В. В. ПРАСОЛОВ

ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

5-е издание, исправленное и дополненное

Допущено Министерством образования и науки
Российской Федерации

Издательство МЦНМО
ОАО «Московские учебники»
Москва 2006

УДК 514.112
ББК 22.151.0
П70

Прасолов В. В.

П70 Задачи по планиметрии: Учебное пособие. — 5-е изд., испр. и доп. — М.: МЦНМО: ОАО «Московские учебники», 2006. — 640 с.: ил.

ISBN 5-94057-214-6

Книга может использоваться в качестве задачника по геометрии для 7—11 классов в сочетании со всеми действующими учебниками по геометрии. В неё включены нестандартные геометрические задачи несколько повышенного по сравнению со школьными задачами уровня. Сборник содержит около 1900 задач с полными решениями и около 150 задач для самостоятельного решения.

С помощью этого пособия можно организовать предпрофильную и профильную подготовку по математике, элективные курсы по дополнительным главам планиметрии.

Материалы данного пособия полностью покрывают тематику и сложность заданий олимпиад всех уровней и всех видов экзаменов, включая ЕГЭ и вступительные экзамены в вузы.

Для школьников, преподавателей математики, руководителей математических кружков, студентов педагогических институтов и университетов.

ББК 22.151.0

ISBN 5-94057-214-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЯТОМУ ИЗДАНИЮ

В предыдущем издании при перенаборе текста третьего издания возникло огромное количество опечаток. В новом издании эти опечатки исправлены, в чём мне оказали большую помощь И. Тейман и группа школьников 57-й школы г. Москвы: Д. Загоскин, А. Никитин, К. Попков, А. Фурсов под руководством Л. Шагама. С. Маркелов не только указал мне опечатки, но и сообщил решения нескольких задач.

Некоторые ошибки в решениях мне помогли исправить письма читателей, присланные на адрес planimetry_bug@mccme.ru. Например, Дарий Гринберг указал мне ошибки в вычислении координат точки Штейнера и в решении задачи 5.137, а А. Карпов обратил моё внимание на то, что условие задачи 30.34 было сформулировано неверно.

В новое издание добавлено около 200 задач. Добавлена также новая глава 31, посвящённая эллипсу, параболе и гиперболе. (Такой параграф был в самом первом издании этой книги, но он был исключён из всех последующих изданий.)

Для удобства читателей я привожу список новых задач: 2.11, 2.40, 2.84, 3.9, 3.49, 3.50, 3.57, 3.62, 3.65, 3.76—3.82, 4.33, 4.57, 5.13, 5.17, 5.24, 5.37, 5.53, 5.70, 5.71, 5.77, 5.96, 5.97, 5.126, 5.127, 5.159—5.161, 6.41, 6.57, 7.17, 7.43, 8.45, 8.58—8.60, 9.10, 9.27, 9.48, 9.85, 9.95, 10.20, 10.58, 10.21, 12.17, 12.31, 12.77, 12.78, 12.83, 13.14, 13.15, 13.39, 14.38, 14.42, 14.44—14.49, 14.53, 15.4, 17.23, 17.33, 17.40, 17.41, 17.42, 18.26, 18.31, 19.50—19.52, 20.11, 20.28, 20.33, 22.3, 22.7, 22.14, 22.15—22.23, 22.24—22.31, 22.34, 23.16, 24.5, 24.6, 24.8, 24.10, 24.16, 24.17, 25.26, 25.37, 25.42, 28.8, 29.14—29.19, 29.31, 29.32, 29.34, 29.40, 29.42, 30.34, 31.1—31.84.

А вот список задач из предыдущего издания, формулировки или решения которых существенно обновлены: 2.5, 5.125, 10.46, 12.41, 14.60, 20.7, 23.15, 23.22, 24.7, 24.15, 24.18, 25.16, 25.63.

Электронную версию этой книги можно найти в Internet по адресу http://www.mccme.ru/prasolov/. В электронной версии будут исправляться замеченные ошибки и опечатки.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЁРТОМУ ИЗДАНИЮ

В этом сборнике задач представлены почти все темы планиметрии, которые изучаются в школе, в том числе и в специализированных классах. Его основу составляют задачи, предлагавшиеся в разное время на математических олимпиадах, и задачи из архивов математических олимпиад и математических кружков.

Для удобства читателя в книге принята подробная рубрикация. Задачи распределены по 30 главам, каждая из которых разбита на несколько параграфов (от 2 до 14). За основу классификации приняты методы решения задач. Главная цель этого разбиения состоит в том, чтобы помочь читателю ориентироваться в столь большом наборе задач. В новое издание включён подробный предметный указатель, который служит той же цели.

Первое издание этой книги вышло в свет 15 лет назад. Дошедшие до меня отзывы о ней свидетельствуют о том, что она нашла гораздо более широкое применение в школе, чем я надеялся, когда начинал её писать.

В новое издание включено дополнительно 70 задач, которые стали мне известны за последние годы. Изменены также решения нескольких задач. Задачи повышенной трудности в новом издании отмечены «звёздочкой». Добавлено также «Дополнение», в котором обсуждается несколько тем, более широких, чем отдельная задача.

Глава 28 написана А. Ю. Вайнтробом, а главы 29 и 30 написаны С. Ю. Оревковым. Содержание этих глав во многом определила книга И. М. Яглома «Геометрические преобразования. Т. 2, ч. 3. Линейные и круговые преобразования» (М.: Гостехиздат, 1956).

При подготовке первого издания большую помощь оказали мне советы и замечания, высказанные академиком А. В. Погореловым, А. М. Абрамовым, А. Ю. Вайнтробом, Н. Б. Васильевым, Н. П. Долбилиным и С. Ю. Оревковым. Всем им я выражаю искреннюю благодарность.

ГЛАВА 1

ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Основные сведения

1. Треугольник ABC *подобен* треугольнику $A_1B_1C_1$ (обозначение: $\triangle ABC \sim \sim \triangle A_1B_1C_1$) тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

а) $AB : BC : CA = A_1B_1 : B_1C_1 : C_1A_1$;

б) $AB : BC = A_1B_1 : B_1C_1$ и $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$;

в) $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ и $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$.

2. Если параллельные прямые отсекают от угла с вершиной A треугольники AB_1C_1 и AB_2C_2, то эти треугольники подобны и $AB_1 : AB_2 = AC_1 : AC_2$ (точки B_1 и B_2 лежат на одной стороне угла, C_1 и C_2 — на другой).

3. *Средней линией треугольника* называют отрезок, соединяющий середины боковых сторон. Этот отрезок параллелен третьей стороне и равен половине её длины.

Средней линией трапеции называют отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции. Этот отрезок параллелен основаниям и равен полусумме их длин.

4. Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия, т. е. квадрату отношения длин соответствующих сторон. Это следует, например, из формулы $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin A$.

5. Многоугольники $A_1A_2 \ldots A_n$ и $B_1B_2 \ldots B_n$ называют *подобными*, если $A_1A_2 : A_2A_3 : \ldots : A_nA_1 = B_1B_2 : B_2B_3 : \ldots : B_nB_1$ и углы при вершинах $A_1, \ldots, A_n$ равны соответственно углам при вершинах $B_1, \ldots, B_n$.

Отношение соответственных диагоналей подобных многоугольников равно коэффициенту подобия; для описанных подобных многоугольников отношение радиусов вписанных окружностей также равно коэффициенту подобия.

Вводные задачи

1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что $A_1C \cdot BC = B_1C \cdot AC$.

2. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CH. Докажите, что $AC^2 = AB \cdot AH$ и $CH^2 = AH \cdot BH$.

3. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении $2:1$, считая от вершины.

4. На стороне BC треугольника ABC взята точка A_1 так, что $BA_1 : A_1C = 2:1$. В каком отношении медиана CC_1 делит отрезок AA_1?

5. В треугольник ABC вписан квадрат $PQRS$ так, что вершины P и Q лежат на сторонах AB и AC, а вершины R и S — на стороне BC. Выразите длину стороны квадрата через сторону a и высоту h_a.

§ 1. Отрезки, заключённые между параллельными прямыми

1.1. Основания AD и BC трапеции $ABCD$ равны a и b ($a > b$).

а) Найдите длину отрезка, высекаемого диагоналями на средней линии.

б) Найдите длину отрезка MN, концы которого делят стороны AB и CD в отношении $AM : MB = DN : NC = p : q$.

1.2. Докажите, что середины сторон произвольного четырёхугольника — вершины параллелограмма. Для каких четырёхугольников этот параллелограмм является прямоугольником, для каких — ромбом, для каких — квадратом?

1.3. а) Точки A_1 и B_1 делят стороны BC и AC треугольника ABC в отношениях $BA_1 : A_1C = 1 : p$ и $AB_1 : B_1C = 1 : q$. В каком отношении отрезок AA_1 делится отрезком BB_1?

б) На сторонах BC и AC треугольника ABC взяты точки A_1 и B_1. Отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке D. Пусть a_1, b_1, c и d — расстояния от точек A_1, B_1, C и D до прямой AB. Докажите, что

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}.$$

1.4. Через точку P медианы CC_1 треугольника ABC проведены прямые AA_1 и BB_1 (точки A_1 и B_1 лежат на сторонах BC и CA). Докажите, что $A_1B_1 \parallel AB$.

1.5. Прямая, соединяющая точку P пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$ с точкой Q пересечения прямых AB и CD, делит сторону AD пополам. Докажите, что она делит пополам и сторону BC.

1.6. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ взята точка P так, что $AP : AD = 1 : n$; Q — точка пересечения прямых AC и BP. Докажите, что $AQ : AC = 1 : (n+1)$.

1.7. Вершины параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$ лежат на сторонах параллелограмма $ABCD$ (точка A_1 лежит на стороне AB, точка B_1 — на стороне BC и т. д.). Докажите, что центры обоих параллелограммов совпадают.

1.8. На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ взята точка K. Прямая AK пересекает прямые BC и CD в точках L и M. Докажите, что $AK^2 = LK \cdot KM$.

1.9. Одна из диагоналей вписанного в окружность четырёхугольника является диаметром. Докажите, что проекции противоположных сторон на другую диагональ равны.

1.10. На основании AD трапеции $ABCD$ взята точка E так, что $AE = BC$. Отрезки CA и CE пересекают диагональ BD в точках O и P соответственно. Докажите, что если $BO = PD$, то $AD^2 = BC^2 + AD \cdot BC$.

1.11. Точки A и B высекают на окружности с центром O дугу величиной 60°. На этой дуге взята точка M. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков MA и OB, перпендикулярна прямой, проходящей через середины отрезков MB и OA.

1.12. а) Точки A, B и C лежат на одной прямой, а точки A_1, B_1 и C_1 — на другой. Докажите, что если $AB_1 \parallel BA_1$ и $AC_1 \parallel CA_1$, то $BC_1 \parallel CB_1$.

б) Точки A, B и C лежат на одной прямой, а точки A_1, B_1 и C_1 таковы, что $AB_1 \parallel BA_1$, $AC_1 \parallel CA_1$ и $BC_1 \parallel CB_1$. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

1.13. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и BB_1. Докажите, что расстояние от любой точки M отрезка A_1B_1 до прямой AB равно сумме расстояний от M до прямых AC и BC.

1.14. Пусть M и N — середины сторон AD и BC прямоугольника $ABCD$. На продолжении отрезка DC за точку D взята точка P; Q — точка пересечения прямых PM и AC. Докажите, что $\angle QNM = \angle MNP$.

1.15. На продолжениях оснований AD и BC трапеции $ABCD$ за точки A и C взяты точки K и L. Отрезок KL пересекает стороны AB и CD в точках M и N, а диагонали AC и BD в точках O и P. Докажите, что если $KM = NL$, то $KO = PL$.

1.16*. На сторонах AB, BC, CD и DA выпуклого четырёхугольника $ABCD$ взяты точки P, Q, R и S так, что $BP : AB = CR : CD = \alpha$ и $AS : AD = BQ : BC = \beta$. Докажите, что отрезки PR и QS делятся точкой их пересечения в отношениях $\beta : (1 - \beta)$ и $\alpha : (1 - \alpha)$.

§ 2. Отношение сторон подобных треугольников

1.17. а) В треугольнике ABC проведена биссектриса BD внутреннего или внешнего угла. Докажите, что $AD : DC = AB : BC$.

б) Докажите, что центр O вписанной окружности треугольника ABC делит биссектрису AA_1 в отношении $AO : OA_1 = (b + c) : a$, где a, b, c — длины сторон треугольника.

1.18. Длины двух сторон треугольника равны a, а длина третьей стороны равна b. Вычислите радиус его описанной окружности.

1.19. Прямая, проходящая через вершину A квадрата $ABCD$, пересекает сторону CD в точке E и прямую BC в точке F. Докажите, что

$$\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AB^2}.$$

1.20. На высотах BB_1 и CC_1 треугольника ABC взяты точки B_2 и C_2 так, что $\angle AB_2C = \angle AC_2B = 90^\circ$. Докажите, что $AB_2 = AC_2$.

1.21. В трапецию $ABCD$ ($BC \parallel AD$) вписана окружность, касающаяся боковых сторон AB и CD в точках K и L соответственно, а оснований AD и BC в точках M и N.

а) Пусть Q — точка пересечения отрезков BM и AN. Докажите, что $KQ \parallel AD$.

б) Докажите, что $AK \cdot KB = CL \cdot LD$.

1.22. На стороны BC и CD параллелограмма $ABCD$ (или на их продолжения) опущены перпендикуляры AM и AN. Докажите, что $\triangle MAN \sim \triangle ABC$.

1.23. Прямая l пересекает стороны AB и AD параллелограмма $ABCD$ в точках E и F соответственно. Пусть G — точка пересечения прямой l с диагональю AC. Докажите, что $\dfrac{AB}{AE} + \dfrac{AD}{AF} = \dfrac{AC}{AG}$.

1.24. Пусть AC — бóльшая из диагоналей параллелограмма $ABCD$. Из точки C на продолжения сторон AB и AD опущены перпендикуляры CE и CF соответственно. Докажите, что $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$.

1.25. Углы треугольника ABC связаны соотношением $3\alpha + 2\beta = 180°$. Докажите, что $a^2 + bc = c^2$.

1.26. Концы отрезков AB и CD перемещаются по сторонам данного угла, причём каждая из прямых AB и CD перемещается параллельно самой себе; M — точка пересечения отрезков AB и CD. Докажите, что величина $\dfrac{AM \cdot BM}{CM \cdot DM}$ остаётся постоянной.

1.27. Через произвольную точку P стороны AC треугольника ABC параллельно его медианам AK и CL проведены прямые, пересекающие стороны BC и AB в точках E и F соответственно. Докажите, что медианы AK и CL делят отрезок EF на три равные части.

1.28. На биссектрисе угла взята точка P. Прямая, проходящая через точку P, высекает на сторонах угла отрезки длиной a и b. Докажите, что величина $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ не зависит от выбора этой прямой.

1.29. На стороне BC равностороннего треугольника ABC как на диаметре внешним образом построена полуокружность, на которой взяты точки K и L, делящие полуокружность на три равные дуги. Докажите, что прямые AK и AL делят отрезок BC на равные части.

1.30. Точка O — центр вписанной окружности треугольника ABC. На сторонах AC и BC выбраны точки M и K соответственно так, что $BK \cdot AB = BO^2$ и $AM \cdot AB = AO^2$. Докажите, что точки M, O и K лежат на одной прямой.

1.31*. Докажите, что если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$ (рис. 1.1), то $x = y$.

1.32*. На отрезке MN построены подобные одинаково ориентированные треугольники AMN, NBM и MNC (рис. 1.2). Докажите, что треугольник ABC подобен всем этим треугольникам, а центр его описанной окружности равноудалён от точек M и N.

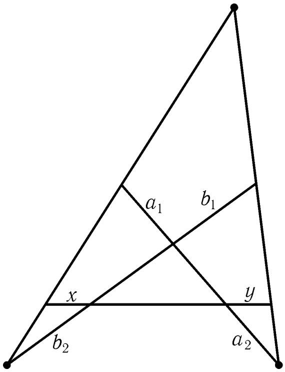


Рис. 1.1

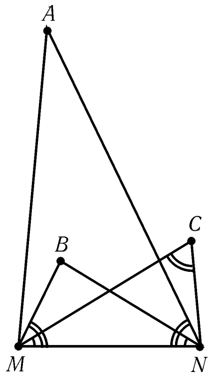


Рис. 1.2

1.33*. Отрезок BE разбивает треугольник ABC на два подобных треугольника, причём коэффициент подобия равен $\sqrt{3}$. Найдите углы треугольника ABC.

См. также задачу 5.52.

§ 3. Отношение площадей подобных треугольников

1.34. На стороне AC треугольника ABC взята точка E. Через точку E проведены прямая DE параллельно стороне BC и прямая EF параллельно стороне AB (D и E — точки на этих сторонах). Докажите, что $S_{BDEF} = 2\sqrt{S_{ADE} \cdot S_{EFC}}$.

1.35. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ взяты точки M и N так, что отрезок MN параллелен основаниям и делит площадь трапеции пополам. Найдите длину MN, если $BC = a$ и $AD = b$.

1.36. Через некоторую точку Q, взятую внутри треугольника ABC, проведены три прямые, параллельные его сторонам. Эти прямые разбивают треугольник на шесть частей, три из которых — треугольники с площадями S_1, S_2 и S_3. Докажите, что площадь треугольника ABC равна $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$.

1.37. Докажите, что площадь треугольника, стороны которого равны медианам треугольника площади S, равна $3S/4$.

1.38. а) Докажите, что площадь четырёхугольника, образованного серединами сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$, равна половине площади $ABCD$.

б) Докажите, что если диагонали выпуклого четырёхугольника равны, то его площадь равна произведению длин отрезков, соединяющих середины противоположных сторон.

1.39. Точка O, лежащая внутри выпуклого четырёхугольника площади S, отражается симметрично относительно середин его сторон.

Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в полученных точках.

§ 4. Вспомогательные равные треугольники

1.40. Катет BC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C разделён точками D и E на три равные части. Докажите, что если $BC = 3AC$, то сумма углов AEC, ADC и ABC равна $90°$.

1.41. Точка K — середина стороны AB квадрата $ABCD$, а точка L делит диагональ AC в отношении $AL : LC = 3 : 1$. Докажите, что угол KLD прямой.

1.42. Через вершину A квадрата $ABCD$ проведены прямые l_1 и l_2, пересекающие его стороны. Из точек B и D опущены перпендикуляры BB_1, BB_2, DD_1 и DD_2 на эти прямые. Докажите, что отрезки B_1B_2 и D_1D_2 равны и перпендикулярны.

1.43. На катетах CA и CB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC выбраны точки D и E так, что $CD = CE$. Продолжения перпендикуляров, опущенных из точек D и C на прямую AE, пересекают гипотенузу AB в точках K и L. Докажите, что $KL = LB$.

1.44*. На сторонах AB, BC, CD и DA вписанного четырёхугольника $ABCD$, длины которых равны a, b, c и d, внешним образом построены прямоугольники размером $a \times c$, $b \times d$, $c \times a$ и $d \times b$. Докажите, что их центры являются вершинами прямоугольника.

1.45*. Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность радиуса R с центром O, причём $AB = CD = EF = R$. Докажите, что точки попарного пересечения описанных окружностей треугольников BOC, DOE и FOA, отличные от точки O, являются вершинами правильного треугольника со стороной R.

* * *

1.46. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ построены внешним образом правильные треугольники BCK и DCL. Докажите, что треугольник AKL правильный.

1.47. На сторонах параллелограмма внешним образом построены квадраты. Докажите, что их центры образуют квадрат.

1.48*. На сторонах произвольного треугольника ABC внешним образом построены равнобедренные треугольники с углами 2α, 2β и 2γ при вершинах A', B' и C', причём $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Докажите, что углы треугольника $A'B'C'$ равны α, β и γ.

1.49*. На сторонах треугольника ABC как на основаниях построены подобные равнобедренные треугольники AB_1C и AC_1B внешним образом и BA_1C внутренним образом. Докажите, что $AB_1A_1C_1$ — параллелограмм.

1.50*. а) На сторонах AB и AC треугольника ABC внешним образом построены прямоугольные треугольники ABC_1 и AB_1C, причём

$\angle C_1 = \angle B_1 = 90^\circ$, $\angle ABC_1 = \angle ACB_1 = \varphi$; M — середина BC. Докажите, что $MB_1 = MC_1$ и $\angle B_1MC_1 = 2\varphi$.

