определена и непрерывна на $\mathbb{R}$. Так как

$$f(-x) = \frac{3^{-x} - 1}{3^{-x} + 1} = \frac{1 - 3^x}{1 + 3^x} = -f(x),$$

то эта функция — нечетная. Следовательно, $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = 0$. Получаем уравнение $\log_3(2x-7) = 6-x$, которое имеет не более одного корня, так как функция $y = \log_3(2x-7)$ — возрастающая, а функция $y = 6-x$ — убывающая. Проверяя числа, входящие в область определения левой части уравнения, находим корень уравнения.

4.2. *Ответ*: да, можно.

Искомое множество прямых получится, если рассмотреть плоскость α, содержащую данную точку A, перпендикуляр AB к этой плоскости, и в плоскости α через точку A провести 999 пар перпендикулярных прямых a_k и b_k, где $k = 1, 2, \ldots, 999$. Тогда, по свойству перпендикулярности прямой и плоскости, для любых двух прямых a_i и b_j, в качестве им перпендикулярной выступает (AB), а для прямых AB и любой a_k — прямая b_k.

4.3. Пусть x и $5x$ — числа, имеющие одинаковую сумму цифр. Тогда, эти числа имеют одинаковые остатки при делении на 9, так как остаток от деления любого натурального числа на 9 равен остатку от деления суммы цифр этого числа на 9. Следовательно, $5x - x = 4x$ кратно 9, а так как 4 и 9 — взаимно простые числа, то число x делится на 9, что и требовалось доказать.

5.1. *Ответ*: $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Первый способ. Из рассмотрения подкоренных выражений следует, что $|x| \leqslant 1$ и $|y| \leqslant 1$. Тогда, $\exists\alpha \mid \sin\alpha = x$ и $\exists\beta \mid \sin\beta = y$. Кроме того, поскольку $0 \leqslant \sqrt{1-x^2} \leqslant 1$, то $\sin\alpha \geqslant 0$. Аналогично и $\sin\beta \geqslant 0$. Данная система примет вид:

$$\begin{cases} \sin\alpha + |\cos\beta| = 1, \\ \sin\beta + |\cos\alpha| = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Возведя каждое уравнение в квадрат и почленно сложив, получим уравнение-следствие:

$$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha|\cos\beta| + \cos^2\beta + \sin^2\beta + 2|\cos\alpha|\sin\beta + \cos^2\alpha = 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin\alpha|\cos\beta| + |\cos\alpha|\sin\beta = 1.$$

В зависимости от знаков $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ имеем: $\sin(\alpha \pm \beta) = \pm 1$, то есть $\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Тогда, $|\cos\beta| = |\sin\alpha| = \sin\alpha$, так как $\sin\alpha > 0$. Возвращаясь к тригонометрической системе, получим, что $\sin\alpha = |\cos\beta| = \frac{1}{2}$ и $\sin\beta = |\cos\alpha| = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Второй способ. Построим в одной системе координат графики данных уравнений, которые представляют собой полуокружности радиуса 1 с центрами в точках $A(1;0)$ и $B(0;\sqrt{3})$ соответственно (см. рис. 193). Так как $|AB| = \sqrt{(1-0)^2+(0-\sqrt{3})^2} = 2$, и сумма радиусов полуокружностей равна расстоянию между их центрами, то графики имеют ровно одну общую точку, координаты которой и являются решениями системы. Эта точка делит отрезок AB в отношении $1:\sqrt{3}$.

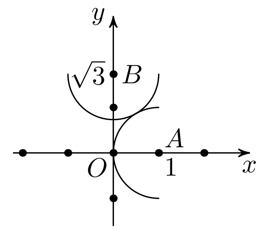


Рис. 193

5.2. Рассмотрим окружность с центром O, описанную около данного многоугольника. При любом его указанном разбиении все полученные треугольники будут вписаны в эту окружность. Так как количество вершин многоугольника — нечетно, то ни одна из его диагоналей не содержит точку O, а значит, найдется треугольник, для которого O — внутренняя точка. Он и будет искомым, поскольку треугольник, у которого центр описанной окружности лежит внутри него, является остроугольным.

5.3. Например: 1; **2**; **3**; 4; 5; 6; 7; **8**; **9**; **10**; **11**; **12**; **13**; **14**; **15**... В этом случае, $\forall d \in \mathbb{N}$ в каждом из подмножеств найдется такая группа чисел, что «расстояние» от нее до следующей группы чисел из этого подмножества больше, чем d.

1999/2000 учебный год

1.1. *Ответ*: 0,5.

Разделим и умножим данное выражение на одно и то же, не равное нулю, число, затем воспользуемся формулами преобразования произведения тригонометрических функций в сумму:

$$\cos 36^\circ - \sin 18^\circ = \frac{\cos 36^\circ \cos 18^\circ - \sin 18^\circ \cos 18^\circ}{\cos 18^\circ} = \\ = \frac{0{,}5\cos 18^\circ + 0{,}5\cos 54^\circ - 0{,}5\sin 36^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{0{,}5\cos 18^\circ}{\cos 18^\circ} = 0{,}5.$$

1.2. *Ответ*: 3,5 см.

Очевидно, что диаметр искомого круга не меньше, чем наибольшая сторона, то есть, не меньше, чем 7 см. Так как $4^2+5^2<7^2$, то данный треугольник — тупоугольный. Следовательно, вершина тупого угла будет лежать внутри круга, диаметром которого является большая сторона треугольника.

Заметим, что диаметр круга, описанного около треугольника, больше, чем 7 см, так как в таком круге большая сторона данного треугольника является хордой, отличной от диаметра.

1.3. Например, $1999 = 1999^{15} : 1999^{14} = (1999^3)^5 : (1999^2)^7$.

2.1. *Ответ*: $-2 \pm \sqrt{6}$.

Данное уравнение равносильно уравнению:

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) + \\ + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) + \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}\right) = 2;$$

Тогда $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+4} = 2$, где $x \neq -1, -2, -3$. Избавившись от знаменателя, получим квадратное уравнение $x^2 + 4x - 2 = 0$, корни которого и являются корнями исходного уравнения.

2.2. *Ответ*: 4,5.

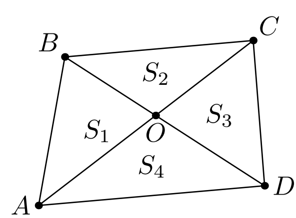


Рис. 194

Обозначим площади четырех треугольников, указанных в условии, S_1, S_2, S_3, S_4 (см. рис. 194), а радиусы вписанных в них кругов — r_1, r_2, r_3 и r_4 соответственно. Тогда, воспользовавшись формулой для вычисления площади треугольника: $S = 0{,}5ab\sin\gamma$ и тождеством $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, получим, что $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$. С другой стороны, площадь треугольника может быть найдена как произведение его полупериметра и радиуса вписанной окружности. Так как, по условию, периметры всех четырех треугольников равны, то $r_4 = \frac{r_1 \cdot r_3}{r_2} = \frac{3 \cdot 6}{4} = 4{,}5$.

2.3. *Ответ*: 108 человек.

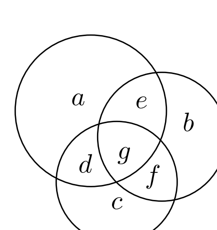


Рис. 195

Ситуацию, описанную в условии задачи, удобно изобразить с помощью «кругов Эйлера» (см. рис. 195). Обозначим: $x = a + b + c$ — количество человек, участвовавших ровно в одной олимпиаде; $y = d + e + f$ — количество человек, участвовавших ровно в двух олимпиадах. Составим системы уравнений:

$$\text{а)} \begin{cases} 2y + 2g = x + y + g, \\ 3g = x + y + g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3g = 2x, \\ g = 2y \end{cases};$$

б) $\begin{cases} a+d+e+g=100, \\ b+e+f+g=50, \\ c+d+g+f=48 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x+2y+3g=198,$

откуда $g=36$, $x=54$, $y=18$.

3.1. *Ответ*: $-\sqrt{2}$ (см. регата 9 класса, 1998/1999 учебный год, 5.3.).

3.2. Если данные плоскости совпадают или параллельны, то утверждение очевидно. В случае, если данные плоскости α и β пересекаются по прямой c (см. рис. 196), то ортогональной проекцией тела F на прямую c является отрезок d. Рассмотрим круги, являющиеся ортогональными проекциями F на каждую из данных плоскостей, и ортогонально спроектируем каждый из них на прямую c. По теореме о трех перпендикулярах, мы получим тот же отрезок d, а так как в планиметрии проекцией круга на прямую является диаметр этого круга, то диаметры рассматриваемых кругов равны, что и требовалось доказать.

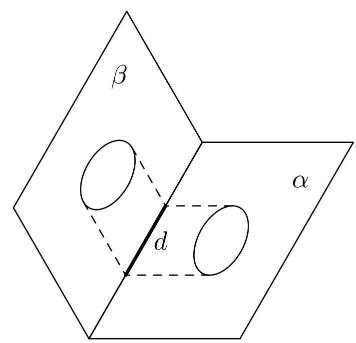


Рис. 196

3.3. *Ответ*: $x=\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$.

Пусть $\operatorname{tg} x=n$, а $\operatorname{tg} 2x=m$, тогда, используя формулу тангенса двойного аргумента, получим: $\dfrac{2n}{1-n^2}=m \Leftrightarrow \dfrac{-2n}{(n-1)(n+1)}=m$. Так как НОД$(n,n\pm1)=1$, то, для того, чтобы m было целым, необходимо и достаточно, чтобы число $\dfrac{2}{n^2-1}$ было целым, что выполняется только в случае, если $n^2=0$. Следовательно, $m=n=0$.

4.1. *Ответ*: не существует.

Пусть такая функция $f(x)$ существует. Тогда имеет место следующая цепочка равенств: $1=f(1^2)=f((-1)^2)=-1$. Противоречие.

4.2. *Ответ*: $\dfrac{1}{9}S$.

Пусть $ABCD$ — данная пирамида, а $A_1B_1C_1D_1$ — пирамида, вершины которой есть точки пересечения медиан (центры тяжести) граней данной (см. рис. 197). Используя свойство медиан и свойства средней линии треугольника, а также подобие треугольников, получим, что каждое ребро второй пирамиды параллельно соответствующему ребру первой, а его длина — втрое меньше длины соответствующего ребра (например, $C_1A_1 \parallel MN \parallel AC$ и $C_1A_1=\dfrac{2}{3}MN=\dfrac{1}{3}AC$). Таким образом, каждая грань тетраэдра $A_1B_1C_1D_1$ подобна соответствующей грани тетраэдра $ABCD$ с коэффициентом $\frac{1}{3}$. Площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента их подобия, поэтому площадь полной поверхности пирамиды $A_1B_1C_1D_1$ равна $\frac{1}{9}S$.

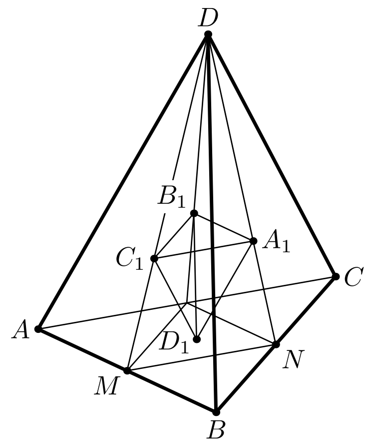


Рис. 197

4.3. *Ответ*: при $n = 0$ и $n = 1$.

Очевидно, что при $n = 0$ и при $n = 1$ данное выражение принимает целые значения. Докажем, что других целых значений n, удовлетворяющих условию, не существует. При всех натуральных n, кроме $n = 1$, выполняется неравенство $(n-1)^2 < n^2 - n + 1 < n^2$, поэтому для таких n число $n^2 - n + 1$ не может быть квадратом целого числа. Аналогично, для всех целых отрицательных n выполняется неравенство $(n-1)^2 > n^2 - n + 1 > n^2$, поэтому и для таких n число $n^2 - n + 1$ не может быть квадратом целого числа.

5.1. Например, $f(x) = \sqrt[7]{\sin^8(\pi x)}$. Действительно, $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{8\pi}{7}\sqrt[7]{\sin(\pi x)}\cos(\pi x)$, а $f'(x)$ дифференцируема во всех точках области определения, то есть, для всех x таких, что $\sin(\pi x) \neq 0 \Leftrightarrow \pi x \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \notin \mathbb{Z}$.

5.2. Сумма всех внутренних углов любого выпуклого n-угольника равна $2\pi(n-2)$, причем величина α_k любого его внутреннего угла такова, что $0 < \alpha_k < \pi$. Следовательно, $\forall\, \alpha_k \quad \pi - \alpha_k > 0$. Используя тождество $\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha)$, и неравенство $\sin x < x$, справедливое $\forall\, x > 0$, получим: $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin \alpha_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin(\pi - \alpha_k) < \sum\limits_{k=1}^{n} (\pi - \alpha_k) = \pi n - \pi(n-2) = 2\pi$, что и требовалось доказать.

5.3. *Ответ*: да, верно.

Пусть $x_n = \overline{a_1 \ldots a_t}$ — некоторый член арифметической прогрессии, а ее разность $d = \overline{b_1 \ldots b_k}$. Тогда, например, члены этой прогрессии $x_s = x_n + d \cdot 10^t = \overline{b_1 \ldots b_k a_1 \ldots a_t}$ и $x_p = x_n + d \cdot 10^{t+1} = \overline{b_1 \ldots b_k 0 a_1 \ldots a_t}$ имеют одинаковую сумму цифр.

2000/2001 учебный год

1.1. *Ответ*: $x = y = 1$; $z = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Можно заметить, что $x > 0$ и $y > 0$. Тогда, применив неравенство о средних и использовав первое уравнения системы, получим: $x + y \geqslant 2\sqrt{xy} = 2$. Так как $\forall z \in \mathbb{R}$ верно, что $\cos^2 z \geqslant 0$, то из второго уравнения следует, что $x + y = 2$ и $\cos z = 0$.

1.2. *Ответ*: да, существует.

Рассмотрим произвольный тетраэдр (см. рис. 198). Так как вершины тетраэдра не лежат в одной плоскости, то возможны только два случая:

1) Одна из вершин тетраэдра находится в одном полупространстве относительно этой плоскости, а оставшиесяя три вершины — в другом. Тогда искомыми плоскостями являются плоскости, проходящие через середины любых трех ребер тетраэдра. Таких плоскостей четыре.

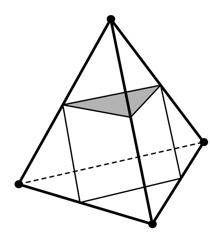


Рис. 198

2) По две вершины тетраэдра лежат в каждом из полупространств. В этом случае искомая плоскость проходит параллельно двум скрещивающимся ребрам тетраэдра на одинаковом расстоянии от них. Таких плоскостей три.

1.3. *Ответ*: 4000.

$2000 < \sqrt{n} < 2001 \Leftrightarrow 2000^2 < n < (2000+1)^2 \Leftrightarrow 2000^2 < n < 2000^2 + 2 \cdot 2000 + 1$.

2.1. *Ответ*: $\varnothing$.

$$x^2 - 5x - 4\sqrt{x} + 13 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 6x + 9) + (x - 4\sqrt{x} + 4) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (\sqrt{x} - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ x = 4. \end{cases}$$

Следовательно, уравнение не имеет решений.

2.2. *Ответ*: $2R$.

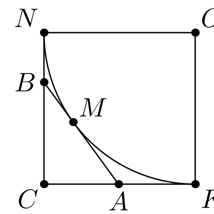


Рис. 199

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, в котором угол C — прямой, и окружность, указанную в условии (ее называют *вневписанной*). Соединим центр O окружности с точками K и N ее касания с прямыми AC и BC соответственно; M — точка касания окружности с гипотенузой AB (см. рис. 199). Так как $\angle C = 90^\circ$, $OK \perp AC$, $ON \perp BC$ и $OK = ON = R$, то $CKON$ — квадрат. Используя свойство касательных, проведенных к окружности из одной точки, получим, что $AK = AM$ и $BN = BM$. Тогда, $P_{\triangle ABC} = AC + BC + AB = AC + AM + BC + BM = (AC + AK) + (BC + BN) = CK + CN = 2R$.

2.3. *Ответ*: нет, не может.

Одна из возможных стратегий второго игрока: ставить коэффициенты, соответственно равные коэффициентам первого игрока, на «симметричные места». Уравнение $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$ при любых a и b имеет целый корень: -1.

Другая возможная стратегия основана на том, что уравнение $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ имеет корень 1, если $a + b + c + d = 0$. Второй игрок может добиться выполнения этого равенства, независимо от того, какими были три первых хода, выбрав оставшийся коэффициент противоположно сумме трех предыдущих. В частном случае можно, например, получить такое уравнение: $ax^3 - ax^2 + bx - b = 0$.

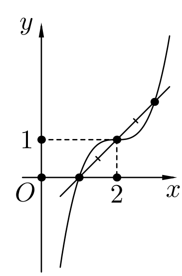


Рис. 200

3.1. Запишем данный многочлен в виде: $P(x) = (x-2)^3 + 1$. Тогда, график многочлена $P(x)$ может быть получен из графика функции $y = x^3$ параллельным переносом на $\overline{m}(2; 1)$ (см. рис. 200). Так как $O(0; 0)$ является центром симметрии графика $y = x^3$, то M $(2; 1)$ — центр симметрии графика $P(x)$.

Любая прямая, проходящая через центр симметрии графика $P(x)$ и пересекающая этот график, обладает свойством, указанным в условии, например, $y = x - 1$.

Отметим, что центром симметрии произвольной кубической параболы, уравнение которой $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, является ее точка перегиба, имеющая абсциссу $x_0 = -\dfrac{b}{3a}$. Этот факт можно доказать либо непосредственными алгебраическими преобразованиями, используя определение центральной симметрии, либо заметив, что *график произвольного кубического трехчлена может быть получен из графика функции* $y = x^3$ *с помощью композиции двух преобразований на координатной плоскости: растяжения (сжатия) от оси* x*, при котором* $O(0;0)$ *является неподвижной точкой, и параллельного переноса.*

3.2. *Ответ*: Qh.

Из точки C_1 проведем перпендикуляр C_1K к плоскости сечения (см. рис. 201). По условию, $C_1K = h$; обозначим: $CC_1 = H$. $\angle((BCA_1);(ABC)) = \angle((CC_1);(C_1K)) = \varphi$, так как угол между двумя плоскостями равен углу между прямыми, соответственно им перпендикулярными. $V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{ABC} \cdot H = (S_{A_1BC} \cdot \cos\varphi) \cdot (h : \cos\varphi) = Qh$.

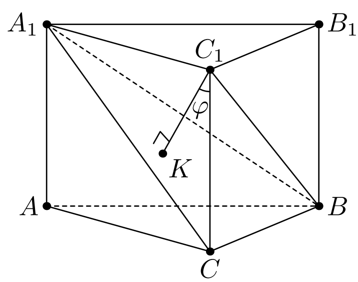


Рис. 201

Другой возможный способ решения: проведем, например, отрезок BC_1, тем самым мы разбиваем данную призму на три равновеликие пирамиды A_1C_1BC, $A_1C_1BB_1$ и A_1ABC, каждая из которых имеет объем $\dfrac{1}{3}\,Qh$.

3.3. *Ответ*: при $n = 9k$, $k \in \mathbb{N}$.

Для того, чтобы число делилось на 63, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 7 и на 9. Сумма цифр числа A равна $(1+3)n = 4n$; НОД$(4; 9) = 1$, значит, A кратно 9 тогда и только тогда, когда n кратно 9. Число 131313 делится на 7, что можно проверить непосредственно делением в столбик или получить из более общего факта: $\overline{ababab} = 10101 \cdot \overline{ab} = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot \overline{ab}$. Таким образом, $n = 9k$, где $k \in \mathbb{N}$.

4.1. *Ответ*: при $a = 0$.

Заметим, что, если $(x_0; y_0)$ является решением данной системы, то и $(-x_0; y_0)$ также является ее решением. Для того, чтобы решение системы было единственным, необходимо, чтобы $x = 0$. Подставив это значение во второе уравнение системы, получим, что $y = \pm 1$, тогда, из первого уравнения, $a = 0$ или $a = 2$ соответственно.

Проверим достаточность полученных условий.

1) При $a = 0$ запишем данную систему в виде:

$$\begin{cases} 2^{|x|} + |x| - x^2 = y, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения следует, что $|x| \leqslant 1$ и $|y| \leqslant 1$. При $x \in [-1; 1]$ $|x| - x^2 = |x|(1 - |x|) \geqslant 0$, $2^{|x|} \geqslant 1$, поэтому из первого уравнения получим, что $y \geqslant 1$. Значит, $y = 1$, тогда $x = 0$, то есть, решение единственное.

2) При $a = 2$ получим:

$$\begin{cases} 2^{|x|} + |x| - x^2 - 2 = y, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Кроме $(0; -1)$ решениями системы также являются: $(1; 0)$ и $(-1; 0)$. Эти решения легко подобрать, если, например, решать систему графически. Таким образом, при $a = 2$ система имеет более одного решения.

4.2. *Ответ*: α.

Первый способ. Построим трапецию ABC_1D_1, симметричную данной относительно прямой AB (см. рис. 202). E_1 — точка пересечения отрезков AC_1 и BD_1 — симметрична точке E. В любой трапеции отношение расстояний от точки пересечения диагоналей до оснований равно отношению длин этих оснований. Расстояния от точек E и F до оснований BC и AD соответственно равны, кроме того, $BC : AD = C_1C : : D_1D$, то есть, F является точкой пересечения диагоналей трапеции D_1DCC_1. Следовательно, $\angle CFE = \angle D_1FE_1 = \angle DFE = \alpha$.

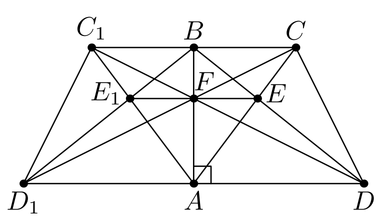


Рис. 202

Второй способ. Так как треугольники EBC и EDA подобны и расстояния от точек E и F до оснований BC и AD соответственно равны, то $BC : AD = BF : AF$. Следовательно, подобны также треугольники CBF и DAF, значит, $\angle CFE = \angle BCF = \angle ADF = \angle DFE = \alpha$.

4.3. *Ответ*: n^3.

Группа с номером n будет содержать n чисел. Количество предшествующих нечетных чисел равно: $1+\ldots+(n-1) = \frac{1+(n-1)}{2}\cdot(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$. Следовательно, искомую сумму S можно найти следующим образом: от суммы первых $\frac{n(n+1)}{2}$ нечетных чисел отнять сумму первых $\frac{n(n-1)}{2}$ нечетных чисел. Сумма первых k нечетных чисел равна: $\frac{1+(2k-1)}{2}\cdot k = k^2$. Следовательно, $S = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4}\cdot 2n\cdot 2 = n^3$.

Другим возможным способом решения является угадывание или подбор ответа с последующим доказательством его справедливости с помощью метода математической индукции.

5.1. *Ответ*: -720.

Применив формулу для вычисления производной произведения, получим:

$$P'(x) = (x-3)(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+ \\ +(x-4)(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+\ldots+ \\ +(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)(x+3).$$

Пусть $P((x) = \sum\limits_{k=0}^{8} a_k x^k$, тогда $P'(1) = \sum\limits_{k=0}^{8} a_k$, а $P'(-1) = \sum\limits_{k=0}^{8} (-1)^k\cdot a_k$.

Следовательно, искомая сумма равна

$$\frac{1}{2}(P'(1)+P'(-1)) = \frac{1}{2}(-3\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5+ \\ +(-5)\cdot(-4)\cdot(-3)\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot(1\cdot 2\cdot 3) = -6\cdot 5! = -6! = -720.$$

5.2. *Ответ*: $\angle MAB = 80^\circ$, $\angle MAC = 70^\circ$.

Проведем окружность с центром в точке M и радиусом MB (см. рис. 203). На этой же окружности лежат точки B и A, так как $MB = MC$ и $\angle A = 180^\circ - (\angle C + \angle B) = 150^\circ$. То есть M — центр окружности, описанной около $\triangle ABC$. Следовательно, $\angle MAB = \angle MBA = 20^\circ + 60^\circ = 80^\circ$, $\angle MAC = \angle MCA = 10^\circ + 60^\circ = 70^\circ$.

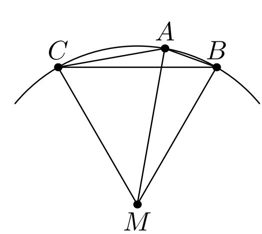


Рис. 203

5.3. *Ответ*: $\arcsin(\arccos m) > \arccos(\arcsin m)$ (при данном значении m).

Докажем, что при данном значении m, оба выражения имеют смысл. На $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ синус возрастает, а косинус убывает, $\frac{\pi}{4} < 1$, поэтому $\sin 1 >$ $> \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} > \cos 1$. Следовательно, $0 < \cos 1 < m < \sin 1 < 1$. Так как функция $y = \arcsin x$ возрастает на $[-1; 1]$, то $\arcsin(\cos 1) <$ $< \arcsin m < \arcsin(\sin 1) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos 1) < \arcsin m < 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 1 <$ $< \arcsin m < 1$.

Аналогично, так как функция $y = \arccos x$ убывает на $[-1; 1]$, то $\arccos(\sin 1) < \arccos m < \arccos(\cos 1) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin 1) < \arccos m <$ $< 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 1 < \arccos m < 1$.

Для сравнения значений данных выражений воспользуемся тем, что при $x \in (0; 1)$ $\arcsin x > x$. (Это неравенство получается из неравенства $\sin x < x$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ применением свойств взаимно обратных функций). Получим, что $\arcsin m > m$, значит, $\arccos(\arcsin m) < \arccos m$, так как арккосинус — убывает. Используя то же самое неравенство при $x = \arccos m$, получим, что $\arcsin(\arccos m) > \arccos m$. Следовательно, $\arcsin(\arccos m) > \arccos(\arcsin m)$.

2001/2002 учебный год

1.1. *Ответ*: $S = 1 + \frac{3\pi}{4}$.

Выражения, входящие в данную систему, имеют смысл, если $|x| \leqslant 1$ и $|y| \leqslant 1$. Если $x \leqslant 0$ и $y \leqslant 0$, то, с указанными ограничениями, выполняются оба неравенства, в остальных случаях данная система равносильна неравенству $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Фигура, заданная данной системой неравенств, изображена на рис. 204а.

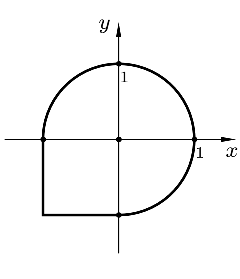


Рис. 204а

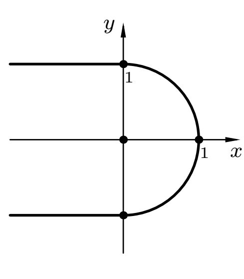


Рис. 204б

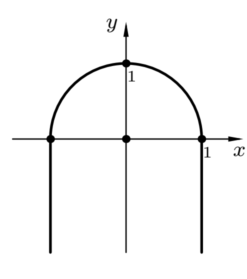


Рис. 204в

Можно было также изобразить решения каждого из неравенств по отдельности (см. рис. 204б и 204в соответственно), тогда их пересечением будет является фигура, изображенная на рис. 204а. Ее площадь равна сумме площадей «единичного квадрата» и кругового сектора, составляющего три четверти «единичного круга».

1.2. *Ответ*: нельзя.

Для доказательства (методом «от противного») рассмотрим количество точек попарного касания шаров. Если каждый из девяти шаров касается ровно пяти других, то этих точек должно быть в два раза меньше, чем $9 \cdot 5 = 45$, так как при таком подсчете каждая точка касания учитывается дважды. Поскольку число 45 — нечетное, то получаем противоречие.

Также можно было подсчитать количество отрезков, соединяющих центры каждой пары касающихся шаров, либо рассмотреть соответствующий граф (и сослаться на теорему о том, что в нем количество вершин нечётной степени должно быть чётным).

1.3. Очевидно, что если взять два множителя, сумма которых равна 0, то их произведение не положительно. Любое натуральное число n можно представить в виде четырех множителей, сумма которых равна нулю: $n = \sqrt{n} \cdot (-\sqrt{n}) \cdot 1 \cdot (-1)$.

Таким образом, осталось выяснить, возможно ли обойтись тремя множителями. Такое разложение может иметь вид: $(-x)\,(-y)\,(x+y)$, где x и y — некоторые положительные числа. Для числа 30 это может, например, выглядеть так: $30 = (-2) \cdot (-3) \cdot 5$.

Отметим, что любое действительно число a можно представить в виде произведения трех указанных множителей:

$$a = \left(-\sqrt[3]{\frac{a}{2}}\right)\left(-\sqrt[3]{\frac{a}{2}}\right)\left(2\sqrt[3]{\frac{a}{2}}\right).$$

2.1. Рассмотрим, например, функции $g(x) = f(x)\sin x$ и $h(x) = f(x)\cos x$. Тогда, $g(x)\sin x + h(x)\cos x = f(x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = f(x)$, что и требовалось доказать.