б) На сторонах треугольника ABC внешним образом построены правильные треугольники. Докажите, что их центры образуют правильный треугольник, причём его центр совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC.

1.51*. На неравных сторонах AB и AC треугольника ABC внешним образом построены равнобедренные треугольники AC_1B и AB_1C с углом φ при вершине.

а) M — точка медианы AA_1 (или её продолжения), равноудалённая от точек B_1 и C_1. Докажите, что $\angle B_1MC_1 = \varphi$.

б) O — точка серединного перпендикуляра к отрезку BC, равноудалённая от точек B_1 и C_1. Докажите, что $\angle B_1OC_1 = 180^\circ - \varphi$.

1.52*. На сторонах выпуклого четырёхугольника $ABCD$ внешним образом построены подобные ромбы, причём их острые углы α прилегают к вершинам A и C. Докажите, что отрезки, соединяющие центры противоположных ромбов, равны, а угол между ними равен α.

См. также задачи 1.23, 3.1, 3.22, 5.15, 5.16, 7.24—7.26, 8.45.

§ 5. Треугольник, образованный основаниями высот

1.53. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты треугольника ABC. Докажите, что $\triangle A_1B_1C \sim \triangle ABC$. Чему равен коэффициент подобия?

1.54. Из вершины C остроугольного треугольника ABC опущена высота CH, а из точки H опущены перпендикуляры HM и HN на стороны BC и AC соответственно. Докажите, что $\triangle MNC \sim \triangle ABC$.

1.55. В треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1.

а) Докажите, что касательная в точке A к описанной окружности параллельна прямой B_1C_1.

б) Докажите, что $B_1C_1 \perp OA$, где O — центр описанной окружности.

1.56. На сторонах остроугольного треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 так, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H. Докажите, что $AH \cdot A_1H = BH \cdot B_1H = CH \cdot C_1H$ тогда и только тогда, когда H — точка пересечения высот треугольника ABC.

1.57. а) Докажите, что высоты AA_1, BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC делят углы треугольника $A_1B_1C_1$ пополам.

б) На сторонах AB, BC и CA остроугольного треугольника ABC взяты точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что если $\angle B_1A_1C = \angle BA_1C_1$, $\angle A_1B_1C = \angle AB_1C_1$ и $\angle A_1C_1B = \angle AC_1B_1$, то точки A_1, B_1 и C_1 являются основаниями высот треугольника ABC.

1.58. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Докажите, что точка, симметричная A_1 относительно прямой AC, лежит на прямой B_1C_1.

1.59. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Докажите, что если $A_1B_1 \parallel AB$ и $B_1C_1 \parallel BC$, то $A_1C_1 \parallel AC$.

1.60*. Пусть p — полупериметр остроугольного треугольника ABC, q — полупериметр треугольника, образованного основаниями его высот. Докажите, что $p:q=R:r$, где R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника ABC.

§ 6. Подобные фигуры

1.61. В треугольник вписана окружность радиуса r. Касательные к этой окружности, параллельные сторонам треугольника, отсекают от него три треугольника. Пусть r_1, r_2, r_3 — радиусы вписанных в эти треугольники окружностей. Докажите, что $r_1+r_2+r_3=r$.

1.62. Дан треугольник ABC. Постройте две прямые x и y так, чтобы для любой точки M на стороне AC сумма длин отрезков MX_M и MY_M, проведённых из точки M параллельно прямым x и y до пересечения со сторонами AB и BC треугольника, равнялась 1.

1.63. В равнобедренном треугольнике ABC из середины H основания BC опущен перпендикуляр HE на боковую сторону AC; O — середина отрезка HE. Докажите, что прямые AO и BE перпендикулярны.

1.64. Докажите, что проекции основания высоты треугольника на стороны, её заключающие, и на две другие высоты лежат на одной прямой.

1.65. На отрезке AC взята точка B и на отрезках AB, BC, CA построены полуокружности S_1, S_2, S_3 по одну сторону от AC. D — такая точка на S_3, что $BD\perp AC$. Общая касательная к S_1 и S_2, касается этих полуокружностей в точках F и E соответственно.

а) Докажите, что прямая EF параллельна касательной к S_3, проведённой через точку D.

б) Докажите, что $BFDE$ — прямоугольник.

1.66*. Из произвольной точки M окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$, опустили перпендикуляры MQ и MP на две его противоположные стороны и перпендикуляры MR и MT на продолжения двух других сторон. Докажите, что прямые PR и QT перпендикулярны, а точка их пересечения принадлежит диагонали прямоугольника $ABCD$.

1.67*. К двум окружностям, расположенным одна вне другой, проведены одна внешняя и одна внутренняя касательные. Рассмотрим две прямые, каждая из которых проходит через точки касания, принадлежащие одной из окружностей. Докажите, что точка пересечения этих прямых расположена на прямой, соединяющей центры окружностей.

См. также задачу 6.27.

Задачи для самостоятельного решения

1.68. Основание равнобедренного треугольника составляет четверть его периметра. Из произвольной точки основания проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Во сколько раз периметр треугольника больше периметра отсечённого параллелограмма?

1.69. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Докажите, что произведение длин оснований трапеции равно сумме произведений длин отрезков одной диагонали и длин отрезков другой диагонали, на которые они делятся точкой пересечения.

1.70. Сторона квадрата равна 1. Через его центр проведена прямая. Вычислите сумму квадратов расстояний от четырёх вершин квадрата до этой прямой.

1.71. Точки A_1, B_1 и C_1 симметричны центру описанной окружности треугольника ABC относительно его сторон. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

1.72. Докажите, что если $\angle BAC = 2\angle ABC$, то $BC^2 = (AC + AB) \cdot AC$.

1.73. На прямой l даны точки A, B, C и D. Через точки A и B, а также через точки C и D проводятся параллельные прямые. Докажите, что диагонали полученных таким образом параллелограммов (или их продолжения) пересекают прямую l в двух фиксированных точках.

1.74. В треугольнике ABC проведены биссектриса AD и средняя линия A_1C_1. Прямые AD и A_1C_1 пересекаются в точке K. Докажите, что $2A_1K = |b - c|$.

1.75. На сторонах AD и CD параллелограмма $ABCD$ взяты точки M и N так, что $MN \parallel AC$. Докажите, что $S_{ABM} = S_{CBN}$.

1.76. На диагонали AC параллелограмма $ABCD$ взяты точки P и Q так, что $AP = CQ$. Точка M такова, что $PM \parallel AD$ и $QM \parallel AB$. Докажите, что точка M лежит на диагонали BD.

1.77. Продолжения боковых сторон трапеции с основаниями AD и BC пересекаются в точке O. Концы отрезка EF, параллельного основаниям и проходящего через точку пересечения диагоналей, лежат соответственно на сторонах AB и CD. Докажите, что $AE : CF = AO : CO$.

1.78. Три прямые, параллельные сторонам данного треугольника, отсекают от него три треугольника, причём остаётся равносторонний шестиугольник. Найдите длину стороны шестиугольника, если длины сторон треугольника равны a, b и c.

1.79. Три прямые, параллельные сторонам треугольника, пересекаются в одной точке, причём стороны треугольника высекают на этих прямых отрезки длиной x. Найдите x, если длины сторон треугольника равны a, b и c.

1.80. Точка P лежит внутри треугольника ABC, причём $\angle ABP = \angle ACP$. На прямых AB и AC взяты такие точки C_1 и B_1, что $BC_1 : CB_1 = CP : BP$. Докажите, что одна из диагоналей параллелограмма, две стороны которого лежат на прямых BP и CP, а две другие стороны (или их продолжения) проходят через B_1 и C_1, параллельна BC.

Решения

1.1. а) Пусть P и Q — середины сторон AB и CD, K и L — точки пересечения прямой PQ с диагоналями AC и BD. Тогда $PL = a/2$ и $PK = b/2$, поэтому $KL = PL - PK = (a-b)/2$.

б) Возьмём на стороне AD точку F так, что $BF \parallel CD$. Пусть E — точка пересечения отрезков MN и BF. Тогда $MN = ME + EN = \dfrac{qAF}{p+q} + b = \dfrac{q(a-b)+(p+q)b}{p+q} = \dfrac{qa+pb}{p+q}$.

1.2. Пусть K, L, M и N — середины сторон AB, BC, CD и DA соответственно четырёхугольника $ABCD$. Тогда $KL = MN = AC/2$ и отрезок KL параллелен MN, т. е. $KLMN$ — параллелограмм. Теперь ясно, что $KLMN$ — прямоугольник, если диагонали AC и BD перпендикулярны; ромб, если $AC = BD$; квадрат, если диагонали AC и BD равны по длине и перпендикулярны.

1.3. а) Обозначим точку пересечения отрезков AA_1 и BB_1 через O. Проведём в треугольнике B_1BC отрезок $A_1A_2 \parallel BB_1$. Тогда $B_1C/B_1A_2 = 1 + p$, поэтому $AO : OA_1 = AB_1 : B_1A_2 = B_1C : qB_1A_2 = (1+p) : q$.

б) Пусть $BA_1 : A_1C = 1 : p$ и $AB_1 : B_1C = 1 : q$. Тогда $AD : DA_1 = (1+p) : q$ и $BD : DB_1 = (1+q) : p$. Поэтому $a_1 = \dfrac{1+p+q}{1+p}d$, $b_1 = \dfrac{1+p+q}{1+q}d$ и $c = (1+p+q)d$.

1.4. Пусть A_2 — середина отрезка A_1B. Тогда $CA_1 : A_1A_2 = CP : PC_1$ и $A_1A_2 : A_1B = 1 : 2$, поэтому $CA_1 : A_1B = CP : 2PC_1$. Аналогично $CB_1 : B_1A = CP : 2PC_1 = CA_1 : A_1B$.

1.5. Точка P лежит на медиане QM треугольника AQD (или на её продолжении). Легко проверить, что решение задачи 1.4 остаётся верным и в случае, когда точка P лежит на продолжении медианы. Следовательно, $BC \parallel AD$.

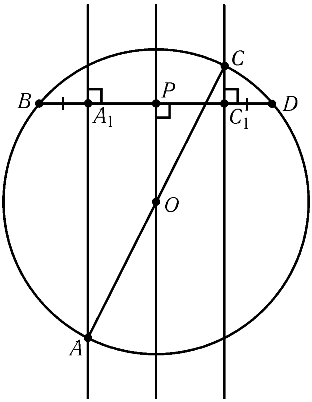


Рис. 1.3

1.6. Так как $\triangle AQP \sim \triangle CQB$, то $AQ : QC = AP : BC = 1 : n$. Поэтому $AC = AQ + QC = (n+1)AQ$.

1.7. Центр параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$, будучи серединой отрезка B_1D_1, принадлежит отрезку, соединяющему середины сторон AB и CD. Аналогично он принадлежит отрезку, соединяющему середины сторон BC и AD. Точка пересечения этих отрезков — центр параллелограмма $ABCD$.

1.8. Ясно, что $AK : KM = BK : KD = LK : AK$, т. е. $AK^2 = LK \cdot KM$.

1.9. Пусть AC — диаметр окружности, описанной около четырёхугольника $ABCD$. Опустим перпендикуляры AA_1 и CC_1 на BD (рис. 1.3). Нужно доказать, что $BA_1 = DC_1$. Опустим перпендикуляр OP из центра O описанной окружности на BD. Ясно, что P — середина отрезка BD. Прямые AA_1, OP, CC_1 параллельны и $AO = OC$, поэтому $A_1P = PC_1$. Так как P — середина BD, то $BA_1 = DC_1$.

1.10. Так как $BO = PD$, то $BO : OD = DP : PB = k$. Пусть $BC = 1$. Тогда $AD = k$ и $ED = 1/k$. Поэтому $k = AD = AE + ED = 1 + (1/k)$, т. е. $k^2 = 1 + k$. Остаётся заметить, что $k^2 = AD^2$ и $1 + k = BC^2 + BC \cdot AD$.

1.11. Пусть C, D, E, F — середины сторон AO, OB, BM, MA соответственно четырёхугольника $AOBM$. Поскольку $AB = MO = R$, где R — радиус данной окружности, то согласно задаче 1.2 $CDEF$ — ромб. Поэтому $CE \perp DF$.

1.12. а) Если прямые, на которых лежат данные точки, параллельны, то утверждение задачи очевидно. Будем считать, что эти прямые пересекаются в точке O. Тогда $OA : OB = OB_1 : OA_1$, и $OC : OA = OA_1 : OC_1$, поэтому $OC : OB = OB_1 : OC_1$, а значит, $BC_1 \parallel CB_1$ (отношения отрезков следует считать ориентированными).

б) Пусть D и E — точки пересечения прямых AB_1 и CA_1, CB_1 и AC_1. Тогда $CA_1 : A_1D = CB : BA = EC_1 : C_1A$. А так как $\triangle CB_1D \sim \triangle EB_1A$, точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

1.13. Точка, лежащая на биссектрисе угла, равноудалена от его сторон. Пусть a — расстояние от точки A_1, до прямых AC и AB, b — расстояние от точки B_1 до прямых AB и BC. Пусть, далее, $A_1M : B_1M = p : q$, причём $p + q = 1$. Тогда расстояния от точки M до прямых AC и BC равны qa и pb соответственно. С другой стороны, согласно задаче 1.1 б) расстояние от точки M до прямой AB равно $qa + pb$.

1.14. Пусть прямая, проходящая через центр O данного прямоугольника параллельно BC, пересекает отрезок QN в точке K (рис. 1.4). Так как $MO \parallel PC$, то $QM : MP = QO : OC$, а так как $KO \parallel BC$, то $QO : OC = QK : KN$. Следовательно, $QM : MP = QK : KN$, т. е. $KM \parallel NP$. Поэтому $\angle MNP = \angle KMO = \angle QNM$.

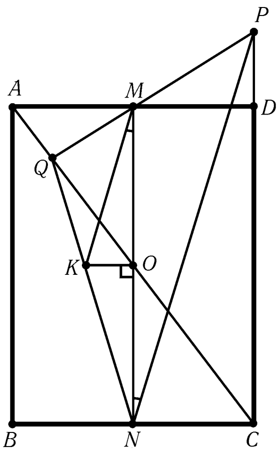


Рис. 1.4

1.15. Проведём через точку M прямую EF, параллельную CD (точки E и F лежат на прямых BC и AD). Тогда $PL : PK = BL : KD$ и $OK : OL = KA : CL = KA : KF = BL : EL$. Так как $KD = EL$, то $PL : PK = OK : OL$, а значит, $PL = OK$.

1.16. Рассмотрим вспомогательный параллелограмм $ABCD_1$. Можно считать, что точки D и D_1 не совпадают (иначе утверждение задачи очевидно). Возьмём на сторонах AD_1 и CD_1 точки S_1 и R_1 так, что $SS_1 \parallel DD_1$ и $RR_1 \parallel DD_1$. Пусть N — точка пересечения отрезков PR_1 и QS_1; N_1 и N_2 — точки пересечения прямой, проходящей через N параллельно DD_1, с отрезками PR и QS соответственно. Тогда $\overrightarrow{N_1N} = \beta\overrightarrow{RR_1} = \alpha\beta\overrightarrow{DD_1}$ и $\overrightarrow{N_2N} = \alpha\overrightarrow{SS_1} = \alpha\beta\overrightarrow{DD_1}$. Поэтому $N_1 = N_2$ — точка пересечения отрезков PR и QS. Ясно, что $PN_1 : PR = PN : PR_1 = \beta$ и $QN_2 : QS = \alpha$.

Замечание. В случае $\alpha = \beta$ есть более простое решение. Так как $BP : BA = BQ : BC = \alpha$, то $PQ \parallel AC$ и $PQ : AC = \alpha$. Аналогично $RS \parallel AC$ и $RS : AC = 1 - \alpha$. Поэтому отрезки PR и QS делятся точкой их пересечения в отношении $\alpha : (1 - \alpha)$.

1.17. а) Опустим из вершин A и C перпендикуляры AK и CL на прямую BD. Так как $\angle CBL = \angle ABK$ и $\angle CDL = \angle KDA$, то $\triangle BLC \sim \triangle BKA$ и $\triangle CLD \sim \triangle AKD$. Поэтому $AD : DC = AK : CL = AB : BC$.

б) Учитывая, что $BA_1 : A_1C = BA : AC$ и $BA_1 + A_1C = BC$, получаем $BA_1 = ac/(b + c)$. Так как BO — биссектриса треугольника ABA_1, то $AO : OA_1 = AB : BA_1 = (b + c) : a$.

1.18. Пусть O — центр описанной окружности равнобедренного треугольника ABC, B_1 — середина основания AC, A_1 — середина боковой стороны BC. Так как $\triangle BOA_1 \sim \triangle BCB_1$, то $BO : BA_1 = BC : BB_1$, а значит, $R = BO = a^2/\sqrt{4a^2 - b^2}$.

1.19. Если $\angle EAD = \varphi$, то $AE = AD/\cos\varphi = AB/\cos\varphi$ и $AF = AB/\sin\varphi$. Поэтому $\dfrac{1}{AE^2} + \dfrac{1}{AF^2} = \dfrac{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}{AB^2} = \dfrac{1}{AB^2}$.

1.20. Легко проверить, что $AB_2^2 = AB_1 \cdot AC = AC_1 \cdot AB = AC_2^2$.

1.21. а) Так как $BQ : QM = BN : AM = BK : AK$, то $KQ \parallel AM$.

б) Пусть O — центр вписанной окружности. Так как $\angle CBA + \angle BAD = 180^\circ$, то $\angle ABO + \angle BAO = 90^\circ$. Поэтому $\triangle AKO \sim \triangle OKB$, т. е. $AK : KO = OK : KB$. Следовательно, $AK \cdot KB = KO^2 = R^2$, где R — радиус вписанной окружности. Аналогично $CL \cdot LD = R^2$.

1.22. Если угол ABC тупой (соответственно острый), то угол MAN тоже тупой (соответственно острый). Кроме того, стороны этих углов взаимно перпендикулярны. Поэтому $\angle ABC = \angle MAN$. Прямоугольные треугольники ABM и ADN имеют равные углы ABM и ADN, поэтому $AM : AN = AB : AD = AB : CB$, т. е. $\triangle ABC \sim \triangle MAN$.

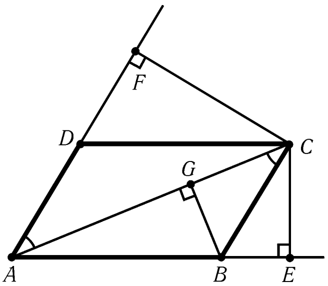


Рис. 1.5

1.23. Возьмём на диагонали AC такие точки D' и B', что $BB' \parallel l$ и $DD' \parallel l$. Тогда $AB : AE = AB' : AG$ и $AD : AF = AD' : AG$. Так как стороны треугольников ABB' и CDD' попарно параллельны и $AB = CD$, эти треугольники равны и $AB' = CD'$. Поэтому $\dfrac{AB}{AE} + \dfrac{AD}{AF} = \dfrac{AB'}{AG} + \dfrac{AD'}{AG} = \dfrac{CD' + AD'}{AG} = \dfrac{AC}{AG}$.

1.24. Опустим из вершины B перпендикуляр BG на AC (рис. 1.5). Из подобия треугольников ABG и ACE получаем $AC \cdot AG = AE \cdot AB$. Прямые AF и CB параллельны, поэтому углы GCB и CAF равны и прямоугольные треугольники CBG и ACF подобны. Из подобия этих треугольников получаем $AC \cdot CG = AF \cdot BC$. Складывая полученные равенства, находим $AC \cdot (AG + CG) = AE \cdot AB + AF \cdot BC$. Так как $AG + CG = AC$, получаем требуемое равенство.

1.25. Так как $\alpha + \beta = 90^\circ - (\alpha/2)$, то $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 90^\circ + (\alpha/2)$. Поэтому на стороне AB можно выбрать точку D так, что $\angle ACD = 90^\circ - (\alpha/2)$, т. е. $AC = AD$. Тогда $\triangle ABC \sim \triangle CBD$, а значит, $BC : BD = AB : CB$, т. е. $a^2 = c(c - b)$.