Другой возможный пример: $g(x) = \dfrac{f(x)}{2\sin x}$; $h(x) = \dfrac{f(x)}{2\cos x}$ во всех точках, таких что $\sin x \neq 0$ и $\cos x \neq 0$.

В тех точках, где $\sin x = 0$ возьмем $h(x) = \dfrac{f(x)}{\cos x}$, а $g(x)$ — любое число.

В тех точках, где $\cos x = 0$, возьмем $g(x) = \dfrac{f(x)}{\sin x}$, а $h(x)$ — любое число.

Второй пример иллюстрирует решение более общей задачи: докажите, что для любой функции $f(x)$ существуют функции $g(x)$ и $h(x)$

такие, что $f(x) = g(x)\,p(x) + h(x)\,r(x)$, где $p(x)$ и $r(x)$ — произвольные заданные функции, определенные на $\mathbb{R}$, и имеющие несовпадающие нули.

2.2. *Ответ*: нельзя.

Пусть в пятиугольнике $ABCDE$: $AB = 4$ см, $BC = 6$ см, $CD = 8$ см, $DE = 7$ см, $EA = 9$ см. Допустим, что в него можно вписать окружность, тогда точки касания этой окружности со сторонами пятиугольника: K, L, M, N и P (см. рис. 205). По свойству касательных, проведённых из одной точки к окружности: $AP = AK = x$, $BK = BL = 4 - x$, $CL = CM = 6 - (4 - x) = x + 2$, $DM = DN = 8 - (x + 2) = 6 - x$ и $EN = EP = 7 - (6 - x) = x + 1$. Так как $AP + PE = AE$, то $x + (x + 1) = 9 \Leftrightarrow x = 4$. Точки K и B совпадают, следовательно, вписанная окружность касается сторон AB и BC в точке B, то есть, прямые AB и BC перпендикулярны радиусу OB, поэтому эти прямые совпадают. Получено противоречие.

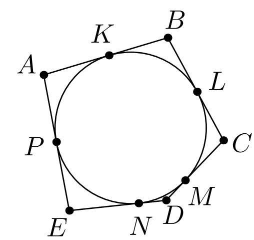


Рис. 205

2.3. *Ответ*: $(2; 2; 5)$.

Для любых простых чисел x и y выполняется неравенство: $x^y \geqslant 4$, так как 2 — наименьшее простое число. Следовательно, $z \geqslant 5$, то есть, z является нечетным простым числом, значит, x^y — четное, то есть, $x = 2$. Если $y = 2$, то $z = 5$, поэтому, $(2; 2; 5)$ — решение данного уравнения. Если $y > 2$, то y — нечетное простое число, тогда, сумму $1 + 2^y$ можно разложить на множители, отличные от единицы и самого числа: $1 + 2^y = 2^{2p+1} + 1 = (2 + 1)\,(2^{2p} - 2^{2p-1} + 2^{2p-2} - \ldots + 1)$, следовательно, она не будет простым числом.

Можно не раскладывать число $2^{2p+1} + 1$ на множители, если показать, что любая нечетная степень двойки при делении на 3 дает остаток 2.

3.1. *Ответ*: $-\dfrac{1}{1 + \sqrt[3]{2}}$.

$$x^3 + x^2 + x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 =$$
$$= -2x^3 \Leftrightarrow (x + 1)^3 = -2x^3 \Leftrightarrow x + 1 = -\sqrt[3]{2}x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{1 + \sqrt[3]{2}}.$$

3.2. *Ответ*: $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Проведём в треугольнике ABC среднюю линию ML; P — точка пересечения ML и CN (см. рис. 206). LP и PM — средние линии в треугольниках BCN и ACN соответственно. Пусть $CN = x$, тогда $CP = \frac{x}{2}$, $PK = CK - CP = \frac{2}{3}x - \frac{x}{2} = \frac{x}{6}$. $PL = PM = \frac{BN}{2} = \frac{a}{4}$. По свойству пересекающихся хорд окружности: $LP \cdot MP = KP \cdot CP$, то есть, $\frac{a}{4} \cdot \frac{a}{4} = \frac{x}{6} \cdot \frac{x}{2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{4}a^2 \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

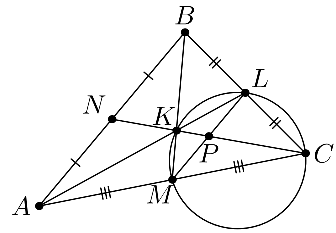


Рис. 206

3.3. Рассмотрим тетраэдр $ABCD$, возьмем две точки на одном из его ребер и «вырежем» тетраэдр $EFGH$ (см. рис. 207). Полученный многогранник удовлетворяет условию, то есть, имеет 8 вершин, 12 ребер и 6 граней, ни одна из которых не является четырехугольником.

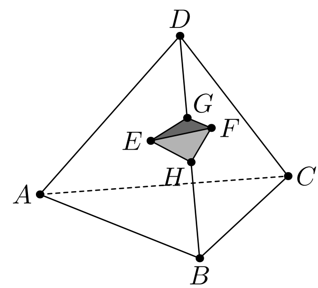


Рис. 207

4.1. *Ответ*: да, может.

Рассмотрим, например, многочлен $P(x) = \frac{1}{2001}(x+1)(x+2)\cdot \ldots \cdot(x+2001)$, старший коэффициент которого равен $\frac{1}{2001}$. При любом целом значении x произведение $(x+1)(x+2)\cdot \ldots \cdot(x+2001)$ кратно 2001, так как одно из 2001 последовательных целых чисел кратно 2001. Следовательно, $P(x)$ принимает целые значения.

4.2. Рассмотрим треугольник ABC и построим точку K, делящую сторону AB в отношении $7:11$, считая от вершины A, и точку L, делящую сторону CA в отношении $11:13$, считая от вершины C (см. рис. 208). Пусть O — точка пересечения отрезков CK и BL. Покажем, что O — искомая точка. Заметим, что у треугольников ACK и BCK общая высота, опущенная из C, поэтому отношение их площадей равно отношению оснований: $S_{ACK} : S_{BCK} = AK : BK$. Аналогично, $S_{AOK} : S_{BOK} = AK : BK$. Используя свойство пропорции $\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b}\right)$ получим: $S_{AOC} : S_{BOC} = AK : BK = 7 : 11$.

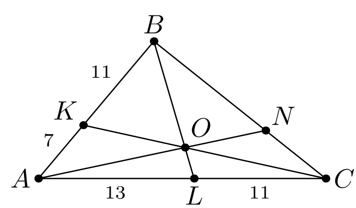


Рис. 208

Аналогично, рассматривая две пары треугольников с основаниями AL и CL, доказываем, что $S_{BOC} : S_{AOB} = CL : AL = 11 : 13$. Следовательно, $S_{AOC} : S_{BOC} : S_{AOB} = 7 : 11 : 13$, что и требовалось доказать.

Из теоремы Чевы следует, что прямая AO разделит сторону BC в отношении $13 : 7$, считая от вершины B.

Если же использовать теорему Чевы в обратную сторону, то к решению задачи можно было подойти иначе. Пусть дан отрезок PQ, точка E, делящая его в отношении $p : q$, где p и q — заданные числа, и точка F, не принадлежащая прямой PQ. По аналогии с приведенным решением можно доказать, что геометрическим местом точек M плоскости, для которых $S_{PFM} : S_{QFM} = p : q$ является прямая EF (за исключением точек E и F).

Следовательно, для того, чтобы построить искомую точку O можно разделить стороны AB, BC и CA треугольника ABC соответственно точками K, N и L так, чтобы $AK : BK = 7 : 11$; $BN : CN = 13 : 7$; $CL : AL = 11 : 13$. Тогда, по теореме Чевы, отрезки AN, BL и CK пересекутся в одной точке, которая и будет искомой.

4.3. *Ответ*: нет, нельзя.

Сумма всех чисел от 1 до 100 равна $101 \cdot 50$. Допустим, что нам удалось разбить числа от 1 до 100 на три группы, суммы чисел в которых равны A, B и C соответственно. Тогда, $A = 102x$, $B = 203y$, $C = 304z$, где x, y и z — целые неотрицательные числа. Получим, что

$$101 \cdot 50 = A + B + C = 102x + 203y + 304z = 101(x + 2y + 3z) + (x + y + z).$$

Следовательно, число $(x + y + z)$ кратно 101, а так как эта сумма не равна нулю, то $x + y + z \geqslant 101$. Тогда, $x + 2y + 3z \geqslant x + y + z \geqslant 101$, то есть, $101(x + 2y + 3z) > 101 \cdot 50$.

Полученное противоречие показывает, что разбить числа от 1 до 100 на указанные группы невозможно.

5.1. *Ответ*: $(1;\ 1)$; $(-2; -\sqrt[3]{2})$.

Начальный этап решения можно осуществить различными способами.

Первый способ. Заметим, что $(0; 0)$ не является решением данной системы. Разделив почленно первое уравнение на y^6, получим: $\left(\dfrac{x}{y^2}\right)^3 + \dfrac{x}{y^3} = y^2 + y$. Так как функция $f(t) = t^3 + t$ — возрастающая, то каждое свое значение она принимает только при одном значении аргумента, следовательно, $\dfrac{x}{y^2} = y$, то есть, $x = y^3$.

Второй способ. Первое уравнение системы можно преобразовать к виду: $x^3 - y^9 + y^4(x - y^3) = 0$. Разложив на множители левую часть этого уравнения, получим:

$$(x - y^3)\left(x^2 + xy^3 + y^6 + y^4\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &x = y^3, \\ &x^2 + y^3x + (y^6 + y^4) = 0. \end{aligned}\right.$$

Второе уравнение можно рассматривать как квадратное относительно переменной x. Его дискриминант: $D = -3y^6 - 4y^4 = -y^4(3y^2 + 4)$. $D \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $y = 0$, но, тогда и $x = 0$, что не является решением исходной системы. Следовательно, $x = y^3$.

Подставив $y^3 = x$ во второе уравнение системы, получим уравнение $x^2 + x - 2 = 0$, которое имеет корни 1 и -2. Соответствующие значения переменной y: $y = 1$ или $y = -\sqrt[3]{2}$.

5.2. *Ответ*: 4.

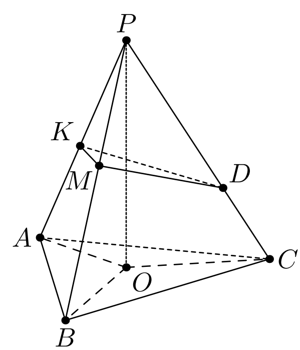


Рис. 209

Рассмотрим данную пирамиду (см. рис. 209). Площадь той части поверхности, которой принадлежит основание пирамиды, очевидно, больше. По условию,
$$\frac{S_{\triangle ABC} + S_{AKMB} + S_{BMDC} + S_{CDKA}}{S_{\triangle PKM} + S_{\triangle PMD} + S_{\triangle PDK}} = m,$$
где m — составное натуральное число. Пусть площадь каждой боковой грани равна S, а величина двугранного угла между боковой гранью и основанием равна α. Тогда $S_{PKM} = \frac{1}{4}\,S$, $S_{PMD} = S_{PDK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\,S = \frac{1}{3}\,S$ (это легко доказать, используя формулу площади треугольника $S = 0{,}5ab\sin\gamma$). Проведем высоту пирамиды PO и соединим точку O с вершинами треугольника ABC. По теореме о площади проекции многоугольника на плоскость получим: $S_{ABO} = S_{BCO} = S_{CAO} = S\cos\alpha$, значит, $S_{ABC} = 3S\cos\alpha$. Таким образом, заданное отношение площадей имеет вид:

$$\frac{3S\cos\alpha + \frac{3}{4}\,S + \frac{2}{3}\,S + \frac{2}{3}\,S}{\frac{1}{4}\,S + \frac{1}{3}\,S + \frac{1}{3}\,S} = \frac{3\cos\alpha + \frac{25}{12}}{\frac{11}{12}} = \frac{25 + 36\cos\alpha}{11}.$$

Так как α — острый угол, то $0 < \cos\alpha < 1$, поэтому, множеством значений заданного отношения площадей является интервал

$\left(2\frac{3}{11}; 5\frac{6}{11}\right)$, на котором есть всего одно составное натуральное число, а именно, число 4.

Для решения задачи достаточно было использовать неравенство $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$, *так как в этом случае областью значений полученного отношения площадей является* $\left[-1; 5\frac{6}{11}\right]$, *на котором также нет других составных натуральных чисел, кроме числа* 4.

5.3. *Ответ*: да, существуют.

Например, $(10^n+1)^3 \cdot 10^k$, где $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant n \leqslant 2001$; $k = 6004-(3n+1)$. Докажем это. Рассмотрим числа указанного вида. Тогда $(10^n+1)^3 = 10^{3n}+3\cdot 10^{2n}+3\cdot 10^n+1 = 10\ldots 030\ldots 030\ldots 1$ — число, в десятичной записи которого — $(3n+1)$ цифра.

Для каждого значения n от 1 до 2001 выберем $k = 6004-(3n+1)$. Так как $k = 6004-(3n+1) = 6003-3n = 3(2001-n)$ — делится на 3, то указанные числа являются кубами натуральных чисел, причем различаются только порядком цифр.

2002/2003 учебный год

1.1. *Ответ*: все действительные числа, кроме числа -1.

Так как $\frac{2x^3+2x^2-x+2}{x+1} = 2x^2-1+\frac{3}{x+1}$, то, используя верное неравенство $|a+b| \leqslant |a|+|b|$, получим, что данное неравенство выполняется при всех значениях x, при которых входящие в него выражения имеют смысл. То есть, множеством решений этого неравенства являются все значения x кроме $x=-1$.

1.2. Пусть ABC — данный треугольник, AD и CE — его биссектрисы (см. рис. 210). Из условия $\angle ABC = 60^\circ$ следует, что $\angle DOE = \angle AOC = 180^\circ - \frac{\angle BAC + \angle BCA}{2} = 120^\circ$. Так как $\angle DOE + \angle DBE = 180^\circ$, то четырехугольник $BDOE$ — вписанный. O — точка пересечения биссектрис треугольника ABC, значит, BO — биссектриса угла ABC, поэтому она делит дугу ED пополам. Так как равные дуги окружности стягиваются равными хордами, то $OD = OE$, что и требовалось доказать.

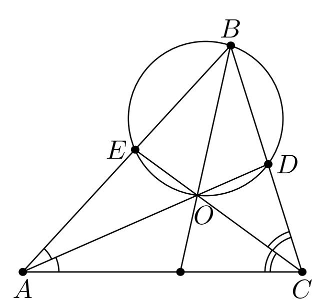


Рис. 210

1.3. *Ответ*: нет, не верно.

Например, функция $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, \text{ при } x \neq 0, \\ 0, \text{ при } x = 0 \end{cases}$ не является монотонной, но $f(f(x)) = x$ —возрастающая функция.

2.1. *Ответ*: $(0; 2002)$.

Исходное уравнение равносильно системе: $\begin{cases} x + \sqrt{x} = (y-2002)^2, \\ y \geqslant 2002. \end{cases}$

По условию, x — целое число, поэтому $t = \sqrt{x}$ — также целое.

Рассмотрим уравнение $t^2 + t - (y-2002)^2 = 0$. Для того, чтобы оно имело целые решения, необходимо, чтобы $D = 1 + 4(y-2002)^2$ являлось полным квадратом. Так как второе слагаемое, в свою очередь, при целых значениях y является полным квадратом, то следующее за ним натуральное число является квадратом тогда и только тогда, когда $(y-2002)^2 = 0 \Leftrightarrow y = 2002$. Откуда $t = 0$ или $t = -1$, то есть, $x = 0$.

2.2. *Ответ*: $\dfrac{a^2+b^2}{2}$.

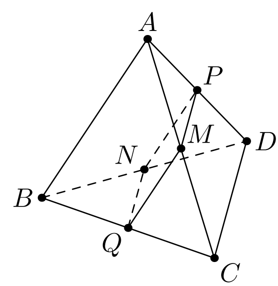


Рис. 211

Пусть в пирамиде $ABCD$ точки M, N, Q и P — середины ребер AC, BD, BC и AD соответственно (см. рис. 211). Так как MQ — средняя линия в $\triangle ABC$, то $MQ \parallel AB$ и $MQ = \dfrac{a}{2}$. Аналогично, $NP \parallel AB$ и $NP = \dfrac{a}{2}$. Следовательно, $MNPQ$ — параллелограмм, причем $MP = QN = \dfrac{b}{2}$. В параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов сторон, следовательно, $MN^2 + PQ^2 = MQ^2 + MP^2 + PN^2 + NQ^2 = 2\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right) = \dfrac{a^2+b^2}{2}$.

2.3. *Ответ*: 0.

Число 2002! кратно 11. Известно, что число кратно 11 тогда и только тогда, когда разность двух сумм цифр в его десятичной записи: стоящих на нечетных местах и стоящих на четных местах, кратна 11. Поэтому, комбинация цифр, составленная Андреем, опять дает число кратное 11, и так далее. Таким образом, каждое из чисел, получаемых в результате описанных операций, кратно 11. Существует единственное однозначное число, кратное 11, — это число 0.

3.1. Выразим из первого условия, например, переменную y через x и z: $y = 5 - z - x$ и подставим во второе равенство. Получим, что $x(5-z-x) + z(5-z-x) + zx = 8$. Это условие можно рассматривать как квадратное уравнение относительно переменной z с параметром x:

$z^2 + (x-5)\,z + (x^2 - 5x + 8) = 0$. Такое уравнение имеет решения, если $D = (x-5)^2 - 4(x^2 - 5x + 8) = -3x^2 + 10x - 7 \geqslant 0$.

Решив это квадратичное неравенство, получим, что $1 \leqslant x \leqslant \frac{7}{3}$, что и требовалось доказать.

3.2. *Ответ*: 1.

Последовательно соединив данные точки отрезками, получим правильный десятиугольник, вписанный в окружность. Так как равные дуги окружности стягиваются равными хордами, то $A_1A_2A_3A_4$ — равнобокая трапеция. Внутренний угол правильного десятиугольника имеет величину 144°, поэтому углы этой трапеции — 144° и 36°.

Далее укажем два способа решения: «геометрический» и «тригонометрический».

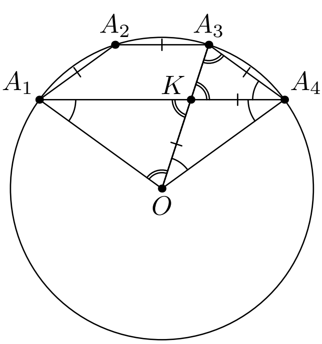


Рис. 212а

Первый способ. Соединим точки A_1, A_3 и A_4 с точкой O — центром окружности (см. рис. 212а). K — точка пересечения отрезков A_1A_4 и OA_3. Каждая из данных равных дуг имеет величину 36°, поэтому, $\angle OA_3A_4 = \angle OA_4A_3 = 72°$. Следовательно, треугольники OKA_4 и KA_4A_3 — равнобедренные, значит, $A_1A_4 - A_1A_2 = A_1A_4 - A_4K = A_1K$. Так как $\angle OA_1A_4 = \angle OA_4A_1 = 36°$; $\angle OKA_1 = 72°$, то треугольник OA_1K — также равнобедренный, поэтому $A_1K = A_1O = 1$.

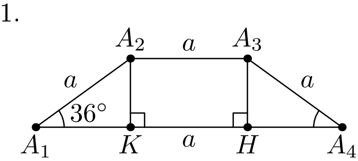


Рис. 212б

Второй способ. Пусть $A_1A_2 = a$, тогда, проведя в трапеции $A_1A_2A_3A_4$ высоты A_2K и A_3H, получим, что $A_1A_4 = a + 2a\cos 36°$ (см. рис. 212б). Значит, $A_1A_4 - A_1A_2 = (a + 2a\cos 36°) - a = 2a\cos 36°$. Из формулы $a_n = 2R\sin\frac{180°}{n}$, выражающей сторону правильного n-угольника через радиус описанной окружности, получим, что $a = 2\sin 18°$, тогда $2a\cos 36° = 2\cos 36° \cdot 2\sin 18° = \frac{2\cos 36° \cdot 2\sin 18° \cdot \cos 18°}{\cos 18°} = \frac{2\cos 36° \cdot \sin 36°}{\cos 18°} = \frac{\sin 72°}{\cos 18°} = 1$.

3.3. *Ответ*: да, верно.

Пусть A_1, A_2, …, A_{100} — отмеченные точки. Выберем на окружности какие-либо две диаметрально противоположные точки M и K. Применив неравенство треугольника для каждого из $\triangle A_iMK$, получим, что для любой из точек A_i, где $i = 1, 2, \ldots, 100$, справедливо, что $A_iM + A_iK \geqslant MK = 2$.

При сложении этих ста неравенств получим, что сумма расстояний от всех отмеченных точек до точек M и K не меньше, чем 200. Следовательно, сумма расстояний хотя бы от одной из точек M или K до всех отмеченных не меньше ста.

4.1. *Ответ*: 0; $\pm\sqrt{2}$.

Первый способ. Пусть $y = \dfrac{x^3 + x}{3}$, тогда получим систему уравнений: $\begin{cases} y^3 + y = 3x, \\ x^3 + x = 3y. \end{cases}$ Вычитая из первого уравнения второе, получим:

$$(y - x)\left(y^2 + xy + x^2\right) + y - x = 3(x - y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y - x)\left(y^2 + xy + x^2 + 4\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &y = x, \\ &y^2 + xy + x^2 = -4. \end{aligned}\right.$$

В первом случае получим уравнение $x^3 + x = 3x$, корнями которого являются числа 0 и $\pm\sqrt{2}$. Уравнение $y^2 + xy + x^2 = -4$ решений не имеет, так как неполный квадрат любых двух чисел принимает только неотрицательные значения.

К такому же результату можно прийти, если сразу указать, что $x = 0$ является корнем данного уравнения, а в случае, когда $x \neq 0$ и $y \neq 0$ вместо вычитания уравнений полученной системы разделить одно из них на другое.

Второй способ. Преобразуем данное уравнение:

$$\frac{\left(\dfrac{x^3 + x}{3}\right)^3 + \dfrac{x^3 + x}{3}}{3} = x.$$

Тогда его можно записать в виде $f(f(x)) = x$, где $f(x) = \dfrac{x^3 + x}{3}$. Полученное равенство $f(f(x)) = x \Leftrightarrow f(x) = f^{-1}(x)$ означает, что функцией, обратной к $f(x)$ является она сама. Графики взаимно обратных функций, построенные в одной системе координат, симметричны относительно прямой $y = x$, при этом, так как функция $f(x)$ является возрастающей (сумма возрастающих функций), то пересекаться эти графики могут только на указанной прямой. Следовательно, корнями исходного уравнения являются только корни уравнения $f(x) = x$, а именно, числа 0 и $\pm\sqrt{2}$.

Отметим, что для этого способа решения существенным условием является возрастание функции $f(x)$.

Существуют убывающие функции, графики которых пересекаются с графиками им обратных функций в точках, не лежащих на прямой $y = x$. Например, система уравнений

$$\begin{cases} y = \left(\frac{1}{16}\right)^x, \\ y = \log_{\frac{1}{16}} x, \end{cases}$$

помимо одного решения вида $(t;t)$ имеет еще два решения: $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$ и $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$, причем обнаружить эти точки пересечения путем построения графиков можно только в том случае, если выбран очень крупный масштаб!

4.2. *Ответ*: $9\sqrt{3}$ см^2.

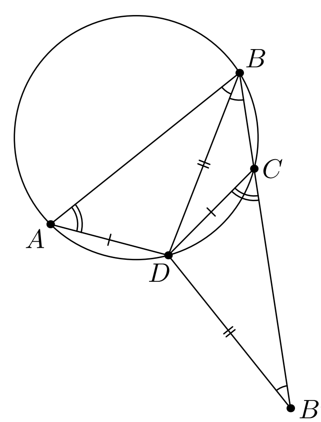


Рис. 213

Так как равные дуги окружности стягиваются равными хордами, то в данном четырехугольнике $ABCD$ $AD = DC$ (см. рис. 213). Рассмотрим поворот с центром D на угол ADC по часовой стрелке. При таком повороте образами точек A и B являются точки C и B' соответственно, то есть, образом треугольника ABD является равный ему треугольник $CB'D$. Так как четырехугольник $ABCD$ — вписанный, то $\angle BCD + \angle BAD = 180^\circ$, значит точки B, C и B' лежат на одной прямой. Таким образом, четырехугольник $ABCD$ и треугольник BDB' — равновелики. Так как в треугольнике BDB': $DB' = DB = 6$ см; $\angle B' = \angle B = 30^\circ$, то $S_{ABCD} = S_{\triangle BDB'} = \frac{1}{2}\,BD \cdot B'D \cdot \sin 120^\circ = 9\sqrt{3}$.

4.3. *Ответ*: например, $\frac{1}{720}$; $\frac{1}{360}$; $\frac{1}{240}$; $\frac{1}{180}$; $\frac{1}{144}$; $\frac{1}{120}$.

Рассмотрим последовательность дробей $\frac{a_1}{P}$; $\frac{a_1+d}{P}$; $\frac{a_1+2d}{P}$; $\ldots$; $\frac{a_1+(n-1)\,d}{P}$, которая является арифметической прогрессией с разностью $\frac{d}{P}$. Для того, чтобы эти дроби входили в заданную бесконечную последовательность необходимо и достаточно, чтобы знаменатель P был кратен каждому из числителей.

Пусть $a_1 = d = 1$, тогда число P кратно каждому из чисел: 1, 2, …, $n-1$. Таким образом, для того, чтобы выбрать n чисел, удовлетворяющих условию, достаточно выбрать $P = n!$ В нашем случае выбраны числа: $\frac{1}{6!}$; $\frac{2}{6!}$; $\frac{3}{6!}$; $\frac{4}{6!}$; $\frac{5}{6!}$ и $\frac{6}{6!}$.

5.1. *Ответ*: $\frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in Z$.

Преобразуем данное уравнение к виду:

$$\sin^{2001} x - \frac{1}{\sin^{2003} x} = \cos^{2001} x - \frac{1}{\cos^{2003} x}.$$

Заметим, что $x \mid \sin x = \pm 1$ не являются решениями этого уравнения, так как если $\sin x = \pm 1$, то и $\cos x = \pm 1$, что одновременно невозможно. Аналогично, $x \mid \cos x = \pm 1$ также не являются решениями данного уравнения.

Рассмотрим функцию $f(t) = t^{2001} - \frac{1}{t^{2003}}$, где $t \in (-1; 0) \cup (0; 1)$. Так как для этих значений t $f'(t) = 2001t^{2000} + \frac{2003}{t^{2004}} > 0$, то на каждом из промежутков $(-1; 0)$ и $(0; 1)$ функция $f(t)$ возрастает. Кроме того, эта функция при $t \in (0; 1)$ принимает только отрицательные значения, а при $t \in (-1; 0)$ — только положительные, поэтому никакое значение $f(t)$ из одного промежутка не может совпасть ни с каким из значений $f(t)$ из другого промежутка. Таким образом, функция $f(t)$ принимает каждое из своих значений ровно при одном значении аргумента. Значит, из того, что $f(\sin x) = f(\cos x)$ следует, что $\sin x = \cos x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, где n — целое число.

5.2. *Ответ*: $0,5V$.

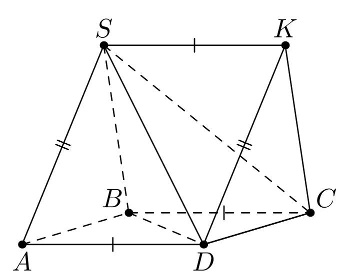


Рис. 214

Пусть $SABCD$ — данная пирамида (см. рис. 214). Построим отрезок SK, параллельный и равный отрезку BC. Тогда $SKCB$ — параллелограмм, значит $KC = SB$. $SKDA$ — также параллелограмм, поэтому $SA = KD$. Таким образом, $\triangle SKC = \triangle SBC$; $\triangle SKD = \triangle SAD$; $\triangle KCD = \triangle SBA$, следовательно, $SKCD$ — искомая треугольная пирамида. $V_{SKCD} = V_{SBCD}$, так как их основания равны ($\triangle SKC = \triangle SBC$), а высоты, проведенные в этих пирамидах из вершины D, совпадают. Так как $V_{SBCD} = 0,5V$, то $V_{SKCD} = 0,5V$.

Указанное построение треугольной пирамиды не является единственно возможным, но, так как боковые ребра данной пирамиды различны и не равны ребрам основания, то все пирамиды, которые можно составить из боковых граней данной пирамиды, будут равны. В частности, можно строить искомую треугольную пирамиду, используя в качестве «неподвижной» не грань SCD, а любую другую боковую грань.

5.3. *Ответ*: наименьшее — $\sqrt{7}$; наибольшее — $\sqrt{21}$.

Пусть $\sqrt{4a+1} = x \geqslant 0$; $\sqrt{4b+1} = y \geqslant 0$; $\sqrt{4c+1} = z \geqslant 0$. Тогда, по условию, $x^2 + y^2 + z^2 = 4(a+b+c) + 3 = 7$. Найдем наименьшее и наибольшее значения суммы $S = x + y + z$ при неотрицательных значениях переменных x, y и z. Укажем два способа решения: «алгебраический» и «геометрический».

Первый способ. 1) $S^2 = (x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz = 7+2(xy+yz+xz) \geqslant 7$, так как $xy+yz+xz \geqslant 0$. Равенство достигается, например, при $x = y = 0$; $z = \sqrt{7}$. Следовательно, наименьшее значение S, а значит, и данного выражения, равно $\sqrt{7}$ (например, если $a = b = -0,25$; $c = 1,5$).

2) Используя неравенство о среднем арифметическом и среднем квадратичном трех чисел, получим: $\frac{x+y+z}{3} \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} = \sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $x = y = z$. Следовательно, наибольшее значение S, а значит, и данного выражения, равно $\sqrt{21}$ $\left(\text{при } a = b = c = \frac{1}{3}\right)$.

Второй способ. Уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 7$ в декартовой системе координат задает сферу с центром в точке O (0; 0; 0) и радиусом, равным $\sqrt{7}$. Среди точек этой сферы, имеющих неотрицательные координаты, найдем те, для которых сумма координат S: 1) наименьшая; 2) наибольшая. Для этого рассмотрим произвольную точку $P(x; y; z)$, принадлежащую указанной части сферы.

1) Разложим $\overline{OP}$ на три вектора, коллинеарных «базисным» векторам, то есть, $\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$, где $\overline{OP}(x; y; z)$, $\overline{OA}(x; 0; 0)$, $\overline{OB}(0; y; 0)$, $\overline{OC}(0; 0; z)$. $|\overline{OP}| = |\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}| \leqslant |\overline{OA}| + |\overline{OB}| + |\overline{OC}|$, причем, так как векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$ не могут быть одинаково направлены, то равенство достигается тогда, и только тогда, когда два из них — нулевые. Следовательно, наименьшее значение S достигается в точках пересечения сферы с положительными полуосями координат и равно $\sqrt{7}$.

2) Рассмотрим два вектора: $\overline{OP}(x;y;z)$ и $\overline{e}(1;1;1)$. Искомое значение S равно скалярному произведению векторов $\overline{OP}$ и $\overline{e}$, при условии, что $|\overline{OP}| = \sqrt{7}$, а $|\overline{e}| = \sqrt{3}$. Так как $S = \overline{OP}\cdot\overline{e} = |\overline{OP}|\cdot|\overline{e}|\cdot\cos\angle(\overline{OP};\overline{e}) \leqslant |\overline{OP}|\cdot|\overline{e}| = \sqrt{21}$, то искомое значение не превосходит $\sqrt{21}$. Равенство достигается тогда и только тогда, когда вектора $\overline{OP}$ и $\overline{e}$ одинаково направлены, то есть, когда $x = y = z$. Следовательно, наибольшее значение S достигается в точке сферы, имеющей одинаковые координаты, и равно $\sqrt{21}$.

Отметим, что утверждение, доказанное в процессе решения задачи, можно интерпретировать еще и так: из всех прямоугольных параллелепипедов с данной длиной диагонали наименьшую сумму измерений имеет «вырожденный» параллелепипед, а наибольшую — куб.

2003/2004 учебный год

1.1. *Ответ*: ± 1.

Первый способ. Из условия задачи следует, что $xy \neq 0$ и $x^2 - 5xy + 6y^2 = 0$. Решив квадратное уравнение относительно переменной x, получим, что $x = 2y$ или $x = 3y$.

Если $x = 2y$, то $\dfrac{xy}{x^2-6y^2} = \dfrac{2y\cdot y}{4y^2-6y^2} = \dfrac{2y^2}{-2y^2} = -1$; если $x = 3y$, то $\dfrac{xy}{x^2-6y^2} = \dfrac{3y\cdot y}{9y^2-6y^2} = \dfrac{3y^2}{3y^2} = 1$.

Второй способ. Из условия следует, что $y \neq 0$. Разделим числитель и знаменатель данной дроби на y^2: $\dfrac{\frac{x}{y}}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 6} = \dfrac{1}{5}$. Пусть $t = \dfrac{x}{y}$, тогда получим квадратное уравнение $t^2 - 5t + 6 = 0$, корнями которого являются числа 2 и 3. Таким образом, $\dfrac{xy}{x^2-6y^2} = \dfrac{t}{t^2-6} = \pm 1$.

1.2. *Ответ*: нет, не может.

Предположим, что основанием данной пирамиды является квадрат. Рассмотрим треугольник, стороны которого — боковые рёбра с длинами 1 и 6. Длина его третьей стороны, являющейся либо стороной, либо диагональю квадрата, меньше 7. В обоих случаях получим, что длина стороны квадрата меньше 7. Рассмотрим треугольник, стороны которого — боковые рёбра длины 1 и 11. Его третья сторона также является либо стороной, либо диагональю квадрата, поэтому ее длина должна быть меньше, чем $7\sqrt{2}$. Так как $1 + 7\sqrt{2} < 11$, то треугольника с такими длинами сторон не существует, то есть, основание данной пирамиды квадратом быть не может.

1.3. Для каждой черной клетки существует черная клетка, симметричная ей относительно центра доски. Аналогичное утверждение верно и для каждой белой клетки. Следовательно, каждому построенному вектору будет соответствовать вектор, ему центрально симметричный. Разобьем сумму всех рассматриваемых векторов на пары центрально симметричных векторов. Центрально симметричные вектора являются противоположными, поэтому сумма векторов в каждой паре равна нулевому вектору, следовательно и сумма всех векторов также равна нулевому вектору.

2.1. *Ответ*: нет, не верно.

Приведем несколько примеров.

1) Функция $f(x)=\begin{cases}2, \text{если } x\neq 1,\\ 3, \text{если } x=1.\end{cases}$ имеет разрыв в точке $x=1$, при этом $f(f(x))=2$ для любых x, поэтому функция $f(f(x))$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

2) Функция $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, \text{если } x\neq 0\\ 0, \text{если } x=0.\end{cases}$ имеет разрыв в точке $x=0$, при этом $f(f(x))=x$ для любых x, поэтому функция $f(f(x))$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

3) Функция Дирихле: $f(x)=\begin{cases}1, x\in Q,\\ 0, x\notin Q.\end{cases}$ не является непрерывной ни в одной точке! При этом $f(f(x))=1$ для любых x, поэтому функция $f(f(x))$ — непрерывна на $\mathbb{R}$.

2.2. *Ответ*: 19, 2 см.

Первый способ. Пусть $\angle BAC=\alpha$, тогда $\angle CBD=\angle ABD=90^\circ-\alpha$ (см. рис. 215). Пусть R_1 и R_2 — радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и BDC соответственно. Тогда, по следствию из теоремы синусов для $\triangle ABC$: $BC=2R_1\sin\alpha$. Аналогично, для $\triangle BCD$: $CD=2R_2\sin(90^\circ-\alpha)=2R_2\cos\alpha$. Так как $BC=CD=a$, то $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{R_2}{R_1}$. При заданных числовых значениях: $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{4}{3}$; $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\dfrac{3}{5}$; $a=4,8$ (см); $P_{ABCD}=19,2$ (см).

Можно также получить соотношение между стороной ромба и данными радиусами в явном виде: $\sin^2\alpha=\dfrac{a^2}{4R_1^2}$; $\cos^2\alpha=\dfrac{a^2}{4R_2^2}$; *тогда* $\dfrac{a^2}{4}\left(\dfrac{1}{R_1^2}+\dfrac{1}{R_2^2}\right)=1$, *то есть*, $a=\dfrac{2R_1R_2}{\sqrt{R_1^2+R_2^2}}$.

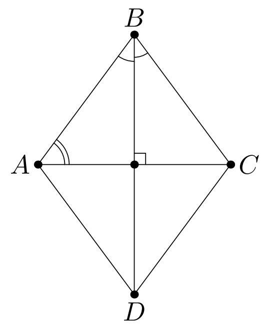


Рис. 215

Второй способ. Очевидно, что $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$. Воспользуемся формулой: $S_{\triangle} = \frac{abc}{4R}$, где a, b и c — стороны треугольника; R — радиус описанной около него окружности. Тогда $\frac{BD}{AC} = \frac{R_2}{R_1}$, то есть $\operatorname{tg}\alpha = \frac{R_2}{R_1}$. Дальнейшие вычисления проводятся аналогично проделанным выше.

2.3. *Ответ*: $n = 5$.

Запишем данное уравнение в виде $n(n-1)(n+1) = n(n-1)(n-2) \times \times(n-3)\ldots 2\cdot 1$. Так как $n = 1$ не является его решением, то разделим обе части уравнения на $n(n-1)$. Получим, что $n+1 = (n-2)(n-3)\cdot\ldots 2\cdot 1$. Проверяя последовательные натуральные значения n, начиная с $n = 2$, получим, что решением уравнения является $n = 5$. Так как для всех $n > 5$ верно, что $n+1 < 2n-4 = 2(n-2)$, то $n+1 < (n-2)\cdot 2 < < (n-2)(n-3)\cdot\ldots 2\cdot 1$, поэтому других натуральных решений данное уравнение не имеет.

3.1. *Ответ*: 0; 1.

Пусть $t = \sqrt[12]{x} \geqslant 0$, тогда $t^2 = \sqrt[6]{x}$ и $t^3 = \sqrt[4]{x}$. Данное уравнение примет вид: $\frac{2^t + 2^{t^3}}{2} = 2^{t^2}$.

Воспользуемся дважды неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим: $\frac{2^t + 2^{t^3}}{2} \geqslant \sqrt{2^t\cdot 2^{t^3}} = 2^{\frac{t+t^3}{2}} \geqslant \geqslant 2^{\sqrt{t\cdot t^3}} = 2^{t^2}$, причем равенство возможно тогда и только тогда, когда $t = t^3$. Учитывая, что $t \geqslant 0$, получим, что $t = 0$ или $t = 1$, то есть, $x = 0$ или $x = 1$.

Отметим, что возможно аналогичное решение без замены переменных.

3.2. *Первый способ.* Достроим данный треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$ и на стороне CD отложим отрезок $CN = BL$ (см. рис. 216а). Тогда из равенства треугольников KBL и NCL следует, что $LN = KL$, а из того, что $AKNC$ — параллелограмм, следует, что $AC = KN$. Применив неравенство треугольника для $\triangle KLN$ получим, что $KL + LN \geqslant KN$, то есть, $KL \geqslant \frac{1}{2}AC$, что и требовалось доказать.

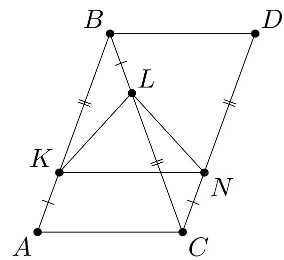


Рис. 216а

Второй способ. Проведем DE — среднюю линию треугольника ABC. Если KL совпадает с DE, то $KL = \frac{1}{2}AC$. В противном случае проведем также отрезки KP и LQ, параллельные AC (см. рис. 216б). Так как $AK = CP = BL = BQ$, то DE — средняя линия равнобокой трапеции $KPLQ$. Пусть LN — высота этой трапеции, тогда $KL > KN = DE = \frac{1}{2}AC$. Таким образом, $KL \geqslant \frac{1}{2}AC$, что и требовалось доказать.

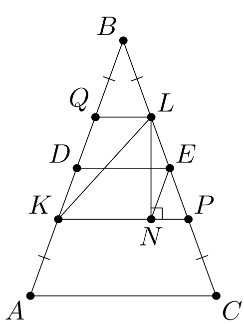


Рис. 216б

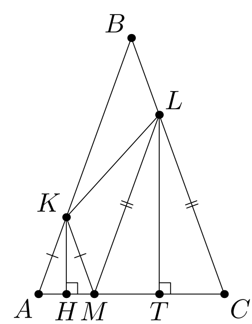


Рис. 216в

Третий способ. Проведем $KM \parallel BC$ (см. рис. 216в), тогда $\triangle AKM$ — равнобедренный, то есть, $KM = AK = BL$. Следовательно, $KMLB$ — параллелограмм, то есть, $ML \parallel AB$ и $ML = KB = LC$. Проведём высоты KH и LT в равнобедренных треугольниках AKM и MLC соответственно. Так как эти высоты являются медианами, то $HT = \frac{1}{2}AC$, а $HT \leqslant KL$, так как HT — ортогональная проекция отрезка KL на прямую AC. Таким образом, $KL \geqslant \frac{1}{2}AC$, что и требовалось доказать.

Четвертый способ. Проведем KH и LT — перпендикуляры к прямой AC (см. рис. 216в), тогда $HT \leqslant KL$. Пусть $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$, тогда $AH = AK\cos\alpha$, $CT = CL\cos\alpha$. Следовательно, $AH + CT = (AK + CL)\cos\alpha = AB\cos\alpha = \frac{1}{2}\,AC$, поэтому, $HT = \frac{1}{2}\,AC$. Таким образом, $KL \geqslant \frac{1}{2}\,AC$, что и требовалось доказать.

3.3. *Ответ*: нет, не верно.

Пусть найдено какое-то решение данного ребуса. Тогда существуют еще три решения этого ребуса, которые получаются из него следующим образом: 1) перестановкой числовых значений букв А и И; 2) перестановкой числовых значений букв В и Р; 3) осуществлением обеих перестановок. Отметим, что перестановка числовых значений букв Д и Т в решении ребуса не приводит к новому решению, так как буква Т присутствует еще и в правой части равенства.

Рассмотрим множество решений данного ребуса и разобьем его на четыре непересекающихся подмножества: 1) В > Р и А > И; 2) В > Р и А < И; 3) В < Р и А > И; 4) В < Р и А < И (неравенства — строгие, так как различным буквам должны соответствовать различные цифры). Каждому решению из одного подмножества соответствует ровно одно решение из любого другого подмножества и эти соответствия взаимно однозначны, поэтому эти подмножества содержат равные количества элементов. Следовательно, общее количество решений ребуса должно быть кратно 4, а число 150 на 4 не делится.

С помощью компьютера можно найти все решения данного ребуса. Оказывается, что их — 180.

4.1. *Ответ*: 2^{22}.

Так как $1 + \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}45^\circ + \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos\alpha\cdot\cos45^\circ}$, то $1 + \operatorname{tg}1^\circ = \dfrac{\sin46^\circ}{\cos1^\circ\cdot\cos45^\circ}$, $1+\operatorname{tg}2^\circ = \dfrac{\sin47^\circ}{\cos2^\circ\cdot\cos45^\circ}, \ldots, 1+\operatorname{tg}43^\circ = \dfrac{\sin88^\circ}{\cos44^\circ\cdot\cos45^\circ}$, $1 + \operatorname{tg}44^\circ = \dfrac{\sin89^\circ}{\cos44^\circ\cdot\cos45^\circ}$. Таким образом, $(1+\operatorname{tg}1^\circ)(1+\operatorname{tg}2^\circ)\ldots\times(1+\operatorname{tg}44^\circ) = \dfrac{\sin46^\circ\cdot\sin47^\circ\cdot\ldots\cdot\sin89^\circ}{\cos1^\circ\cos2^\circ\cdot\ldots\cos44^\circ\cdot(\cos45^\circ)^{44}}$. Учитывая, что $\cos\alpha = \sin(90^\circ-\alpha)$, получим: $\sin89^\circ = \cos1^\circ$, $\sin88^\circ = \cos2^\circ$, …, $\sin46^\circ = \cos44^\circ$, откуда следует, что исходное выражение равно: $\dfrac{1}{(\cos45^\circ)^{44}} = (\sqrt{2})^{44} = 2^{22}$.

4.2. *Ответ*: по прямой, параллельной s и находящейся от нее на расстоянии $\dfrac{2Rr}{R+r}$.

Пусть A и B — центры данных окружностей; P и T — точки касания окружностей с одной из данных касательных (см. рис. 217а). Так как при гомотетии с центром M одна из окружностей переходит в другую, то M лежит на прямой AB. Кроме того, $AM : MB = r : R$ (это соотношение можно также получить из подобия треугольников APM и BTM).

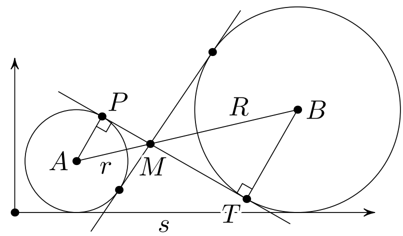


Рис. 217а

Введем на плоскости декартову систему координат так, чтобы прямая s являлась осью абсцисс. Тогда точка A движется по прямой $y = r$; а точка B — по прямой $y = R$. В этом случае $y_M = \dfrac{R \cdot y_A + r \cdot y_B}{y_A + y_B} = \dfrac{2Rr}{R+r}$, то есть, ордината точки M постоянна (не зависит от положения окружностей). Следовательно, точка M движется по прямой, параллельной s и находящейся от нее на расстоянии y_M.

Этот же результат можно получить геометрически. Опустим перпендикуляры AD и BC на прямую s (см. рис. 217б). Пусть диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Длина отрезка MK, содержащего точку O и параллельного основаниям трапеции,

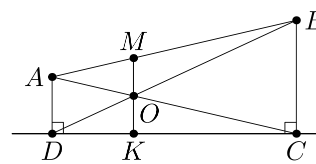


Рис. 217б

является средним гармоническим длин оснований, то есть, $MK = \dfrac{2Rr}{R+r}$. При этом, $MK \perp s$ и $AM : MB = AO : OC = AD : BC = r : R$, то есть, M — точка, заданная в условии задачи.

4.3. *Ответ*: нет, нельзя.

Так как количество камней в каждой кучке нечетно, то сначала придется сложить какие-либо две кучки в одну. Рассмотрим возможные варианты:

1) Сложим в одну кучки из 5 камней и 49 камней. Получим две кучки: 54 камня и 51 камень. Оба количества камней кратны трем. Так

как числа 3 и 2 взаимно просты, то при дальнейшем применении разрешенных операций могут получаться только кучки, количество камней в которых также кратно трем. Следовательно, количество камней в любой кучке не может стать меньше трех и разложить камни на кучки по одному невозможно.

2) Сложим в одну кучки из 5 камней и 51 камня. Получим две кучки: 56 камней и 49 камней. Оба количества камней кратны семи. Аналогичными рассуждениями получим, что количество камней в любой кучке не может стать меньше семи, что также не позволит разложить камни их в кучки по одному.

3) Сложим кучки из 49 камней и 51 камня. Получим две кучки: 100 камней и 5 камней. Оба количества камней кратны пяти, что также не позволит разложить их в кучки по одному камню.

5.1. *Ответ*: 0; 2; -4.

Рассмотрим выражение $x^3+y^3+z^3-3xyz$ и разложим его на множители: $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y)(x^2-xy+y^2)+z^3-3xyz=(x+y)((x+y)^2-3xy)+z^3-3xyz=(x+y)^3+z^3-3xy(x+y)-3xyz=(x+y+z)((x+y)^2-(x+y)z+z^2)-3xy(x+y+z)=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$.

Заметим также, что выражение во второй скобке может принимать только неотрицательные значения, то есть, $x^2+y^2+z^2\geqslant xy+yz+zx$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $x=y=z$.

Это можно доказать различными способами, например: 1) $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0,5(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx)=0,5((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2)\geqslant 0$; 2) записав три верных неравенства: $\dfrac{x^2+y^2}{2}\geqslant xy$; $\dfrac{y^2+z^2}{2}\geqslant yz$; $\dfrac{z^2+x^2}{2}\geqslant zx$ и сложив их.

Пусть $x=a$, $y=-b$, $z=-c$, тогда $a^3-b^3-c^3-3abc=(a-b-c)(a^2+b^2+c^2+ab-bc+ca)$. По доказанному выше, равенство $a^3-b^3-c^3=3abc$ выполняется если $a=b+c$ или $a=-b=-c$. Из равенства $a^2=2(b+c)$ в первом случае получим, что $a^2=2a\Leftrightarrow a=0$ или $a=2$, а во втором случае: $a^2=-4a\Leftrightarrow a=0$ или $a=-4$.

Отметим, что если само тождество $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ *известно, то доказать его можно и проще: раскрыть скобки в правой части и привести подобные слагаемые. Также можно было преобразовывать первое из данных равенств, используя, например, замену переменных:* $u=b+c$, $v=bc$. *Так как* $b^3+c^3=(b+c)(b^2-bc+c^2)=(b+c)((b+c)^2-3bc)$, *то это равенство примет вид:* $a^3-(u^3-3uv)=3av\Leftrightarrow(a-u)(a^2+au+u^2)+3v(u-a)=0\Leftrightarrow(a-u)(a^2+au+u^2-3v)=0$. *Выполнив обратную замену,* *получим, что* $(a-b-c)\left(a^2+b^2+c^2+ab-bc+ca\right)=0$. *Дальнейшее решение совпадает с уже изложенным.*

5.2. *Ответ*: в четырех гранях все углы по 90°; в двух гранях — 45° и 135°.

Сначала рассмотрим ортогональную проекцию параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на плоскость грани $ABCD$. Пусть площадь этой проекции равна площади $ABCD$, тогда эта грань является проекцией грани $A_1B_1C_1D_1$, то есть, ребра AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 перпендикулярны рассматриваемым граням. Следовательно, грани ABB_1A_1, BB_1C_1C, CC_1D_1D и DD_1A_1A являются прямоугольниками (см. рис. 218).

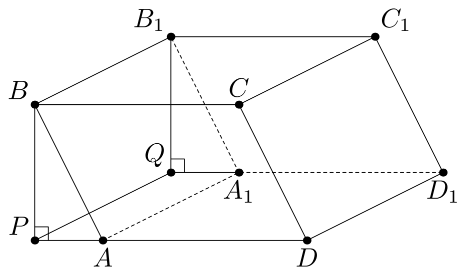


Рис. 218

Пусть PQD_1D — ортогональная проекция рассматриваемого в задаче параллелепипеда на плоскость грани AA_1D_1D. Тогда $S_{PQD_1D}=$ $=DP\cdot AA_1=(AD+AB\cos\angle PAB)\cdot AA_1$. $\angle PAB=\angle PDC=\alpha$ — острый угол в грани $ABCD$, который является углом между плоскостями граней ABB_1A_1 и AA_1D_1D. Угол между плоскостями параллельных им граней CC_1B_1B и CC_1D_1D также равен α, поэтому рассматривая проекцию параллелепипеда на плоскость CC_1D_1D аналогично получим, что площадь этой проекции равна $(CD+BC\cos\alpha)\cdot CC_1$.

По условию, найденные площади соответственно равны $1,5AD\cdot AA_1$ и $2CD\cdot CC_1$. Обозначим: $AD=a$; $AB=CD=b$; $AA_1=CC_1=c$. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases}(a+b\cos\alpha)\,c=1,5ac,\\(b+a\cos\alpha)\,c=2bc.\end{cases}$$

Упростим ее:

$$\begin{cases}b\cos\alpha=0,5a,\\a\cos\alpha=b.\end{cases}$$

Перемножив уравнения почленно, имеем: $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{2}$, то есть, $\alpha=45^\circ$.

Отметим, что после того, как было доказано, что четыре грани параллелепипеда являются прямоугольниками, мы практически рассматривали не ортогональные проекции этого параллелепипеда на плоскости граней, а ортогональные проекции параллелограмма $ABCD$ на прямые AD и CD.

5.3. *Ответ*: верно.

Если двузначное число n разложить в произведение простых множителей, то есть, представить в виде: $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, то $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k \leqslant 6$. Действительно, наименьшим простым множителем является число 2, а максимальным показателем степени в разложении может быть 6, так как $2^6 = 64 < 100$, а $2^7 = 128 > 100$.

Рассмотрим выбранное число m в сотой степени. По условию m^{100} кратно каждому из оставшихся чисел n_1, n_2, $\ldots$, n_{16}, следовательно, m^{100} кратно каждому простому делителю любого из этих чисел, причем в разложение числа m^{100} каждый из этих простых делителей входит с показателем степени, не меньшим ста.

Разложение произведения $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{16}$ на простые множители содержит те же множители, причем показатель степени каждого из них не превосходит $16 \cdot 6 = 96 < 100$. Значит, m^{100} делится на $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{16}$, что и требовалось доказать.

2004/2005 учебный год

1.1. *Ответ*: $(0; 0)$.

Удобнее записать уравнение так: $2^{|x|} + \lg(1 + x^2 + |y|) = \cos y$. Тогда $2^{|x|} \geqslant 2^0 = 1$ и $\lg(1 + x^2 + |y|) \geqslant \lg 1 = 0$, то есть, $2^{|x|} + \lg(1 + x^2 + |y|) \geqslant 1$. Так как $\cos y \leqslant 1$, то исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 2^{|x|} + \lg(1 + x^2 + |y|) = 1, \\ \cos y = 1, \end{cases}$$

причем равенства достигаются тогда и только тогда, когда они достигаются во всех записанных неравенствах. Следовательно, $x = 0$; $y = 0$.

1.2. *Ответ*: 4.

Проведем диагональ AC данного четырехугольника (см. рис. 219). Тогда E — точка пересечения медиан треугольника ABC. Так как медианы треугольника разбивают его на шесть равновеликих треугольников, то $S_{AEC} = \frac{1}{3} S_{ABC}$. Аналогично, так как F — точка пересечения медиан треугольника ADC, то $S_{AFC} = \frac{1}{3} S_{ADC}$. Таким образом, $S_{AECF} = \frac{1}{3}(S_{ABC} + S_{ADC}) = \frac{1}{3} S_{ABCD} = 4$.

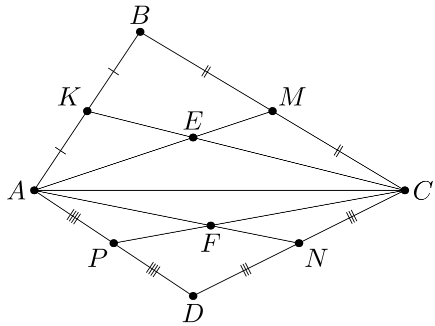


Рис. 219

1.3. *Ответ*: $\frac{1}{4}$.

Пусть $d = 1 - a - b - c$, тогда из условия задачи следует, что $a + b + c + d = 1$. Предположим, что $M > \frac{1}{4}$, тогда каждое из данных чисел больше, чем $\frac{1}{4}$, следовательно, $a + b + c + d > 1$ — противоречие. Значение $M = \frac{1}{4}$ достигается, если $a = b = c = d = \frac{1}{4}$.

2.1. *Ответ*: $(1; 0)$; $(1; 8)$; $(-1; -4)$; $(-1; 4)$.

Уравнение $|x + 2| + |y - 2| = 4$ задает на координатной плоскости контур квадрата с центром $M(-2; 2)$ (см. рис. 220). Стороны этого квадрата принадлежат прямым, имеющим уравнения: $y = x$; $y = x + 8$; $y = -x - 4$; $y = -x + 4$. Такие прямые имеют с границей построенного квадрата бесконечно много общих точек, а никакие другие прямые этим свойством не обладают.

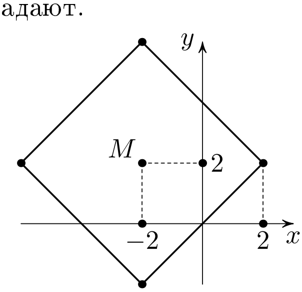


Рис. 220

Таким образом, исходная система уравнений будет иметь бесконечно много решений тогда и только тогда, когда прямая $y = kx + b$ совпадет с одной из этих четырех прямых. Следовательно, $k = 1$; $b = 0$ или $k = 1$; $b = 8$ или $k = -1$; $b = -4$ или $k = -1$; $b = 4$.

2.2. *Ответ*: да, существует.

Например, пирамида $PABCD$, основанием которой является невыпуклый четырехугольник $ABCD$ (см. рис. 221а), или многогранник $PABCD$, который получится, если из тетраэдра $PABC$ «вырезать» тетраэдр $DABC$ (см. рис. 221б).

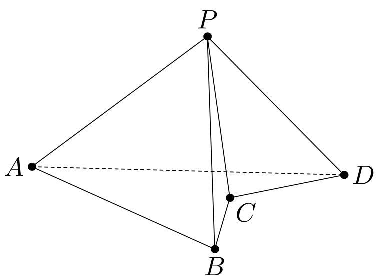


Рис. 221а

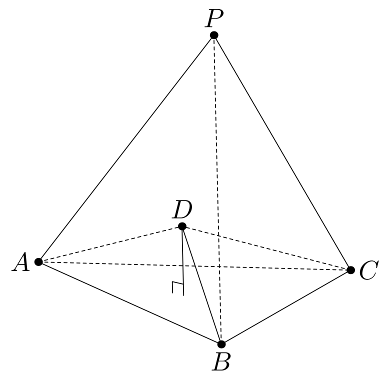


Рис. 221б

Можно доказать, что многогранник, удовлетворяющий условию, либо имеет шесть треугольных граней, либо одну четырехугольную и четыре треугольных.

2.3. *Первый способ.* Если число m — простое, то оно либо равно 3, либо не делится на 3. Если $m = 3$, то $m^2 + 2 = 11$, $m^3 + 2 = 29$, то есть эти числа — простые. Если число m не делится на 3, то остаток от его деления на 3 равен либо 1, либо 2. В обоих случаях остаток от деления числа m^2 на 3 равен 1, поэтому m^2+2 делится на 3. Так как это число — простое, то оно равно 3, тогда $m = 1$ — не простое, что противоречит условию задачи.