1.26. При перемещении отрезков AB и CD треугольник AMC заменится на другой треугольник, подобный исходному. Поэтому величина AM/CM остаётся постоянной. Аналогично величина BM/DM остаётся постоянной.

1.27. Обозначим точку пересечения медиан через O, точки пересечения медианы AK с прямыми FP и FE — через Q и M, точки пересечения медианы CL с прямыми EP и FE — через R и N соответственно (рис. 1.6). Ясно, что $FM : FE = FQ : FP = LO : LC = 1 : 3$, т. е. $FM = FE/3$. Аналогично $EN = FE/3$.

1.28. Пусть C — вершина данного угла, A и B — точки пересечения данной прямой со сторонами угла. Возьмём на отрезках AC и BC точки K и L так, что $PK \parallel BC$ и $PL \parallel AC$. Так как $\triangle AKP \sim \triangle PLB$, то $AK : KP = PL : LB$, а значит, $(a - p)(b - p) = p^2$, где $p = PK = PL$. Следовательно, $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{p}$.

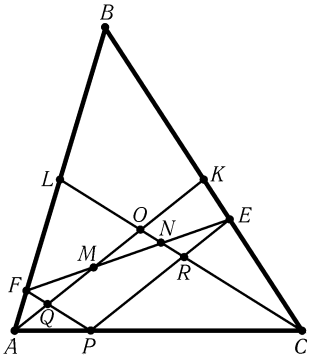


Рис. 1.6

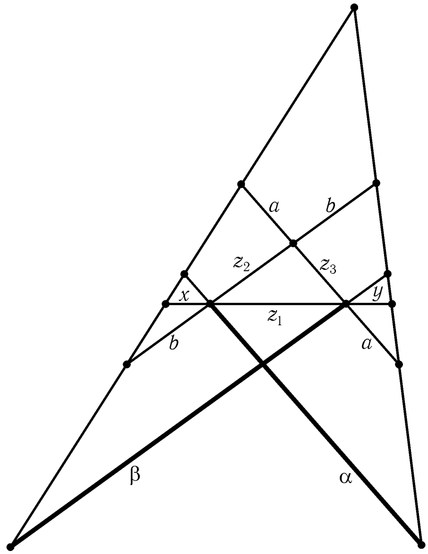


Рис. 1.7

1.29. Обозначим середину стороны BC через O, а точки пересечения AK и AL со стороной BC — через P и Q. Можно считать, что $BP < BQ$. Треугольник LCO равносторонний и $LC \parallel AB$. Поэтому $\triangle ABQ \sim \triangle LCQ$, т. е. $BQ : QC = AB : LC = 2 : 1$. Следовательно, $BC = BQ + QC = 3QC$. Аналогично $BC = 3BP$.

1.30. Так как $BK : BO = BO : AB$ и $\angle KBO = \angle ABO$, то $\triangle KOB \sim \triangle OAB$. Поэтому $\angle KOB = \angle OAB$. Аналогично $\angle AOM = \angle ABO$. Следовательно, $\angle KOM = \angle KOB + \angle BOA + \angle AOM = \angle OAB + \angle BOA + \angle ABO = 180^\circ$, т. е. точки K, O и M лежат на одной прямой.

1.31. Проведём дополнительно прямые, параллельные прямым, на которых лежат отрезки длиной $a_1 = a_2 = a$ и $b_1 = b_2 = b$ (рис. 1.7). Из подобия треугольников следуют равенства $\dfrac{x}{b} = \dfrac{x + z_1}{\beta}$, $\dfrac{a + z_3}{a} = \dfrac{\beta}{b + z_2}$, $\dfrac{y + z_1}{\alpha} = \dfrac{y}{a}$, $\dfrac{\alpha}{a + z_3} = \dfrac{b + z_2}{b}$. Перемножив эти равенства, получим $x(y + z_1) = y(x + z_1)$, а значит, $x = y$.

1.32. Так как $\angle AMN = \angle MNC$ и $\angle BMN = \angle MNA$, то $\angle AMB = \angle ANC$. Кроме того, $AM : AN = NB : NM = BM : CN$. Поэтому $\triangle AMB \sim \triangle ANC$, а значит, $\angle MAB = \angle NAC$. Следовательно, $\angle BAC = \angle MAN$. Для других углов доказательство аналогично.

Пусть точки B_1 и C_1 симметричны B и C относительно серединного перпендикуляра к отрезку MN. Так как $AM : NB = MN : BM = MC : NC$, то $MA \cdot MC_1 = AM \cdot NC = NB \cdot MC = MB_1 \cdot MC$. При этом точки M, A, C_1 лежат на одной прямой и точки M, B_1, C лежат на одной прямой. Следовательно, точка A лежит на окружности, описанной вокруг трапеции BB_1CC_1.

1.33. Так как $\angle AEB + \angle BEC = 180^\circ$, то эти углы не могут быть разными углами подобных треугольников ABE и BEC, т. е. они равны и BE — перпендикуляр.

Возможны два варианта: $\angle ABE = \angle CBE$ или $\angle ABE = \angle BCE$. Первый вариант отпадает, так как в этом случае $\triangle ABE = \triangle CBE$. Остаётся второй вариант. В этом случае $\angle ABC = \angle ABE + \angle CBE = \angle ABE + \angle BAE = 90^\circ$. В прямоугольном треугольнике ABC катеты относятся, как $1 : \sqrt{3}$, поэтому его углы равны 90°, 60°, 30°.

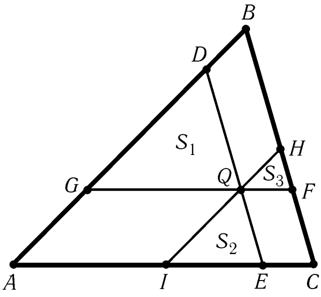


Рис. 1.8

1.34. Ясно, что $S_{BDEF}/2S_{ADE} = S_{BDE}/S_{ADE} = DB/AD = EF/AD = \sqrt{S_{EFC}/S_{ADE}}$. Поэтому $S_{BDEF} = 2\sqrt{S_{ADE} \cdot S_{EFC}}$.

1.35. Пусть $MN = x$; E — точка пересечения прямых AB и CD. Треугольники EBC, EMN и EAD подобны, поэтому $S_{EBC} : S_{EMN} : S_{EAD} = a^2 : x^2 : b^2$. Так как $S_{EMN} - S_{EBC} = S_{MBCN} = S_{MADN} = S_{EAD} - S_{EMN}$, то $x^2 - a^2 = b^2 - x^2$, т. е. $x^2 = (a^2 + b^2)/2$.

1.36. Проведём через точку Q прямые DE, FG и HI параллельно BC, CA и AB соответственно так, чтобы точки F и H лежали на стороне BC, точки E и I — на стороне AC, точки D и G — на стороне AB (рис. 1.8). Введём обозначения: $S = S_{ABC}$, $S_1 = S_{GDQ}$, $S_2 = S_{IEQ}$, $S_3 = S_{HFQ}$. Тогда

$$\sqrt{\frac{S_1}{S}} + \sqrt{\frac{S_2}{S}} + \sqrt{\frac{S_3}{S}} = \frac{GQ}{AC} + \frac{IE}{AC} + \frac{FQ}{AC} = \frac{AI + IE + EC}{AC} = 1,$$

т. е. $S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$.

1.37. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC; точка A_1 симметрична M относительно середины отрезка BC. Длины сторон треугольника CMA_1 относятся к медианам треугольника ABC, как $2 : 3$. Поэтому искомая площадь равна $9S_{CMA_1}/4$. Ясно, что $S_{CMA_1} = S/3$ (см. решение задачи 4.1).

1.38. Пусть E, F, G и H — середины сторон AB, BC, CD и DA.

а) Ясно, что $S_{AEH} + S_{CFG} = \dfrac{S_{ABD}}{4} + \dfrac{S_{CBD}}{4} = \dfrac{S_{ABCD}}{4}$. Аналогично $S_{BEF} + S_{DGH} = \dfrac{S_{ABCD}}{4}$. Поэтому $S_{EFGH} = S_{ABCD} - \dfrac{S_{ABCD}}{4} - \dfrac{S_{ABCD}}{4} = \dfrac{S_{ABCD}}{2}$.

б) Так как $AC = BD$, то $EFGH$ — ромб (задача 1.2). Согласно задаче а) $S_{ABCD} = 2S_{EFGH} = EG \cdot FH$.

1.39. Пусть E, F, G и H — середины сторон четырёхугольника $ABCD$; точки E_1, F_1, G_1 и H_1 симметричны точке O относительно этих точек. Так как EF — средняя линия треугольника E_1OF_1, то $S_{E_1OF_1} = 4S_{EOF}$. Аналогично $S_{F_1OG_1} = 4S_{FOG}$, $S_{G_1OH_1} = 4S_{GOH}$ и $S_{H_1OE_1} = 4S_{HOE}$. Поэтому $S_{E_1F_1G_1H_1} = 4S_{EFGH}$. Согласно задаче 1.38 а) $S_{ABCD} = 2S_{EFGH}$. Поэтому $S_{E_1F_1G_1H_1} = 2S_{ABCD} = 2S$.

1.40. П е р в о е р е ш е н и е. Рассмотрим квадрат $BCMN$ и разделим его сторону MN точками P и Q на три равные части (рис. 1.9). Тогда $\triangle ABC = \triangle PDQ$ и $\triangle ACD = \triangle PMA$. Поэтому треугольник PAD — равнобедренный прямоугольный и $\angle ABC + \angle ADC = \angle PDQ + \angle ADC = 45^\circ$.

В т о р о е р е ш е н и е. Так как $DE = 1$, $EA = \sqrt{2}$, $EB = 2$, $AD = \sqrt{5}$ и $BA = \sqrt{10}$, то $DE : AE = EA : EB = AD : BA$ и $\triangle DEA \sim \triangle AEB$. Следовательно, $\angle ABC = \angle EAD$. Кроме того, $\angle AEC = \angle CAE = 45^\circ$. Поэтому $\angle ABC + \angle ADC + \angle AEC = (\angle EAD + \angle CAE) + \angle ADC = \angle CAD + \angle ADC = 90^\circ$.

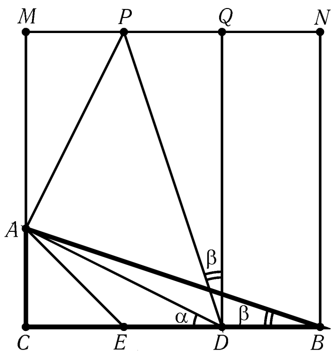


Рис. 1.9

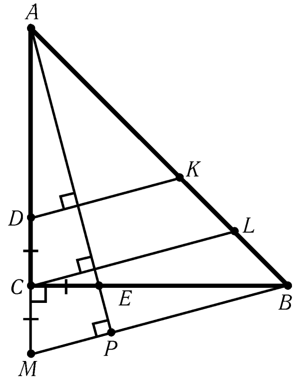


Рис. 1.10

1.41. Опустим из точки L перпендикуляры LM на AB и LN на AD. Тогда $KM = MB = ND$ и $KL = LB = DL$, поэтому прямоугольные треугольники KML и DNL равны. Следовательно, $\angle DLK = \angle NLM = 90^\circ$.

1.42. Так как $D_1A = B_1B$, $AD_2 = BB_2$ и $\angle D_1AD_2 = \angle B_1BB_2$, то $\triangle D_1AD_2 = \triangle B_1BB_2$. Стороны AD_1 и BB_1 (а также AD_2 и BB_2) этих треугольников перпендикулярны, поэтому $B_1B_2 \perp D_1D_2$.

1.43. На продолжении отрезка AC за точку C возьмём точку M так, что $CM = CE$ (рис. 1.10). Тогда треугольник ACE при повороте с центром C на 90° переходит в треугольник BCM. Поэтому прямая MB перпендикулярна прямой AE, а значит, параллельна прямой CL. Так как $MC = CE = DC$ и прямые DK, CL и MB параллельны, то $KL = LB$.

1.44. Пусть на сторонах AB и BC построены прямоугольники ABC_1D_1 и A_2BCD_2; P, Q, R и S — центры прямоугольников, построенных на сторонах AB, BC, CD и DA. Так как $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, то $\triangle ADC = \triangle A_2BC_1$. Рассматривая прямоугольники, построенные на сторонах этих равных треугольников, получаем, что $\triangle RDS = \triangle PBQ$ и $RS = PQ$. Аналогично $QR = PS$. Следовательно, $PQRS$ — параллелограмм, причём один из треугольников RDS и PBQ построен на его сторонах внешним образом, а другой внутренним; аналогичное утверждение справедливо и для треугольников QCR и SAP. Поэтому $\angle PQR + \angle RSP = \angle BQC + \angle DSA = 180^\circ$, так как $\angle PQB = \angle RSD$ и $\angle RQC = \angle PSA$. Следовательно, $PQRS$ — прямоугольник.

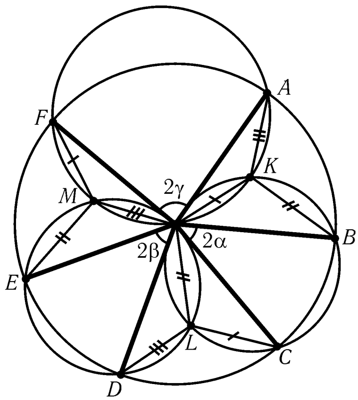


Рис. 1.11

1.45. Пусть K, L, M — точки пересечения описанных окружностей треугольников FOA и BOC, BOC и DOE, DOE и FOA; 2α, 2β и 2γ — углы при вершинах равнобедренных треугольников BOC, DOE и FOA (рис. 1.11). Точка K лежит на дуге OB описанной окружности равнобедренного треугольника BOC, поэтому $\angle OKB = 90^\circ + \alpha$. Аналогично $\angle OKA = 90^\circ + \gamma$. Так как $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$, то $\angle AKB = 90^\circ + \beta$. Внутри правильного треугольника AOB существует единственная точка K, из которой его стороны видны под данными углами. Аналогичные рассуждения для точки L, лежащей внутри треугольника COD, показывают, что $\triangle OKB = \triangle CLO$. Докажем теперь, что $\triangle KOL = \triangle OKB$. В самом деле, $\angle COL = \angle KBO$, поэтому $\angle KOB + \angle COL = 180^\circ - \angle OKB = 90^\circ - \alpha$, а значит, $\angle KOL = 2\alpha + (90^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha = \angle OKB$. Следовательно, $KL = OB = R$. Аналогично $LM = MK = R$.

1.46. Пусть $\angle A = \alpha$. Легко проверить, что оба угла KCL и ADL равны $240^\circ - \alpha$ (или $120^\circ + \alpha$). А так как $KC = BC = AD$ и $CL = DL$, то $\triangle KCL = \triangle ADL$, а значит, $KL = AL$. Аналогично $KL = AK$.

1.47. Пусть P, Q и R — центры квадратов, построенных на сторонах DA, AB и BC параллелограмма с острым углом α при вершине A. Легко проверить, что $\angle PAQ = 90^\circ + \alpha = \angle RBQ$, а значит, $\triangle PAQ = \triangle RBQ$. Стороны AQ и BQ этих треугольников перпендикулярны, поэтому $PQ \perp QR$.

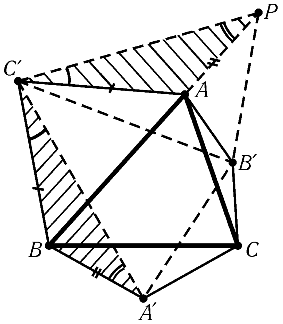


Рис. 1.12

1.48. Заметим сначала, что сумма углов при вершинах A, B и C шестиугольника $AB'CA'BC'$ равна 360°, так как по условию сумма его углов при остальных вершинах равна 360°. Построим на стороне AC' внешним образом треугольник $AC'P$, равный треугольнику $BC'A'$ (рис. 1.12). Тогда $\triangle AB'P = \triangle CB'A'$, так как $AB' = CB'$, $AP = CA'$ и $\angle PAB' = 360^\circ - \angle PAC' - \angle C'AB' = 360^\circ - \angle A'BC' - \angle C'AB' = \angle A'CB'$. Следовательно, $\triangle C'B'A' = \triangle C'B'P$, а значит, $2\angle A'B'C' = \angle PB'A' = \angle AB'C$, так как $\angle PB'A = \angle A'B'C$, а угол $AB'A'$ общий.

1.49. Так как $BA : BC = BC_1 : BA_1$ и $\angle ABC = \angle C_1BA_1$, то $\triangle ABC \sim \triangle C_1BA_1$. Аналогично $\triangle ABC \sim \triangle B_1A_1C$. А так как $BA_1 = A_1C$, то $\triangle C_1BA_1 = \triangle B_1A_1C$. Следовательно, $AC_1 = C_1B = B_1A_1$ и $AB_1 = B_1C = C_1A_1$. Ясно также, что четырёхугольник $AB_1A_1C_1$ выпуклый.

1.50. а) Пусть P и Q — середины сторон AB и AC. Тогда $MP = AC/2 = QB_1$, $MQ = AB/2 = PC_1$ и $\angle C_1PM = \angle C_1PB + \angle BPM = \angle B_1QC + \angle CQM = \angle B_1QM$. Следовательно, $\triangle MQB_1 = \triangle C_1PM$, а значит, $MC_1 = MB_1$. Кроме того, $\angle PMC_1 + \angle QMB_1 = \angle QB_1M + \angle QMB_1 = 180^\circ - \angle MQB_1$, а $\angle MQB_1 = \angle A + \angle CQB_1 = \angle A + (180^\circ - 2\varphi)$. Следовательно, $\angle B_1MC_1 = \angle PMQ + 2\varphi - \angle A = 2\varphi$. (Случай, когда $\angle C_1PB + \angle BPM > 180^\circ$, разбирается аналогично.)

б) Возьмём на сторонах AB и AC такие точки B' и C', что $AB' : AB = AC' : AC = 2 : 3$. Середина M отрезка $B'C'$ совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC. Построим на сторонах AB' и AC' внешним образом прямоугольные треугольники $AB'C_1$ и AB_1C' с углами 60° при вершинах B' и C'. Тогда B_1 и C_1 — центры правильных треугольников, построенных на сторонах AB и AC; с другой стороны, согласно задаче а) $MB_1 = MC_1$ и $\angle B_1MC_1 = 120^\circ$.

З а м е ч а н и е. Утверждения задач а) и б) остаются верными и для треугольников, построенных внутренним образом.

1.51. а) Пусть B' — точка пересечения прямой AC и перпендикуляра к прямой AB_1, восставленного из точки B_1; точка C' определяется аналогично. Так как $AB' : AC' = AC_1 : AB_1 = AB : AC$, то $B'C' \parallel BC$. Если N — середина отрезка $B'C'$, то, как следует из задачи 1.50 а), $NC_1 = NB_1$ (т. е. $N = M$) и $\angle B_1NC_1 = 2\angle AB'B_1 = 180^\circ - 2\angle CAB_1 = \varphi$.

б) Построим на стороне BC внешним образом равнобедренный треугольник BA_1C с углом $360^\circ - 2\varphi$ при вершине A_1 (если $\varphi < 90^\circ$, строим внутренним образом треугольник с углом 2φ). Так как сумма углов при вершинах трёх построенных равнобедренных треугольников равна 360°, треугольник $A_1B_1C_1$ имеет углы $180^\circ - \varphi$, $\varphi/2$ и $\varphi/2$ (см. задачу 1.48). В частности, этот треугольник равнобедренный, а значит, $A_1 = O$.

1.52. Пусть O_1, O_2, O_3 и O_4 — центры ромбов, построенных на сторонах AB, BC, CD и DA; M — середина диагонали AC. Тогда $MO_1 = MO_2$ и $\angle O_1MO_2 = \alpha$ (см. задачу 1.50 а). Аналогично $MO_3 = MO_4$ и $\angle O_3MO_4 = \alpha$. Следовательно, при повороте на угол α относительно точки M треугольник O_1MO_3 переходит в O_2MO_4.

1.53. Так как $A_1C = AC|\cos C|$, $B_1C = BC|\cos C|$ и угол C у треугольников ABC и A_1B_1C общий, то эти треугольники подобны, причём коэффициент подобия равен $|\cos C|$.

1.54. Так как точки M и N лежат на окружности с диаметром CH, то $\angle CMN = \angle CHN$, а так как $AC \perp HN$, то $\angle CHN = \angle A$. Аналогично $\angle CNM = \angle B$.