Второй способ. Если число m — простое и $m > 3$, то $m = 6k \pm 1$, где $k \in \mathbb{N}$. Тогда $m^2 + 2 = 36k^2 \pm 12k + 3$, то есть $m^2 + 2$ делится на 3. Так как это число больше трех, то оно не является простым. Оставшиеся случаи: 1) если $m = 2$, то $m^2 + 2 = 6$ — не простое; 2) если $m = 3$, то $m^2 + 2 = 11$ — простое, тогда $m^3 + 2 = 29$ — также простое число.

Таким образом, условие задачи выполняется только для одного значения m. Для него выполняется и ее утверждение.

3.1. *Ответ*: 3.

Пусть $f(t) = t^3 - 3t^2$, тогда числа x, y и z — различные корни уравнения $f(t) = a$, где a — некоторое действительное число. Докажем, что это уравнение может иметь три различных действительных корня.

Для этого исследуем функцию $f(t)$ на монотонность и экстремумы и построим эскиз ее графика. Так как $f'(t) = 3t^2 - 6t = 3t(t-2)$, то $t = 0$ и $t = 2$ — критические точки функции; $f(0) = 0$; $f(2) = -4$. Учитывая изменения знака производной, получим эскиз графика (см. рис. 22). Поэтому при $a \in (-4; 0)$ уравнение имеет три действительных корня, что и требовалось доказать. Тогда по теореме Виета сумма $x + y + z$ корней уравнения $t^3 - 3t^2 - a = 0$ равна 3.

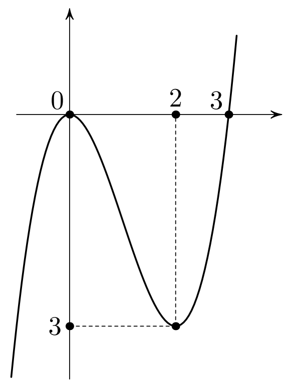


Рис. 222

Заметим, что значение суммы корней можно получить и не используя теоремы Виета для уравнения третьей степени. Достаточно записать равенство многочленов с переменной t: $t^3 - 3t^2 - a = (t-x)(t-y)(t-z)$, раскрыть скобки в правой части и приравнять соответствующие коэффициенты.

Отметим также, что ответ в задаче не изменится, если не требовать в условии, чтобы данные числа были действительными, поскольку теорема Виета справедлива и тогда, когда какие-то из корней — комплексные числа.

3.2. *Первый способ.* Из условия задачи следует, что $\angle BMA = \angle MCA + \angle MAC = 60^\circ$. Отложим на продолжении биссектрисы AM отрезок ME, равный BM, и рассмотрим точку D, симметричную точке B относительно прямой AM, лежащую на основании AC (см. рис. 223а). Тогда $DM = BM = EM$ и $\angle DMA = \angle BMA = 60^\circ = \angle DMC = \angle EMC$. Таким образом, MC — биссектриса $\angle DME$, поэтому углы MCD и MCE симметричны относительно прямой MC. Тогда в треугольнике ACE: $\angle ACE = 80^\circ = \angle AEC$, то есть $AC = AE = AM + ME = AM + BM$, что и требовалось доказать.

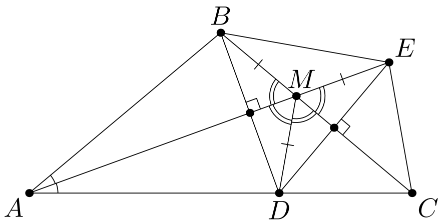


Рис. 223а

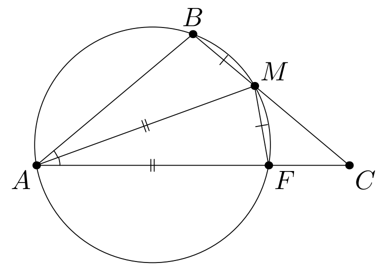


Рис. 223б

Второй способ. На основании AC данного треугольника отметим точку F такую, что $AF = AM$ (см. рис. 223б). Тогда $\angle AFM = \angle AMF = 80^\circ$. Так как $\angle ABM + \angle AFM = 180^\circ$, то около четырехугольника $ABMF$ можно описать окружность. Хорды BM и MF этой окружности равны, так как стягивают равные дуги. Кроме того, в треугольнике MFC: $\angle MFC = 100^\circ$; $\angle MCF = 40^\circ$, поэтому $\angle CMF = 40^\circ$. Следовательно, $MF = FC$. Таким образом, $AM + BM = AM + MF = AF + FC = AC$, что и требовалось доказать.

3.3. *Ответ*: нет, нельзя.

Пусть это возможно, тогда, так как 39-угольник составлен из шестиугольников, то его углы составлены из углов этих шестиугольников. Следовательно, сумма углов 39-угольника не превосходит суммы углов девяти шестиугольников. Но если эти многоугольники — выпуклые, то первая сумма равна $180^\circ \cdot 37$, а вторая сумма равна $(180^\circ \cdot 4) \cdot 9 = 180^\circ \cdot 36$.

4.1. *Ответ*: 2.

Заметим, что при $x < 0$ значение левой части больше, чем значение правой, поэтому данное уравнение не имеет отрицательных корней. Пусть $x \geqslant 0$, тогда запишем уравнение так: $2^{x^5} + 2^{2x^4} + 2^{32} = 3 \cdot 2^{4x^3}$.

Для неотрицательных чисел справедливо неравенство: $\dfrac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$, причем равенство достигается только при $a = b = c$. Воспользуемся этим дважды:

$$\frac{2^{x^5} + 2^{2x^4} + 2^{32}}{3} \geqslant \sqrt[3]{2^{x^5} \cdot 2^{2x^4} \cdot 2^{32}} = 2^{\frac{x^5 + 2x^4 + 32}{3}} \geqslant 2^{\sqrt[3]{x^5 \cdot 2x^4 \cdot 32}} = 2^{4x^3}.$$

Таким образом, корнями уравнения являются те значения x, для которых в обоих случаях выполняются равенства. Следовательно, $x^5 = 2x^4 = 32 \Leftrightarrow x = 2$.

4.2. *Ответ*: 60°.

Пусть $ABCDA'B'C'D'$ — данная усеченная пирамида; $AA'C'C$ и $AB'C'D$ — равновеликие сечения; φ — величина угла между их плоскостями (см. рис. 224). Проведем диагонали оснований, пересекающиеся в точках Q и Q'. Тогда ортогональной проекцией четырехугольника $AB'C'D$ на плоскость $AA'C'$ является четырехугольник $AQ'C'Q$. По теореме о площади ортогональной проекции многоугольника: $S_{AQ'C'Q} = S_{AB'C'D} \cdot \cos\varphi$. Кроме того, $S_{AQ'C'Q} = \frac{1}{2}S_{AA'C'C}$, так как высоты этих трапеций равны, а основания первой трапеции — в два раза меньше соответствующих оснований второй. Следовательно, $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, то есть $\varphi = 60°$.

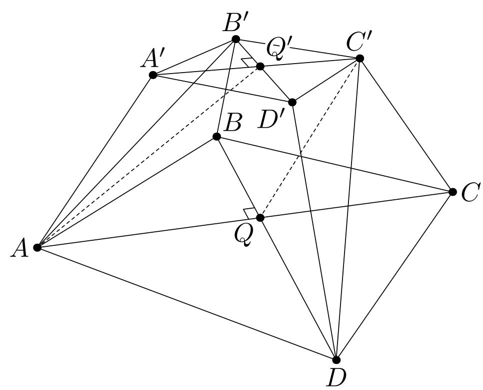


Рис. 224

Отметим, что «лобовые» способы вычисления искомого угла — весьма трудоемки.

4.3. *Ответ*: нет, не могут.

Из условия задачи следует, что внутри цепочки числа должны стоять парами. Так как $N > 1$, то найдется число, не стоящее ни на одном из концов цепочки, то есть оно входит в цепочку четное количество раз. Кроме того, заметим, что все числа имеют одинаковое количество вхождений в цепочку, поэтому каждое из чисел входит в цепочку четное количество раз. Следовательно, если какое-то число стоит на одном конце цепочки, то оно же должно стоять и на другом конце.

Отметим, что каждое число входит в цепочку $N+2$ раза. Так как $N+2$ — четно, то и N — четно. Таким образом, если $N > 1$ и N — нечётно, то выложить в цепочку все кости домино невозможно.

5.1. *Ответ*: 39.

Рассмотрим векторы: $\overline{m}(3x; 4y; 12z)$ и $\overline{n}(2; -1; 2)$ такие, что $\overline{m} \cdot \overline{n} = 6x - 4y + 24z$. Тогда $|\overline{m}| = \sqrt{9x^2 + 16y^2 + 144z^2} = 13$, $|\overline{n}| = 3$. Так как $\overline{m} \cdot \overline{n} \leqslant |\overline{m}| \cdot |\overline{n}|$, то $6x - 4y + 24z \leqslant 39$.

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $\overline{m} \uparrow\uparrow \overline{n}$, то есть

$$\frac{3x}{2} = \frac{4y}{-1} = \frac{12z}{2} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 4z \\ y = -\dfrac{3}{2}z \\ z > 0 \end{cases}$$

Подставив выражения для x и y в данное равенство получим, что найденное значение достигается, если $x = \frac{26}{9}$; $y = -\frac{13}{12}$; $z = \frac{13}{18}$.

Полученный результат можно интерпретировать следующим образом. Данное уравнение задает в декартовой системе координат эллипсоид с центром $O(0;0;0)$ (фигуру вращения эллипса вокруг одной из координатных осей). Из всех плоскостей вида $6x - 4y + 24z = d$, где $d > 0$, ищется та плоскость, которая имеет с эллипсоидом общие точки и наиболее удалена от начала координат. Это будет плоскость, касательная к эллипсоиду.

5.2. Решение этой задачи опирается на следующий факт. Пусть даны три окружности, которые пересекаются попарно, и существуют точки, принадлежащие всем трем кругам. Тогда три общие хорды этих окружностей пересекаются в одной точке (см. рис. 225а). Это утверждение можно доказывать различными способами.

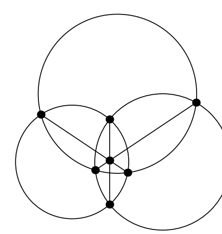


Рис. 225а

«Планиметрическое» доказательство. Рассмотрим окружность ω и точку X. Прямая, проходящая через точку X, пересекает окружность в точках Y и Z (см. рис. 225б). Тогда величина $XY \cdot XZ$ не зависит от выбора прямой (теорема о пересечении хорд окружности или теорема о произведении отрезка секущей и ее внешней части). Эта величина называется степенью точки X относительно окружности ω (*если точка X лежит вне ω, то произведение берется со знаком «+», а если X — внутри ω, то со знаком «−»*).

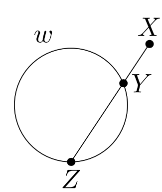


Рис. 225б

Пусть две окружности пересекаются в точках A и C. Тогда прямая AC — геометрическое место точек плоскости, для которых степени относительно этих окружностей равны. (*Такую прямую называют ра-*

дикальной осью этих окружностей). Если три окружности пересекаются попарно, то радикальная ось первых двух окружностей пересекает радикальную ось второй и третьей окружности в точке, степень которой по отношению к первой и третьей окружностям одинакова. Следовательно, эти три прямые пересекаются в одной точке.

«Стереометрическое» доказательство. Пусть данные окружности — проекции трех сфер на плоскость α, содержащую их центры (см. рис. 225а). Тогда их общие хорды — проекции окружностей, являющихся попарным пересечением сфер, на эту плоскость. Рассмотрим две точки, общие для трех сфер, которые симметричны относительно плоскости α. Их общая проекция на эту плоскость — точка пересечения трех хорд, что и требовалось доказать.

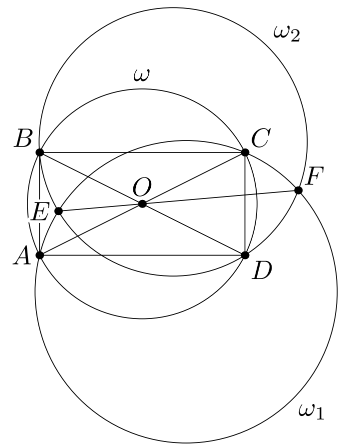


Рис. 225в

Докажем теперь утверждение задачи. Пусть окружность ω_1 проходит через точки A и C, а окружность ω_2 проходит через точки B и D, EF — их общая хорда (см. рис. 202в). Построим окружность ω, описанную около прямоугольника $ABCD$. Тогда AC — общая хорда окружностей ω и ω_1, а BD — общая хорда окружностей ω и ω_2. По доказанному, прямые AC, BD и EF пересекаются в одной точке. В данном случае AC и BD пересекаются в центре O данного прямоугольника, поэтому хорда EF проходит через эту точку, что и требовалось доказать.

5.3. *Ответ*: в четвертом квартале.

Докажем, что если количество пользователей растет и относительный прирост увеличивается, то увеличивается и абсолютный прирост. Пусть A и B — количество пользователей в какие-то моменты времени, причем $A < B$, а абсолютный прирост составляет x и y человек соответственно. Тогда относительный прирост равен соответственно $\frac{x}{A}$ и $\frac{y}{B}$. Если $\frac{x}{A} < \frac{y}{B}$, то $Bx < Ay < By$, следовательно, $x < y$.

Таким образом, наибольший относительный прирост не мог быть позже, чем наибольший абсолютный, и потому был не позже третьего квартала. Аналогично, наименьший относительный прирост не мог быть раньше, чем наименьший абсолютный, и потому был не раньше второго квартала. Так как по условию задачи, наименьший относительный прирост был раньше, чем наибольший относительный, то они были во втором и третьем квартале соответственно. Следовательно, наибольший абсолютный прирост был позже, то есть в четвёртом квартале.

Доказать, что с ростом относительного прироста пользователей растет и их абсолютный прирост, можно, и не прибегая к выкладкам, например, так: количество пользователей растет, значит, если относительный прирост остается постоянным, то в следующем квартале он отсчитывается от большего значения, поэтому ему отвечает больший абсолютный прирост. Если же относительный прирост возрастает, то абсолютный прирост тем более возрастает.

2005/2006 учебный год

1.1. *Ответ*: да, может.

Например, $f(x) = x^2 - 2x + 1$; $g(x) = -x^2 - 4x - 4$. Тогда уравнение $f(x) = 0$ имеет единственный корень 1, уравнение $g(x) = 0$ имеет единственный корень -2, а уравнение $f(x) + g(x) = 0$ принимает вид $-6x - 3 = 0$, поэтому также имеет единственный корень: $-0,5$.

Квадратные трехчлены, удовлетворяющие условию, должны иметь вид: $f(x) = a(x - b)^2$ *и* $g(x) = -a(x - c)^2$, *где* $a \neq 0$ *и* $b \neq c$. *Тогда* $f(x) + g(x) = a(c - b)(2x - b - c)$, *поэтому уравнение* $f(x) + g(x) = 0$ *является линейным уравнением с единственным корнем.*

1.2. *Ответ*: нет, не верно.

Достаточно, например, рассмотреть пятиугольник $ABCDE$, у которого равны только стороны (см. рис. 226а).

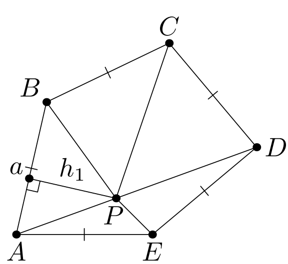


Рис. 226а

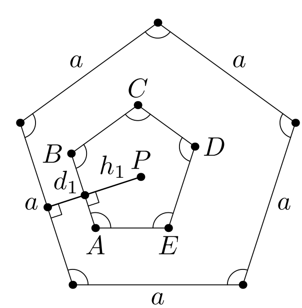


Рис. 226б

Указанная в условии сумма расстояний не зависит от выбора внутренней точки P. Действительно, соединив точку P с вершинами пятиугольника, получим пять треугольников. Сумма их площадей равна площади $ABCDE$, причем площадь i-го треугольника вычисляется по формуле $S_i = \dfrac{1}{2}ah_i$, где h_i — расстояние от точки P до соответствующей стороны пятиугольника, a — длина этой стороны. Следовательно, $S_{ABCDE} = \sum\limits_{i=1}^{5} S_i = \dfrac{1}{2}a\sum\limits_{i=1}^{5} h_i$, тогда $\sum\limits_{i=1}^{5} h_i = \dfrac{2S_{ABCDE}}{a}$ — постоянная величина, не зависящая от выбора точки P.

Отметим, что существует и другой, менее очевидный пример пятиугольника, обладающего указанными свойствами. Это пятиугольник, все углы которого равны. Для доказательства поместим такой пятиугольник внутри правильного пятиугольника так, чтобы их стороны были соответственно параллельны (см. рис. 226б). Пусть d_i — *расстояние между соответствующими сторонами пятиугольников. Так как правильный пятиугольник является равносторонним, то по доказанному выше,* $\sum\limits_{i=1}^{5}(h_i + d_i) = \sum\limits_{i=1}^{5} h_i + \sum\limits_{i=1}^{5} d_i$ *есть величина постоянная. Так как каждое из* d_i *не зависит от выбора внутренней точки* P, *то и* $\sum\limits_{i=1}^{5} d_i$ *от него не зависит, следовательно,* $\sum\limits_{i=1}^{5} h_i$ *не будет зависеть от выбора точки* P.

Отметим также, что сказанное выше справедливо для любого выпуклого n — *угольника. Особым является только случай* $n = 3$, *так как для того, чтобы треугольник являлся правильным достаточно, чтобы выполнялось одно условие: равенство его сторон либо равенство его углов.*

1.3. *Ответ*: 2, 3, 4, 5.

Эти числа удовлетворяют условию, так как $2 = 2^1$; $3 = 3^1$; $4 = 2^2$; $5 = 5^1$.

Предположим, что есть другая цепочка примарных чисел, идущих подряд, содержащая не менее четырех чисел. Тогда хотя бы два из них — чётные, поэтому должны являться степенями двойки — единственного четного простого числа. Так как разность этих чисел равна 2, то это могут быть только числа 2 и 4. Числа 1 и 6 не являются примарными, поэтому более четырех чисел в цепочке быть не может и другой четвёрки примарных чисел, идущих подряд, не существует.

2.1. *Ответ*: да, существуют.

Есть много примеров функций, удовлетворяющих условию. Приведем два различных примера, задавая функции различными способами.

1) $f(x) = [x]$ (целая часть числа x); $g(x) = \{x\}$ (дробная часть числа x). Тогда при любых $x \in \mathbb{R}$ верно равенство $[\{x\}] = \{[x]\} = 0$.

2) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 3, \\ 0, & \text{если } x \neq 3, \end{cases}$; $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 2, \\ 0, & \text{если } x \neq 2, \end{cases}$. Обе функции принимают только два значения: 0 и 1, причем $f(0) = g(0) = 0$ и $f(1) = g(1) = 0$, поэтому, при любых $x \in \mathbb{R}$ $f(g(x)) = 0$ и $g(f(x)) = 0$.

2.2. *Ответ*: на высоту $h = a - \sqrt{a^2 - \dfrac{b^2}{4}}$.

Пусть балка AB, изначально висящая на веревках CA и DB, после поворота заняла положение A_1B_1 (см. рис. 227а). По условию: $CA_1 = DB_1 = a$. Середина O_1 отрезка A_1B_1 лежит на оси, а ортогональная проекция A_2B_2 этого отрезка на горизонтальную плоскость образует с начальным положением балки AB угол 60°. Кроме того, O — середина отрезков AB и A_2B_2, причем $A_2B_2 = AB = b$, поэтому AA_2BB_2 — прямоугольник и $AA_2 = \dfrac{b}{2}$.

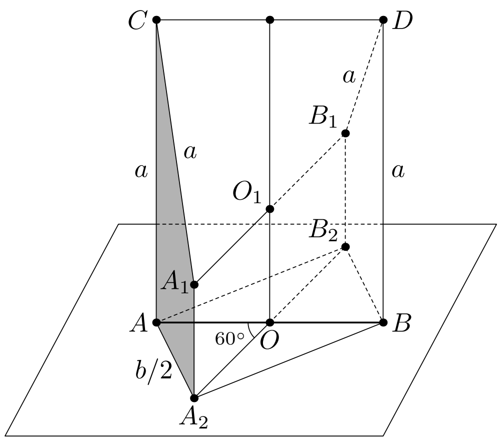


Рис. 227а

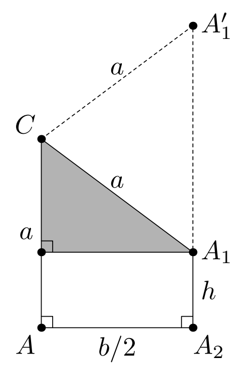


Рис. 227б

Искомое расстояние $h = OO_1 = A_1A_2$ найдем из прямоугольной трапеции CAA_2A_1 (см. рис. 227б): $(a-h)^2 + \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 = a^2 \Leftrightarrow h^2 - 2ah + \dfrac{b^2}{4} = 0 \Leftrightarrow h = a \pm \sqrt{a^2 - \dfrac{b^2}{4}}$. Рассматриваемому случаю соответствует знак минус перед корнем.

Заметим, что ответ $h = a + \sqrt{a^2 - \dfrac{b^2}{4}}$ также не лишен некоторого смысла. Он соответствует положению точки A_1' на рисунке 227б, когда балка, повернувшись, оказалась выше горизонтальной плоскости, в которой лежат точки крепления веревок C и D.

2.3. *Ответ*: $(0;1)$; $(-1;0)$.

Первый способ. Преобразуем данное уравнение, выразив переменную y через переменную x: $x^2 - 2xy + 2x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow y(2x+1) = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow y = \dfrac{x^2}{2x+1} + 1$, так как $2x + 1 \neq 0$ при любых целых значениях x.

Для того, чтобы y было целым, необходимо и достаточно, чтобы дробь $\dfrac{x^2}{2x+1}$ принимала целые значения.

Заметим, что НОД$(2x+1;x)$ =НОД$(x+1;x) = 1$, поэтому числа x^2 и $2x+1$ — взаимно простые. Следовательно, выражение $\dfrac{x^2}{2x+1}$ принимает целые значения, если $2x + 1 = \pm 1$. Таким образом, решения данного уравнения: $x = 0$; $y = 1$ или $x = -1$; $y = 0$.

Второй способ. Запишем данное уравнение как квадратное относительно переменной x: $x^2 - 2(y-1)x - (y-1) = 0$. Его решения: $x = (y-1) \pm \sqrt{D'}$, где $D' = (y-1)^2 + (y-1) = (y-1)y$.

Для того, чтобы x было целым, необходимо и достаточно, чтобы D' являлось квадратом целого числа. Это возможно только, если $D' = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow y = 1$ или $y = 0$, так как в остальных случаях число $(y-1)y$ находится в интервале между двумя соседними квадратами: $(y-1)^2$ и y^2. Если $y = 1$, то $x = 0$; если $y = 0$, то $x = -1$.

Третий способ. Преобразуем данное уравнение, выделив квадрат трехчлена: $x^2 - 2xy + 2x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + y^2 + 1 - 2xy + 2x - 2y) - y^2 + y = 0 \Leftrightarrow (x - y + 1)^2 = (y-1)y$. По доказанному выше $(y-1)y$ является квадратом целого числа тогда, и только тогда, когда $y = 1$ или $y = 0$. Если $y = 1$, то $x = 0$; если $y = 0$, то $x = -1$.

3.1. *Ответ*: $(0;0;0)$; $(0;1;1)$; $(1;0;1)$; $(-1;0;-1)$; $(-1;-1;0)$; $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$; $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

1) Если любые две переменные принимают нулевые значения, то значение третьей переменной также равно нулю, то есть $x = y = z = 0$ является решением данной системы.

2) Если $x = 0$, $y \neq 0$, то

$$\begin{cases} y^2 = z^3, \\ y^3 = z^4, \\ y^4 = z^5. \end{cases}$$

Следовательно, $y > 0$, $z > 0$ и $y = \sqrt{z^3} = \sqrt[3]{z^4} = \sqrt[4]{z^5}$, то есть $y = z = 1$.

3) Если $y = 0$, $x \neq 0$, то

$$\begin{cases} x = z^3, \\ x^2 = z^4, \\ x^3 = z^5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z^3, \\ z^6 = z^4, \\ z^9 = z^5. \end{cases}$$

Следовательно, $x = z = 1$ или $x = z = -1$.

4) Если $z = 0$, $y \neq 0$, то

$$\begin{cases} x + y^2 = 0, \\ x^2 + y^3 = 0, \\ x^3 + y^4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y^2, \\ y^4 + y^3 = 0, \\ -y^6 + y^4 = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $x = y = -1$.

5) Найдем ненулевые решения. Из второго уравнения системы следует, что $(x^2+y^3)^2 = z^8$. Перемножим почленно первое и третье уравнение: $(x+y^2)(x^3+y^4) = z^8$. Следовательно, $(x+y^2)(x^3+y^4) = (x^2+y^3)^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow xy^4 + x^3y^2 = 2x^2y^3 \Leftrightarrow xy^2(x-y)^2 = 0$. Так как $x \neq 0$, $y \neq 0$, то $x = y$. Тогда:

$$\begin{cases} x + x^2 = z^3, \\ x^2 + x^3 = z^4, \\ x^3 + x^4 = z^5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + x^2 = z^3, \\ x(x + x^2) = z^4,. \\ x^2(x + x^2) = z^5 \end{cases}$$

Учитывая, что $x \neq 0$, $z \neq 0$, получим, что

$$\begin{cases} x = z, \\ x^2 - x - 1 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, $x = y = z = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

3.2. *Ответ*: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Это значение площади достигается, например, в равностороннем треугольнике с биссектрисой 1 (см. рис. 228а).

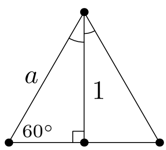


Рис. 228а

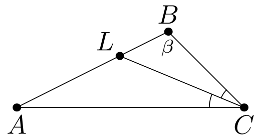


Рис. 228б

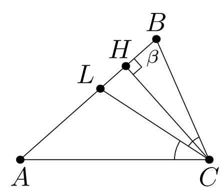


Рис. 228в

Действительно, в таком треугольнике биссектрисы совпадают с высотами, поэтому его сторона $a = \dfrac{1}{\sin 60^\circ} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Тогда площадь треугольника $S = \dfrac{1}{2}ah = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot 1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Докажем, что для всех треугольников, удовлетворяющих условию задачи, выполняется неравенство $S \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Для этого сначала докажем, что в таких треугольниках есть сторона, длина которой не больше, чем $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Пусть это не так, и длина каждой стороны треугольника ABC больше, чем $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Пусть B — наибольший угол этого треугольника, тогда проведем биссектрису треугольника CL (см. рис. 228а, б). Возможны два случая:

1) если $\beta \geqslant 90^\circ$, то в треугольнике BCL угол B — также наибольший (см. рис. 228б), поэтому $CL > BC > \dfrac{2}{\sqrt{3}} > 1$, что противоречит условию;

2) если $60^\circ \leqslant \beta < 90^\circ$, то проведем высоту CH треугольника ABC (см. рис. 228в), тогда $CL \geqslant CH = BC \cdot \sin\beta > \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 1$, что также противоречит условию.

Таким образом доказано, что в данном треугольнике есть сторона a, длина которой не больше, чем $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Тогда $h_a \leqslant l_a \leqslant 1$, поэтому площадь треугольника $S = \dfrac{1}{2}ah_a \leqslant \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot 1 \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

3.3. Для каждого матча рассмотрим количество встреч, сыгранных ранее в сумме его участниками. Предположим, что все такие суммы — четные. Тогда, сложив их, получим четное число. Но каждая команда перед первой встречей имела 0 сыгранных матчей, перед второй встречей — 1 сыгранный матч, и так далее, перед последней встречей — 13 сыгранных матчей. Следовательно, для каждой команды сумма матчей, сыгранных перед каждой встречей, равна $\dfrac{(0+13)14}{2} = 7 \cdot 13$. Так как в турнире участвует 15 команд, то общая сумма этих матчей равна $7 \cdot 13 \cdot 15$, то есть нечетна. Получено противоречие, поэтому, в некотором матче встретятся команды, сыгравшие до этого в сумме нечетное количество матчей.

4.1. 1) Докажем, что при любых $t > 0$ выполняется неравенство: $t^2 + 2\sqrt{t} \geqslant 3t$. Это можно сделать различными способами, например, использовать неравенство о средних $\dfrac{m+n+p}{3} \geqslant \sqrt[3]{mnp}$ для $m = t^2$;

$n = p = \sqrt{t}$ или ввести обозначение $\sqrt{t} = x$, исследовать функцию $f(x) = x^3 - 3x + 2$, где $x > 0$, на монотонность и экстремумы с помощью производной, и получить, что $f(x) \geqslant 0$.

2) Запишем доказанное неравенство для трех значений переменной $t = a$, $t = b$ и $t = c$ и сложим полученные неравенства. Получим: $a^2 + 2\sqrt{a} + b^2 + 2\sqrt{b} + c^2 + 2\sqrt{c} \geqslant 3a + 3b + 3c \Leftrightarrow 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \geqslant 3(a + b + c) - (a^2 + b^2 + c^2)$.

3) По условию, $a+b+c = 3$, поэтому, $(a+b+c)^2 = 9 \Leftrightarrow (a^2+b^2+c^2) = 9-2(ab+bc+ca)$. Подставим эти значения в правую часть полученного неравенства, тогда $2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) \geqslant 2(ab+bc+ca) \Leftrightarrow \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geqslant ab + bc + ca$, что и требовалось доказать.

4.2. *Ответ*: $\dfrac{S_{PAB}}{S_{PAC}} = \dfrac{6+\sqrt{2}}{6-\sqrt{2}} = \dfrac{19+6\sqrt{2}}{17}$.

Пусть $PABC$ — данный тетраэдр, BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC, H — ортоцентр этого треугольника (см. рис. 229).

Заметим, что $PB^2 + PC^2 = (6+\sqrt{2})^2 + (6-\sqrt{2})^2 = 76 = BC^2$, то есть треугольник PBC — прямоугольный ($\angle BPC = 90°$ по теореме, обратной теореме Пифагора).

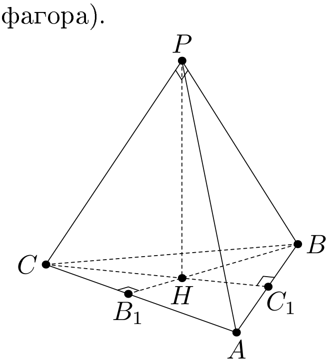


Рис. 229

Так как прямая CC_1 является ортогональной проекцией прямой PC на плоскость ABC и $CC_1 \perp AB$, то $PC \perp AB$ (по теореме о трех перпендикулярах). Кроме того, по доказанному $PC \perp PB$, поэтому $PC \perp APB$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости), следовательно, $PC \perp PA$. Аналогично доказывается, что $PA \perp PB$.

Таким образом треугольники PAB и PAC — прямоугольные (с прямыми углами при вершине P), тогда $\dfrac{S_{PAB}}{S_{PAC}} = \dfrac{PB}{PC}$.

Отметим, что тетраэдр, вершина которого ортогонально проектируется в ортоцентр противолежащей грани, называется орто-

центрическим. У него есть много интересных свойств, в частности, остальные его вершины также проектируются в ортоцентры противолежащих граней. В приведенном решении это свойство было доказано для случая, когда одна из граней тетраэдра — прямоугольный треугольник (ортоцентр прямоугольного треугольника — вершина прямого угла).

Полученный тетраэдр является прямоугольным, то есть имеет три плоских прямых угла при одной из вершин. Прямоугольный тетраэдр является частным случаем ортоцентрического.

4.3. *Ответ*: как ни странно, существует.

$\overline{NN} = N(10^k + 1)$, где k — количество цифр в десятичной записи числа N. Выберем значение k таким образом, чтобы число $10^k + 1$ делилось на квадрат натурального числа, отличного от 1. Например, рассмотрим число $10^{11} + 1 = (10 + 1)(10^{10} - 10^9 + \ldots - 10 + 1)$.

Вторая скобка делится на 11, так как в ней 11 слагаемых, причем $10^{2n} \equiv 1(\mathrm{mod}\ 11)$ и $-10^{2n-1} \equiv 1(\mathrm{mod}\ 11)$. Следовательно, рассматриваемое число делится на 11^2.

Пусть $10^{11} + 1 = 121x$, тогда возьмем N, равное $100x$. Получим, что $\overline{NN} = N(10^{11} + 1) = (11 \cdot 10 \cdot x)^2$. Осталось доказать, что число N — одиннадцатизначное, то есть, что число x — девятизначное. Действительно, $x = \dfrac{10^{11}+1}{121} < \dfrac{121 \cdot 10^9}{121} = 10^9$ и $x = \dfrac{10^{11}+1}{121} > \dfrac{10^{11}+1}{10^3} > 10^8$.

На самом деле: $10^{11} + 1 = 121 \cdot 826446281$, $N = 100 \cdot 826446281$, *то есть* $\overline{NN} = (10 \cdot 11 \cdot 826446281)^2$.

5.1. Так как $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha > \dfrac{1}{4}$, то $3\sin\alpha > 4\sin^3\alpha + \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sin\alpha > \dfrac{4}{3}\sin^3\alpha + \dfrac{1}{12}$. Учитывая, что $\sin\alpha > 0$, получим, что $\sin\alpha >$ $> \dfrac{1}{12}$. Тогда $\sin\alpha > \dfrac{4}{3} \cdot \left(\dfrac{1}{12}\right)^3 + \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{12}\left(\dfrac{1}{108} + 1\right) = \dfrac{109}{1296}$, что и требовалось доказать.

Отметим, что «лобовые» способы доказательства к успеху не приводят. Действительно, пусть $\sin\alpha = x > 0$. *Из условия следует, что* $3x - 4x^3 > \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 16x^3 - 12x + 1 < 0$. *Рассмотрим функцию* $f(x) =$ $= 16x^3 - 12x + 1$, *тогда* $f\left(\dfrac{108}{1296}\right) = f\left(\dfrac{1}{12}\right) > 0$, *а* $f\left(\dfrac{109}{1296}\right)$ *должно быть отрицательным. Таким образом, интересующее нас значение* x, *при котором* $f(x) = 0$, *лежит между числами* $\dfrac{108}{1296}$ *и* $\dfrac{109}{1296}$, *что не представляется возможным установить элементарными методами.*

5.2. *Ответ*: $\angle DEC = 90^\circ$.

Так как E — середина дуги AB, причем AB — диаметр окружности, то треугольник AEB — равнобедренный и прямоугольный, значит $AE = BE$ и $\angle EAB = 45^\circ$ (см. рис. 230).

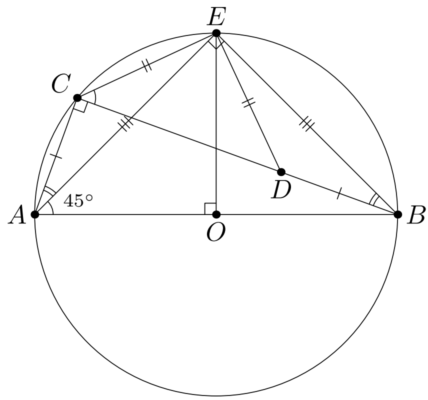


Рис. 230

Углы CAE и DBE равны, так как они вписанные и опираются на одну и ту же дугу. Таким образом, треугольники ECA и EDB равны по двум сторонам и углу между ними, следовательно, $CE = DE$. Так как $\angle ECB = \angle EAB = 45^\circ$, то треугольник CED — равнобедренный с углом 45° при основании. Поэтому его угол при вершине E — прямой.

5.3. *Ответ*: нет, не могут.

Покрасим вершины квадратиков в белый и черный цвета в шахматном порядке. Тогда каждая диагональ квадратика соединяет две вершины одного цвета. Поэтому, если проведенные диагонали образуют замкнутую траекторию, то она проходит только через вершины одного цвета, например, белого. Среди вершин большого куба наверняка имеется белая (на самом деле белых — ровно половина). Она является концом проведенных диагоналей во всех трех примыкающих к ней квадратиках. Но тогда эти три диагонали не могут входить в траекторию, не имеющую самопересечений.

Приложения

Фестиваль «Математика 6 – 9» им. А.П. Савина

2002 — 2003 учебный год

Условия задач

8 класс

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Числа a, b и c попарно различны и $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}$. Найдите $a^2b^2c^2$.

1.2. Можно ли разрезать квадрат на треугольники так, чтобы каждый из треугольников граничил ровно с тремя другими? (*Треугольники граничат друг с другом, если имеют общую сторону или часть стороны.*)

1.3. Произведение всех делителей натурального числа N, отличного от 1, (включая само число) равно $4N^{100}$. Сколько всего делителей у числа N?

Второй тур (10 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Решите уравнение: $2\sqrt{1+x\sqrt{1+x(x+1)\sqrt{1+(x+2)(x+4)}}}=$ $=x+2$.

2.2. На стороне AB параллелограмма $ABCD$ как на диаметре построена окружность, проходящая через точку пересечения диагоналей и середину стороны AD. Найдите углы параллелограмма.

2.3. Может ли произведение четырех последовательных натуральных чисел являться точным квадратом?

Третий тур (10 минут; каждая задача — 8 баллов)

3.1. Найдите x, если $x^3=\frac{2002^3+2002^2+2002\cdot 2003+2003^2+2003^3}{2}$.

3.2. На медиане BM треугольника ABC выбрана точка P так, что $AP=BC$. D — точка пересечения прямых AP и BC. Докажите, что $PD=BD$.

3.3. Какое наибольшее количество одноименных шахматных фигур (исключая пешки) можно поставить на доску так, чтобы каждая из них «била» разное количество этих фигур?

Четвертый тур (10 минут; каждая задача — 9 баллов)

4.1. Известно, что $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$. Докажите, что $(1 + a_1^2) \times \times (1 + a_2^2) \ldots (1 + a_n^2) \geqslant 2^n$.

4.2. Биссектриса AK треугольника ABC делит противоположную сторону на отрезки: $BK = 2$ и $CK = 1$. Найдите длину AK, если $\angle AKC = 60^\circ$.

4.3. При каких значениях n в равенстве $1*2*3*4*5*6*7*\ldots*n = 100$ можно заменить каждую звездочку на знак «+» или знак «−» так, чтобы получилось верное равенство?

9 класс

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Решите уравнение: $2\sqrt{1 + x\sqrt{1 + x(x+1)\sqrt{1 + (x+2)(x+4)}}} = x + 2$.

1.2. На стороне AB параллелограмма $ABCD$ как на диаметре построена окружность, проходящая через точку пересечения диагоналей и середину стороны AD. Найдите углы параллелограмма.

1.3. Может ли произведение четырех последовательных натуральных чисел являться точным квадратом?

Второй тур (10 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Вычислите $\sqrt[3]{\dfrac{2002^3 + 2002^2 + 2002 \cdot 2003 + 2003^2 + 2003^3}{2}}$.

2.2. На медиане BM треугольника ABC выбрана точка P так, что $AP = BC$. D — точка пересечения прямых AP и BC. Докажите, что $PD = BD$.

2.3. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения: $(a - c)^2 + (b - d)^2$, если $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 4$.

Третий тур (10 минут; каждая задача — 8 баллов)

3.1. Для положительных чисел x, y и z выполняются два условия: $x + y + z = xyz$ и $x^2 = yz$. Докажите, что $x \geqslant \sqrt{3}$.

3.2. Может ли медиана треугольника с целыми сторонами иметь длину 1?

3.3. Какое наибольшее количество одноименных шахматных фигур (исключая пешки) можно поставить на доску так, чтобы каждая из них «била» разное количество этих фигур?

Четвертый тур (10 минут; каждая задача — 9 баллов)

4.1. Решите уравнение: $\dfrac{x^2}{x-5}+\dfrac{x}{x^2-5}=-2.$

4.2. В параллелограмме $ABCD$ точки K и P — середины сторон CD и DA соответственно. Отрезки BK и CP равны и взаимно перпендикулярны. Верно ли, что $ABCD$ — квадрат?

4.3. Диагональ квадрата площади S произвольным образом разбита на n частей. На каждой из этих частей как на диагонали построен новый квадрат. Докажите, что сумма площадей получившихся квадратов не меньше, чем $\dfrac{S}{n}$.

Решения задач

8 класс

1.1. *Ответ*: 1.

$a+\dfrac{1}{b}=b+\dfrac{1}{c}\Leftrightarrow a-b=\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{b}\Leftrightarrow a-b=\dfrac{b-c}{bc}\Rightarrow bc=\dfrac{b-c}{a-b}$, так как $a\neq b$. Аналогично, $b+\dfrac{1}{c}=c+\dfrac{1}{a}\Rightarrow ac=\dfrac{c-a}{b-c}$ и $a+\dfrac{1}{b}=c+\dfrac{1}{a}\Rightarrow ab=\dfrac{b-a}{a-c}$, так как $a\neq b$ и $a\neq c$.

Таким образом, $a^2b^2c^2=ab\cdot bc\cdot ac=\dfrac{(b-c)(c-a)(b-a)}{(a-b)(b-c)(a-c)}=1.$

Возможен также и «лобовой», но очень громоздкий способ решения: записать данное условие в виде системы двух уравнений с тремя переменными и способом подстановки выразить любые две переменные через третью. После этого подставить полученные результаты в искомое произведение и найти его значение.

1.2. *Ответ*: можно.

Например, можно разрезать квадрат на шесть треугольников (см. рис. 231а) или на двенадцать треугольников (см. рис. 231б).

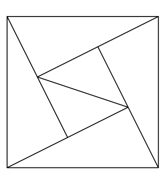


Рис. 231а

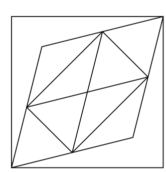


Рис. 231б

Существуют и другие решения. Можно также доказать, что не существует решений, содержащих меньше, чем шесть треугольников.

1.3. *Ответ*: 200.

Если число N имеет четное количество делителей, то их можно разбить на пары так, что произведение делителей каждой пары равно N. Тогда из условия следует, что таких пар ровно 100, а самих делителей 200. Если предположить, что у числа N нечетное количество делителей, то на такие же пары можно разбить все делители, кроме одного, равного $\sqrt{N}$ (так как в этом случае число N является точным квадратом). Тогда произведение всех делителей не может быть равно N^{100}, то есть, такое предположение противоречит условию задачи.

2.1. *Ответ*: 0, $-1\frac{1}{3}$.

Так как левая часть уравнения неотрицательна, то $x + 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x \geqslant -2$. Тогда, $\sqrt{1 + (x + 2)(x + 4)} = \sqrt{x^2 + 6x + 9} = |x + 3| = x + 3$; $\sqrt{1 + (x + 1)(x + 3)} = \sqrt{x^2 + 4x + 4} = |x + 2| = x + 2$; $\sqrt{1 + x(x + 2)} = \sqrt{x^2 + 2x + 1} = |x + 1|$. Таким образом, получим уравнение: $2|x + 1| = x + 2$.

При $x > -1$ это уравнение примет вид $2(x + 1) = x + 2$, откуда $x = 0$. При $-2 \leqslant x \leqslant -1$ оно примет вид $-2(x + 1) = x + 2$, откуда $x = -1\frac{1}{3}$.

2.2. *Ответ*: 60° и 120°.

Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма, E — середина AD (см. рис. 232). Так как $\angle AOB$ — вписанный и опирается на диаметр, то $\angle AOB = 90^\circ$, то есть, $ABCD$ — ромб. $\angle AEB$ — также вписанный и опирается на диаметр, поэтому $\angle AEB = 90^\circ$. Следовательно, BE — медиана и высота треугольника ABD, значит, $AB = BD$. Таким образом, $\triangle ABD$ — равносторонний, то есть, $\angle DAB = 60^\circ$ и $\angle ABC = 120^\circ$.

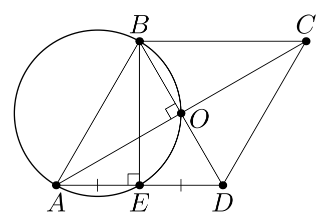


Рис. 232

2.3. *Ответ*: нет, не может.

Пусть n — наименьшее из таких чисел. Тогда произведение четырех чисел равно $n(n+1)(n+2)(n+3) = n(n+3)(n+1)(n+2) = (n^2+3n)(n^2 + 3n + 2) = m(m + 2) = (m + 1)^2 - 1$, где $m = n^2 + 3n \in \mathbb{N}$.

Поскольку два последовательных натуральных числа не могут являться точными квадратами, то рассмотренное произведение не является точным квадратом ни при каких натуральных n.

3.1. *Ответ*: 2003.

Обозначим $n = 2003$. Тогда $2002^3+2002^2+2002\cdot2003+2003^2+2003^3 = (n - 1)^3 + (n - 1)^2 + n(n - 1) + n^2 + n^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^2 - 2n + 1 + n^2 - n + n^2 + n^3 = 2n^3$. Следовательно, $x^3 = n^3 \Leftrightarrow x = n$.

3.2. Для того, чтобы доказать равенство $PD = BD$ достаточно доказать, что треугольник PDB — равнобедренный с основанием BP, то есть, что $\angle BPD = \angle CBM$.

Это можно сделать различными способами.

Первый способ. Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABCK$ (см. рис. 233а). Тогда $AK = BC$ и $\angle AKM = \angle CBM$. Так как $AP = BC$, то треугольник AKP — равнобедренный, то есть, $\angle AKM = \angle APK$. Учитывая, что углы APK и BPD — вертикальные, получим, что $\angle BPD = \angle CBM$.

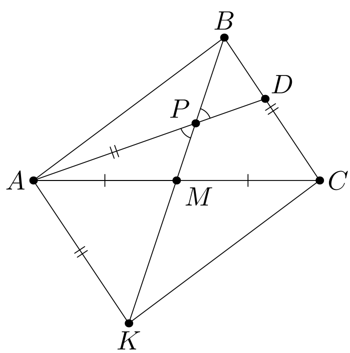


Рис. 233а

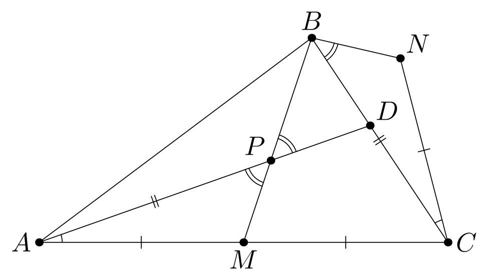


Рис. 233б

Второй способ. На стороне BC данного треугольника вне его построим треугольник CBN, равный APM (см. рис. 233б). Так как $\angle AMP = \angle CNB$, то $\angle CNB + \angle CMB = 180°$, то есть, около четырехугольника $BMCN$ можно описать окружность. Углы CBN и CBM вписаны в эту окружность и опираются на равные дуги (так как равны хорды CN и CM, стягивающие эти дуги). Следовательно, $\angle CBM = \angle CBN = \angle APM = \angle BPD$.

Третий способ. Применив теорему синусов для треугольников AMP и BMC соответственно получим: $\sin\angle APM = \dfrac{AM \cdot \sin\angle AMP}{AP}$ и $\sin\angle CBM = \dfrac{CM \cdot \sin\angle BMC}{BC}$. Так как углы AMP и BMC — смежные, то их синусы равны. Кроме того, $AM = CM$ и $AP = BC$, поэтому, $\sin\angle APM = \sin\angle CBM$.

Хотя бы один из смежных углов CMB или AMB не является острым. Пусть, например, $\angle AMB$ — не острый (см. рис. 233б), тогда $AM < AP$, значит, и $CM < BC$. Таким образом, AM не является большей стороной в треугольнике AMP, а CM не является большей стороной в треугольнике BMC. Поэтому, углы APM и CBM — острые, то есть, из равенства их синусов следует равенство этих углов.

Следовательно, $\angle APM = \angle BPD = \angle CBM$.

3.3. *Ответ*: одну фигуру.

Для всех фигур, кроме пешки, отношение «бить» обладает свойством симметричности, то есть, если первая фигура бьет вторую, то и вторая фигура бьет первую. Если на доску поставлено n фигур и каждая из них «бьет» разное количество фигур, то при подсчете этих количеств должны использоваться все целые числа от 0 до $n-1$. Таким образом, какая-то из фигур не «бьет» ни одной, а какая-то «бьет» все остальные. Получено противоречие, так эти две фигуры либо «бьют» друг друга, либо не «бьют».

4.1. Так как для любых x выполняется равенство $x^2 = |x|^2$, а из условия задачи следует, что $|a_1| \cdot |a_2| \cdot \ldots \cdot |a_n| = 1$, то без ограничения общности можно считать, что все данные числа — положительные.

Рассмотрим верное неравенство $(1-a_k)^2 \geqslant 0$, которое равносильно неравенству $1+a_k^2 \geqslant 2a_k$. Запишем полученное неравенство для каждого натурального k от 1 до n. Учитывая условие, получим: $(1+a_1^2)\cdot(1+$ $+ a_2^2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n^2) \geqslant 2a_1\cdot 2a_2\cdot\ldots\cdot 2a_n = 2^n(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n) = 2^n$, что и требовалось доказать.

4.2. *Ответ*: 2.

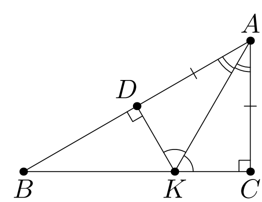


Рис. 234

Отметим на стороне AB данного треугольника точку D так, что $AD = AC$ и соединим ее с точкой K (см. рис. 234). Из равенства треугольников AKD и AKC (по двум сторонам и углу между ними) получим, что $DK = CK = 1$; $\angle AKD = \angle AKC = 60°$.

Тогда, в треугольнике BDK: $\angle BKD = 60°$; $BK = 2$; $DK = 1$, то есть, он является «половиной» равностороннего треугольника со стороной 2. (*Можно также вычислить длину BD по теореме косинусов.*) Таким образом, $\triangle BDK$ — прямоугольный с прямым углом D и $\angle DBK = 30°$. Тогда, $\angle ACB = \angle ADK = 90°$; $\angle KAC = 30°$, значит, $AK = 2CK = 2$.

4.3. *Ответ*: $n = 4k$ или $n = 4k-1$, где $k \in \mathbb{N}$ и $k > 3$.

1) Если $n \leqslant 13$, то заменить звездочки требуемым образом нельзя, поскольку $1 + 2 + \ldots + 13 = 91 < 100$.

2) Для того, чтобы значение выражения в левой части после замены звездочек на знак «+» или знак «−» стало четным, в нем должно быть четное количество нечетных слагаемых, поэтому $n = 4k$ или $n = 4k-1$, где $k \in \mathbb{N}$.

3) При $n = 15$ заменить звездочки можно: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 - 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 100$.

При $n = 16$ заменить звездочки можно: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 - 8 + 9 - 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 = 100$.

4) Если при $n = m$ можно заменить звездочки, то и при $n = m + 4$ также можно это сделать: достаточно в левой части добавить выражение $(m+1) - (m+2) - (m+3) + (m+4)$, значение которого равно нулю. Таким образом, указанные значения n удовлетворяют условию задачи при всех $k \in \mathbb{N}$ таких, что $k > 3$.

9 класс

1.1. См. решение задачи 1.1. регаты для 8 класса.

1.2. См. решение задачи 1.2. регаты для 8 класса.

1.3. См. решение задачи 1.3. регаты для 8 класса.

2.1. См. решение задачи 2.1. регаты для 8 класса.

2.2. См. решение задачи 2.2. регаты для 8 класса.

2.3. *Ответ*: наибольшее — 9, наименьшее — 1.

Первый способ. Рассмотрим две окружности на координатной плоскости: $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 2$ (см. рис. 207). По условию, $M(a; b)$ принадлежит первой окружности, а точка $N(c; d)$ — второй.

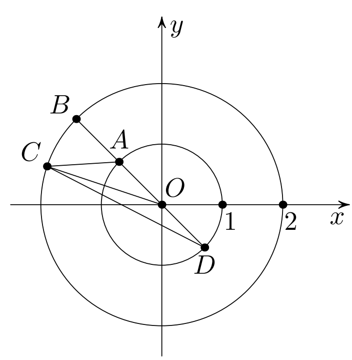


Рис. 235

Данное выражение представляет собой MN^2, поэтому задача сводится к тому, чтобы найти наибольшее и наименьшее расстояние между точками этих окружностей. Так как окружности — концентрические, то наибольшее возможное расстояние равно сумме их радиусов, а наименьшее — разности радиусов. Для доказательства достаточно рассмотреть диаметр AD меньшей окружности и точку B большей окружности, принадлежащую прямой AD. Тогда, для любой точки C большей окружности: 1) $CD < OC + OD = OB + OD = BD = 3$; 2) $CA > OC - OA = OB - OA = AB = 1$. Таким образом, наибольшее значение MN^2 равно 9, а наименьшее 1.

Второй способ. Преобразуем: $(a-c)^2 + (b-d)^2 = a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bd + d^2 = 5 - 2(ac+bd)$. Для оценки значений полученного выражения рассмотрим векторы $\overline{x} = \overline{(a;b)}$ и $\overline{y} = \overline{(c;d)}$. Тогда $\overline{x}\cdot\overline{y} = ac + bd \leqslant |\overline{x}|\cdot|\overline{y}| = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2} = 2$ и $\overline{x}\cdot\overline{y} = ac+bd \geqslant -|\overline{x}|\cdot|\overline{y}| = -\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{c^2+d^2} = -2$ (значения 2 и -2 достигаются в случаях сонаправленных и противоположно направленных векторов соответственно). Поэтому, $-4 \leqslant -2(ac+bd) \leqslant 4 \Leftrightarrow 1 \leqslant 5 - 2(ac+bd) \leqslant 9$.

Третий способ. Так как $a^2 + b^2 = 1$, то $\exists\alpha \in (-\pi;\pi] | \cos\alpha = a$; $\sin\alpha = b$. Аналогично, $c^2 + d^2 = 4 \Leftrightarrow \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 1$, поэтому $\exists\beta \in (-\pi;\pi] | \cos\beta = \frac{c}{2}; \sin\beta = \frac{d}{2}$. Тогда $(a-c)^2+(b-d)^2 = (\cos\alpha - 2\cos\beta)^2 + (\sin\alpha - 2\sin\beta)^2 = \cos^2\alpha - 4\cos\alpha\cos\beta + 4\cos^2\beta + \sin^2\alpha - 4\sin\alpha\sin\beta + 4\sin^2\beta = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + 4(\cos^2\beta + \sin^2\beta) - 4(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = 5 - 4\cos(\alpha-\beta)$. Так как $-1 \leqslant \cos(\alpha-\beta) \leqslant 1$ (значения 1 и -1 достигаются в случаях, когда $\alpha = \beta$ и $\alpha = \pi + \beta$ соответственно), то $1 \leqslant (a-c)^2 + (b-d)^2 \leqslant 9$.

Заметим, что «векторный» и «тригонометрический» способы решения похожи потому, что тригонометрическая формула косинуса разности доказывается, как правило, с помощью векторов.

3.1. Так как данные числа — положительные, то $\frac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz}$. Тогда $x^3 = xyz = x + y + z \geqslant 3\sqrt[3]{xyz} = 3x$. Так как $x > 0$, то из полученного неравенства следует, что $x^2 \geqslant 3$, то есть, $x \geqslant \sqrt{3}$, что и требовалось доказать.

Заметим, что неравенство $x^3 \geqslant 3x$ можно получить, ограничившись применением неравенства о средних для двух чисел: $x^3 = xyz = x + y + z \geqslant x + 2\sqrt{yz} = 3x$.

3.2. *Ответ*: нет, не может.

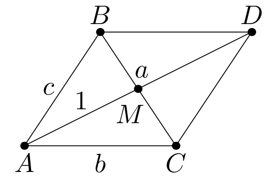


Рис. 236

Пусть в треугольнике ABC: $AB = c$; $AC = b$; $BC = a$, где $\{a, b, c\} \subset \mathbb{Z}$, $AM = 1$, где M — середина стороны BC (см. рис. 236). Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$. Сумма квадратов сторон параллелограмма равна сумме квадратов его диагоналей: $2(b^2 + c^2) = a^2 + 4 \Leftrightarrow a^2 = 2(b^2 + c^2) - 4$.

Заметим, что мы практически повторили вывод формулы для вычисления длины медианы треугольника по его сторонам, которую можно было использовать непосредственно.

Из полученного равенства следует, что целое число a^2 является четным, значит, число a — четное, поэтому $BM = CM = \frac{a}{2} = m \in \mathbb{Z}$. Так как углы AMC и AMB — смежные, то хотя бы один из этих углов не является острым. Пусть, например, $\angle AMC \geqslant 90^\circ$, тогда AC — большая сторона треугольника CAM, то есть, $b > m$. Так как $CM + AM > AC$, то $m + 1 > b$. При целых значениях m и b оба неравенства одновременно выполняться не могут, поэтому треугольника с целыми сторонами и медианой 1 не существует.

3.3. См. решение задачи 3.3. регаты для 8 класса.

4.1. *Ответ*: $\frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$; $\frac{-1 \pm \sqrt{41}}{2}$.

Введем новую переменную: $y = x^2$. Тогда данное уравнение примет вид $\frac{y}{x-5} + \frac{x}{y-5} = -2$. Умножив обе части этого уравнения на общий знаменатель левой части и выполнив алгебраические преобразования, получим уравнение — следствие: $x^2 + y^2 + 2xy - 15x - 15y + 50 = 0$, которое равносильно уравнению $(x+y)^2 - 15(x+y) + 50 = 0$. Сделав замену $q = x + y$, получим квадратное уравнение $q^2 - 15q + 50 = 0$, корнями которого являются числа 5 и 10. Решив уравнения $x^2 + x = 5$ и $x^2 + x = 10$, получим четыре корня исходного уравнения: $\frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$ и $\frac{-1 \pm \sqrt{41}}{2}$ (все эти корни удовлетворяют области определения исходного уравнения $x - 5 \neq 0$ и $x^2 - 5 \neq 0$).