1.55. а) Пусть l — касательная в точке A к описанной окружности. Тогда для ориентированных углов получаем $\angle(l, AB) = \angle(AC, CB) = \angle(C_1B_1, AC_1)$, а значит, $l \parallel B_1C_1$.

б) Так как $OA \perp l$ и $l \parallel B_1C_1$, то $OA \perp B_1C_1$.

1.56. Если AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты, то $\triangle A_1BH \sim \triangle B_1AH$, а значит, $AH \cdot A_1H = BH \cdot B_1H$. Аналогично $BH \cdot B_1H = CH \cdot C_1H$. (Предполагается известным, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.)

Если $AH \cdot A_1H = BH \cdot B_1H = CH \cdot C_1H$, то $\triangle A_1BH \sim \triangle B_1AH$, а значит, $\angle BA_1H = \angle AB_1H = \varphi$. Поэтому $\angle CA_1H = \angle CB_1H = 180^\circ - \varphi$. Аналогично $\angle AC_1H = \angle CA_1H = 180^\circ - \varphi$ и $\angle AC_1H = \angle AB_1H = \varphi$, поэтому $\varphi = 90^\circ$ т. е. AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты.

1.57. а) Согласно задаче 1.53 $\angle C_1A_1B = \angle CA_1B_1 = \angle A$. Так как $AA_1 \perp BC$, то $\angle C_1A_1A = \angle B_1A_1A$. Аналогично доказывается, что лучи B_1B и C_1C — биссектрисы углов $A_1B_1C_1$ и $A_1C_1B_1$.

б) Прямые AB, BC и CA являются биссектрисами внешних углов треугольника $A_1B_1C_1$, поэтому A_1A — биссектриса угла $B_1A_1C_1$, а значит, $AA_1 \perp BC$. Для прямых BB_1 и CC_1 доказательство аналогично.

1.58. Из результата задачи 1.57 а) следует, что прямая B_1A_1 при симметрии относительно прямой AC переходит в прямую B_1C_1.

1.59. Согласно задаче 1.53 $\angle B_1A_1C = \angle BAC$. Так как $A_1B_1 \parallel AB$, то $\angle B_1A_1C = \angle ABC$. Поэтому $\angle BAC = \angle ABC$. Аналогично из того, что $B_1C_1 \parallel BC$, следует равенство $\angle ABC = \angle BCA$. Поэтому треугольник ABC равносторонний и $A_1C_1 \parallel AC$.

1.60. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC. Так как $OA \perp B_1C_1$ (см. задачу 1.55 б), то $S_{AOC_1} + S_{AOB_1} = R \cdot B_1C_1/2$. Аналогичные рассуждения для вершин B и C показывают, что $S_{ABC} = qR$. С другой стороны, $S_{ABC} = pr$.

1.61. Периметр треугольника, отсекаемого прямой, параллельной стороне BC, равен сумме расстояний от точки A до точек касания вписанной окружности со сторонами AB и AC, поэтому сумма периметров отсечённых треугольников равна периметру треугольника ABC: $P_1 + P_2 + P_3 = P$. Из подо-

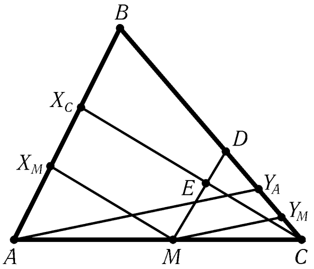


Рис. 1.13

бия треугольников следует, что $r_i/r = P_i/P$. Складывая эти равенства, получаем требуемое.

1.62. Пусть $M = A$. Тогда $X_A = A$, поэтому $AY_A = 1$. Аналогично $CX_C = 1$. Докажем, что $y = AY_A$ и $x = CX_C$ — искомые прямые. Возьмём на стороне BC точку D так, что $AB \parallel MD$ (рис. 1.13). Пусть E — точка пересечения прямых CX_C и MD. Тогда $X_MM + Y_MM = X_CE + Y_MM$. Так как $\triangle ABC \sim \triangle MDC$, то $CE = Y_MM$. Поэтому $X_MM + Y_MM = X_CE + CE = X_CC = 1$.

1.63. Пусть D — середина отрезка BH. Так как $\triangle BHA \sim \triangle HEA$, то $AD : AO = AB : AH$ и $\angle DAH = \angle OAE$. Следовательно, $\angle DAO = \angle BAH$, а значит, $\triangle DAO \sim \triangle BAH$ и $\angle DOA = \angle BHA = 90^\circ$.

1.64. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC. Опустим из точки B_1 перпендикуляры B_1K и B_1N на стороны AB и BC и перпендикуляры B_1L и B_1M на высоты AA_1 и CC_1. Так как $KB_1 : CC_1 = AB_1 : AC = LB_1 : A_1C$, то $\triangle KLB_1 \sim \triangle C_1A_1C$, а значит, $KL \parallel C_1A_1$. Аналогично $MN \parallel C_1A_1$. Кроме того, $KN \parallel C_1A_1$ (см. задачи 1.53 и 1.54). Следовательно, точки K, L, M и N лежат на одной прямой.

1.65. а) Пусть O — середина AC, O_1 — середина AB, O_2 — середина BC. Будем считать, что $AB \leqslant BC$. Проведём через точку O_1 прямую O_1K параллельно EF (K — точка на отрезке EO_2). Докажем, что прямоугольные треугольники DBO и O_1KO_2 равны. В самом деле, $O_1O_2 = AC/2 = DO$ и $BO = (BC - AB)/2 = KO_2$. Из равенства треугольников DBO и O_1KO_2 следует, что $\angle BOD = \angle O_1O_2E$, т. е. прямая DO параллельна EO_2 и касательная, проведённая через точку D, параллельна прямой EF.

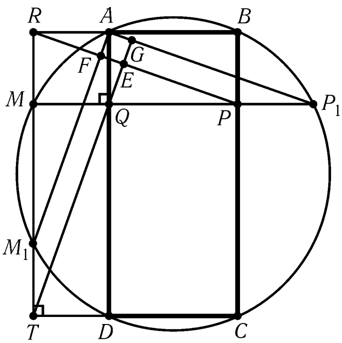


Рис. 1.14

б) Так как углы между диаметром AC и касательными к окружностям в точках F, D, E равны, то $\angle FAB = \angle DAC = \angle EBC$ и $\angle FBA = \angle DCA = \angle ECB$, т. е. F лежит на отрезке AD, E — на отрезке DC. Кроме того, $\angle AFB = \angle BEC = \angle ADC = 90^\circ$, поэтому $FDEB$ — прямоугольник.

1.66. Пусть MQ и MP — перпендикуляры, опущенные на стороны AD и BC, MR и MT — перпендикуляры, опущенные на продолжения сторон AB и CD (рис. 1.14). Обозначим через M_1 и P_1 вторые точки пересечения прямых RT и QP с окружностью.

Так как $TM_1 = RM = AQ$ и $TM_1 \parallel AQ$, то $AM_1 \parallel TQ$. Аналогично $AP_1 \parallel RP$. Поскольку $\angle M_1AP_1 = 90^\circ$, то $RP \perp TQ$.

Обозначим точки пересечения прямых TQ и RP, M_1A и RP, P_1A и TQ через E, F, G соответственно. Чтобы доказать, что точка E лежит на прямой AC, достаточно доказать, что прямоугольники $AFEG$ и AM_1CP_1 подобны. Так как $\angle ARF = \angle AM_1R = \angle M_1TG = \angle M_1CT$, можно обозначить величины этих углов одной буквой α. $AF = RA\sin\alpha = M_1A\sin^2\alpha$, $AG = M_1T\sin\alpha = M_1C\sin^2\alpha$, поэтому прямоугольники $AFEG$ и AM_1CP_1 подобны.

1.67. Обозначим центры окружностей через O_1 и O_2. Внешняя касательная касается первой окружности в точке K, а второй окружности в точке L; внутренняя касательная касается первой окружности в точке M, а второй окружности в точке N (рис. 1.15). Пусть прямые KM и LN пересекают пря-

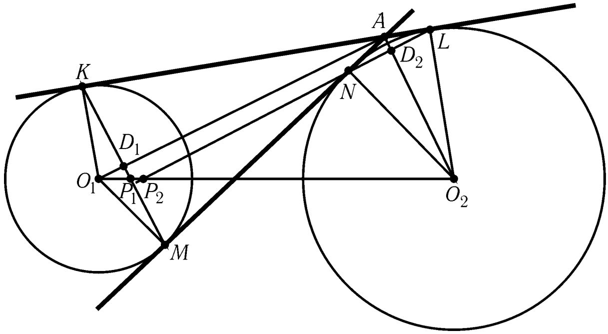


Рис. 1.15

мую O_1O_2 в точках P_1 и P_2 соответственно. Надо доказать, что $P_1 = P_2$. Рассмотрим точки A, D_1, D_2 пересечения прямых KL и MN, KM и O_1A, LN и O_2A соответственно. $\angle O_1AM + \angle NAO_2 = 90^\circ$, поэтому прямоугольные треугольники O_1MA и ANO_2 подобны, а также $AO_2 \parallel KM$ и $AO_1 \parallel LN$. Из параллельности этих прямых получаем $AD_1 : D_1O_1 = O_2P_1 : P_1O_1$ и $D_2O_2 : AD_2 = O_2P_2 : P_2O_1$. Из подобия четырёхугольников AKO_1M и O_2NAL получаем $AD_1 : D_1O_1 = D_2O_2 : AD_2$. Следовательно, $O_2P_1 : P_1O_1 = O_2P_2 : P_2O_1$, т. е. $P_1 = P_2$.

З а м е ч а н и е. По поводу другого решения см. задачу 3.70.

ГЛАВА 2

ВПИСАННЫЙ УГОЛ

Основные сведения

1. Угол ABC, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называют *вписанным* в окружность. Пусть O — центр окружности. Тогда

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC,$$

если точки B и O лежат по одну сторону от AC, и

$$\angle ABC = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle AOC,$$

если точки B и O лежат по разные стороны от AC. Важнейшим и наиболее часто используемым следствием этого факта является то, что величины углов, опирающихся на равные хорды, либо равны, либо составляют в сумме 180°.

2. Величина угла между хордой AB и касательной к окружности, проходящей через точку A, равна половине угловой величины дуги AB.

3. Угловые величины дуг, заключённых между параллельными хордами, равны.

4. Как уже говорилось, величины углов, опирающихся на одну хорду, могут быть равны, а могут составлять в сумме 180°. Для того чтобы не рассматривать различные варианты расположения точек на окружности, введём понятие «ориентированный угол между прямыми». *Величиной ориентированного угла между прямыми AB и CD* (обозначение: $\angle(AB, CD)$) будем называть величину угла, на который нужно повернуть против часовой стрелки прямую AB так, чтобы она стала параллельна прямой CD. При этом углы, отличающиеся на $n \cdot 180^\circ$, считаются равными. Следует отметить, что ориентированный угол между прямыми CD и AB не равен ориентированному углу между прямыми AB и CD (они составляют в сумме 180° или, что по нашему соглашению то же самое, 0°).

Легко проверить следующие свойства ориентированных углов:

а) $\angle(AB, BC) = -\angle(BC, AB)$;

б) $\angle(AB, CD) + \angle(CD, EF) = \angle(AB, EF)$;

в) точки A, B, C, D, не лежащие на одной прямой, принадлежат одной окружности тогда и только тогда, когда $\angle(AB, BC) = \angle(AD, DC)$ (для доказательства этого свойства нужно рассмотреть два случая: точки B и D лежат по одну сторону от AC; точки B и D лежат по разные стороны от AC).

Вводные задачи

1. а) Из точки A, лежащей вне окружности, выходят лучи AB и AC, пересекающие эту окружность. Докажите, что величина угла BAC равна полуразности угловых величин дуг окружности, заключённых внутри этого угла.

б) Вершина угла BAC расположена внутри окружности. Докажите, что величина угла BAC равна полусумме угловых величин дуг окружности, заключённых внутри угла BAC и внутри угла, симметричного ему относительно вершины A.

2. Из точки P, расположенной внутри острого угла BAC, опущены перпендикуляры PC_1 и PB_1 на прямые AB и AC. Докажите, что $\angle C_1AP = \angle C_1B_1P$.

3. Докажите, что все углы, образованные сторонами и диагоналями правильного n-угольника, кратны $180°/n$.

4. Центр вписанной окружности треугольника ABC симметричен центру описанной окружности относительно стороны AB. Найдите углы треугольника ABC.

5. Биссектриса внешнего угла при вершине C треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке D. Докажите, что $AD = BD$.

§ 1. Углы, опирающиеся на равные дуги

2.1. Вершина A остроугольного треугольника ABC соединена отрезком с центром O описанной окружности. Из вершины A проведена высота AH. Докажите, что $\angle BAH = \angle OAC$.

2.2. Две окружности пересекаются в точках M и K. Через M и K проведены прямые AB и CD соответственно, пересекающие первую окружность в точках A и C, вторую в точках B и D. Докажите, что $AC \parallel BD$.

2.3. Из точки M, лежащей внутри данного угла с вершиной A, опущены перпендикуляры MP и MQ на стороны угла. Из точки A опущен перпендикуляр AK на отрезок PQ. Докажите, что $\angle PAK = \angle MAQ$.

2.4. а) Продолжение биссектрисы угла B треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке M; O — центр вписанной окружности, O_b — центр вневписанной окружности, касающейся стороны AC. Докажите, что точки A, C, O и O_b лежат на окружности с центром M.

б) Точка O, лежащая внутри треугольника ABC, обладает тем свойством, что прямые AO, BO и CO проходят через центры описанных окружностей треугольников BCO, ACO и ABO. Докажите, что O — центр вписанной окружности треугольника ABC.

2.5. Прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A движется так, что его вершины B и C скользят по сторонам данного прямого угла. Докажите, что множеством точек A является отрезок и найдите его длину.

2.6. Диагональ AC квадрата $ABCD$ совпадает с гипотенузой прямоугольного треугольника ACK, причём точки B и K лежат по одну сторону от прямой AC. Докажите, что $BK = |AK - CK|/\sqrt{2}$ и $DK = (AK + CK)/\sqrt{2}$.

2.7. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1 и BB_1. Докажите, что если $\angle CAA_1 = \angle CBB_1$, то $AC = BC$.

2.8. Все углы треугольника ABC меньше 120°. Докажите, что внутри его существует точка, из которой все стороны треугольника видны под углом 120°.

Точку из задачи 2.8 называют *точкой Торричелли*.

2.9. Окружность разделена на равные дуги n диаметрами. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки M, лежащей внутри окружности, на эти диаметры, являются вершинами правильного многоугольника.

2.10. На окружности даны точки A, B, M и N. Из точки M проведены хорды MA_1 и MB_1, перпендикулярные прямым NB и NA соответственно. Докажите, что $AA_1 \parallel BB_1$.

2.11. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Третья окружность с центром P пересекает первую окружность в точках A и B, а вторую — в точках C и D. Докажите, что $\angle AQD = \angle BQC$.

2.12. Шестиугольник $ABCDEF$ вписанный, причём $AB \parallel DE$ и $BC \parallel EF$. Докажите, что $CD \parallel AF$.

2.13*. Многоугольник $A_1A_2\ldots A_{2n}$ вписанный. Про все пары его противоположных сторон, кроме одной, известно, что они параллельны. Докажите, что при нечётном n оставшаяся пара сторон тоже параллельна, а при чётном n оставшаяся пара сторон равна по длине.

2.14*. Дан треугольник ABC. Докажите, что существует два семейства правильных треугольников, стороны которых (или их продолжения) проходят через точки A, B и C. Докажите также, что центры треугольников этих семейств лежат на двух концентрических окружностях.

См. также задачу 1.54.

§ 2. Величина угла между двумя хордами

Решить задачи этого параграфа помогает следующий факт. Пусть A, B, C, D — точки на окружности в указанном порядке. Тогда угол между хордами AC и BD равен $(\smile AB + \smile CD)/2$, угол между хордами AB и CD равен $|\smile AD - \smile CB|/2$. (Для доказательства нужно через конец одной из хорд провести хорду, параллельную другой хорде.)

2.15. На окружности даны точки A, B, C, D в указанном порядке. M — середина дуги AB. Обозначим точки пересечения хорд MC и MD с хордой AB через E и K. Докажите, что $KECD$ — вписанный четырёхугольник.

2.16. По стороне правильного треугольника катится окружность радиуса, равного его высоте. Докажите, что угловая величина дуги, высекаемой на окружности сторонами треугольника, всегда равна 60°.

2.17. Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ с боковой стороной AB пересекаются в точке P. Докажите, что центр O её описанной окружности лежит на описанной окружности треугольника APB.

2.18. На окружности даны точки A, B, C, D в указанном порядке; A_1, B_1, C_1 и D_1 — середины дуг AB, BC, CD и DA соответственно. Докажите, что $A_1C_1 \perp B_1D_1$.

2.19. Внутри треугольника ABC взята точка P так, что $\angle BPC = \angle A + 60^\circ$, $\angle APC = \angle B + 60^\circ$ и $\angle APB = \angle C + 60^\circ$. Прямые AP, BP и CP пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A', B' и C'. Докажите, что треугольник $A'B'C'$ правильный.

2.20. На окружности взяты точки A, C_1, B, A_1, C, B_1 в указанном порядке.

а) Докажите, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются биссектрисами углов треугольника ABC, то они являются высотами треугольника $A_1B_1C_1$.

б) Докажите, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются высотами треугольника ABC, то они являются биссектрисами углов треугольника $A_1B_1C_1$.

2.21*. В окружность вписаны треугольники T_1 и T_2, причём вершины треугольника T_2 являются серединами дуг, на которые окружность разбивается вершинами треугольника T_1. Докажите, что в шестиугольнике, являющемся пересечением треугольников T_1 и T_2, диагонали, соединяющие противоположные вершины, параллельны сторонам треугольника T_1 и пересекаются в одной точке.

§ 3. Угол между касательной и хордой

На языке ориентированных углов теорема об угле между касательной и хордой формулируется следующим образом. Если AB — хорда окружности, а l — касательная, проведённая в точке A, то для любой точки X данной окружности имеет место равенство $\angle(l, AB) = \angle(XA, XB)$.

2.22. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через точку A первой окружности проведены прямые AP и AQ, пересекающие вторую окружность в точках B и C. Докажите, что касательная в точке A к первой окружности параллельна прямой BC.

2.23. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и P. Через точку A проведена касательная AB к окружности S_1, а через точку P — прямая CD, параллельная AB (точки B и C лежат на S_2, точка D — на S_1). Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

2.24. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена касательная AQ к окружности S_1 (точка Q лежит на S_2), а через точку B — касательная BS к окружности S_2 (точка S

лежит на S_1). Прямые BQ и AS пересекают окружности S_1 и S_2 в точках R и P. Докажите, что $PQRS$ — параллелограмм.

2.25. Касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC пересекает прямую BC в точке E; AD — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $AE=ED$.

2.26. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точке A. Через точку A проведена прямая, пересекающая S_1 в точке B, а S_2 в точке C. В точках C и B проведены касательные к окружностям, пересекающиеся в точке D. Докажите, что угол BDC не зависит от выбора прямой, проходящей через A.

2.27. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A к этим окружностям проведены касательные AM и AN (M и N — точки окружностей). Докажите, что:

а) $\angle ABN + \angle MAN = 180°$;

б) $BM/BN = (AM/AN)^2$.

2.28. Две окружности касаются внутренним образом в точке M. Пусть AB — хорда большей окружности, касающаяся меньшей окружности в точке T. Докажите, что MT — биссектриса угла AMB.

2.29. Через точку M, лежащую внутри окружности S, проведена хорда AB; из точки M опущены перпендикуляры MP и MQ на касательные, проходящие через точки A и B. Докажите, что величина $1/PM + 1/QM$ не зависит от выбора хорды, проходящей через точку M.

2.30. Окружность S_1 касается сторон угла ABC в точках A и C. Окружность S_2 касается прямой AC в точке C и проходит через точку B; окружность S_1 она пересекает в точке M. Докажите, что прямая AM делит отрезок BC пополам.

2.31. Окружность S касается окружностей S_1 и S_2 в точках A_1 и A_2; B — точка окружности S, а K_1 и K_2 — вторые точки пересечения прямых A_1B и A_2B с окружностями S_1 и S_2. Докажите, что если прямая K_1K_2 касается окружности S_1, то она касается и окружности S_2.

См. также задачи 1.55 а), 6.49.

§ 4. Связь величины угла с длиной дуги и хорды

2.32. В окружность вписаны равнобедренные трапеции $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ с соответственно параллельными сторонами. Докажите, что $AC = A_1C_1$.

2.33. Из точки M, двигающейся по окружности, опускаются перпендикуляры MP и MQ на диаметры AB и CD. Докажите, что длина отрезка PQ не зависит от положения точки M.

2.34. В треугольнике ABC угол B равен $60°$, биссектрисы AD и CE пересекаются в точке O. Докажите, что $OD = OE$.

2.35. В треугольнике ABC углы при вершинах B и C равны $40°$; BD — биссектриса угла B. Докажите, что $BD + DA = BC$.

2.36. На хорде AB окружности S с центром O взята точка C. Описанная окружность треугольника AOC пересекает окружность S в точке D. Докажите, что $BC = CD$.

2.37. Внутри квадрата $ABCD$ выбрана точка M так, что $\angle MAC = \angle MCD = \alpha$. Найдите величину угла ABM.

2.38. Вершины A и B правильного треугольника ABC лежат на окружности S, а вершина C — внутри этой окружности. Точка D лежит на окружности S, причём $BD = AB$. Прямая CD вторично пересекает S в точке E. Докажите, что длина отрезка EC равна радиусу окружности S.

2.39*. По неподвижной окружности, касаясь её изнутри, катится без скольжения окружность вдвое меньшего радиуса. Какую траекторию описывает фиксированная точка K подвижной окружности?

2.40*. В треугольнике ABC угол A наименьший. Через вершину A проведена прямая, пересекающая отрезок BC. Она пересекает описанную окружность в точке X, а серединные перпендикуляры к сторонам AC и AB — в точках B_1 и C_1. Прямые BC_1 и CB_1 пересекаются в точке Y. Докажите, что $BY + CY = AX$.

§ 5. Четыре точки, лежащие на одной окружности

2.41. Из произвольной точки M катета BC прямоугольного треугольника ABC на гипотенузу AB опущен перпендикуляр MN. Докажите, что $\angle MAN = \angle MCN$.

2.42. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O; точки B' и C' симметричны вершинам B и C относительно биссектрисы угла BOC. Докажите, что $\angle C'AC = \angle B'DB$.

2.43. Продолжения сторон AB и CD вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, а продолжения сторон BC и AD — в точке Q. Докажите, что точки пересечения биссектрис углов AQB и BPC со сторонами четырёхугольника являются вершинами ромба.

2.44*. Вписанная окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках M и N. Пусть P — точка пересечения прямой MN и биссектрисы угла B (или её продолжения). Докажите, что:

а) $\angle BPC = 90^\circ$;

б) $S_{ABP} : S_{ABC} = 1 : 2$.

2.45*. Внутри четырёхугольника $ABCD$ взята точка M так, что $ABMD$ — параллелограмм. Докажите, что если $\angle CBM = \angle CDM$, то $\angle ACD = \angle BCM$.

2.46*. Прямые AP, BP и CP пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1. Точки A_2, B_2 и C_2 взяты на прямых BC, CA и AB так, что $\angle(PA_2, BC) = \angle(PB_2, CA) = \angle(PC_2, AB)$. Докажите, что $\triangle A_2B_2C_2 \sim \triangle A_1B_1C_1$.

2.47*. Вокруг правильного треугольника APQ описан прямоугольник $ABCD$, причём точки P и Q лежат на сторонах BC и CD

соответственно; P' и Q' — середины сторон AP и AQ. Докажите, что треугольники $BQ'C$ и $CP'D$ правильные.

2.48*. Докажите, что если для вписанного четырёхугольника $ABCD$ выполнено равенство $CD = AD + BC$, то точка пересечения биссектрис углов A и B лежит на стороне CD.

2.49*. Диагонали AC и CE правильного шестиугольника $ABCDEF$ разделены точками M и N так, что $AM : AC = CN : CE = \lambda$. Найдите λ, если известно, что точки B, M и N лежат на одной прямой.

2.50*. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ имеют соответственно параллельные стороны, причём стороны AB и A_1B_1 лежат на одной прямой. Докажите, что прямая, соединяющая точки пересечения описанных окружностей треугольников A_1BC и AB_1C, содержит точку C_1.

2.51*. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Прямая KL параллельна CC_1, причём точки K и L лежат на прямых BC и B_1C_1 соответственно. Докажите, что центр описанной окружности треугольника A_1KL лежит на прямой AC.

2.52*. Через точку O пересечения биссектрис треугольника ABC проведена прямая MN перпендикулярно CO, причём M и N лежат на сторонах AC и BC соответственно. Прямые AO и BO пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A' и B'. Докажите, что точка пересечения прямых $A'N$ и $B'M$ лежит на описанной окружности.

§ 6. Вписанный угол и подобные треугольники

2.53. На окружности взяты точки A, B, C и D. Прямые AB и CD пересекаются в точке M. Докажите, что $AC \cdot AD/AM = BC \cdot BD/BM$.

2.54. На окружности даны точки A, B и C, причём точка B более удалена от прямой l, касающейся окружности в точке A, чем C. Прямая AC пересекает прямую, проведённую через точку B параллельно l, в точке D. Докажите, что $AB^2 = AC \cdot AD$.

2.55. Прямая l касается окружности с диаметром AB в точке C; M и N — проекции точек A и B на прямую l, D — проекция точки C на AB. Докажите, что $CD^2 = AM \cdot BN$.

2.56. В треугольнике ABC проведена высота AH, а из вершин B и C опущены перпендикуляры BB_1 и CC_1 на прямую, проходящую через точку A. Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle HB_1C_1$.

2.57. На дуге BC окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC, взята произвольная точка P. Отрезки AP и BC пересекаются в точке Q. Докажите, что $1/PQ = 1/PB + 1/PC$.

2.58. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки E и F так, что $\angle EAF = 45^\circ$. Отрезки AE и AF пересекают диагональ BD в точках P и Q. Докажите, что $S_{AEF}/S_{APQ} = 2$.

2.59. Прямая, проходящая через вершину C равнобедренного треугольника ABC, пересекает основание AB в точке M, а описанную окружность в точке N. Докажите, что $CM\cdot CN=AC^2$ и $CM/CN=$ $=AM\cdot BM/(AN\cdot BN)$.

2.60. Дан параллелограмм $ABCD$ с острым углом при вершине A. На лучах AB и CB отмечены точки H и K соответственно так, что $CH=BC$ и $AK=AB$. Докажите, что:

а) $DH=DK$;

б) $\triangle DKH\sim\triangle ABK$.

2.61. а) Стороны угла с вершиной C касаются окружности в точках A и B. Из точки P, лежащей на окружности, опущены перпендикуляры PA_1, PB_1 и PC_1 на прямые BC, CA и AB. Докажите, что $PC_1^2=PA_1\cdot PB_1$ и $PA_1:PB_1=PB^2:PA^2$.

б) Из произвольной точки O вписанной окружности треугольника ABC опущены перпендикуляры OA', OB', OC' на стороны треугольника ABC и перпендикуляры OA'', OB'', OC'' на стороны треугольника с вершинами в точках касания. Докажите, что $OA'\cdot OB'\cdot OC'=$ $=OA''\cdot OB''\cdot OC''$.

2.62. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Расстояния от точки E до прямых AB, BC и CD равны a, b и c соответственно. Найдите расстояние от точки E до прямой AD.

2.63. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1; B_2 и C_2 — середины высот BB_1 и CC_1. Докажите, что $\triangle A_1B_2C_2\sim\triangle ABC$.

2.64. На высотах треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1, делящие их в отношении $2:1$, считая от вершины. Докажите, что $\triangle A_1B_1C_1\sim\triangle ABC$.

2.65*. Окружность S_1 с диаметром AB пересекает окружность S_2 с центром A в точках C и D. Через точку B проведена прямая, пересекающая S_2 в точке M, лежащей внутри S_1, а S_1 в точке N. Докажите, что $MN^2=CN\cdot ND$.

2.66*. Через середину C произвольной хорды AB окружности проведены две хорды KL и MN (точки K и M лежат по одну сторону от AB). Отрезки KN и ML пересекают AB в точках Q и P. Докажите, что $PC=QC$ (*задача о бабочке*).

2.67*. а) Окружность, проходящая через точку C, пересекает стороны BC и AC треугольника ABC в точках A_1 и B_1, а его описанную окружность в точке M. Докажите, что $\triangle AB_1M\sim\triangle BA_1M$.

б) На лучах AC и BC отложены отрезки AA_1 и BB_1, равные полупериметру треугольника ABC. M — такая точка его описанной окружности, что $CM\parallel A_1B_1$. Докажите, что $\angle CMO=90^\circ$, где O — центр вписанной окружности.

См. также задачу 2.27 б).

§ 7. Биссектриса делит дугу пополам

2.68. В треугольнике ABC стороны AC и BC не равны. Докажите, что биссектриса угла C делит пополам угол между медианой и высотой, проведёнными из этой вершины, тогда и только тогда, когда $\angle C = 90^\circ$.

2.69. Известно, что в некотором треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведённые из вершины C, делят угол на четыре равные части. Найдите углы этого треугольника.

2.70. Докажите, что в любом треугольнике ABC биссектриса AE лежит между медианой AM и высотой AH.

2.71. Дан треугольник ABC. На его стороне AB выбирается точка P и через неё проводятся прямые PM и PN, параллельные AC и BC соответственно (точки M и N лежат на сторонах BC и AC); Q — точка пересечения описанных окружностей треугольников APN и BPM. Докажите, что все прямые PQ проходят через фиксированную точку.

2.72. Продолжение биссектрисы AD остроугольного треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке E. Из точки D на стороны AB и AC опущены перпендикуляры DP и DQ. Докажите, что $S_{ABC} = S_{APEQ}$.

§ 8. Вписанный четырёхугольник с перпендикулярными диагоналями

В этом параграфе $ABCD$ — вписанный четырёхугольник, диагонали которого перпендикулярны. Мы будем использовать также следующие обозначения: O — центр описанной окружности четырёхугольника $ABCD$, P — точка пересечения диагоналей.

2.73. Докажите, что ломаная AOC делит $ABCD$ на две фигуры равной площади.

2.74. Известен радиус описанной окружности R.

а) Найдите $AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2$.

б) Найдите сумму квадратов сторон четырёхугольника $ABCD$.

2.75. Найдите сумму квадратов диагоналей, если известны длина отрезка OP и радиус окружности R.

2.76. Из вершин A и B опущены перпендикуляры на CD, пересекающие прямые BD и AC в точках K и L соответственно. Докажите, что $AKLB$ — ромб.

2.77. Докажите, что площадь четырёхугольника $ABCD$ равна $(AB \cdot CD + BC \cdot AD)/2$.

2.78. Докажите, что расстояние от точки O до стороны AB равно половине длины стороны CD.

2.79. Докажите, что прямая, проведённая из точки P перпендикулярно BC, делит сторону AD пополам.

2.80. Докажите, что середины сторон четырёхугольника $ABCD$ и проекции точки P на стороны лежат на одной окружности.

2.81. а) Через вершины A, B, C и D проведены касательные к описанной окружности. Докажите, что образованный ими четырёхугольник вписанный.

б) Четырёхугольник $KLMN$ вписанный и описанный одновременно; A и B — точки касания вписанной окружности со сторонами KL и LM. Докажите, что $AK \cdot BM = r^2$, где r — радиус вписанной окружности.

См. также задачу 5.45.

§ 9. Три описанные окружности пересекаются в одной точке

2.82. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены треугольники ABC', $AB'C$ и $A'BC$, причём сумма углов при вершинах A', B' и C' кратна 180°. Докажите, что описанные окружности построенных треугольников пересекаются в одной точке.

2.83. а) На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC (или на их продолжениях) взяты точки A_1, B_1 и C_1, отличные от вершин треугольника. Докажите, что описанные окружности треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C пересекаются в одной точке.

б) Точки A_1, B_1 и C_1 перемещаются по прямым BC, CA и AB так, что все треугольники $A_1B_1C_1$ подобны одному и тому же треугольнику. Докажите, что точка пересечения описанных окружностей треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C остаётся при этом неподвижной. (Треугольники предполагаются не только подобными, но и одинаково ориентированными.)

2.84. Точки A_1, B_1, C_1 движутся по прямым BC, CA, AB так, что все треугольники $A_1B_1C_1$ подобны одному и тому же треугольнику (треугольники предполагаются не только подобными, но и одинаково ориентированными). Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ имеет минимальный размер тогда и только тогда, когда перпендикуляры, восставленные из точек A_1, B_1, C_1 к прямым BC, CA, AB пересекаются в одной точке.

2.85. Внутри треугольника ABC взята точка X. Прямые AX, BX и CX пересекают стороны треугольника в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что если описанные окружности треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C пересекаются в точке X, то X — точка пересечения высот треугольника ABC.

2.86*. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1. Докажите, что если треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны и противоположно ориентированы, то описанные окружности треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C проходят через центр описанной окружности треугольника ABC.

2.87*. Точки A', B' и C' симметричны некоторой точке P относительно сторон BC, CA и AB треугольника ABC.

а) Докажите, что описанные окружности треугольников $AB'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$ и ABC имеют общую точку.

б) Докажите, что описанные окружности треугольников $A'BC$, $AB'C$, ABC' и $A'B'C'$ имеют общую точку Q.

в) Пусть I, J, K и O — центры описанных окружностей треугольников $A'BC$, $AB'C$, ABC' и $A'B'C'$. Докажите, что $QI : OI = QJ : OJ = QK : OK$.

См. также задачи 28.33, 28.34, 28.38.

§ 10. Точка Микеля

2.88. Четыре прямые образуют четыре треугольника.

а) Докажите, что описанные окружности этих треугольников имеют общую точку (*точка Микеля*).

б) Докажите, что центры описанных окружностей этих треугольников лежат на одной окружности, проходящей через точку Микеля.

2.89*. Прямая пересекает стороны AB, BC и CA треугольника (или их продолжения) в точках C_1, B_1 и A_1; O, O_a, O_b и O_c — центры описанных окружностей треугольников ABC, AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C; H, H_a, H_b и H_c — ортоцентры этих треугольников. Докажите, что:

а) $\triangle O_aO_bO_c \sim \triangle ABC$.

б) серединные перпендикуляры к отрезкам OH, O_aH_a, O_bH_b и O_cH_c пересекаются в одной точке.

2.90*. Четырёхугольник $ABCD$ вписанный. Докажите, что точка Микеля для прямых, содержащих его стороны, лежит на отрезке, соединяющем точки пересечения продолжений сторон.

2.91*. Точки A, B, C и D лежат на окружности с центром O. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, а описанные окружности треугольников AEC и BED пересекаются в точках E и P. Докажите, что:

а) точки A, D, P и O лежат на одной окружности;

б) $\angle EPO = 90°$.

2.92*. Даны четыре прямые. Докажите, что проекции точки Микеля на эти прямые лежат на одной прямой.

См. также задачи 19.46, 28.34, 28.36, 28.37.

§ 11. Разные задачи

2.93. В треугольнике ABC проведена высота AH; O — центр описанной окружности. Докажите, что $\angle OAH = |\angle B - \angle C|$.

2.94. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC, а AA' — диаметр его описанной окружности. Докажите, что отрезок $A'H$ делит сторону BC пополам.

2.95. Через вершины A и B треугольника ABC проведены две параллельные прямые, а прямые m и n симметричны им относительно биссектрис соответствующих углов. Докажите, что точка пересечения прямых m и n лежит на описанной окружности треугольника ABC.

2.96. а) Из точки A проведены прямые, касающиеся окружности S в точках B и C. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника ABC и центр его вневписанной окружности, касающейся стороны BC, лежат на окружности S.

б) Докажите, что окружность, проходящая через вершины B и C любого треугольника ABC и центр O его вписанной окружности, высекает на прямых AB и AC равные хорды.

2.97*. На сторонах AC и BC треугольника ABC внешним образом построены квадраты ACA_1A_2 и BCB_1B_2. Докажите, что прямые A_1B, A_2B_2 и AB_1 пересекаются в одной точке.

2.98*. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B, причём касательные к S_1 в этих точках являются радиусами S_2. На внутренней дуге S_1 взята точка C и соединена с точками A и B прямыми. Докажите, что вторые точки пересечения этих прямых с S_2 являются концами одного диаметра.

2.99*. Из центра O окружности опущен перпендикуляр OA на прямую l. На прямой l взяты точки B и C так, что $AB = AC$. Через точки B и C проведены две секущие, первая из которых пересекает окружность в точках P и Q, а вторая — в точках M и N. Прямые PM и QN пересекают прямую l в точках R и S. Докажите, что $AR = AS$ (*задача о бабочке*).

Задачи для самостоятельного решения

2.100. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1; M — середина стороны AB. Докажите, что $MA_1 = MB_1$.

2.101. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы A и C прямые. Докажите, что $AC = BD \cdot \sin ABC$.

2.102. Диагонали AD, BE и CF вписанного шестиугольника $ABCDEF$ пересекаются в одной точке. Докажите, что $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot AF$.

2.103. В выпуклом четырёхугольнике $AB = BC = CD$, M — точка пересечения диагоналей, K — точка пересечения биссектрис углов A и D. Докажите, что точки A, M, K и D лежат на одной окружности.

2.104. Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Прямая O_1A пересекает окружность с центром O_2 в точке N. Докажите, что точки O_1, O_2, B и N лежат на одной окружности.

2.105. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B. Прямая MN касается окружности S_1 в точке M и окружности S_2 в точке N. Пусть A — та из точек пересечения окружностей, которая более удалена от прямой MN. Докажите, что $\angle O_1AO_2 = 2\angle MAN$.

2.106. Дан четырёхугольник $ABCD$, вписанный в окружность, причём $AB = BC$. Докажите, что $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(DA + CD) \cdot h_b$, где h_b — высота треугольника ABD, опущенная из вершины B.

2.107. Четырёхугольник $ABCD$ вписанный, причём AC — биссектриса угла DAB. Докажите, что $AC \cdot BD = AD \cdot DC + AB \cdot BC$.

2.108. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведены биссектриса CM и высота CH. HD и HE — биссектрисы треугольников AHC и CHB. Докажите, что точки C, D, H, E и M лежат на одной окружности.

2.109. Две окружности проходят через вершину угла и точку его биссектрисы. Докажите, что отрезки, высекаемые ими на сторонах угла, равны.

2.110. Треугольник BHC, где H — ортоцентр треугольника ABC, достроен до параллелограмма $BHCD$. Докажите, что $\angle BAD = \angle CAH$.

2.111. Вне правильного треугольника ABC, но внутри угла BAC взята точка M так, что $\angle CMA = 30^\circ$ и $\angle BMA = \alpha$. Чему равен угол ABM?

2.112. Докажите, что если вписанный четырёхугольник с перпендикулярными диагоналями является также и описанным, то он симметричен относительно одной из диагоналей.

Решения

2.1. Проведём диаметр AD. Тогда $\angle CDA = \angle CBA$, а значит, $\angle BAH = \angle DAC$, так как $\angle BHA = \angle ACD = 90^\circ$.

2.2. Из свойств ориентированных углов имеем $\angle(AC, CK) = \angle(AM, MK) = \angle(BM, MK) = \angle(BD, DK) = \angle(BD, CK)$, т. е. $AC \parallel BD$.

2.3. Точки P и Q лежат на окружности с диаметром AM. Поэтому $\angle QMA = \angle QPA$ как углы, опирающиеся на одну дугу. Треугольники PAK и MAQ прямоугольные, следовательно, $\angle PAK = \angle MAQ$.

2.4. а) Так как $\angle AOM = \angle BAO + \angle ABO = (\angle A + \angle B)/2$ и $\angle OAM = \angle OAC + \angle CAM = \angle A/2 + \angle CBM = (\angle A + \angle B)/2$, то $MA = MO$. Аналогично $MC = MO$.

Так как треугольник OAO_b прямоугольный и $\angle AOM = \angle MAO = \varphi$, то $\angle MAO_b = \angle MO_bA = 90^\circ - \varphi$, а значит, $MA = MO_b$. Аналогично $MC = MO_b$.