Заметим, что так как данное уравнение не имеет рациональных корней, то приводить дроби к общему знаменателю и пытаться подобрать корни многочлена четвертой степени, который получится в числителе, перебирая делители свободного члена, смысла не имеет!

4.2. *Ответ*: верно.

Первый способ. Рассмотрим данный параллелограмм и разложим векторы $\overline{AK}$ и $\overline{BP}$ по базисным векторам $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$ (см. рис. 237а): $\overline{AK} = \overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{AB}$; $\overline{BP} = -\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AD}$. Так как $\overline{AK} \perp \overline{BP}$, то $\overline{AK} \cdot \overline{BP} = 0$, то есть, $\left(\overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{AB}\right)\left(-\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AD}\right) = 0 \Leftrightarrow \overline{AD}^2 - \overline{AB}^2 = \frac{3}{2}\overline{AD} \cdot \overline{AB}$. Так как $|\overline{AK}| = |\overline{BP}|$, то $\left(\overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{AB}\right)^2 = \left(-\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AD}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{3}{4}(\overline{AD}^2 - \overline{AB}^2) + 2\overline{AD} \cdot \overline{AB} = 0$. Объединив два полученных уравнения в систему, получим, что $\overline{AD} \cdot \overline{AB} = 0$ и $|\overline{AD}| = |\overline{AB}|$, то есть, векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$ перпендикулярны и имеют равные длины. Следовательно, $ABCD$ — квадрат.

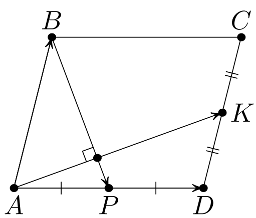


Рис. 237а

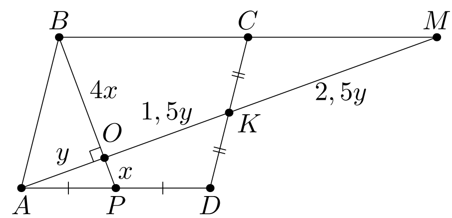


Рис. 237б

Второй способ. Пусть O — точка пересечения отрезков AK и BP; $OP = x$; $OA = y$. Продолжим отрезок AK до пересечения с прямой BC в точке M (см. рис. 237б). Из равенства треугольников AKD и MKC (по стороне и прилежащим углам) следует, что $CM = AD = BC$. Так как $\triangle AOP \sim \triangle MOB$ (по двум углам), то $\dfrac{OP}{OB} = \dfrac{OA}{OM} = \dfrac{AP}{MB} = \dfrac{1}{4}$, значит, $OB = 4x$; $OM = 4y$. Учитывая, что $BP = AK = KM = 0,5AM = 2,5y$, получим, что $5x = 2,5y \Leftrightarrow y = 2x$.

Из прямоугольных треугольников AOB и AOP: $AB^2 = AO^2 + BO^2 = y^2 + 16x^2 = 20x^2$; $AP^2 = AO^2 + PO^2 = y^2 + x^2 = 5x^2$. Следовательно, $AD = 2AP = 2x\sqrt{5} = AB$. Так как $\dfrac{OP}{OA} = \dfrac{OA}{OB}$, то прямоугольные треугольники AOP и BOA подобны, значит, $\angle APO = \angle BAO$ и $\angle PAO = \angle ABO$, следовательно, $\angle BAP = 90^\circ$. Таким образом, $ABCD$ — ромб, имеющий прямой угол, то есть, $ABCD$ — квадрат.

4.3. *Первый способ.* Пусть a — сторона данного квадрата, a_1, a_2, $\ldots$, a_n — стороны новых квадратов. Тогда задача сводится к доказательству неравенства $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant \dfrac{S}{n}$.

Учитывая, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a$, используем неравенство о среднем арифметическом и среднем квадратичном: $\sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \geqslant \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \dfrac{a}{n} \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant \dfrac{a^2}{n} = \dfrac{S}{n}$, что и требуется доказать.

Второй способ. Из условия следует, что диагональ данного квадрата равна $\sqrt{2S}$. Пусть не все построенные квадраты равны между собой. Тогда обязательно найдется квадрат с диагональю $c < \dfrac{\sqrt{2S}}{n}$

и квадрат с диагональю $d > \dfrac{\sqrt{2S}}{n}$. Заменим эти два квадрата на два новых квадрата с диагоналями $c+x = \dfrac{\sqrt{2S}}{n}$ и $d-x$, то есть так, чтобы сумма длин диагоналей не изменилась. При такой операции количество квадратов с диагональю $\dfrac{\sqrt{2S}}{n}$ увеличится, а сумма площадей построенных квадратов уменьшится.

Действительно, в этом случае разность суммарных площадей квадратов равна $\left(\dfrac{c^2}{2}+\dfrac{d^2}{2}\right)-\left(\dfrac{(c+x)^2}{2}+\dfrac{(d-x)^2}{2}\right)=\dfrac{1}{2}(-2cx-2x^2+2dx)=$ $=x(d-c-x)>0$, так как $c+x<d$. Повторив указанную операцию несколько раз, мы получим конфигурацию из n равных квадратов, суммарная площадь которых равна $\dfrac{S}{n}$ — меньше, чем суммарная площадь исходных квадратов. Следовательно, сумма площадей построенных квадратов не меньше, чем $\dfrac{S}{n}$, что и требовалось доказать.

Отметим, что при решении этой задачи «напрашивается» рассуждение типа: «Величина $\dfrac{S}{n}$ *достигается, если разбить диагональ данного квадрата на равные части. Пусть наименьшее значение суммы площадей новых квадратов достигается при каком-то другом разбиении. Тогда в этом разбиении найдутся два соседних неравных отрезка. Передвинем разделяющую их точку так, чтобы эти отрезки стали равными. В этом случае, сумма площадей соответствующих им квадратов уменьшится, то есть, получено противоречие. Следовательно,* $\dfrac{S}{n}$ *— наименьшее значение этой суммы, откуда и следует утверждение задачи».*

Такое рассуждение, на наш взгляд, не является решением, так как не доказано, что наименьшее значение суммы площадей квадратов существует.

2004 — 2005 учебный год

Условия задач

6 – 7 классы

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. 109 яблок разложены по пакетам. В одних пакетах — по x яблок, а в других — по 3 яблока. Найдите все возможные значения х, если всего пакетов — 20.

1.2. Изобразите как можно больше квадратов так, чтобы каждые два имели ровно по две общие вершины.

1.3. В комнате — 12 человек; некоторые из них честные, то есть всегда говорят правду, остальные — всегда лгут. «Здесь нет ни одного честного человека» — сказал первый. «Здесь не более одного честного человека» — сказал второй. Третий сказал, что честных — не более двух, четвертый — что не более трех и так далее до двенадцатого, который сказал, что честных в этой комнате не более одиннадцати. Сколько честных людей в этой комнате на самом деле?

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Два парома одновременно отходят от противоположных берегов реки и пересекают ее перпендикулярно берегам. Скорости паромов постоянны, но не равны. Паромы встречаются на расстоянии 720 метров от берега, после чего продолжают движение. На обратном пути они встречаются в 400 метрах от другого берега. Какова ширина реки?

2.2. В результате измерения четырех сторон и одной диагонали четырехугольника получены числа: 1; 2; $2,8$; 5; $7,5$. Какова длина измеренной диагонали?

2.3. В полдень Петя записал на компьютере число 1. Каждую следующую секунду компьютер прибавляет к числу на экране сумму его цифр. Может ли через какое-то время на экране появиться число 123456789?

Третий тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

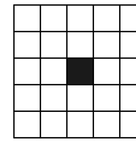
3.1. По шоссе со скоростью 60 км/час едет колонна машин длиной 300 метров. Проезжая мимо поста ДПС, каждая машина сбрасывает скорость до 40 км/час. Какова будет длина колонны, когда все машины проедут пост ДПС?

3.2. В треугольнике ABC: $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 20^\circ$, разность сторон $AB - BC = 4$. Найдите длину биссектрисы угла C.

3.3. Можно ли так расположить фишки на доске 8×8, чтобы в любых двух вертикалях фишек было поровну, а в любых двух горизонталях — не поровну?

Четвертый тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

4.1. Докажите, что $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{2004}{2005!} < 1$. ($N!$ — произведение всех натуральных чисел от 1 до N.)



4.2. Из квадрата 5×5 вырезали центральную клетку (см. рис.). Разрежьте получившуюся фигуру на две части, из которых можно склеить куб $2\times2\times2$. (*Изобразите на данном рисунке линии разреза и линии сгиба.*)

4.3. Назовем трехзначное число «хребтовым», если средняя цифра в его десятичной записи больше, чем крайние, и «овражным», если его средняя цифра меньше крайних. Каких чисел больше: «хребтовых» или «овражных»?

8 – 9 классы

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Существует ли такое натуральное n, что число $2^8+2^{11}+2^n$ является полным квадратом?

1.2. Известно, что для сторон и углов треугольника ABC выполняется равенство: $\dfrac{BC}{\cos\angle A}=\dfrac{AC}{\cos\angle B}$. Верно ли, что $AC=BC$?

1.3. Может ли натуральное число — палиндром, состоящее из ста цифр, быть простым? (Число — палиндром одинаково читается слева направо и справа налево.)

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. По шоссе со скоростью 60 км/час едет колонна машин длиной 300 метров. Проезжая мимо поста ДПС, каждая машина сбрасывает скорость до 40 км/час. Какова будет длина колонны, когда все машины проедут пост ДПС?

2.2. Можно ли разрезать неравнобедренный треугольник на две части так, чтобы из этих частей можно было сложить трапецию, у которой две стороны данного треугольника являются: а) основаниями; б) боковыми сторонами?

2.3. Зал для танцев представляет собой n-угольник. Для каких k можно расставить вдоль стенок k светильников так, чтобы у каждой стенки стояло ровно по два светильника? (Если светильник стоит в углу, то он «занимает» две стенки.)

Третий тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

3.1. Докажите, что $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\ldots+\dfrac{2004}{2005!}<1$.

3.2. Какое количество сторон выпуклого многоугольника может иметь такую же длину, как и наибольшая диагональ этого многоугольника?

3.3. Найдите все тройки $(x; y; z)$ натуральных чисел, для которых выполняется равенство: $3xy + 3yz + 3zx = 5xyz + 3$.

Четвертый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

4.1. Найдите наименьшее значение выражения $\sqrt{(x-9)^2+4}$ + $+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(y-3)^2+9}$.

4.2. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке O. Прямая AO вторично пересекает окружность, описанную около треугольника BOC, в точке M. Найдите OM, если $BC = 3$, $\angle BAC = 120°$.

4.3. На плоскости отмечено n точек ($n > 1$) и рассматриваются всевозможные отрезки с концами в этих точках. Назовем отрезок «четным», если на нем лежит четное количество отмеченных точек, и «нечетным», если на нем лежит нечетное количество отмеченных точек. Каких отрезков больше: «четных» или «нечетных»?

Решения задач

6 – 7 классы

1.1. *Ответ*: 10 или 52.

Первый способ. Если бы в каждом пакете было по 3 яблока, то всего яблок было бы 60, но на самом деле яблок на 49 больше. Значит, «лишние» яблоки надо распределить поровну по некоторым пакетам. Так как $49 = 7 \cdot 7 = 49 \cdot 1$ и всего пакетов — 20, то либо в 7 пакетах содержится по 7 «лишних» яблок, либо в одном пакете — 49 «лишних» яблок. В первом случае $x = 10$, а во втором случае $x = 52$.

Второй способ. Пусть есть n пакетов, в которых лежат по 3 яблока, тогда количество пакетов, в которых находится по x яблок, равно $20-n$. Из условия следует, что $3n + x(20-n) = 109$. Преобразуем полученное уравнение так, чтобы его левую часть можно было разложить на множители: $20x + 3n - nx - 60 = 49 \Leftrightarrow 20(x-3) - n(x-3) = 49 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x-3)(20-n) = 49$. Так как $49 = 7 \cdot 7 = 49 \cdot 1$ и всего пакетов — 20, то

$$\begin{cases} x-3=7, \\ 20-n=7 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x-3=49, \\ 20-n=1 \end{cases}.$$

Отсюда получим, что

$$\begin{cases} x=10, \\ n=13 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x=52, \\ n=19 \end{cases}.$$

1.2. Можно изобразить три квадрата, удовлетворяющих условию (см., например, рис. 238а или 238б).

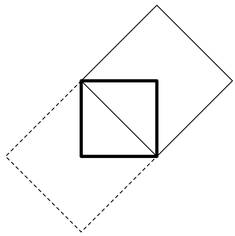


Рис. 238а

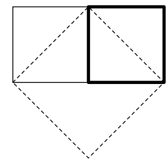


Рис. 238б

Доказывать, что больше квадратов изобразить нельзя, от школьников не требуется.

1.3. *Ответ*: 6.

Заметим, что если кто-то из присутствующих солгал, то и все предыдущие солгали. Такие в комнате есть, иначе первый сказал правду, а по его словам честных в комнате нет. По аналогичной причине в комнате обязательно есть и честные.

Пусть в комнате — x лжецов. Последний из них сказал неправду, то есть в комнате не менее x честных. Тогда $(x + 1)$-й человек сказал правду, то есть в комнате не более x честных. Таким образом, количество честных равно количеству лжецов, то есть равно 6.

2.1. *Ответ*: 1760 м.

Первый способ. Суммарное расстояние, пройденное паромами к моменту первой встречи, равно ширине реки, а к моменту второй встречи равно утроенной ширине реки. Так как скорости паромов постоянны, то до второй встречи каждый из них пройдёт втрое большее расстояние, чем до первой встречи. Так как один из паромов до первой встречи прошел 720 метров, то до второй встречи он прошел расстояние 2160 метров. При этом он прошел путь, равный ширине реки, и еще 400 метров. Следовательно, ширина реки равна 1760 метров.

Второй способ. Пусть ширина реки равна S метров, а скорости паромов равны x и y. Тогда по условию задачи можно составить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{720}{x} = \dfrac{S - 720}{y}, \\ \dfrac{S + 400}{x} = \dfrac{2S - 400}{y}. \end{cases}$$

Разделим одно уравнение системы на другое и преобразуем полученное уравнение, тогда $S^2 = 1760S$, то есть, $S = 1760$.

2.2. *Ответ*: 2,8.

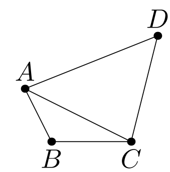


Рис. 239

Пусть измерены стороны четырехугольника $ABCD$ и диагональ AC (см. рис. 239). Так как AC — общая сторона двух треугольников, то $AC \neq 7,5$ (оставшиеся числа не могут быть длинами сторон двух треугольников со стороной 7,5 в силу неравенства треугольника). Следовательно, длину 7,5 имеет одна из сторон, например AD. Тогда в треугольнике ADC длины остальных сторон равны 5 и 2,8 (иначе не будет выполняться неравенство треугольника). Случай $AC = 5$ невозможен, потому что стороны треугольника ABC не могут иметь длины 1, 2 и 5. Следовательно, $AC = 2,8$; $BC = 5$. Оставшиеся стороны AB и BC имеют длины 1 и 2 (в любом порядке).

2.3. *Ответ*: нет, не может.

Воспользуемся тем, что остатки от деления на 9 любого натурального числа и его суммы цифр равны. Если этот остаток отличен от 0, то и после прибавления к числу суммы его цифр остаток будет отличен от 0. Так как Петя начал с числа 1, то он никогда получит число, кратное 9. Но сумма цифр числа 123456789 равна 45, поэтому это число кратно 9.

3.1. См. решение задачи 2.1. регаты для 8–9 классов.

3.2. *Ответ*: 4.

Отложим на стороне AB отрезок BD, равный BC (см. рис. 240). Тогда треугольник BCD — равнобедренный с углом при вершине 20°, поэтому углы при основании равны 80°.

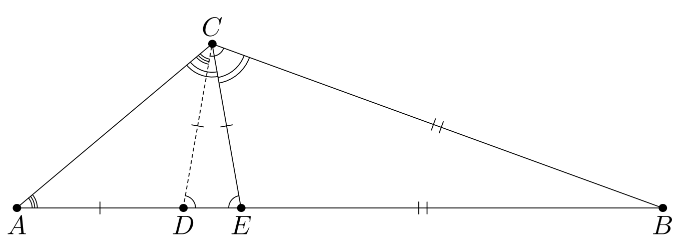


Рис. 240

Пусть CE — биссектриса треугольника ABC. Из условия следует, что $\angle ACE = 60°$, поэтому $\angle AEC = 180° - (40° + 60°) = 80°$. Таким образом, в треугольнике DEC равны два угла, поэтому он равнобедренный. Тогда угол при его вершине C равен 20°, поэтому $\angle ACD =$

$= 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$. Значит, треугольник ACD также равнобедренный. Следовательно, $CE = CD = AD = AB - BC = 4$.

3.3. *Ответ*: да, можно.

Например, см. рис. 241 (фишки стоят в закрашенных клетках).

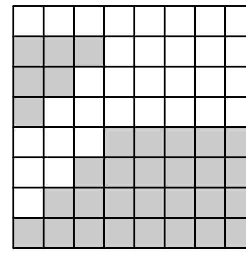


Рис. 241

Поиск искомого расположения фишек облегчается следующим рассуждением. Количество фишек в горизонтали может быть любым целым числом от 0 *до* 8. *Сумма всех этих чисел, взятых по одному разу, равна* 36. *Если в любых двух горизонталях — разное количество фишек, то отсутствует одно из этих девяти чисел. Так как при этом во всех восьми вертикалях — поровну фишек, то сумма оставшихся чисел должна быть кратна* 8. *Следовательно, не должно быть горизонтали, в которой ровно* 4 *фишки.*

4.1. См. решение задачи 3.1. регаты для 8–9 классов.

4.2. *Первый способ.* Разрежем фигуру так, как показано на рисунке 242а. Жирными линиями показаны линии разреза, пунктиром — линии сгиба.

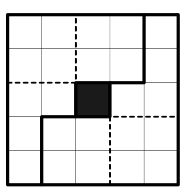


Рис. 242а

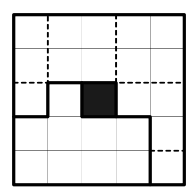


Рис. 242б

Сложим по линиям сгиба правую фигуру. Составим из нее нижнюю грань, левую грань, три клетки задней грани и одну клетку верхней грани куба. Остались: передняя грань, правая грань, три клетки верхней грани и одна клетка задней грани — их мы составим из левой фигуры.

Второй способ. Разрежем фигуру так, как показано на рисунке 242б. Из верхней фигуры мы можем составить нижнюю грань, правую грань, переднюю грань и три клетки левой грани куба. Остались: верхняя и задняя грани, а также одна клетка левой грани — их мы составим из нижней фигуры.

4.3. *Ответ*: «овражных» чисел больше.

Заметим, что если x — «хребтовое» число, то $(999 - x)$ — «овражное» число, и наоборот. При этом первая цифра любого трехзначного «хребтового» числа меньше девяти, поэтому соответствующее ему «овражное» число также трехзначное. Поэтому «овражных» чисел не меньше, чем «хребтовых». Но для «овражного» числа x, начинающегося на цифру девять (например, для числа 912), число $999 - x$ не является трехзначным, поэтому «овражных» чисел больше.

8 – 9 классы

1.1. *Ответ*: да, например, $n = 12$.

Воспользуемся формулой «квадрата суммы». Подберем n так, чтобы 2^8 было квадратом первого числа, 2^{11} — удвоенным произведением первого числа на второе, а 2^n — квадратом второго числа. Тогда: $2^8 + 2^{11} + 2^{12} = (2^4)^2 + 2 \cdot 2^4 \cdot 2^6 + (2^6)^2 = (2^4 + 2^6)^2 = 80^2$.

1.2. *Ответ*: да, верно.

Пусть $\angle A = \alpha$; $\angle B = \beta$; $BC = a$; $AC = b$.

Первый способ. Из условия следует, что косинусы углов α и β имеют одинаковый знак, поэтому эти углы — острые. Проведем в данном треугольнике высоту CD (см. рис. 243), тогда $BD = a\cos\beta = b\cos\alpha = AD$. Следовательно, CD — медиана треугольника ABC, то есть $AC = BC$.

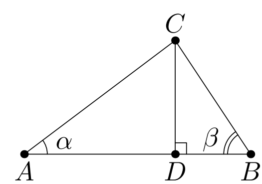


Рис. 243

Второй способ. Из условия следует, что $\dfrac{\cos^2\alpha}{a^2} = \dfrac{\cos^2\beta}{b^2}$, а из теоремы синусов — что $\dfrac{\sin^2\alpha}{a^2} = \dfrac{\sin^2\beta}{b^2}$. Сложим эти уравнения и воспользуемся основным тригонометрическим тождеством $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$. Получим, что $\dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{b^2}$. Так как $a > 0$ и $b > 0$, то $a = b$.

1.3. *Ответ*: нет, не может.

Первый способ. Воспользуемся признаком делимости на 11: число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность между суммами цифр, стоящих на чётных и на нечётных позициях, делится на 11. В данном случае эта разность равна 0, поэтому данное число делится на 11 и не является простым.

Тот факт, что данное число кратно 11, *можно получить, не используя признака делимости на* 11.

Второй способ. Пусть данное число имеет вид: $\overline{a_0a_1\ldots a_{48}a_{49}\ldots a_1a_0}$, тогда его можно записать в виде суммы: $a_0(10^{99}+1)+a_1(10^{98}+10^1)+\ldots+$

$$+\, a_{49}(10^{50}+10^{49}) = \sum_{n=0}^{49} a_n(10^{99-n}+10^n) = \sum_{n=0}^{49} a_n \cdot 10^n \cdot (10^{99-2n}+1).$$

Так как при любом нечетном натуральном k x^k+1 делится на $x+1$, то каждое слагаемое делится на 11, поэтому и сумма делится на 11. Следовательно, данное число не является простым.

2.1. *Ответ*: 200 метров.

Так как первоначальная скорость движения колонны 1000 м/мин, то «хвост» колонны окажется у поста ДПС через 0,3 минуты после того, как мимо ДПС проедет «голова» колонны. За это время «голова» успеет проехать $\frac{40}{60}\cdot 0,3 = 0,2$ (км) $= 200$ (м), что и составляет длину колонны.

2.2. *Ответ*: в обоих случаях — можно.

а) Разрежем треугольник ABC по одной из биссектрис, например по биссектрисе CD (см. рис. 244а). Получим два треугольника ACD и BCD. Отразим треугольник BCD симметрично относительно серединного перпендикуляра к проведенной биссектрисе и получим треугольник ECD. Так как $\angle ACD = \angle CDE$, то $AC \parallel DE$, то есть $ACED$ — трапеция с основаниями AC и $DE = BC$.

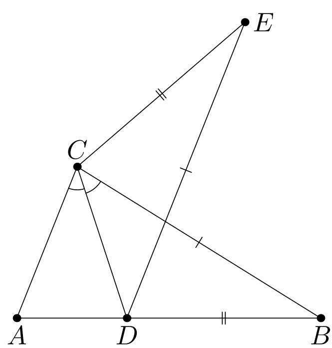


Рис. 244а

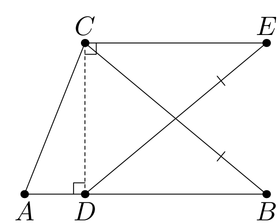


Рис. 244б

б) Разрежем треугольник ABC по высоте, лежащей внутри треугольника (хотя бы одна такая высота найдется, например CD, см. рис. 244б). Получим два треугольника ACD и BCD. Отразим треугольник BCD симметрично относительно серединного перпендикуляра к проведенной высоте и получим треугольник ECD. Так как $\angle ADC = \angle DCE = 90°$, то $AD \parallel CE$, то есть $ACED$ — трапеция с боковыми сторонами AC и $DE = BC$. Отметим, что поскольку данный треугольник — неравнобедренный, то в обоих случаях получается трапеция, а не параллелограмм.

2.3. *Ответ*: для всех k, таких что $n \leqslant k \leqslant 2n$.

Очевидно, что наиболее экономно — расставить светильники по всем углам, тогда их будет ровно n, а наименее экономно — поставить по два светильника к каждой стенке, не занимая углы, тогда их будет ровно $2n$. Для всех k, таких что $n < k < 2n$ указанная расстановка также возможна. Действительно, можно расставить по одному светильнику в $2n-k$ последовательных вершинах многоугольника, а около остальных $k-n$ вершин (но не в них) поставить по одному светильнику с каждой стороны. Тогда количество светильников равно $(2n-k)\cdot 1+(k-n)\cdot 2=k$, и у каждой стенки будет стоять ровно по два светильника.

3.1. Пусть $S=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{2004}{2005!}$, тогда $S+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{2005!}=$ $=S=\frac{2}{2!}+\frac{3}{3!}+\ldots+\frac{2005}{2005!}=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{2004!}$. Следовательно, $S+\frac{1}{2005!}=1$, поэтому $S=1-\frac{1}{2005!}<1$, что и требовалось доказать.

Аналогичный результат получится, если к левой части исходного неравенства прибавить $\frac{1}{2005!}$ *и вычислять полученную сумму «с конца».*

3.2. *Ответ*: две, одна или ни одной.

Ни одной стороны, равной наибольшей диагонали, нет, например, в правильных многоугольниках. Также несложно привести пример многоугольника, в котором одна или две стороны равны наибольшей диагонали. Рассмотрим, например, дугу BD величиной 60° с центром в точке A (см. рис. 245а).

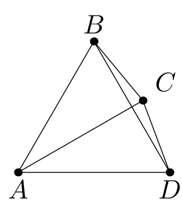


Рис. 245а

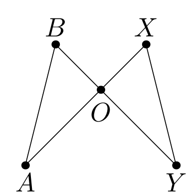


Рис. 245б

Выберем точку C между этой дугой и хордой BD, тогда BD — большая диагональ четырехугольника $ABCD$ и $AB=AD=BD$. Если немного уменьшить сторону AD, оставив треугольник ABD равнобедренным, то BD — большая диагональ и $AB=BD$.

Докажем, что сторон, равных наибольшей диагонали многоугольника, не может быть больше двух. Предположим, что их хотя бы три, тогда среди них найдутся две стороны, не имеющие общих точек, которые обозначим AB и XY. Четырехугольник $ABXY$ — выпуклый, поэтому его диагонали AX и BY, являющиеся также и диагоналями многоугольника, пересекаются в некоторой точке O (см. рис. 245б). Применяя неравенство треугольника для треугольников AOB и XOY, получим: $AO + OB > AB$, $XO + OY > XY$. Сложим эти неравенства: $AX + BY > AB + XY$. Следовательно, по крайней мере одна из диагоналей AX или BY больше, чем наибольшая диагональ многоугольника.

Полученное противоречие показывает, что сторон, равных наибольшей диагонали — не более двух, и они могут быть только соседними.

3.3. *Ответ*: $(1;2;3)$; $(1;3;2)$; $(2;1;3)$; $(2;3;1)$; $(3;1;2)$; $(3;2;1)$.

Пусть $x \leqslant y \leqslant z$, тогда $3xy + 3yz + 3zx \leqslant 9yz$, а $5xyz + 3 > 5xyz$. Следовательно, $5xyz < 9yz$, то есть $x = 1$ и данное равенство принимает вид: $3y + 3z = 2yz + 3$. Так как $3y + 3z \leqslant 6z$, а $2yz + 3 > 2yz$, то $2yz < 6z$, то есть $y < 3$.

Если $y = 1$, то из равенства $3y + 3z = 2yz + 3$ получим $z = 0$, что противоречит условию. Поэтому $y = 2$, тогда $z = 3$. Остальные тройки чисел получаются всевозможными перестановками чисел x, y и z.

4.1. *Ответ*: 13.

Пусть $A(9;2)$; $B(3;3)$; $C(0;y)$; $D(x;0)$, тогда $\sqrt{(x-9)^2+4} + \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(y-3)^2+9} = AD + DC + CB$ (см. рис. 246). Таким образом, данное выражение принимает наименьшее значение тогда и только тогда, когда длина ломаной $ADCB$, концы которой фиксированы, а точки C и D находятся на указанных осях координат, будет наименьшей.

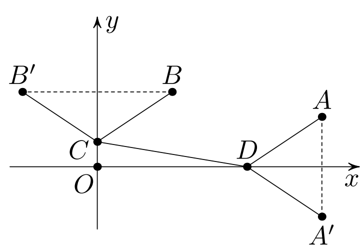


Рис. 246

Рассмотрим точку $A'(9;-2)$, симметричную точке A относительно оси абсцисс, и точку $B'(-3;3)$, симметричную точке B относительно оси ординат. Получим, что $AD + DC + CB = A'D + DC + CB'$, поэтому наименьшее значение такой суммы равно длине отрезка $A'B'$ и достигается, если точки C и D лежат на этом отрезке. $A'B' = \sqrt{(-9-3)^2 + (-2-3)^2} = 13$.

Отметим, что если в данном выражении заменить числа 4 и 9 на $(-2)^2$ и $(-3)^2$ соответственно, то его значение можно сразу интерпретировать как длину ломаной $A'DCB'$, что сделает запись решения короче.