б) Пусть P — центр описанной окружности треугольника ACO. Тогда $\angle COP = (180^\circ - \angle CPO)/2 = 90^\circ - \angle OAC$. Поэтому $\angle BOC = 90^\circ + \angle OAC$. Аналогично $\angle BOC = 90^\circ + \angle OAB$, а значит, $\angle OAB = \angle OAC$. Аналогично доказывается, что точка O лежит на биссектрисах углов B и C.

2.5. Пусть O — вершина данного прямого угла. Точки O и A лежат на окружности с диаметром BC, поэтому $\angle AOB = \angle ACB = \angle C$. Из этого следует, что точка A движется по прямой, образующей со стороной данного прямого угла угол, равный $\angle C$. В крайних положениях расстояния от точки A до точки O равны гипотенузе BC и наименьшему катету BA. Действительно, $OA = BC \sin\varphi$, где $\varphi = \angle OCA$. Угол φ изменяется от $\angle C$ до $90^\circ + \angle C = 180^\circ - \angle B$, поэтому наибольшее значение $\sin\varphi$ равно 1, а наименьшее значение равно наименьшему из чисел $\sin C$ и $\sin B$. Таким образом, длина отрезка, по которому движется точка A, равна разности между длиной гипотенузы и длиной наименьшего катета прямоугольного треугольника ABC.

З а м е ч а н и е 1. Аналогичное утверждение верно для любого треугольника ABC, вершины которого скользят по сторонам угла MON, равного $180^\circ - \angle A$.

Замечание 2. В случае, когда угол A не прямой, вершина A движется по эллипсу (задача 31.63).

2.6. Точки B, D и K лежат на окружности с диаметром AC. Пусть для определённости $\angle KCA=\varphi\leqslant 45^\circ$. Тогда $BK=AC\sin(45^\circ-\varphi)=AC(\cos\varphi-\sin\varphi)/\sqrt{2}$ и $DK=AC\sin(45^\circ+\varphi)=AC(\cos\varphi+\sin\varphi)/\sqrt{2}$. Ясно, что $AC\cos\varphi=CK$ и $AC\sin\varphi=AK$.

2.7. Так как $\angle B_1AA_1=\angle A_1BB_1$, точки A, B, A_1 и B_1 лежат на одной окружности. Параллельные прямые AB и A_1B_1 высекают на ней равные хорды AB_1 и BA_1. Поэтому $AC=BC$.

2.8. Построим на стороне BC треугольника ABC внешним образом правильный треугольник A_1BC. Пусть P — точка пересечения прямой AA_1 с описанной окружностью треугольника A_1BC. Тогда точка P лежит внутри треугольника ABC и $\angle APC=180^\circ-\angle A_1PC=180^\circ-\angle A_1BC=120^\circ$. Аналогично $\angle APB=120^\circ$.

2.9. Основания перпендикуляров, опущенных из точки M на диаметры, лежат на окружности S с диаметром OM (O — центр исходной окружности). Точки пересечения данных диаметров с окружностью S, отличные от точки O, делят её на n дуг. Так как на все дуги, не содержащие точку O, опираются углы $180^\circ/n$, то угловые величины этих дуг равны $360^\circ/n$. Поэтому угловая величина дуги, на которой лежит точка O, равна $360^\circ-(n-1)\cdot 360^\circ/n=$ $=360^\circ/n$. Следовательно, основания перпендикуляров делят окружность S на n равных дуг.

2.10. Ясно, что $\angle(AA_1, BB_1)=\angle(AA_1, AB_1)+\angle(AB_1, BB_1)=\angle(MA_1, MB_1)+$ $+\angle(AN, BN)$. Так как $MA_1\perp BN$ и $MB_1\perp AN$, то $\angle(MA_1, MB_1)=\angle(BN, AN)=$ $=-\angle(AN, BN)$. Поэтому $\angle(AA_1, BB_1)=0^\circ$, т. е. $AA_1\parallel BB_1$.

2.11. Ясно, что

$$\angle(AQ, QD)=\angle(AQ, QP)+\angle(PQ, QD)=\angle(AB, BP)+\angle(PC, CD),$$
$$\angle(CQ, QB)=\angle(CQ, QP)+\angle(PQ, QB)=\angle(CD, DP)+\angle(PA, AB).$$

Треугольники APB и CPD равнобедренные, поэтому $\angle(AB, BP)=\angle(PA, AB)$ и $\angle(PC, CD)=\angle(CD, DP)$. Следовательно, $\angle(AQ, QD)=\angle(CQ, QB)$.

2.12. Так как $AB\parallel DE$, то $\angle ACE=\angle BFD$, а так как $BC\parallel EF$, то $\angle CAE=$ $=\angle FDB$. Треугольники ACE и BDF имеют по два равных угла, поэтому третьи углы у них тоже равны. Из равенства этих углов следует равенство дуг AC и DF, т. е. параллельность хорд CD и AF.

2.13. Доказательство проведём индукцией по n. Для четырёхугольника утверждение очевидно, для шестиугольника оно было доказано в предыдущей задаче. Допустим, что утверждение доказано для $2(n-1)$-угольника, и докажем его для $2n$-угольника. Пусть $A_1\ldots A_{2n}$ есть $2n$-угольник, в котором $A_1A_2\parallel A_{n+1}A_{n+2}$, ..., $A_{n-1}A_n\parallel A_{2n-1}A_{2n}$. Рассмотрим $2(n-1)$-угольник $A_1A_2\ldots A_{n-1}A_{n+1}\ldots A_{2n-1}$. По предположению индукции при нечётном n получаем $A_{n-1}A_{n+1}=A_{2n-1}A_1$, при чётном n получаем $A_{n-1}A_{n+1}\parallel A_{2n-1}A_1$.

Рассмотрим треугольник $A_{n-1}A_nA_{n+1}$ и треугольник $A_{2n-1}A_{2n}A_1$. Пусть n чётно. Тогда векторы $\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$ и $\overrightarrow{A_{2n-1}A_{2n}}$, $\overrightarrow{A_{n-1}A_{n+1}}$ и $\overrightarrow{A_{2n-1}A_1}$ параллельны и противоположно направлены, поэтому $\angle A_nA_{n-1}A_{n+1}=\angle A_1A_{2n-1}A_{2n}$ и $A_nA_{n+1}=A_{2n}A_1$ как хорды, отсекающие равные дуги, что и требовалось. Пусть n нечётно. Тогда $A_{n-1}A_{n+1}=A_{2n-1}A_1$, т. е. $A_1A_{n-1}\parallel A_{n+1}A_{2n-1}$. В шестиугольнике $A_{n-1}A_nA_{n+1}A_{2n-1}A_{2n}A_1$ имеем $A_1A_{n-1}\parallel A_{n+1}A_{2n-1}$, $A_{n-1}A_n\parallel A_{2n-1}A_{2n}$, поэтому согласно предыдущей задаче $A_nA_{n+1}\parallel A_{2n}A_1$, что и требовалось.

2.14. Пусть прямые FG, GE и EF проходят через точки A, B и C, причём треугольник EFG равносторонний, т. е. $\angle(GE, EF) = \angle(EF, FG) = \angle(FG, GE) = \pm 60^\circ$. Тогда $\angle(BE, EC) = \angle(CF, FA) = \angle(AG, GB) = \pm 60^\circ$. Выбрав один из знаков, получим три окружности S_E, S_F и S_G, на которых должны лежать точки E, F и G. Любая точка E окружности S_E однозначно определяет треугольник EFG.

Пусть O — центр треугольника EFG; P, R и Q — точки пересечения прямых OE, OF и OG с соответствующими окружностями S_E, S_F и S_G. Докажем, что P, Q и R — центры правильных треугольников, построенных на сторонах треугольника ABC (для одного семейства внешним образом, для другого внутренним), а точка O лежит на описанной окружности треугольника PQR. Ясно, что $\angle(CB, BP) = \angle(CE, EP) = \angle(EF, EO) = \mp 30^\circ$, а $\angle(BP, CP) = \angle(BE, EC) = \angle(GE, EF) = \pm 60^\circ$. Поэтому $\angle(CB, CP) = \angle(CB, BP) + \angle(BP, CP) = \pm 30^\circ$. Следовательно, P — центр правильного треугольника со стороной AB. Для точек Q и R доказательство аналогично. Треугольник PQR равносторонний, причём его центр совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC (см. задачу 1.50 б). Можно проверить, что $\angle(PR, RQ) = \mp 60^\circ = \angle(OE, OG) = \angle(OP, OQ)$, т. е. точка O лежит на описанной окружности треугольника PQR.

2.15. Ясно, что $2(\angle KEC + \angle KDC) = (\smile MB + \smile AC) + (\smile MB + \smile BC) = 360^\circ$, так как $\smile MB = \smile AM$.

2.16. Обозначим угловую величину дуги, высекаемой сторонами треугольника ABC на окружности, через α. Рассмотрим дугу, высекаемую продолжениями сторон треугольника на окружности, и обозначим её угловую величину через α'. Тогда $(\alpha + \alpha')/2 = \angle BAC = 60^\circ$. Но $\alpha = \alpha'$, так как эти дуги симметричны относительно прямой, проходящей через центр окружности параллельно стороне BC. Поэтому $\alpha = \alpha' = 60^\circ$.

2.17. Так как $\angle APB = (\smile AB + \smile CD)/2 = \angle AOB$, точка O лежит на описанной окружности треугольника APB.

2.18. Пусть O — точка пересечения прямых A_1C_1 и B_1D_1; α, β, γ и δ — угловые величины дуг AB, BC, CD и DA. Тогда

$$\angle A_1OB_1 = (\smile A_1B + \smile BB_1 + \smile C_1D + \smile DD_1)/2 = (\alpha + \beta + \gamma + \delta)/4 = 90^\circ.$$

2.19. Складывая равенства $\smile C'A + \smile CA' = 2(180^\circ - \angle APC) = 240^\circ - 2\angle B$ и $\smile AB' + \smile BA' = 240^\circ - 2\angle C$, а затем вычитая из их суммы равенство $\smile BA' + \smile CA' = 2\angle A$, получаем $\smile C'B' = \smile C'A + \smile AB' = 480^\circ - 2(\angle A + \angle B + \angle C) = 120^\circ$. Аналогично $\smile B'A' = \smile C'A' = 120^\circ$.

2.20. а) Докажем, например, что $AA_1 \perp C_1B_1$. Пусть M — точка пересечения этих отрезков. Тогда $\angle AMB_1 = (\smile AB_1 + \smile A_1B + \smile BC_1)/2 = \angle ABB_1 + \angle A_1AB + \angle BCC_1 = (\angle B + \angle A + \angle C)/2 = 90^\circ$.

б) Пусть M_1 и M_2 — точки пересечения отрезков AA_1 и BC, BB_1 и AC. Прямоугольные треугольники AM_1C и BM_2C имеют общий угол C, поэтому $\angle B_1BC = \angle A_1AC$, а значит, $\smile B_1C = \smile A_1C$ и $\angle B_1C_1C = \angle A_1C_1C$, т. е. CC_1 — биссектриса угла $A_1C_1B_1$.

2.21. Обозначим вершины треугольника T_1 через A, B и C; середины дуг BC, CA, AB через A_1, B_1, C_1. Тогда $T_2 = A_1B_1C_1$. Прямые AA_1, BB_1, CC_1 являются биссектрисами треугольника T_1, поэтому они пересекаются в одной точке O. Пусть прямые AB и C_1B_1 пересекаются в точке K. Достаточно проверить, что $KO \parallel AC$. В треугольнике AB_1O прямая B_1C_1 является биссектрисой и высотой (задача 2.20 а), поэтому этот треугольник равнобедренный. Следовательно, треугольник AKO тоже равнобедренный. Прямые KO и AC параллельны, так как $\angle KOA = \angle KAO = \angle OAC$.

2.22. Пусть l — касательная в точке A к первой окружности. Тогда $\angle(l, AP) = \angle(AQ, PQ) = \angle(BC, PB)$, а значит, $l \parallel BC$.

2.23. Так как $\angle(AB, AD) = \angle(AP, PD) = \angle(AB, BC)$, то $BC \parallel AD$.

2.24. Ясно, что $\angle(AB, BS) = \angle(AQ, QB)$ и $\angle(BA, AQ) = \angle(BS, SA)$. Поэтому $\angle(BA, AS) = \angle(AB, BQ)$, а значит, $PS \parallel QR$. Далее, $\angle(AP, PQ) = \angle(AB, BQ) = \angle(AS, SR)$, поэтому $PQ \parallel SR$.

2.25. Пусть для определённости точка E лежит на луче BC. Тогда $\angle ABC = \angle EAC$ и $\angle ADE = \angle ABC + \angle BAD = \angle EAC + \angle CAD = \angle DAE$.

2.26. Пусть P — вторая точка пересечения окружностей. Тогда $\angle(AB, DB) = \angle(PA, PB)$ и $\angle(DC, AC) = \angle(PC, PA)$. Складывая эти равенства, получаем $\angle(DC, DB) = \angle(PC, PB) = \angle(PC, CA) + \angle(BA, PB)$; последние два угла опираются на постоянные дуги.

2.27. а) Так как $\angle MAB = \angle BNA$, то сумма углов ABN и MAN равна сумме углов треугольника ABN.

б) Так как $\angle BAM = \angle BNA$ и $\angle BAN = \angle BMA$, то $\triangle AMB \sim \triangle NAB$, а значит, $AM : NA = MB : AB$ и $AM : NA = AB : NB$. Перемножая эти равенства, получаем требуемое.

2.28. Пусть A_1 и B_1 — точки пересечения прямых MA и MB с меньшей окружностью. Так как M — центр гомотетии окружностей, то $A_1B_1 \parallel AB$. Поэтому $\angle A_1MT = \angle A_1TA = \angle B_1A_1T = \angle B_1MT$.

2.29. Пусть φ — угол между хордой AB и касательной, проходящей через один из её концов. Тогда $AB = 2R\sin\varphi$, где R — радиус окружности S. Кроме того, $PM = AM\sin\varphi$ и $QM = BM\sin\varphi$. Поэтому

$$\frac{1}{PM} + \frac{1}{QM} = \frac{AM + BM}{\sin\varphi} AM \cdot BM = \frac{2R}{AM \cdot BM}.$$

Величина $AM \cdot BM$ не зависит от выбора хорды AB.

2.30. Пусть прямая AM вторично пересекает окружность S_2 в точке D. Тогда $\angle MDC = \angle MCA = \angle MAB$, поэтому $CD \parallel AB$. Далее, $\angle CAM = \angle MCB = \angle MDB$, поэтому $AC \parallel BD$. Таким образом, $ABCD$ — параллелограмм, и его диагональ AD делит диагональ BC пополам.

2.31. Проведём прямую l_1, касающуюся S_1 в точке A_1. Прямая K_1K_2 касается S_1 тогда и только тогда, когда $\angle(K_1K_2, K_1A_1) = \angle(K_1A_1, l_1)$. Ясно также, что $\angle(K_1A_1, l_1) = \angle(A_1B, l_1) = \angle(A_2B, A_1A_2)$. Аналогично прямая K_1K_2 касается S_2 тогда и только тогда, когда $\angle(K_1K_2, K_2A_2) = \angle(A_1B, A_1A_2)$. Остаётся заметить, что если $\angle(K_1K_2, K_1A_1) = \angle(A_2B, A_1A_2)$, то $\angle(K_1K_2, K_2A_2) = \angle(K_1K_2, A_2B) = \angle(K_1K_2, A_1B) + \angle(A_1B, A_1A_2) + \angle(A_1A_2, A_2B) = \angle(A_1B, A_1A_2)$.

2.32. На хорды AC и A_1C_1 опираются равные углы ABC и $A_1B_1C_1$, поэтому $AC = A_1C_1$.

2.33. Обозначим центр окружности через O. Точки P и Q лежат на окружности с диаметром OM, т. е. точки O, P, Q и M лежат на окружности постоянного радиуса $R/2$. При этом либо $\angle POQ = \angle AOD$, либо $\angle POQ = \angle BOD = 180^\circ - \angle AOD$, т. е. длина хорды PQ постоянна.

2.34. Так как $\angle AOC = 90^\circ + \angle B/2$ (см. задачу 5.3), то $\angle EBD + \angle EOD = 90^\circ + 3\angle B/2 = 180^\circ$, а значит, четырёхугольник $BEOD$ вписанный. На хорды EO и OD опираются равные углы EBO и OBD, поэтому $EO = OD$.

2.35. Возьмём на продолжении отрезка BD за точку D такую точку Q, что $\angle ACQ = 40^\circ$. Пусть P — точка пересечения прямых AB и QC. Тогда $\angle BPC = 60^\circ$ и D — точка пересечения биссектрис углов треугольника BCP. Согласно задаче 2.34 $AD = DQ$. Кроме того, $\angle BQC = \angle BCQ = 80^\circ$. Следовательно, $BC = BD + DQ = BD + DA$.

2.36. Достаточно проверить, что внешний угол ACD треугольника BCD в два раза больше угла при вершине B. Ясно, что $\angle ACD = \angle AOD = 2\angle ABD$.

2.37. Если точка M лежит внутри треугольника ABC, то $\angle MAC < 45^\circ < \angle MCD$. Легко также проверить, что на сторонах треугольников ABC и ACD точка M лежать не может, поэтому она лежит внутри треугольника ACD. При этом $\angle AMC = 180^\circ - \angle MAC - (45^\circ - \angle MCD) = 135^\circ$. Это означает, что точка M лежит на дуге окружности радиуса AB с центром B. Поэтому по теореме о вписанном угле $\angle ABM = 2\angle ACM = 90^\circ - 2\alpha$.

2.38. Пусть O — центр окружности S. Точка B является центром описанной окружности треугольника ACD, поэтому $\angle CDA = \angle ABC/2 = 30^\circ$, а значит, $\angle EOA = 2\angle EDA = 60^\circ$, т. е. треугольник EOA равносторонний. Кроме того, $\angle AEC = \angle AED = \angle AOB = 2\angle AOC$, поэтому точка E является центром описанной окружности треугольника AOC. Следовательно, $EC = EO$.

2.39. Рассмотрим два положения подвижной окружности: в первый момент, когда точка K попадает на неподвижную окружность (точку касания окружностей в этот момент мы обозначим через K_1), и какой-нибудь другой (второй) момент. Пусть O — центр неподвижной окружности, O_1 и O_2 — положения центра подвижной окружности в первый и во второй моменты соответственно, K_2 — положение точки K во второй момент. A — точка касания окружностей во второй момент. Поскольку окружность катится без проскальзывания, длина дуги K_1A равна длине дуги K_2A. Так как радиус подвижной окружности в два раза меньше, $\angle K_2O_2A = 2\angle K_1OA$. Точка O лежит на подвижной окружности, поэтому $\angle K_2OA = \angle K_2O_2A/2 = \angle K_1OA$, т. е. точки K_2, K_1 и O лежат на одной прямой.

Траектория движения — диаметр неподвижной окружности.

2.40. В треугольнике ABC сторона BC наименьшая, поэтому серединные перпендикуляры к сторонам AC и AB пересекают стороны AB и AC, а не их продолжения. Из этого следует, что точка Y лежит внутри треугольника ABC.

Пусть прямые BC_1 и CB_1 пересекают описанную окружность в точках B_2 и C_2. Точка B_1 лежит на серединном перпендикуляре к стороне AC_1, поэтому $\angle XAC = \angle B_1AC = \angle B_1CA = \angle C_2CA$. Аналогично $\angle XAB = \angle B_2BA$. Следовательно, дуги BC и B_2C_2 равны, а значит, хорды BC_2 и B_2C параллельны. Поэтому $BY = YC_2$, а значит, $BY + CY = CY + YC_2 = CC_2 = AX$, поскольку отрезки CC_2 и AX симметричны относительно серединного перпендикуляра к отрезку AC.

2.41. Точки N и C лежат на окружности с диаметром AM. Углы MAN и MCN опираются на одну дугу, поэтому они равны.

2.42. При симметрии относительно биссектрисы угла BOC прямые AC и DB переходят друг в друга, поэтому нужно доказать, что $\angle C'AB' = \angle B'DC'$. Так как $BO = B'O$, $CO = C'O$ и $AO : DO = CO : BO$, то $AO \cdot B'O = DO \cdot C'O$, т. е. четырёхугольник $AC'B'D$ вписанный и $\angle C'AB' = \angle B'DC'$.