4.2. *Ответ*: 6.

Пусть $\alpha = \frac{1}{2}\angle CBA$, $\beta = \frac{1}{2}\angle BCA$ (см. рис. 247). Так как $\angle BAC = 120^\circ$, то $\alpha + \beta = 30^\circ$; $\angle BOC = 150^\circ$. Кроме того, по свойству вписанных углов, $\angle AMC = \angle OBC = \alpha$. В треугольнике AMC: $60^\circ + \alpha + \beta + \angle BCM = 180^\circ$, поэтому, с учётом первого равенства получим: $\beta + \angle BCM = 90^\circ$, то есть $\angle OCM = 90^\circ$. Следовательно, OM — диаметр окружности. По следствию из теоремы синусов для треугольника BOC: $OM = 2R = \frac{BC}{\sin\angle BOC} = \frac{3}{\sin 150^\circ} = 6$.

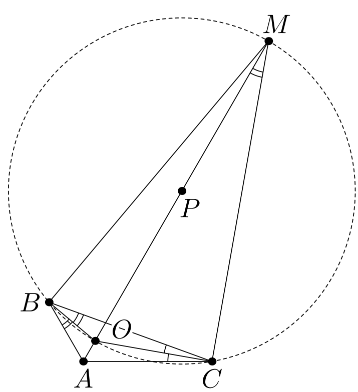


Рис. 247

4.3. *Ответ*: «четных» отрезков больше.

Рассмотрим прямую, на которой лежит не менее двух точек. Докажем методом математической индукции, что на этой прямой «четных» отрезков больше, чем «нечетных». Если точек — две, то единственный отрезок — «четный». Пусть для n точек утверждение верно. Добавим к ним еще одну точку так, чтобы остальные лежали по одну сторону от нее. Тогда образуется n новых отрезков. Если n — четно, то половина из них «четные» а другая половина — «нечетные». Если n — нечетно, то «четных» образуется на один больше, чем «нечетных». В обоих случаях, «четных» отрезков добавляется не меньше, чем «нечетных». Следовательно, утверждение верно для $n + 1$ точки. Доказанное утверждение верно для каждой прямой, содержащей хотя бы две данные точки, из чего и следует утверждение задачи.

Первый открытый командный турнир Российских регионов по математике

2005 — 2006 учебный год

Условия задач

9 – 11 классы

Первый тур (10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Найдите $g(x)$, если $f(x) = 1,5 - x$, а $f(g(x)) = \dfrac{1}{3+x}$.

1.2. На одной из сторон угла (отличного от развернутого) даны точки A и B на расстояниях 6 см и 8 см от вершины O. Найдите расстояние от вершины O до точки C, лежащей на другой стороне угла, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом.

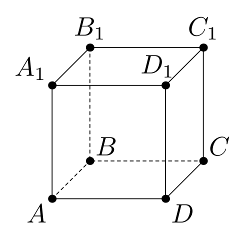
1.3. На двух островах расположено несколько селений, причём на одном острове на два селения больше, чем на другом. На каждом острове между любыми двумя селениями проложена грунтовая дорога. Можно ли заасфальтировать ровно половину всех этих дорог? (Каждая дорога асфальтируется только целиком.)

Второй тур (15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Среди всех решений неравенства $y - x \geqslant x^2 + 1$ найдите те, для которых выражение $y - 2x$ принимает наименьшее значение.

2.2. На сторонах AC и BC правильного треугольника ABC взяты точки X и Y соответственно. Всегда ли из отрезков AY, BX и XY можно составить треугольник?

2.3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис.). В его вершину A запрыгнула блоха и стала прыгать по вершинам куба, прыгая каждый раз в одну из трех соседних. Она побывала в вершинах A, B, C, D, A_1, B_1 и C_1 соответственно 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 раз, и в конце концов выпрыгнула наружу из вершины D_1. Сколько раз она побывала в вершине D_1?



Третий тур (20 минут; каждая задача — 8 баллов)

3.1. Решите уравнение: $2005x^{2006} + 1 = 2006x^{2005}$.

3.2. На стороне AB квадрата $ABCD$ во внешнюю сторону построен прямоугольный треугольник с прямым углом E. Отрезки EC и ED

пересекают сторону AB в точках X и $У$ соответственно. Докажите, что отрезок $XУ$ является средним геометрическим отрезков BX и AY.

3.3. Наименьшее общее кратное некоторых пятидесяти натуральных чисел равно наименьшему общему кратному некоторых других пятидесяти натуральных чисел. Могут ли все эти сто чисел быть последовательными натуральными числами?

Четвертый тур (25 минут; каждая задача — 9 баллов)

4.1. Докажите, что для любых положительных x, y и z выполняется неравенство: $\frac{x}{y} + \sqrt{\frac{y}{z}} + \sqrt[3]{\frac{z}{x}} > 2$.

4.2. Известно, что треугольник подобен своему ортотреугольнику (то есть треугольнику, вершинами которого являются основания высот данного треугольника). Какими могут быть углы данного треугольника?

4.3. При каких натуральных значениях n и k число $S = 5^n + 5^k$ можно представить в виде суммы квадратов двух натуральных чисел?

Решения задач

1.1. *Ответ*: $g(x) = \frac{3x+7}{2x+6}$.

Так как $f(x) = 1,5 - x$, то $f(g(x)) = 1,5 - g(x)$. Таким образом, $1,5 - g(x) = \frac{1}{3+x}$, следовательно, $g(x) = 1,5 - \frac{1}{3+x} = \frac{1,5x+3,5}{3+x} = \frac{3x+7}{2x+6}$.

1.2. *Ответ*: $4\sqrt{3}$ см.

Рассмотрим окружность, проходящую через точки A и B, и касающуюся другой стороны угла в некоторой точке C (см. рис. 248). Эта точка и будет искомой, так как из нее отрезок AB виден под наибольшим углом.

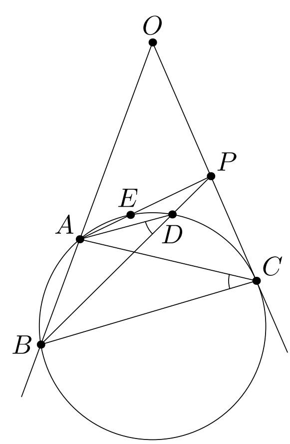


Рис. 248

Действительно, рассмотрим произвольную точку P на этой же стороне угла, отличную от точки C и от вершины угла O. Эта точка будет расположена вне построенной окружности, а отрезки PA и PB вторично пересекут окружность в каких-то точках E и D. Хотя бы одна из этих точек будет лежать на дуге ACB, например, точка D. Тогда $\angle ADB = \angle ACB$, так как эти углы вписанные и опираются на одну дугу. Кроме того, $\angle ADB > \angle APB$, так как $\angle ADB$ — внешний для треугольника APD. Следовательно, $\angle ACB > \angle APB$.

По теореме о касательной и секущей к окружности $OC^2 = OA \cdot OB$, то есть $OC = \sqrt{6 \cdot 8} = 4\sqrt{3}$ (см).

Отметим, что окружность, использованная при решении задачи, единственная. Ее несложно построить циркулем и линейкой: для этого достаточно отложить на стороне данного угла отрезок $OC = \sqrt{OA \cdot OB}$ *и описать около треугольника* ABC *окружность.*

1.3. *Ответ*: нет, нельзя.

Первый способ. Пусть на одном острове n селений, а на другом — $(n + 2)$ селения. Тогда количество дорог на первом острове $D_1 = \frac{n(n-1)}{2}$, а количество дорог на втором острове $D_2 = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$. Половина от общего количества дорог: $\frac{D_1 + D_2}{2} = \frac{2n^2 + 2n + 2}{4} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{2}$. В полученной сумме первое слагаемое — целое при любом натуральном n, поэтому эта сумма не может принимать целых значений. Следовательно, такое количество дорог заасфальтировать нельзя.

Второй способ. Пусть на первом острове n селений, а на втором — $(n+2)$ селения. Выберем на втором острове любые n селений и заасфальтируем все дороги между ними. Тем самым будет заасфальтирована ровно половина от суммарного количества всех дорог первого острова и дорог между выбранными селениями второго острова.

Рассмотрим оставшиеся два селения на втором острове. От каждого из них ведет по n дорог к каждому из выбранных селений, и есть еще одна дорога между этими двумя селениями. Тогда для выполнения условия задачи потребуется еще заасфальтировать ровно половину из $2n+1$ дорог, что невозможно, так как это число — нечетное при любом натуральном n.

Третий способ. Рассмотрим количество дорог между k селениями (количество пар во множестве из k элементов): $D = \frac{k(k-1)}{2}$. Несложно проверить, что если число k при делении на 4 дает остаток 0 или 1, то D — четное, а если число k при делении на 4 дает остаток 2 или 3, то D — нечетное Поэтому, если количество селений на островах отличается на два, то количество дорог на островах имеет разную четность. Следовательно, общее количество дорог нечетно, и половину дорог заасфальтировать нельзя.

2.1. *Ответ*: $x = 0,5$; $y = 1,75$.

Первый способ. Так как $y - x \geqslant x^2 + 1 \Leftrightarrow y - 2x \geqslant x^2 - x + 1$, то $y - 2x \geqslant x^2 - x + 1 = (x - 0,5)^2 + 0,75 \geqslant 0,75$. Следовательно, выражение $y - 2x$ принимает наименьшее значение тогда и только тогда, когда оба неравенства в последней цепочке обращаются в равенства, то есть при $x = 0,5$; $y = 1,75$.

Второй способ. Данное неравенство задает на координатной плоскости множество точек, лежащих внутри или на границе параболы $y = x^2 + x + 1$ (см. рис. 249). Пусть $a = y - 2x$, тогда рассмотрим семейство прямых $y = 2x + a$, где a — произвольное действительное число. Все прямые этого семейства параллельны, кроме того, каждая такая прямая пересекает ось y в точке с координатами $(0, a)$. По условию задачи нас интересуют только те прямые, которые имеют общие точки с указанным множеством. Если прямая $y = 2x + a_1$ не является касательной к параболе, то среди рассматриваемого семейства можно указать такую прямую $y = 2x + a_2$, которая также имеет общие точки с заштрихованным множеством, но при этом $a_2 < a_1$. Это можно сделать, например, проведя прямую, параллельную прямой $y = 2x + a_1$ через любую точку указанного множества, лежащую ниже этой прямой. Таким образом, выражение $y - 2x$ принимает наименьшее значение, если прямая $y = 2x + a$ является касательной к параболе $y = x^2 + x + 1$.

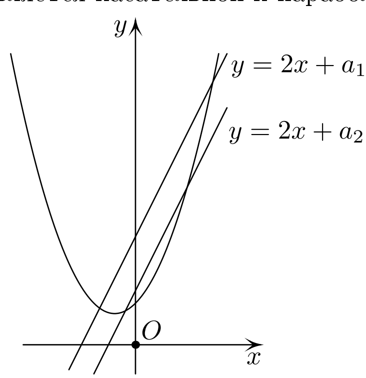


Рис. 249

Найдем координаты точки касания. Воспользуемся тем, что касательная к параболе имеет с ней ровно одну общую точку. Тогда система уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 + x + 1, \\ y = 2x + a \end{cases}$$

должна иметь единственное решение. Это равносильно тому, что уравнение $x^2+x+1 = 2x+a \Leftrightarrow x^2-x+(1-a) = 0$ должно иметь единственный корень, следовательно, $D = (-1)^2 - 4(1-a) = 4a - 3 = 0$, то есть $a = 0,75$. При найденном значении a уравнение имеет решение $x = 0,5$. Тогда $y = (0,5)^2 + 0,5 + 1 = 1,75$.

Те, кто уже знает производную, могут иначе найти координаты точки касания. Уравнение касательной к данной параболе имеет вид: $y = (2x_0+1)(x-x_0) + x_0^2 + x_0 + 1 \Leftrightarrow y = (2x_0+1)x - x_0^2 + 1$, *где* x_0 — *абсцисса точки касания. Тогда из равенства* $2x+a = (2x_0+1)x - x_0^2 + 1$ *следует, что* $x_0 = 0,5$ *и* $a = 0,75$, *откуда* $y = 1,75$.

2.2. *Ответ*: да, всегда.

Первый способ. Рассмотрим правильный тетраэдр $ABCD$, в гранях которого проведем отрезки DX и DY (см. рис. 250а). Тогда $DX = BX$ и $DY = AY$ (соответствующие отрезки в равных правильных треугольниках). Поэтому треугольник DXY — искомый.

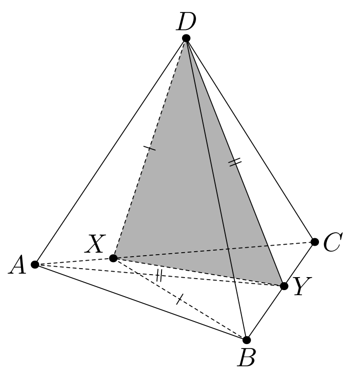


Рис. 250а

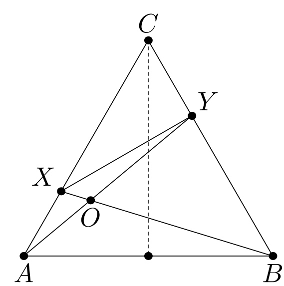


Рис. 250б

Второй способ. Рассмотрим данный треугольник ABC. Пусть O — точка пересечения отрезков AY и BX (см. рис. 250б). Проведем серединный перпендикуляр к стороне AB. Точки X и Y расположены относительно него в разных полуплоскостях, поэтому X находится ближе к вершине A, чем у вершине B, а Y — ближе к вершине B, чем к вершине A.

Используя неравенство треугольника, получим: 1) $AY > BY$, следовательно, $AY + YX > BY + YX > BX$; 2) аналогично, $BX > AX$, поэтому $BX + XY > AY$; 3) $AY + BX > OY + OX > XY$. Из того, что для трех данных отрезков выполняются эти неравенства, следует, что из них можно составить треугольник.

Отметим, что существует много вариаций этого способа решения задачи. Возможен, в частности, метод решения, основанный на выражении длин указанных отрезков через длину стороны данного треугольника и длины отрезков AX и BY, но в этом случае доказательство неравенств является громоздким.

2.3. *Ответ*: 9 раз.

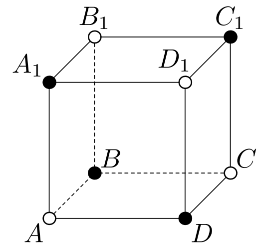


Рис. 251

Покрасим вершины куба A, C, B_1, D_1 в белый цвет, а вершины B, D, A_1, C_1 — в черный. Тогда с белой вершиной соседствуют только черные, и наоборот (см. рис. 251). Первый прыжок совершается извне в белую вершину, а затем прыжки в белую и в черную вершину чередуются вплоть до последнего появления блохи в вершине D_1. Поэтому суммарное количество появлений блохи в белых вершинах на 1 больше, чем количество ее появлений в черных вершинах. Пусть x — искомое количество, тогда получим уравнение: $(1+3+6+x)-(2+4+5+7)=1$, откуда $x=9$.

3.1. *Ответ*: 1.

Заметим, что данное уравнение может иметь только положительные корни, так как при $x \leqslant 0$ его правая часть принимает только неположительные значения, а левая часть при всех значениях x принимает значения, большие или равные 1.

Первый способ. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $x=1$ является решением данного уравнения. Пусть $x>0$ и $x \neq 1$, тогда преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$2005x^{2006}+1=2005x^{2005}+x^{2005} \Leftrightarrow 2005x^{2005}(x-1)=x^{2005}-1.$$

Разделим обе части уравнения на $x-1$, тогда $2005x^{2005}=x^{2004}+$ $+x^{2003}+\ldots+1$. Докажем, что полученное уравнение не имеет корней, отличных от 1.

Запишем выражение, стоящее в левой части, в виде суммы, тогда в обеих частях уравнения будет одинаковое количество слагаемых, а именно, по 2005: $x^{2005}+x^{2005}+\ldots+x^{2005}+x^{2005}=x^{2004}+x^{2003}+\ldots+1$. При $x>1$ каждое слагаемое в левой части больше соответствующего слагаемого в правой, а при $0<x<1$, наоборот, каждое слагаемое в правой части больше соответствующего слагаемого в левой. Следовательно, полученное уравнение не имеет корней, отличных от 1. Значит, и данное уравнение не имеет других корней.

Второй способ. Рассмотрим функцию $f(x) = 2005x^{2006} - 2006x^{2005} + 1$, где $x \in (0; +\infty)$, непрерывную на рассматриваемом промежутке. Заметим, что $f(1) = 0$. Найдем производную этой функции: $f'(x) = 2005 \cdot 2006x^{2005} - 2006 \cdot 2005x^{2004} = 2006 \cdot 2005x^{2004}(x-1)$. Так как $f'(x) = 0$ при $x = 1$, $f'(x) < 0$ при $0 < x < 1$ и $f'(x) > 0$ при $x > 1$, то $x = 1$ — единственная точка минимума рассматриваемой функции, поэтому при $x \neq 1$ верно неравенство $f(x) > 0$. Следовательно, данное уравнение имеет единственный корень: $x = 1$.

3.2. Проведем лучи EA и EB до пересечения с прямой CD в точках A_1 и B_1 соответственно (см. рис. 252). Получим, что квадрат $ABCD$ вписан в прямоугольный треугольник A_1EB_1, поэтому $\angle AA_1D = \angle B_1BC$.

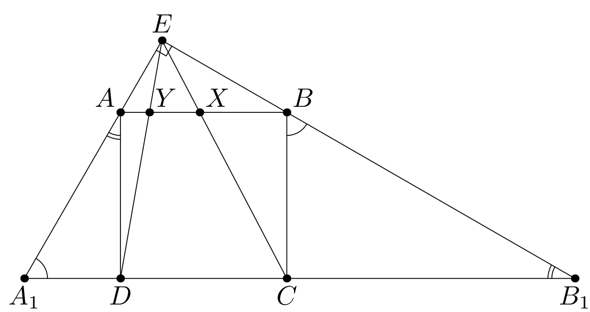


Рис. 252

Рассмотрим гомотетию с центром E и коэффициентом $k = \dfrac{AE}{A_1E}$. Так как $AB||CD$, то образами точек B, X и Y при этой гомотетии служат точки B_1, C и D соответственно. Следовательно, $\dfrac{BX}{B_1C} = \dfrac{XY}{CD} = \dfrac{AY}{A_1D}$. Из подобия прямоугольных треугольников AA_1D и B_1BC следует, что $\dfrac{AD}{B_1C} = \dfrac{A_1D}{BC}$. Учитывая, что $AD = BC = CD$, получим: $CD^2 = A_1D \cdot B_1C$. Поэтому $XY^2 = AY \cdot BX$, что и требовалось доказать.

Соотношение $CD^2 = A_1D \cdot B_1C$ можно получить и другими способами, например, используя тригонометрические функции одного из острых углов, отмеченных на рис. 252.

3.3. *Ответ*: нет, не могут.

Предположим, что имеется 100 последовательных натуральных чисел с указанным свойством. Тогда среди них есть либо одно, либо два числа, которые делятся на $64 = 2^6$.

В первом случае для одной группы из 50 чисел наименьшее общее кратное делится на 64, а для другой — не делится.

Во втором случае одно из двух чисел, кратных 64, делится также на 128, а другое — не делится. Тогда для одной группы из 50 чисел наименьшее общее кратное делится на 128, а для другой — не делится.

В обоих случаях получено противоречие, поэтому указанные сто натуральных чисел не могут быть последовательными.

4.1. Сделаем замену переменных: $a = \frac{x}{y}$; $b = \frac{y}{z}$; $c = \frac{z}{x}$, тогда доказываемое утверждение примет вид: если a, b и c — положительные числа и $abc = 1$, то $a + \sqrt{b} + \sqrt[3]{c} > 2$.

Докажем равносильное утверждение: если a, b и c — положительные числа и $abc = 1$, то $2a + 2\sqrt{b} + 2\sqrt[3]{c} > 4$.

Используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим для трех чисел, получим, что $a + \sqrt{b} + \sqrt{b} \geqslant 3\sqrt[3]{ab}$. Кроме того, по аналогичному неравенству для двух чисел $\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{c} \geqslant 2\sqrt{\sqrt[3]{abc}} = 2$. Таким образом, $2a+2\sqrt{b}+2\sqrt[3]{c} = a+(a+\sqrt{b}+\sqrt{b})+2\sqrt[3]{c} \geqslant a + 3\sqrt[3]{ab} + 2\sqrt[3]{c} = a + \sqrt[3]{ab} + 2(\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{c}) \geqslant a + \sqrt[3]{ab} + 4 > 4$. Последнее неравенство выполняется, так как $a + \sqrt[3]{ab} > 0$.

4.2. *Ответ*: три угла по 60° или $\frac{180^\circ}{7}$; $\frac{360^\circ}{7}$ и $\frac{720^\circ}{7}$.

Пусть в треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1; H — его ортоцентр; α, β и γ — углы при вершинах A, B и C соответственно (см. рис. 253а, б). Без ограничения общности можно считать, что $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$.

Заметим, что данный треугольник может быть либо остроугольным, либо тупоугольным (в прямоугольном треугольнике ортотреугольник вырождается в отрезок).

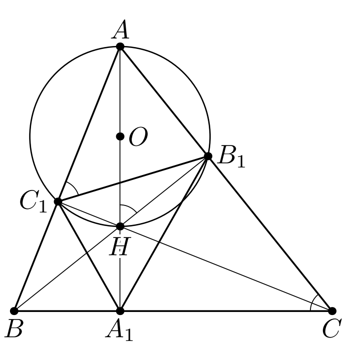


Рис. 253а

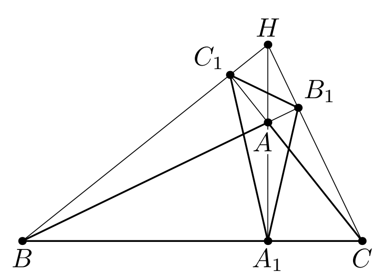


Рис. 253б

Если ABC — остроугольный (см. рис. 253а), то углы его ортотреугольника $A_1B_1C_1$ выражаются через углы исходного треугольника следующим образом: $\angle C_1A_1B_1 = 180^\circ - 2\alpha$; $\angle A_1B_1C_1 = 180^\circ - 2\beta$; $\angle B_1C_1A_1 = 180^\circ - 2\gamma$. Это можно доказать различными способами, например, так: четырехугольник AB_1HC_1 — вписанный, поэтому $\angle AC_1B_1 = \angle AHB_1 = 90^\circ - \angle A_1AC = 90^\circ - (90^\circ - \gamma) = \gamma$. Точно так же находим, что $\angle BC_1A_1 = \gamma$, поэтому $\angle B_1C_1A_1 = 180^\circ - 2\gamma$. Аналогично вычисляются и два других угла треугольника $A_1B_1C_1$.

Так как $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$, то $\angle B_1C_1A_1 \geqslant \angle A_1B_1C_1 \geqslant \angle C_1A_1B_1$. Поэтому из подобия треугольников ABC и $C_1B_1A_1$ следует равенство их соответствующих углов, то есть

$$\begin{cases} 180^\circ - 2\alpha = \gamma, \\ 180^\circ - 2\beta = \beta, \\ 180^\circ - 2\gamma = \alpha, \end{cases}$$

Решением этой системы уравнений является $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$.

Пусть треугольник ABC — тупоугольный, то есть $\alpha > 90^\circ$ (см. рис. 253б). Тогда его ортотреугольник $A_1B_1C_1$ является также и ортотреугольником остроугольного треугольника BHC, в котором $\angle BCH = 90^\circ - \beta$; $\angle CBH = 90^\circ - \gamma$, $\angle BHC = 180^\circ - \alpha$.

Воспользовавшись уже выведенными формулами для углов ортотреугольника в остроугольном случае, найдем, что $\angle C_1A_1B_1 = 2\alpha - 180^\circ$; $\angle A_1B_1C_1 = 2\gamma$; $\angle B_1C_1A_1 = 2\beta$. Учитывая, что $2\beta \geqslant 2\gamma$, достаточно рассмотреть две системы уравнений, получающиеся из подобия треугольников:

$$\begin{cases} 2\alpha - 180^\circ = \alpha, \\ 2\beta = \beta, \\ 2\gamma = \gamma, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2\beta = \alpha, \\ 2\gamma = \beta, \\ 2\alpha - 180^\circ = \gamma. \end{cases}$$

Первая система не имеет положительных решений, а решением второй системы является: $\alpha = \dfrac{720^\circ}{7}$; $\beta = \dfrac{360^\circ}{7}$; $\gamma = \dfrac{180^\circ}{7}$.

Рассмотренный в задаче тупоугольный треугольник обладает многими другими интересными свойствами, в частности, треугольник, вершинами которого являются основания его биссектрис, — равнобедренный (см. осенний турнир городов 2005 *года, задача* №5 *для* 10–11 *классов).*

4.3. *Ответ*: при n и k, имеющих одинаковую четность.

Действительно, если числа n и k четные, то слагаемые 5^n и 5^k являются полными квадратами. Если n и k нечетные, то числа 5^n и 5^k можно записать в виде $5x^2$ и $5y^2$ для некоторых натуральных x и y, являющихся степенями пятерки. Тогда $S = 5x^2 + 5y^2 = (2x + y)^2 + |2y - x|^2$, где числа, возводимые в квадрат, — натуральные. Действительно, $2y \neq x$, поскольку x и y — степени пятерки. Пусть теперь одно из чисел n или k — четное, а другое — нечетное. Пятерка в четной степени при делении на 8 дает остаток 1, а в нечетной степени — остаток 5. Поэтому число S при делении на 8 дает остаток 6.

С другой стороны, квадраты натуральных чисел при делении на 8 могут давать остатки 0, 1 или 4. Поэтому сумма двух квадратов может при делении на 8 давать остатки 0, 1, 2, 4 или 5. Полученное противоречие показывает, что в данном случае число S не представимо в виде суммы двух квадратов.

Школьные математические регаты

В заключение приведены задачи двух тренировочных математических регат, в разное время проходивших в школе №218.

Условия задач

Регата для 6 – 7 классов

1.1. (6 *баллов*) Решите ребус (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, различным буквам — различные цифры): $Б + БЕЕЕ = МУУУ$.

1.2. (6 *баллов*) Верно ли, что:

а) фигуры с равными площадями имеют равные периметры?

б) фигуры с равными периметрами имеют равные площади?

Ответы обосновать.

1.3. (6 *баллов*) 4 коровы черной масти и 3 коровы рыжей масти за 5 дней дали такое же количество молока, что и 3 коровы черной масти и 5 коров рыжей масти за 4 дня. Какие коровы более производительны — черные или рыжие?

2.1. (7 *баллов*) Числа a и b — целые. Известно, что $a + b = 100$. Может ли сумма $7a + 3b$ равняться числу 627?

2.2. (7 *баллов*) Нарисуйте, как разрезать квадрат на два равных: а) пятиугольника; б) шестиугольника.

2.3. (7 *баллов*) Жители города А говорят только правду, жители города В — только ложь, а жители города С — попеременно правду и ложь (то есть, из каждых двух высказанных ими утверждений, одно — истинно, а другое — ложно). В пожарную часть сообщили по телефону: «У нас пожар, скорее приезжайте!». «Где?» — спросил дежурный по части. «В городе С» — ответили ему. В какой город должна приехать пожарная машина, если известно, что через час после ее приезда пожар был потушен?

3.1. (8 *баллов*) С любым числом, записанным на доске, разрешается производить следующие операции: 1) заменять его числом, которое в два раза больше; 2) стирать его последнюю цифру. Как с помощью этих операций из числа 458 получить число 14?

3.2. (8 *баллов*) Вокруг небольшого курортного городка расположены три озера различных размеров, имеющие форму круга. В каком бы направлении ни шел отдыхающий (по прямой), он обязательно через некоторое время оказывался на берегу одного из озер. Нарисуйте план этой местности, обозначив городок на нем — точкой, если известно, что городок расположен не на острове.

3.3. (8 *баллов*) В колонию, состоящую из двухсот бактерий, попадает один вирус. В первую минуту он уничтожает одну бактерию, затем делится на два новых вируса, и одновременно каждая из оставшихся бактерий тоже делится на две новые. В следующую минуту возникшие два вируса уничтожают две бактерии, и затем каждый из вирусов и каждая из оставшихся бактерий снова делятся пополам, и так далее. Будет ли эта колония жить бесконечно долго или, если она в конце концов погибнет, то через какое время это произойдет?

4.1. (9 *баллов*) В одной из историй, которую приписывают Иосифу Флавию, воину древней Иудеи, а впоследствии — известному историку, описано, как он попал в плен к римлянам вместе с дюжиной своих подчиненных. Пленных поставили в круг, объявив, что оставят в живых только одного из них. Иосифу приказали назвать натуральное число, большее тринадцати, затем, начиная с него, считали по кругу, и убивали того, на кого «выпадало» названное Иосифом число. После этого отсчет начинали заново, и убивали следующего, на кого это число выпадало. Какое наименьшее число мог назвать Иосиф Флавий, если в итоге — он единственный из пленных, оставшийся в живых?

4.2. (9 *баллов*) Нарисуйте 8 точек и соедините их отрезками так, чтобы отрезки не пересекались и через каждую точку проходило ровно 4 отрезка.

4.3. (9 *баллов*) Из пункта А в пункт В ведет единственная дорога длиной 15 км. В 9 часов 30 минут со скоростью 4 км/ч из А в В отправился пешеход. На следующий день, выйдя в 11 часов, он отправился в обратный путь со скоростью 5 км/ч. Оба раза пешеход перешагивал через единственный ручей, пересекающий дорогу, в одно и тоже время. В котором часу это было?

Регата для 10 – 11 *классов*

1.1. (6 *баллов*) Верно ли, что 57599 — простое число?

1.2. (6 *баллов*) Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} a = bcd, \\ a + b = cd, \\ a + b + c = d, \\ a + b + c + d = 1. \end{cases}$$

1.3. (6 *баллов*) В трапеции $ABCD$ с основанием AD диагональ AC равна сумме оснований, угол между диагоналями равен 60°. Докажите, что трапеция — равнобокая.

2.1. (7 *баллов*) Можно ли из натуральных чисел от 1 до 100 выбрать 71 число так, чтобы их сумма равнялась сумме остальных чисел?

2.2. (7 *баллов*) Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y+1} = 1, \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y} = 1. \end{cases}$$

2.3. (7 *баллов*) В треугольник ABC периметра 1997 вписана окружность. Вокруг нее описан шестиугольник так, что все его вершины лежат на сторонах данного треугольника. Найдите сумму периметров трех треугольников, отсеченных сторонами шестиугольника от треугольника ABC.

3.1. (7 *баллов*) Натуральное двузначное число не делится на 3. Докажите, что сумма квадратов его цифр также не делится на 3.

3.2. (7 *баллов*) Функция $f(x)$ задана формулой: $f(x) = x^3 + x$, функция $g(x)$ — обратная к $f(x)$. Решите уравнение: $f(x) = g(x)$.

3.3. (7 *баллов*) Внутри треугольника ABC, в котором $\angle C = 70^\circ$, $\angle B = 80^\circ$, взята точка M так, что треугольник CMB — равносторонний. Найдите $\angle MAB$ и $\angle MAC$.

4.1. (8 *баллов*) Сравните числа: $\sin\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4.2. (8 *баллов*) Укажите какое-либо значение x, при котором неверно равенство:

$$\frac{(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} + \frac{(x-\sqrt{3})(x-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{5})} + \frac{(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{5})} = 1.$$

4.3. (8 *баллов*) Найдите радиус окружности, проходящей через вершину C прямого угла треугольника ABC, основание H высоты CH, и K — середину катета BC, если гипотенуза треугольника равна c.

5.1. (9 *баллов*) Найдите наибольшее значение выражения:

$$\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{1 - \sin\alpha\sin\beta}.$$

5.2. (9 *баллов*) Для любого натурального n докажите неравенство:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \sqrt{n}.$$

5.3. (9 *баллов*) Вне квадрата, на его стороне, построен прямоугольный треугольник, у которого сторона квадрата является гипотенузой. В каком отношении биссектриса прямого угла этого треугольника делит площадь квадрата?

Решения задач

Регата для 6 –7 классов

1.1. *Ответ*: $1 + 1999 = 2000$.

Так как при сложении данных чисел цифра E в разряде десятков поменялась на цифру $У$, то суммой однозначных чисел $Б$ и E является двузначное число, начинающееся с единицы. Так как, помимо увеличения на единицу цифры в разряде десятков, также изменилась и цифра в разряде сотен, то $E = 9$, $Б = 1$, $У = 0$.

1.2. *Ответ*: оба утверждения неверны.

а) Например, рассмотрим прямоугольник со сторонами 2 и 8 и квадрат со стороной 4.

б) Например, рассмотрим прямоугольник со сторонами 2 и 6 и квадрат со стороной 4.

1.3. *Ответ*: рыжие.

4 коровы черной масти и 3 коровы рыжей масти за 5 дней дают столько же молока, сколько 20 коров черной масти и 15 коров рыжей масти за один день. 3 коровы черной масти и 5 коров рыжей масти за 4 дня дают столько же молока, сколько 12 коров черной масти и 20 коров рыжей масти за один день. Получилось, что 8 коров черной масти дают столько же молока, сколько 5 коров рыжей масти, то есть, рыжие коровы производительнее, чем черные. Данные рассуждения могут быть также записаны с помощью переменных: пусть каждая

корова черной масти дает х литров молока в день, а каждая корова рыжей масти — у литров молока в день. По условию имеем равенство: $(4x + 3y) \cdot 5 = (3x + 5y) \cdot 4$; $8x = 5y$. Следовательно, $y > x$.

2.1. *Ответ*: нет, не может.

Так как сумма чисел a и b является четным числом, то эти числа имеют одинаковую четность. Значит, и числа $7a$ и $3b$ тоже имеют одинаковую четность, следовательно, их сумма должна быть четной. 627 — нечетное число, значит заданная сумма не может равняться числу 627.

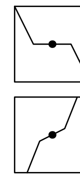


Рис. 254

2.2. *Ответ*: см. рис. 254. Ломаные проходят через центр квадрата.

2.3. *Ответ*: в город А.

Для того, чтобы узнать куда отправить пожарную машину, нужно выяснить из какого города был звонок, так как из последней фразы в условии следует, что информация о пожаре — истинна. Если бы звонок был из А, то второй ответ оказался бы ложным, что невозможно для жителей города А. Если звонок был из В, то фраза «у нас пожар» означает, что пожар либо в А, либо в С; фраза в «городе С» означает, что пожар точно не в С; значит, пожар в городе А. Если звонок был из С, то оба утверждения либо истинны, либо ложны одновременно, что невозможно для жителей города С.

3.1. Существует много различных способов. Один из них: умножим число 458 на 2 пять раз последовательно и получим число 14656, затем сотрем три последние цифры, и получим число 14.

3.2. Достаточно взять три луча с общим началом в точке, обозначающей городок, делящие плоскость на три части, и произвольные окружности, вписанные в образовавшиеся углы (см. рис. 255).

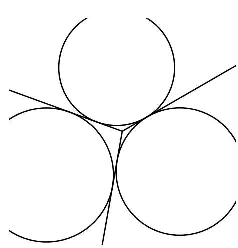


Рис. 255

3.3. *Ответ*: колония погибнет через 200 минут.

Представим себе, что каждый вирус имеет дело со «своей» колонией бактерий. Тогда, к исходу первой минуты на каждый вирус будет приходиться по 199 бактерий, к исходу второй минуты — по 198, и так далее, к исходу 199 минуты — по одной бактерии, к исходу 200 минуты — бактерий не останется.

4.1. *Ответ*: 18.

Искомое число не должно при делении на 13, 12, …, 3 и 2 давать остаток 1. Значит, число на единицу меньшее названного, не должно быть кратно ни одному из чисел от 2 до 13. Наименьшее из таких чисел — 17, то есть, Иосиф назвал число 18.

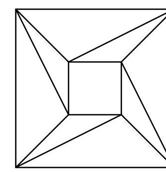


Рис. 256

4.2. *Ответ*: один из возможных примеров изображен на рис. 256.

4.3. *Ответ*: в 12 часов.

За первые 1,5 ч своего движения из пункта A (с 9 ч 30 мин до 11 ч) пешеход пройдет 6 км. Из условия следует, что ручей не может находиться на пройденном им участке. Обозначим C — точку дороги, в которой пешеход окажется в 11 ч. Расстояние от C до B равно 9 км. Ручей должен располагаться в точке, время движения до которой одинаково как по пути из C в B, так и по пути из B в C. Поэтому, представим себе, что из двух пунктов, расстояние между которыми 9 км, в 11 часов одновременно навстречу друг другу начали движение два пешехода, скорости которых 4 км/ч и 5 км/ч. Тогда их встреча произойдет через час, то есть они встретятся в 12 часов, пересекая ручей.

Регата для 10 – 11 *классов*

1.1. *Ответ*: нет, неверно.

Заметим, что $57599 = 57600 - 1 = 240^2 - 1 = 239 \cdot 241$.

1.2. *Ответ*: $\left(\frac{1}{42}; \frac{1}{7}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

Вычтем третье уравнение из четвертого. Тогда, $d = 1 - d$, то есть, $d = 0{,}5$. Вычтем второе уравнение из третьего. Тогда, $c = d(1 - c)$, значит, $c = \frac{1}{3}$. Вычтем первое уравнение из второго. Тогда, $b = cd(b - 1)$, то есть, $b = \frac{1}{7}$. Так как $a = bcd$, то, $a = \frac{1}{42}$.

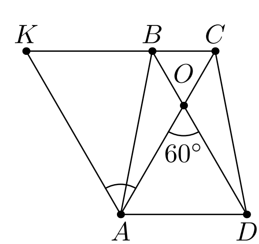


Рис. 257

1.3. Достроим треугольник BAD до параллелограмма $KBDA$ (см. рис. 257). Тогда, $KC = AD + BC = AC$, $\angle KAC = \angle AOD = 60^\circ$, следовательно, треугольник KAC — равнобедренный с углом 60°, то есть, равносторонний.

Следовательно, $AC = AK = BD$, то есть, диагонали трапеции равны, поэтому она равнобокая, что и требовалось доказать.

2.1. Наименьшая такая сумма — сумма первых 71 натуральных чисел:

$$1 + 2 + \ldots + 71 = \frac{1 + 71}{2} \cdot 71 = 36 \cdot 71 = 2556.$$

Тогда сумма оставшихся чисел равна:

$$72 + 73 + \ldots + 100 = \frac{72 + 100}{2} \cdot 29 = 2494.$$

Так как $2556 > 2494$, то требуемым образом выбрать 71 число нельзя.

2.2. *Ответ*: $(0; 0)$.

Если $(x; y)$ — решение системы, то $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, значит, $x + 1 \geqslant 1$. Тогда, $\sqrt{x+1} + \sqrt{y} \geqslant 1$, причем равенство возможно только если $x = 0$, $y = 0$. Эа пара чисел является решением и первого уравнения системы.

2.3. *Ответ*: 1997.

Пусть $C_1C_2A_1A_2B_1B_2$ — данный шестиугольник; K, L, M — точки касания окружности и сторон треугольника (см. рис. 258). Рассмотрим T — точку касания окружности с отрезком C_1B_2. $C_1K = C_1T$, $B_2M = B_2T$, следовательно, $AC_1 + C_1B_2 + AB_2 = AK + AM$. Обозначим периметры треугольников, отсекаемых от данного (AC_1B_2, C_2BA_1, B_1A_2C), как P_1, P_2 и P_3 соответственно. Тогда, $P_1 + P_2 + P_3 = AK + AM + BK + BL + CL + CM = AB + BC + AC = 1997$.

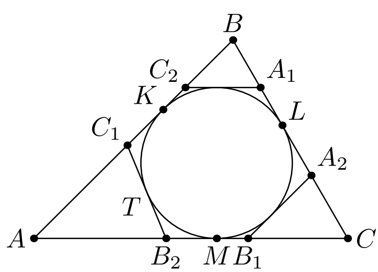


Рис. 258

3.1. Пусть x и y — цифры данного числа. Предположим, что $x^2 + y^2$ делится на 3. Докажем, что тогда x делится на 3 и y делится на 3. Если $x = 3n \pm 1$, $y = 3k \pm 1$ ($n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$), то $x^2 + y^2 = 9n^2 \pm 6n + 9k^2 \pm \pm 6k + 2$ — не делится на 3. Если $x = 3n \pm 1$, $y = 3k$ (или наоборот), то $x^2 + y^2 = 9n^2 \pm 6n + 9k^2 + 1$ — не делится на 3. Если же $x = 3n$, $y = 3k$, то $x^2 + y^2 = 9(n^2 + k^2)$ делится на 3. Других случаев быть не может, значит, сумма цифр данного числа, равная $x+y$, делится на 3. Поэтому данное число также должно делиться на 3 — противоречие с условием. То есть, наше предположение неверно. Следовательно, x^2+y^2 не делится на 3.

3.2. *Ответ*: 0.

Так как функция $f(x)$ — возрастающая, то и обратная ей функция $g(x)$ также возрастающая. Поэтому, графики этих функций, построенные в одной системе координат, могут пересекаться только в точках прямой $y = x$, следовательно: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow x^3 + x = x \Leftrightarrow \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

3.3. Рассмотрим окружность с центром в точке M и радиусом $R = MB = MC$ (см. рис. 259). $\angle A = 180° - (\angle B + \angle C) = 30°$, $\angle BMC = 60°$, следовательно, точка A лежит на этой окружности, то есть, окружность является описанной для треугольника ABC. Значит, $AM = BM = CM$, тогда, $\angle MAB = \angle MBA = 20°$, $\angle MAC = \angle MCA = 10°$.

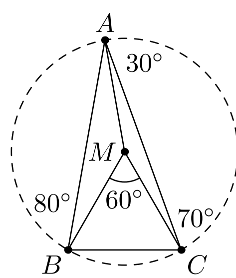


Рис. 259

4.1. Поскольку $\sqrt{3} > 1{,}732$ и $\sqrt{2} > 1{,}414$, то $\sqrt{3} + \sqrt{2} > 3{,}146 > \pi \Leftrightarrow \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} > \dfrac{\pi - \sqrt{3}}{2}$. Так как функция $y = \sin x$ возрастает на $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, то $\sin\dfrac{\sqrt{2}}{2} > \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

4.2. При раскрытии скобок в левой части равенства может получиться только выражение вида $ax^2 + bx + c$.

Рассмотрим функцию $f(x) = ax^2 + bx + c$. Заметим, что $f(\sqrt{2}) = f(\sqrt{3}) = f(\sqrt{5}) = 1$, то есть, функция принимает одно и то же значение в трех различных точках. Следовательно, $f(x)$ не может быть квадратичной, значит, $a = 0$. По той же причине, функция $f(x)$ не может быть линейной возрастающей или линейной убывающей. Следовательно, $f(x)$ — постоянная функция, принимающая значение 1 при любом x, то есть, не существует такого значения x, при котором данное равенство неверно.

4.3. Треугольник CHB — прямоугольный, следовательно, $KC = KB = KH$ (см. рис. 260). $\angle MCK$ — прямой, следовательно MK — диаметр окружности, а так как хорды KC и KH равны, то он перпендикулярен CH, а значит, $MK \parallel AB$. Следовательно, MK — средняя линия треугольника ABC, то есть, $MK = 0{,}5AB = 0{,}5c$. Искомый радиус: $R = 0{,}5MK = 0{,}25c$.

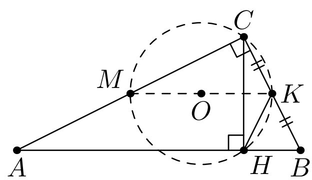


Рис. 260

5.1. *Ответ*: 1.

Преобразуем:

$$\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{1 - \sin\alpha\sin\beta} = \frac{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{1 - \frac{1}{2}\bigl(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\bigr)} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{1 - \frac{1}{2}\left(2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} - 1 - 2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} + 1\right)} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{1 - \cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{2ab}{a^2+b^2},$$

где $a = \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$, $\beta = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$. Рассмотрим неравенства:

$$(a-b)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geqslant 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geqslant 2ab \Leftrightarrow \frac{2ab}{a^2+b^2} \leqslant 1.$$

Следовательно, $\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{1 - \sin\alpha\sin\beta} \leqslant 1$. Данное выражение может принимать значение 1, если, например, $\sin\alpha = 1$, а $\sin\beta = 0$.

5.2. Если $n = 1$, то неравенство верно (левая и правая части равны). Если $n > 1$, то $\frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2} - 1$, так как $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1 > \sqrt{2}$; $\frac{1}{\sqrt{3}} > \sqrt{3} -$

$-\sqrt{2}$, так как $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \sqrt{3}+\sqrt{2} > \sqrt{3}$; и т. д., $\dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}-\sqrt{n-1}$, так как $\dfrac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}} = \sqrt{n}+\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$. Сложив эти неравенства, получим требуемое:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}-1 \Leftrightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

Это неравенство можно также доказать методом математической индукции.

5.3. *Ответ*: 1 : 1.

Рассмотрим окружность, описанную около треугольника AEB (см. рис. 261). Ее центром является точка K — середина стороны AB, и она проходит через центр квадрата O, так как $KE = 0{,}5AB = KO$. Следовательно, $\angle AEO = 0{,}5\angle AKO = 45°$. Следовательно, EO — биссектриса угла AEB. Эта биссектриса проходит через центр симметрии квадрата, значит, она делит его площадь пополам.

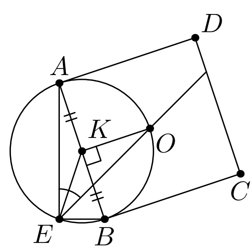


Рис. 261

Рубрикатор

Ссылки на регаты даются в следующем формате:

Основная часть: учебный год проведения, класс, двойной индекс задачи (например, 9596–10–1.1 — 1995/1996 учебный год, регата 10 класса, задача 1.1.).

Приложения: вид регаты (Ш — школьные регаты, Ф — фестиваль «Математика 6–9», Р — Турнир регионов), учебный год проведения, класс, двойной индекс задачи

Арифметика, алгебра, числа и функции

Планиметрия

Стереометрия

Литература

(использованная при подготовке заданий)

[1] Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский. Математические олимпиады Московской области. — М.: МФТИ, 2003.

[2] Н. Б. Алфутова, А. В. Устинов. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. — М.: МЦНМО, 2002.

[3] А. Д. Блинков, А. З. Гурвиц. Интеллектуальный марафон в Северном округе г. Москвы. Приложение «Математика» к газете «Первое сентября», №15, 1995.

[4] А. Д. Блинков, П. В. Чулков. Турниры Архимеда. — М.: ИЛКиРЛ, 1997.

[5] Г. А. Гальперин, А. К. Толпыго. Московские математические олимпиады. — М.: Просвещение, 1986.

[6] Н. В. Горбачев. Сборник олимпиадных задач по математике. — М.: МЦНМО, 2005.

[7] Р. К. Гордин. Геометрия. Планиметрия. 7 – 9. — М.: МЦНМО, 2004.

[8] П. И. Горнштейн, В. Б. Полонский, М. С. Якир. Задачи с параметрами. — Киев, РИА «Текст», МП «ОКО», 1992.

[9] П. И. Горнштейн, В. Б. Полонский, М. С. Якир. Экзамен по математике и его подводные рифы. — Москва — Харьков, «Илекса» — «Гимназия», 1998.

[10] Задачи для внеклассной работы V – VI классах: Пособие для учителей / Сост. В.Ю. Сафонова. Под ред. Д.Б. Фукса, А.Л. Гайвронского. — М.:МИРОС, 1993.

[11] Задачи Санкт-Петербургских олимпиад школьников по математике. - СПб.: ГДТЮ, СПГУ, 1999-2003.

[12] О. А. Иванов. Практикум по элементарной математике. — М.: МЦНМО, 2001.

[13] Б. М. Ивлев и др. Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа для 10 – 11 классов средней школы. — М.: Просвещение, 1990.

[14] А. Я. Канель – Белов, А. К. Ковальджи. Как решают нестандартные задачи. — М.: МЦНМО, 2004.

[15] Д. В. Клименченко. Задачи по математике для любознательных: Кн. для учащихся 5 – 6 кл. сред. шк. — М.: Просвещение, 1992.

[16] Ю. М. Колягин и др. Сборник задач по алгебре для 6 – 8 классов. — М.: Просвещение, 1975.

[17] Л. М. Лоповок. Факультативные задания по геометрии для 7 – 11 классов. — Киев.: 1990.

[18] А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. Неожиданный шаг или сто тринадцать красивых задач. — Киев.: Агрофирма «Александрия», 1993.

[19] В. В. Прасолов. Задачи по планиметрии. М.: Наука, Физматлит, 1995.

[20] В. В. Прасолов, И. Ф. Шарыгин. Задачи по стереометрии. — М.: Наука, Физматлит, 1989.

[21] С. Е. Рукшин. Математические соревнования в Ленинграде — Санкт-Петербурге. Первые пятьдесят лет. — Ростов н/д: МарТ, 2000.

[22] Сборник материалов четвертого костромского городского турнира математических боев (6 – 7 класс). — Кострома: РЦ НИТ «Эврика-М», 1998.

[23] Сборник материалов пятого турнира «Математика 6 – 8» журнала «Квант». — Кострома: РЦ НИТ «Эврика-М», 1999.

[24] Д. В. Фомин. Санкт-Петербургские математические олимпиады. — СПб.: «Политехника», 1994.

[25] И. Ф. Шарыгин, Л. Н. Ерганжиева. Наглядная геометрия. / Учебное пособие для учащихся V – VI классов. — М.: МИРОС, 1992.

[26] Шесть фестивалей (материалы Российских фестивалей юных математиков). — Краснодар.: ГИНМЦ, 1996.

О математических регатах

(список публикаций)

[1] *А.А. Бучин, И.В. Ширстова.* Организация соревнований по математике (из опыта работы). Приложение «Математика» к газете «Первое сентября» №10, 1997.

[2] *А.Д. Блинков, А.А. Бучин, П.В. Чулков, И.В. Ширстова.* Вторая межшкольная математическая регата. Приложение «Математика» к газете «Первое сентября» №49, 1999.

[3] *А.Д. Блинков, К.П. Кочетков, А.В. Семенов.* Школьные математические регаты. Приложение «Математика» к газете «Первое сентября» №14, 2000.

[4] *А. Блинков, В. Спиров.* Математическая регата. Научно-популярный физико-математический журнал «Квант» №3, 2000.

[5] *А.Д. Блинков.* Командные математические соревнования между школами в Москве. В сборнике материалов Всероссийской конференции «Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков». — М.: МЦНМО, 2000, стр. 71 — 74.

[6] *А.Д. Блинков.* Московские математические регаты, 96 стр. — М.: МЦНМО, 2001.

[7] *А.Д. Блинков, А.В. Семенов.* Турнир Архимеда. Московская математическая регата 9 классов (2000/01 уч. г.). Приложение «Математика» к газете «Первое сентября» №17, 2001.

[8] *А.Д. Блинков, А.В. Семенов.* Турнир Архимеда. Московская математическая регата 11 классов (2000/01 уч. г.). Приложение «Математика» к газете «Первое сентября» №18, 2001.

[9] *А.Д. Блинков, А.В. Семенов.* Турнир Архимеда. Московская математическая регата 7 классов (2000/01 уч. г.). Приложение «Математика» к газете «Первое сентября» №25, 2001.

[10] *А.Д. Блинков, О.Р. Горская, А.Г. Мякишев, А.В. Семенов, П.В. Чулков.* Турнир Архимеда. Московская математическая регата 10 классов (2000/01 уч. г.). Приложение «Математика» к газете «Первое сентября» №34, 2001.

[11] *А.Д. Блинков, О.Р. Горская, А.В. Семенов, П.В. Чулков.* Турнир Архимеда. Московская математическая регата 8 классов (2000/01 уч.г.) Приложение «Математика» к газете «Первое сентября» №35, 2001.

[12] *А.Д. Блинков, О.Р. Горская, А.В. Семенов, П.В. Чулков.* Математическая регата — VIII – IX, АРХИМЕД. Математические соревнования. Выпуск 7. М.: АНО Институт логики, 2002.

[13] *А.Д. Блинков, А.А. Волкова, О.Р. Горская, В.М. Гуровиц, А.В. Иванищук, Р.М. Кузнец, П.В. Чулков.* Турнир Архимеда. Московские математические регаты в первом полугодии 2001/02 учебного года. Приложение «Математика» к газете «Первое сентября» №№1—3, 2003.

[14] *А.Д. Блинков, А.А. Волкова, В.М. Гуровиц, А.Г. Мякишев, А.В. Подобедов, А.С. Чеботарев, П.В. Чулков.* Турнир Архимеда. Московские математические регаты во втором полугодии 2001/02 учебного года. Приложение «Математика» к газете «Первое сентября» №№27—29, 31, 2003.

[15] *А.Д. Блинков, В.М. Гуровиц, А.С. Чеботарев, П.В. Чулков.* Турнир Архимеда. Московская математическая регата 9 классов (2002/03 уч.г.) Приложение «Математика» к газете «Первое сентября» №38, 2003.

[16] *А.Д. Блинков, В.М. Гуровиц, К.П. Кочетков, П.В. Чулков.* Турнир Архимеда. Московская математическая регата 8 классов (2002/03 уч.г.) Приложение «Математика» к газете «Первое сентября» №№41/42, 2003.

[17] *А.Д. Блинков, О.Р. Горская, А.В. Иванищук, П.В. Чулков.* Турнир Архимеда. Московская математическая регата 11 классов (2002/03 уч. г.) Приложение «Математика» к газете «Первое сентября» №46, 2003.

[18] *А.Д. Блинков, Ю.А. Блинков, А.А. Волкова, В.М. Гуровиц, П.В. Чулков.* Турнир Архимеда. Московская математическая регата 7 классов (2002/03 уч. г.). Приложение «Математика» к газете «Первое сентября» №10, 2004.

[19] *А.Д. Блинков, О.Р. Горская, А.В. Иванищук, П.В. Чулков.* Турнир Архимеда. Московская математическая регата 10 классов (2002/03 уч. г.). Приложение «Математика» к газете «Первое сентября» №13, 2004.

[20] *А.Д. Блинков, Ю.А. Блинков, В.М. Гуровиц, А.С. Чеботарев.* Математическая регата на фестивале «Математика 6 – 8» 2002 года имени А.П. Савина. Приложение «Математика» к газете «Первое сентября» №5, 2004.

[21] *А.Д. Блинков, В.М. Гуровиц, А.С. Чеботарев.* Математическая регата на фестивале «Математика 6 – 9» 2003 года имени А.П. Савина. Приложение «Математика» к газете «Первое сентября» №№14/15, 2004.

[22] *А.Д. Блинков*, *О.Р. Горская*, *В.М. Гуровиц*, *П.В. Чулков*. Турнир Архимеда. Московская математическая регата 9 классов (03/04 уч. г.). Приложение «Математика» к газете «Первое сентября» №42, 2004.

[23] *А.Д. Блинков*, *О.Р. Горская*, *В.М. Гуровиц*, *А.В. Иванищук*, *П.В. Чулков*. Турнир Архимеда. Московская математическая регата 11 классов (2003/04 уч. г.). Приложение «Математика» к газете «Первое сентября» №43, 2004.

[24] *А.Д. Блинков*, *Ю.А. Блинков*, *Е.С. Горская*, *В.М. Гуровиц*, *Б.Р. Френкин*, *Е.А. Чернышева*, *П.В. Чулков*. Турнир Архимеда. Московская математическая регата 8 классов (2003/04 уч. г.). Приложение «Математика» к газете «Первое сентября» №44, 2004.

[25] *А.Д. Блинков*, *Е.С. Горская*, *В.М. Гуровиц*, *А.Г. Мякишев*, *П.В. Чулков*. Турнир Архимеда. Московская математическая регата 10 классов (2003/04 уч. г.). Приложение «Математика» к газете «Первое сентября» №3, 2005.

[26] *А.Д. Блинков*, *Ю.А. Блинков*, *Е.С. Горская*, *В.М. Гуровиц*, *П.В. Чулков*. Турнир Архимеда. Московская математическая регата 7 классов (2003/04 уч. г.). Приложение «Математика» к газете «Первое сентября» №7, 2005.

[27] *А.Д. Блинков*, *Е.С. Горская*, *А.В. Иванищук*, *А.Г. Мякишев*, *П.В. Чулков*. Турнир Архимеда. Московская математическая регата 9 классов (2004/05 уч. г.). Приложение «Математика» к газете «Первое сентября» №19, 2005.

[28] *А.Д. Блинков*, *Е.С. Горская*, *В.М. Гуровиц*, *А.З. Гурвиц*, *Б.Р. Френкин*, *П.В. Чулков*. Турнир Архимеда. Московская математическая регата 11 классов (2004/05 уч. г.). Приложение «Математика» к газете «Первое сентября» №22, 2005.

[29] *А.Д. Блинков*, *Е.С. Горская*, *В.М. Гуровиц*. XI математический турнир имени А.П. Савина. Приложение «Математика» к газете «Первое сентября» №№1/2, 2006.

[30] *А.Д. Блинков*, *О.Р. Горская*, *Б.Р. Френкин*, Е.Ф. Шершнев «Турнир Архимеда. Московская математическая регата 8 классов» (2004/05 уч.г.). Приложение «Математика» к газете «Первое сентября» №23, 2005.

[31] *А.Д. Блинков*, *Е.С. Горская*, *Б.Р. Френкин*, *П.В. Чулков* «Турнир Архимеда. Московская математическая регата 7 классов» (2004/05 уч.г.). Приложение «Математика» к газете «Первое сентября» №5, 2006.

МОСКОВСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РЕГАТЫ

Составители *А. Д. Блинков*, *Е. С. Горская*, *В. М. Гуровиц*

Технический редактор *Е. С. Горская*

Подписано в печать 15.02.2007 г. Формат 60×90 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная №1.
Печать офсетная. Печ. л. 22.5. Заказ №

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. 241—74—83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., 6.