2.43. Обозначим точки пересечения и углы так, как показано на рис. 2.1. Достаточно проверить, что $x = 90^\circ$. Углы четырёхугольника $BMRN$ равны $180^\circ - \varphi$, $\alpha + \varphi$, $\beta + \varphi$ и x, поэтому равенство $x = 90^\circ$ эквивалентно равенству

$(2\alpha+\varphi)+(2\beta+\varphi)=180^\circ$. Остаётся заметить, что $2\alpha+\varphi=\angle BAD$ и $2\beta+\varphi=\angle BCD$.

2.44. а) Достаточно доказать, что если P_1 — точка биссектрисы угла B (или её продолжения), из которой отрезок BC виден под углом 90°, то P_1 лежит на прямой MN. Точки P_1 и N лежат на окружности с диаметром CO, где O — точка пересечения биссектрис, поэтому $\angle(P_1N, NC)=\angle(P_1O, OC)=(180^\circ-\angle A)/2=\angle(MN, NC)$.

б) Так как $\angle BPC=90^\circ$, то $BP=BC\cos(B/2)$, поэтому $S_{ABP}:S_{ABC}=(BP\sin(B/2)):(BC\sin B)=1:2$.

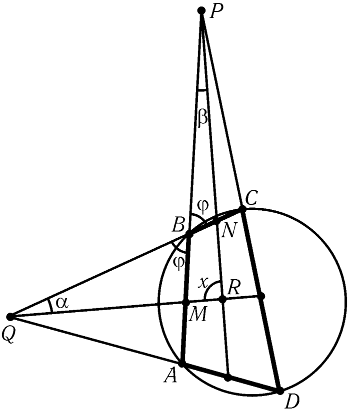


Рис. 2.1

2.45. Возьмём точку N так, что $BN\parallel MC$ и $NC\parallel BM$. Тогда $NA\parallel CD$, $\angle NCB=\angle CBM=\angle CDM=\angle NAB$, т. е. точки A, B, N и C лежат на одной окружности. Поэтому $\angle ACD=\angle NAC=\angle NBC=\angle BCM$.

2.46. Четыре точки A_2, B_2, C и P лежат на одной окружности, поэтому $\angle(A_2B_2, B_2P)=\angle(A_2C, CP)=\angle(BC, CP)$. Аналогично $\angle(B_2P, B_2C_2)=\angle(AP, BA)$. Поэтому $\angle(A_2B_2, B_2C_2)=\angle(BC, CP)+\angle(AP, AB)=\angle(B_1B, B_1C_1)+\angle(A_1B_1, B_1B)=\angle(A_1B_1, B_1C_1)$. Аналогично проверяется, что и все другие углы треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны или составляют в сумме 180°; следовательно, эти треугольники подобны (см. задачу 5.48).

2.47. Точки Q' и C лежат на окружности с диаметром PQ, поэтому $\angle Q'CQ=\angle Q'PQ=30^\circ$. Следовательно, $\angle BCQ'=60^\circ$. Аналогично $\angle CBQ'=60^\circ$, а значит, треугольник $BQ'C$ правильный. Аналогично треугольник $CP'D$ правильный.

2.48. Пусть $\angle BAD=2\alpha$ и $\angle CBA=2\beta$; для определённости будем считать, что $\alpha\geqslant\beta$. Возьмём на стороне CD точку E так, что $DE=DA$. Тогда $CE=CD-AD=CB$. Угол при вершине C равнобедренного треугольника BCE равен $180^\circ-2\alpha$, поэтому $\angle CBE=\alpha$. Аналогично $\angle DAE=\beta$. Биссектриса угла B пересекает CD в некоторой точке F. Так как $\angle FBA=\beta=\angle AED$, четырёхугольник $ABFE$ вписанный, а значит, $\angle FAE=\angle FBE=\alpha-\beta$. Следовательно, $\angle FAD=\beta+(\alpha-\beta)=\alpha$, т. е. AF — биссектриса угла A.

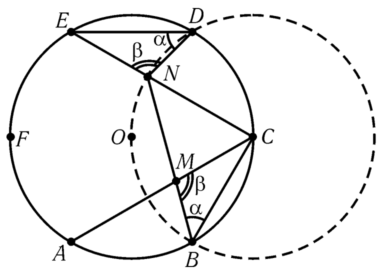


Рис. 2.2

2.49. Так как $ED=CB$, $EN=CM$ и $\angle DEC=\angle BCA=30^\circ$ (рис. 2.2), то $\triangle EDN=\triangle CBM$. Пусть $\angle MBC=\angle NDE=\alpha$, $\angle BMC=\angle END=\beta$. Ясно, что $\angle DNC=180^\circ-\beta$. Рассматривая треугольник BNC, получаем $\angle BNC=90^\circ-\alpha$. Поскольку $\alpha+\beta=180^\circ-30^\circ=150^\circ$, то $\angle DNB=\angle DNC+\angle CNB=(180^\circ-\beta)+(90^\circ-\alpha)=270^\circ-(\alpha+\beta)=120^\circ$. Поэтому точки B, O, N и D (O — центр шестиугольника) лежат на одной окружности. При этом $CO=CB=CD$, т. е. C — центр этой окружности, следовательно, $\lambda=CN:CE=CB:CA=1:\sqrt{3}$.

2.50. Пусть D — вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников A_1BC и AB_1C. Тогда $\angle(AC, CD)=\angle(AB_1, B_1D)$ и $\angle(DC, CB)=\angle(DA_1, A_1B)$.

Поэтому $\angle(A_1C_1, C_1B_1) = \angle(AC, CB) = \angle(AC, CD) + \angle(DC, CB) = \angle(AB_1, B_1D) + \angle(DA_1, A_1B) = \angle(A_1D, DB_1)$, т. е. точки A_1, B_1, C_1 и D лежат на одной окружности. Следовательно, $\angle(A_1C_1, C_1D) = \angle(A_1B_1, B_1D) = \angle(AC, CD)$. Учитывая, что $A_1C_1 \parallel AC$, получаем требуемое.

2.51. Пусть точка M симметрична точке A_1 относительно прямой AC. Согласно задаче 1.58 точка M лежит на прямой B_1C_1. Поэтому $\angle(LM, MA_1) = \angle(C_1B_1, B_1B) = \angle(C_1C, CB) = \angle(LK, KA_1)$, т. е. точка M лежит на описанной окружности треугольника A_1KL. Следовательно, центр этой окружности лежит на прямой AC — серединном перпендикуляре к отрезку A_1M.

2.52. Пусть PQ — диаметр, перпендикулярный AB, причём Q и C лежат по одну сторону от AB; L — точка пересечения прямой QO с описанной окружностью; M' и N' — точки пересечения прямых LB' и LA' со сторонами AC и BC. Достаточно проверить, что $M' = M$ и $N' = N$.

Так как $\smile PA + \smile AB' + \smile B'Q = 180^\circ$, то $\smile B'Q = \angle A$, а значит, $\angle B'LQ = \angle M'AO$. Следовательно, четырёхугольник $AM'OL$ вписанный и $\angle M'OA = \angle M'LA = \angle B/2$. Поэтому $\angle CM'O = (\angle A + \angle B)/2$, т. е. $M' = M$. Аналогично $N' = N$.

2.53. Так как $\triangle ADM \sim \triangle CBM$ и $\triangle ACM \sim \triangle DBM$, то $AD : CB = DM : BM$ и $AC : DB = AM : DM$. Остаётся перемножить эти равенства.

2.54. Пусть D_1 — точка пересечения прямой BD с окружностью, отличная от точки B. Тогда $\smile AB = \smile AD_1$, поэтому $\angle ACB = \angle AD_1B = \angle ABD_1$. Треугольники ACB и ABD имеют общий угол A и, кроме того, $\angle ACB = \angle ABD$, поэтому $\triangle ACB \sim \triangle ABD$. Следовательно, $AB : AC = AD : AB$.

2.55. Пусть O — центр окружности. Так как $\angle MAC = \angle ACO = \angle CAO$, то $\triangle AMC = \triangle ADC$. Аналогично $\triangle CDB = \triangle CNB$. Так как $\triangle ACD \sim \triangle CDB$, то $CD^2 = AD \cdot DB = AM \cdot NB$.

2.56. Точки B_1 и H лежат на окружности с диаметром AB, поэтому $\angle(AB, BC) = \angle(AB, BH) = \angle(AB_1, B_1H) = \angle(B_1C_1, B_1H)$. Аналогично имеем $\angle(AC, BC) = \angle(B_1C_1, C_1H)$.

2.57. На продолжении отрезка BP за точку P возьмём точку D так, что $PD = CP$. Тогда треугольник CDP правильный и $CD \parallel QP$. Поэтому $BP : PQ = BD : DC = (BP + CP) : CP$, т. е. $\frac{1}{PQ} = \frac{1}{CP} + \frac{1}{BP}$.

2.58. Отрезок QE виден из точек A и B под углом 45°, поэтому четырёхугольник $ABEQ$ вписанный. А так как $\angle ABE = 90^\circ$, то $\angle AQE = 90^\circ$. Следовательно, треугольник AQE прямоугольный равнобедренный и $AE/AQ = \sqrt{2}$. Аналогично $AF/AP = \sqrt{2}$.

2.59. Так как $\angle ANC = \angle ABC = \angle CAB$, то $\triangle CAM \sim \triangle CNA$, а значит, $CA : CM = CN : CA$, т. е. $CM \cdot CN = AC^2$, и $AM : NA = CM : CA$. Аналогично $BM : NB = CM : CB$. Поэтому $AM \cdot BM/(AN \cdot BN) = CM^2/CA^2 = CM^2/(CM \cdot CN) = CM/CN$.

2.60. Так как $AK = AB = CD$, $AD = BC = CH$ и $\angle KAD = \angle DCH$, то $\triangle ADK = \triangle CHD$ и $DK = DH$. Покажем, что точки A, K, H, C и D лежат на одной окружности. Опишем вокруг треугольника ADC окружность. Проведём в этой окружности хорду CK_1 параллельно AD и хорду AH_1 параллельно DC. Тогда $K_1A = DC$ и $H_1C = AD$. Значит, $K_1 = K$ и $H_1 = H$, т. е. построенная окружность проходит через точки K и H и углы KAH и KDH равны, так как они опираются на одну дугу. Кроме того, уже было показано, что KDH — равнобедренный треугольник.

2.61. а) $\angle PBA_1 = \angle PAC_1$ и $\angle PBC_1 = \angle PAB_1$, поэтому прямоугольные треугольники PBA_1 и PAC_1, PAB_1 и PBC_1 подобны, т. е. $PA_1 : PB = PC_1 : PA$,

$PB_1 : PA = PC_1 : PB$. Перемножив эти равенства, получим $PA_1 \cdot PB_1 = PC_1^2$, а поделив их, получим $PA_1 : PB_1 = PB^2 : PA^2$.

б) Согласно а) $OA'' = \sqrt{OB' \cdot OC'}$, $OB'' = \sqrt{OA' \cdot OC'}$, $OC'' = \sqrt{OA' \cdot OB'}$. Перемножая эти равенства, получаем требуемое.

2.62. Пусть K, L, M и N — основания перпендикуляров, опущенных из точки E на прямые AB, BC, CD и DA. Точки K и N лежат на окружности с диаметром AE, поэтому $\angle(EK, KN) = \angle(EA, AN)$. Аналогично $\angle(EL, LM) = \angle(EC, CM) = \angle(EA, AN)$, а значит, $\angle(EK, KN) = \angle(EL, LM)$. Аналогично $\angle(EN, NK) = \angle(EA, AK) = \angle(EC, CB) = \angle(EM, ML)$. Следовательно, $\triangle EKN \sim \triangle ELM$, а значит, $EK : EN = EL : EM$, т. е. $EN = EK \cdot EM/EL = ac/b$.

2.63. Пусть H — точка пересечения высот, M — середина стороны BC. Точки A_1, B_2 и C_2 лежат на окружности с диаметром MH, поэтому $\angle(B_2A_1, A_1C_2) = \angle(B_2M, MC_2) = \angle(AC, AB)$. Кроме того, $\angle(A_1B_2, B_2C_2) = \angle(A_1H, HC_2) = \angle(BC, AB)$ и $\angle(A_1C_2, C_2B_2) = \angle(BC, AC)$.

2.64. Пусть M — точка пересечения медиан, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Точки A_1, B_1 и C_1 — проекции точки M на высоты, поэтому они лежат на окружности с диаметром MH. Следовательно, $\angle(A_1B_1, B_1C_1) = \angle(AH, HC) = \angle(BC, AB)$. Записывая аналогичные равенства для других углов, получаем требуемое.

2.65. Пусть прямые BM и DN вторично пересекают S_2 в точках L и C_1 соответственно. Докажем, что прямые DC_1 и CN симметричны относительно прямой AN. Так как $BN \perp NA$, достаточно проверить, что $\angle CNB = \angle BND$. Но дуги CB и BD равны. Дуги C_1M и CL симметричны относительно прямой AN, поэтому они равны, а значит, $\angle MDC_1 = \angle CML$. Кроме того, $\angle CNM = \angle MND$. Следовательно, $\triangle MCN \sim \triangle DMN$, т. е. $CN : MN = MN : DN$.

2.66. Опустим из точки Q перпендикуляры QK_1 и QN_1 на KL и NM, из точки P перпендикуляры PM_1 и PL_1 на NM и KL. Ясно, что $\dfrac{QC}{PC} = \dfrac{QK_1}{PL_1} = \dfrac{QN_1}{PM_1}$, т. е. $\dfrac{QC^2}{PC^2} = \dfrac{QK_1 \cdot QN_1}{PL_1 \cdot PM_1}$. Так как $\angle KNC = \angle MLC$ и $\angle NKC = \angle LMC$, то $QN_1 : PL_1 = QN : PL$ и $QK_1 : PM_1 = QK : PM$. Поэтому

$$\frac{QC^2}{PC^2} = \frac{QK \cdot QN}{PL \cdot PM} = \frac{AQ \cdot QB}{PB \cdot AP} = \frac{(AC - QC) \cdot (AC + QC)}{(AC - PC) \cdot (AC + PC)} = \frac{AC^2 - QC^2}{AC^2 - PC^2}.$$

Отсюда получаем $QC = PC$.

2.67. а) Так как $\angle CAM = \angle CBM$ и $\angle CB_1M = \angle CA_1M$, то $\angle B_1AM = \angle A_1BM$ и $\angle AB_1M = \angle BA_1M$.

б) Пусть M_1 — такая точка окружности S с диаметром CO, что $CM_1 \parallel A_1B_1$; M_2 — точка пересечения окружности S с описанной окружностью треугольника ABC; A_2 и B_2 — точки касания вписанной окружности со сторонами BC и AC. Достаточно проверить, что $M_1 = M_2$. Согласно задаче а) $\triangle AB_2M_2 \sim \triangle BA_2M_2$, поэтому $B_2M_2 : A_2M_2 = AB_2 : BA_2$. А так как $CA_1 = p - b = BA_2$ и $CB_1 = AB_2$, то

$$\frac{B_2M_1}{A_2M_1} = \frac{\sin B_2CM_1}{\sin A_2CM_1} = \frac{\sin CA_1B_1}{\sin CB_1A_1} = \frac{CB_1}{CA_1} = \frac{AB_2}{BA_2}.$$

На дуге A_2CB_2 окружности S существует единственная точка X, для которой $B_2X : A_2X = k$ (см. задачу 7.14), поэтому $M_1 = M_2$.

2.68. Пусть O — центр описанной окружности треугольника, M — середина стороны AB, H — основание высоты CH, D — середина той из дуг, задаваемых точками A и B, на которой не лежит точка C. $OD \parallel CH$, поэтому $\angle DCH = \angle MDC$. Биссектриса делит пополам угол между медианой и высотой тогда и только тогда, когда $\angle MCD = \angle DCH = \angle MDC = \angle ODC = \angle OCD$, т. е. $M = O$ и AB — диаметр окружности.

2.69. Пусть $\alpha = \angle A < \angle B$. Согласно предыдущей задаче $\angle C = 90^\circ$. Медиана CM делит треугольник ABC на два равнобедренных треугольника. $\angle ACM = \angle A = \alpha$, $\angle MCB = 3\alpha$, значит, $\alpha + 3\alpha = 90^\circ$, т. е. $\alpha = 22{,}5^\circ$. Поэтому $\angle A = 22{,}5^\circ$, $\angle B = 67{,}5^\circ$, $\angle C = 90^\circ$.

2.70. Пусть D — точка, в которой прямая AE пересекает описанную окружность. Точка D является серединой дуги BC. Поэтому $MD \parallel AH$, причём точки A и D лежат по разные стороны от прямой MH. Следовательно, точка E лежит на отрезке MH.

2.71. Ясно, что $\angle(AQ, QP) = \angle(AN, NP) = \angle(PM, MB) = \angle(QP, QB)$. Поэтому точка Q лежит на окружности, из которой отрезок AB виден под углом $2\angle(AC, CB)$, причём прямая QP делит дугу AB этой окружности пополам.

2.72. Точки P и Q лежат на окружности с диаметром AD; эта окружность пересекает сторону BC в точке F (F не совпадает с D, если $AB \neq AC$). Ясно, что $\angle(FC, CE) = \angle(BA, AE) = \angle(DA, AQ) = \angle(DF, FQ)$, т. е. $EC \parallel FQ$. Аналогично $BE \parallel FP$. Для завершения доказательства остаётся заметить, что площади треугольников, прилегающих к боковым сторонам трапеции, равны.

2.73. Пусть $\angle AOB = \alpha$ и $\angle COD = \beta$. Тогда $\alpha/2 + \beta/2 = \angle ADP + \angle PAD = 90^\circ$. А так как $2S_{AOB} = R^2 \sin\alpha$ и $2S_{COD} = R^2 \sin\beta$, где R — радиус описанной окружности, то $S_{AOB} = S_{COD}$. Аналогично $S_{BOC} = S_{AOD}$.

2.74. Пусть $\angle AOB = 2\alpha$ и $\angle COD = 2\beta$. Тогда $\alpha + \beta = \angle ADP + \angle PAD = 90^\circ$. Поэтому $(AP^2 + BP^2) + (CP^2 + DP^2) = AB^2 + CD^2 = 4R^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 4R^2$. Аналогично $BC^2 + AD^2 = 4R^2$.

2.75. Пусть M — середина AC, N — середина BD. $AM^2 = AO^2 - OM^2$, $BN^2 = BO^2 - ON^2$, поэтому $AC^2 + BD^2 = 4(R^2 - OM^2) + 4(R^2 - ON^2) = 8R^2 - 4(OM^2 + ON^2) = 8R^2 - 4OP^2$, так как $OM^2 + ON^2 = OP^2$.

2.76. Острые углы BLP и BDC имеют соответственно перпендикулярные стороны, поэтому они равны. Следовательно, $\angle BLP = \angle BDC = \angle BAP$. Кроме того, $AK \parallel BL$ и $AL \perp BK$. Поэтому $AKLB$ — ромб.

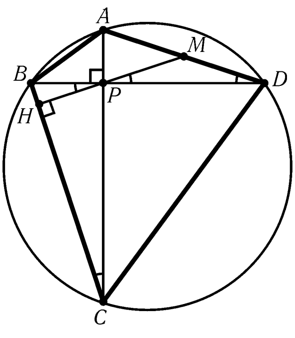


Рис. 2.3

2.77. Возьмём на описанной окружности точку D' так, что $DD' \parallel AC$. Так как $DD' \perp BD$, то BD' — диаметр, а значит, $\angle D'AB = \angle D'CB = 90^\circ$. Поэтому $S_{ABCD} = S_{ABCD'} = (AD' \cdot AB + BC \cdot CD')/2 = (AB \cdot CD + BC \cdot AD)/2$.

2.78. Проведём диаметр AE. $\angle BEA = \angle BCP$ и $\angle ABE = \angle BPC = 90^\circ$, поэтому $\angle EAB = \angle CBP$. Углы, опирающиеся на хорды EB и CD, равны, поэтому $EB = CD$. Так как $\angle EBA = 90^\circ$, расстояние от точки O до AB равно $EB/2$.

2.79. Пусть перпендикуляр, опущенный из точки P на BC, пересекает BC в точке H и AD в точке M (рис. 2.3). $\angle BDA = \angle BCA = \angle BPH = \angle MPD$. Из равенства углов MDP и MPD следует, что MP — медиана прямоугольного треугольника APD. В самом деле, $\angle APM = 90^\circ - \angle MPD = 90^\circ - \angle MDP = \angle PAM$, т. е. $AM = PM = MD$.

2.80. Середины сторон четырёхугольника $ABCD$ являются вершинами прямоугольника (см. задачу 1.2), поэтому они лежат на одной окружности. Пусть K и L — середины сторон AB и CD, M — точка пересечения прямых KP и CD. Согласно задаче 2.79 $PM \perp CD$, а значит, M — проекция точки P на сторону CD и точка M лежит на окружности с диаметром KL. Для остальных проекций доказательство аналогично.

2.81. а) Следует отметить, что так как точки A, B, C и D разбивают окружность на дуги, меньшие 180°, то построенный четырёхугольник содержит эту окружность. Угол φ между касательными, проведёнными через точки A и B, равен $180^\circ - \angle AOB$, а угол ψ между касательными, проведёнными через точки C и D, равен $180^\circ - \angle COD$. Так как $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$, то $\varphi + \psi = 180^\circ$.

Замечание. Обратно, из равенства $\varphi + \psi = 180^\circ$ следует, что $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$, т. е. $AC \perp BD$.

б) Пусть O — центр вписанной окружности. Так как $\angle AKO + \angle BMO = 90^\circ$, то $\angle AKO = \angle BOM$ и $\triangle AKO \sim \triangle BOM$. Следовательно, $AK \cdot BM = BO \cdot AO = r^2$.

2.82. Предположим сначала, что описанные окружности треугольников $A'BC$ и $AB'C$ не касаются и P — их общая точка, отличная от C. Тогда $\angle(PA, PB) = \angle(PA, PC) + \angle(PC, PB) = \angle(B'A, B'C) + \angle(A'C, A'B) = \angle(C'A, C'B)$, т. е. точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC'.

В случае, когда описанные окружности треугольников $A'BC$ и $AB'C$ касаются, т. е. $P = C$, требуются незначительные изменения: вместо прямой PC нужно взять общую касательную.

2.83. а) Применяя утверждение задачи 2.82 к треугольникам AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C, построенным на сторонах треугольника $A_1B_1C_1$, получаем требуемое.

б) Пусть P — точка пересечения указанных окружностей. Докажем, что величина угла $\angle(AP, PC)$ постоянна. Так как $\angle(AP, PC) = \angle(AP, AB) + \angle(AB, BC) + \angle(BC, PC)$, а угол $\angle(AB, BC)$ постоянен, то остаётся проверить, что сумма $\angle(AP, AB) + \angle(BC, PC)$ постоянна. Ясно, что $\angle(AP, AB) + \angle(BC, CP) = \angle(AP, AC_1) + \angle(CA_1, CP) = \angle(B_1P, B_1C_1) + \angle(B_1A_1, B_1P) = \angle(B_1A_1, B_1C_1)$, а величина последнего угла постоянна по условию. Аналогично доказывается, что величины углов $\angle(AP, PB)$ и $\angle(BP, PC)$ постоянны. Следовательно, точка P остаётся неподвижной.

2.84. Согласно задаче 2.83 б) описанные окружности треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C пересекаются в фиксированной точке P. Размер треугольника $A_1B_1C_1$ пропорционален длине отрезка PA_1. Длина этого отрезка минимальна, когда он перпендикулярен прямой BC. В этом случае отрезки PB_1 и PC_1 тоже должны быть минимальными.

2.85. Описанная окружность треугольника AB_1C_1 проходит через точку X, поэтому $\angle BXC = 180^\circ - \angle A$. Это означает, что точка X лежит на окружности, симметричной описанной окружности треугольника ABC относительно стороны BC. Ясно, что три окружности, симметричные описанной окружности треугольника относительно его сторон, не могут иметь более одной общей точки.

2.86. Как следует из задачи 2.83 б), доказательство достаточно провести лишь для одного такого треугольника $A_1B_1C_1$, например для треугольника с вершинами в серединах сторон треугольника ABC. Пусть H — точка пересечения высот треугольника $A_1B_1C_1$, т. е. центр описанной окружности треугольника ABC. Точки A_1 и B_1 лежат на окружности с диаметром CH, поэтому точка H лежит на описанной окружности треугольника A_1B_1C. Аналогично доказывается, что она лежит на описанных окружностях треугольников A_1BC_1 и AB_1C_1.

2.87. а) Пусть X — точка пересечения описанных окружностей треугольников ABC и $AB'C'$. Тогда $\angle(XB', XC) = \angle(XB', XA) + \angle(XA, XC) = \angle(C'B', C'A) + \angle(BA, BC)$. Так как $AC' = AP = AB'$, то треугольник $C'AB'$ равнобедренный, причём $\angle C'AB' = 2\angle A$, поэтому $\angle(C'B', C'A) = \angle A - 90^\circ$. Следовательно, $\angle(XB', XC) = \angle A - 90^\circ + \angle B = 90^\circ - \angle C = \angle(A'B', A'C)$, т. е. точка X лежит на описанной окружности треугольника $A'B'C$. Для описанной окружности треугольника $A'BC'$ доказательство аналогично.

б) Пусть X — точка пересечения описанных окружностей треугольников $A'B'C'$ и $A'BC$. Докажем, что она лежит на описанной окружности треугольника ABC'. Ясно, что $\angle(XB, XC') = \angle(XB, XA') + \angle(XA', XC') = \angle(CB, CA') + \angle(B'A', B'C')$. Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины отрезков PA', PB' и PC'. Тогда $\angle(CB, CA') = \angle(CP, CA_1) = \angle(B_1P, B_1A_1)$, $\angle(B'A', B'C') = \angle(B_1A_1, B_1C_1)$ и $\angle(AB, AC') = \angle(AP, AC_1) = \angle(B_1P, B_1C_1)$. Следовательно, $\angle(XB, XC') = \angle(AB, AC')$.

Аналогично доказывается, что точка X лежит на описанной окружности треугольника $AB'C$.

в) Так как QA' — общая хорда окружностей с центрами O и I, то $QA' \perp OI$. Аналогично $QB' \perp OJ$ и $QC \perp IJ$. Поэтому стороны углов OJI и $B'QC$, а также углов OIJ и $A'QC$ взаимно перпендикулярны, а значит, $\sin OJI = \sin B'QC$ и $\sin OIJ = \sin A'QC$. Следовательно, $OI : OJ = \sin OJI : \sin OIJ = \sin B'QC : A'QC$. Ясно также, что

$$\frac{QI}{QJ} = \frac{\sin QJI}{\sin QIJ} = \frac{\sin(QJC/2)}{\sin(QIC/2)} = \frac{\sin QB'C}{\sin QA'C},$$

поскольку точки C и Q симметричны относительно прямой IJ, а точки Q, B' и C лежат на окружности с центром J. Учитывая, что $\sin B'QC : \sin QB'C = B'C : QC$ и $\sin A'QC : \sin QA'C = A'C : QC$, получаем

$$\frac{OI}{OJ} : \frac{QI}{QJ} = \frac{B'C}{QC} : \frac{A'C}{QC} = 1.$$

2.88. а) Из условия задачи следует, что никакие три прямые не пересекаются в одной точке. Пусть прямые AB, AC, BC пересекают четвёртую прямую в точках D, E, F соответственно (рис. 2.4). Обозначим через P точку пересечения описанных окружностей треугольников ABC и CEF, отличную от точки C. Докажем, что точка Pпринадлежит описанной окружности треугольника BDF. Для этого достаточно проверить, что $\angle(BP, PF) = \angle(BD, DF)$. Ясно, что $\angle(BP, PF) = \angle(BP, PC) + \angle(PC, PF) = \angle(BA, AC) + \angle(EC, EF) = \angle(BD, AC) + \angle(AC, DF) = \angle(BD, DF)$. Аналогично доказывается, что точка P принадлежит описанной окружности треугольника ADE.

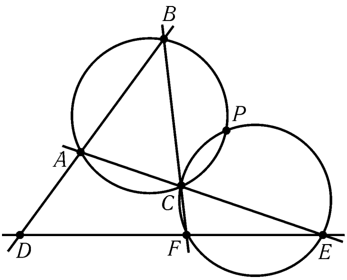


Рис. 2.4

Замечание. Другое доказательство приведено в решении задачи 19.46.

б) Воспользуемся обозначениями рис. 2.4. Согласно задаче а) описанные окружности треугольников ABC, ADE и BDF проходят через точку P, поэтому их можно рассмотреть как описанные окружности треугольников ABP, ADP и BDP. Следовательно, их центры лежат на окружности, проходящей через точку P (см. задачу 5.106). Аналогично доказывается, что центры любых трёх из данных окружностей лежат на окружности, проходящей через точку P. Следовательно, все четыре центра лежат на окружности, проходящей через точку P.

2.89. а) Пусть P — точка Микеля для прямых AB, BC, CA и A_1B_1. Углы между прямыми PA, PB, PC и касательными в точке P к окружностям S_a, S_b, S_c соответственно равны $\angle(AB_1, B_1P) = \angle(AC_1, C_1P)$, $\angle(BC_1, C_1P)$, $\angle(CA_1, A_1P)$. А так как $\angle(AC_1, C_1P) = \angle(BC_1, C_1P) = \angle(CA_1, A_1P) = \varphi$, то при повороте на угол φ с центром P прямые PA, PB и PC переходят в касательные к окружностям S_a, S_b и S_c, а значит, при повороте на угол $\varphi - 90^\circ$ эти прямые переходят в прямые PO_a, PO_b и PO_c. Кроме того, $PO_a/PA = PO_b/PB = PO_c/PC = 1/(2\sin\varphi)$. Следовательно, при повороте на $\varphi - 90^\circ$ и гомотетии с центром P и коэффициентом $1/(2\sin\varphi)$ треугольник ABC переходит в $O_aO_bO_c$.

б) Рассмотренное в решении задачи а) преобразование переводит центр O описанной окружности треугольника ABC в центр O' описанной окружности треугольника $O_aO_bO_c$, а ортоцентр H треугольника ABC в ортоцентр H' треугольника $O_aO_bO_c$. Достроим треугольник $OO'H'$ до параллелограмма $OO'H'M$. Так как $OH/OM = OH/O'H' = 2\sin\varphi$ и $\angle HOM = \angle(HO, O'H') = \varphi - 90^\circ$, то $MH = MO$, т. е. точка M лежит на серединном перпендикуляре к отрезку OH. Остаётся заметить, что для вписанного четырёхугольника $OO_aO_bO_c$ с точка M определена однозначно: взяв вместо точки O любую из точек O_a, O_b, O_c, получим ту же самую точку M (см. задачу 13.35).

2.90. Можно считать, что лучи AB и DC пересекаются в точке E, а лучи BC и AD — в точке F. Пусть P — точка пересечения описанных окружностей треугольников BCE и CDF. Тогда $\angle CPE = \angle ABC$ и $\angle CPF = \angle ADC$. Поэтому $\angle CPE + \angle CPF = 180^\circ$, т. е. точка P лежит на отрезке EF.

2.91. а) Так как $\angle(AP, PD) = \angle(AP, PE) + \angle(PE, PD) = \angle(AC, CD) + \angle(AB, BD) = \angle(AO, OD)$, точки A, P, D и O лежат на одной окружности.

б) Ясно, что $\angle(EP, PO) = \angle(EP, PA) + \angle(PA, PO) = \angle(DC, CA) + \angle(DA, DO) = 90^\circ$, так как дуги, на которые опираются эти углы, составляют половину окружности.

2.92. Воспользуемся обозначениями рис. 2.4. Проекции точки P на прямые CA и CB совпадают с её проекциями на CE и CF. Следовательно, прямые Симсона точки P относительно треугольников ABC и CEF совпадают (см. задачу 5.105 а).

2.93. Пусть точка A' симметрична точке A относительно серединного перпендикуляра к отрезку BC. Тогда $\angle OAH = \angle AOA'/2 = \angle ABA' = |\angle B - \angle C|$.

2.94. Так как AA' — диаметр, то $A'C \perp AC$, поэтому $BH \parallel A'C$. Аналогично $CH \parallel A'B$. Следовательно, $BA'CH$ — параллелограмм.

2.95. Пусть l — прямая, параллельная двум исходным прямым; D — точка пересечения прямых m и n. Тогда $\angle(AD, DB) = \angle(m, AB) + \angle(AB, n) = \angle(AC, l) + \angle(l, CB) = \angle(AC, CB)$, а значит, точка D лежит на описанной окружности треугольника ABC.

2.96. а) Пусть O — середина дуги окружности S, лежащей внутри треугольника ABC. Тогда $\angle CBO = \angle BCO$, а по свойству угла между касательной и хордой $\angle BCO = \angle ABO$. Поэтому BO — биссектриса угла ABC, т. е. O — центр вписанной окружности треугольника ABC.

Аналогично доказывается, что середина дуги окружности S, лежащей вне треугольника ABC, является центром его вневписанной окружности.

б) Требуется доказать, что центр рассматриваемой окружности S лежит на биссектрисе угла BAC. Пусть D — точка пересечения биссектрисы этого угла с описанной окружностью треугольника ABC. Тогда $DB = DO = DC$ (см. задачу 2.4 а), т. е. D — центр окружности S.

2.97. Если угол C прямой, то решение задачи очевидно: C является точкой пересечения прямых A_1B, A_2B_2, AB_1. Если же $\angle C \neq 90^\circ$, то описанные окружности квадратов ACA_1A_2 и BCB_1B_2 имеют кроме C ещё одну общую точку — точку C_1. Тогда $\angle(AC_1, A_2C_1) = \angle(A_2C_1, A_1C_1) = \angle(A_1C_1, C_1C) = \angle(C_1C, C_1B_1) = \angle(C_1B_1, C_1B_2) = \angle(C_1B_2, C_1B) = 45^\circ$ (или же -45°; важно лишь то, что все углы имеют один и тот же знак). Поэтому $\angle(AC_1, C_1B_1) = 4 \cdot 45^\circ = 180^\circ$, т. е. прямая AB_1 проходит через точку C_1. Аналогично A_2B_2 и A_1B проходят через точку C_1.

2.98. Пусть P и O — центры окружностей S_1 и S_2; $\alpha = \angle APC$, $\beta = \angle BPC$; прямые AC и BC пересекают S_2 в точках K и L. Так как $\angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$, то $\angle AOB = 180^\circ - \alpha - \beta$. Далее, $\angle LOB = 180^\circ - 2\angle LBO = 2\angle CBP = 180^\circ - \beta$. Аналогично $\angle KOA = 180^\circ - \alpha$. Поэтому $\angle LOK = \angle LOB + \angle KOA - \angle AOB = 180^\circ$, т. е. KL — диаметр.

2.99. Рассмотрим точки M', P', Q' и R', симметричные точкам M, P, Q и R относительно прямой OA. Так как точка C симметрична точке B относительно OA, прямая $P'Q'$ проходит через точку C. Легко проверяются следующие равенства: $\angle(CS, NS) = \angle(Q'Q, NQ) = \angle(Q'P', NP') = \angle(CP', NP')$ и, поскольку точки P', M' и R' лежат на одной прямой, $\angle(CR', P'R') = \angle(MM', P'M') = \angle(MN, P'N) = \angle(CN, P'N)$. Из этих равенств получаем, что точки C, N, P', S и R' лежат на одной окружности. Но точки S, R' и C лежат на одной прямой, поэтому $S = R'$.

ГЛАВА 3

ОКРУЖНОСТИ

Основные сведения

1. Прямую, имеющую ровно одну общую точку с окружностью, называют *касательной к окружности*.

Через любую точку A, лежащую вне окружности, можно провести ровно две касательные к окружности; пусть B и C — точки касания, O — центр окружности. Тогда:

а) $AB = AC$;

б) $\angle BAO = \angle CAO$;

в) $OB \perp AB$.

(Иногда касательной мы будем называть не прямую AB, а отрезок AB. Например, свойство а) можно сформулировать так: «касательные, проведённые из одной точки, равны».)

2. Пусть прямые l_1 и l_2, проходящие через точку A, пересекают окружность в точках B_1, C_1 и B_2, C_2 соответственно. Тогда $AB_1 \cdot AC_1 = AB_2 \cdot AC_2$. В самом деле, $\triangle AB_1C_2 \sim \triangle AB_2C_1$ по трём углам (советуем читателям самостоятельно доказать это, используя свойства вписанных углов и рассматривая два случая: A лежит вне окружности и A лежит внутри окружности).

Если прямая l_2 касается окружности, т. е. $B_2 = C_2$, то $AB_1 \cdot AC_1 = AB_2^2$. Доказательство производится так же, как и в предыдущем случае, только теперь нужно воспользоваться свойствами угла между касательной и хордой.

3. Прямая, соединяющая центры касающихся окружностей, проходит через их точку касания.

4. *Величиной угла между двумя пересекающимися окружностями* называют величину угла между касательными к ним, проведёнными через точку пересечения. При этом безразлично, какую из двух точек пересечения окружностей мы выберем.

Угол между касающимися окружностями равен 0°.

5. При решении задач § 6 используется одно свойство, не имеющее прямого отношения к окружностям: высоты треугольника пересекаются в одной точке. Доказательство этого факта можно найти в решениях задач 5.51 и 7.42.

6. Уже в середине V в. до н. э. Гиппократ с острова Хиос (не путайте его со знаменитым врачом Гиппократом с острова Кос, жившим несколько позже) и пифагорейцы начали решать задачу квадратуры круга. Она формулируется следующим образом: построить с помощью циркуля и линейки квадрат, имеющий ту же площадь, что и данный круг. В 1882 г. немецкий математик Линдеман доказал, что число π трансцендентно, т. е. не является корнем многочлена с целыми коэффициентами. Из этого, в частности, следует, что задача квадратуры круга неразрешима.

По-видимому, многим давала надежду на возможность квадратуры круга задача 3.39 (задача о «луночках Гиппократа»): площадь фигуры, образованной дугами окружностей, равна площади треугольника. Решив эту задачу, постарайтесь понять, почему в данном случае подобные надежды не имели оснований.

Вводные задачи

1. Докажите, что из точки A, лежащей вне окружности, можно провести ровно две касательные к окружности, причём длины этих касательных (т. е. расстояния от A до точек касания) равны.

2. Две окружности пересекаются в точках A и B. Точка X лежит на прямой AB, но не на отрезке AB. Докажите, что длины всех касательных, проведённых из точки X к окружностям, равны.

3. Две окружности радиусов R и r касаются внешним образом (т. е. ни одна из них не лежит внутри другой). Найдите длину общей касательной к этим окружностям.

4. Пусть a и b — длины катетов прямоугольного треугольника, c — длина его гипотенузы. Докажите, что:

а) радиус вписанной окружности треугольника равен $(a+b-c)/2$;

б) радиус окружности, касающейся гипотенузы и продолжений катетов, равен $(a+b+c)/2$.

§ 1. Касательные к окружностям

3.1. Прямые PA и PB касаются окружности с центром O (A и B — точки касания). Проведена третья касательная к окружности, пересекающая отрезки PA и PB в точках X и Y. Докажите, что величина угла XOY не зависит от выбора третьей касательной.

3.2. Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке K, а вневписанная — в точке L. Докажите, что $CK = BL = (a+b-c)/2$, где a, b, c — длины сторон треугольника.

3.3. На основании AB равнобедренного треугольника ABC взята точка E, и в треугольники ACE и ECB вписаны окружности, касающиеся отрезка CE в точках M и N. Найдите длину отрезка MN, если известны длины отрезков AE и BE.

3.4. Четырёхугольник $ABCD$ обладает тем свойством, что существует окружность, вписанная в угол BAD и касающаяся продолжений сторон BC и CD. Докажите, что $AB + BC = AD + DC$.

3.5. Общая внутренняя касательная к окружностям с радиусами R и r пересекает их общие внешние касательные в точках A и B и касается одной из окружностей в точке C. Докажите, что $AC \cdot CB = Rr$.

3.6*. К двум окружностям различного радиуса проведены общие внешние касательные AB и CD. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ описанный тогда и только тогда, когда окружности касаются.

3.7*. Дан параллелограмм $ABCD$. Вневписанная окружность треугольника ABD касается продолжений сторон AD и AB в точках M и N. Докажите, что точки пересечения отрезка MN с BC и CD лежат на вписанной окружности треугольника BCD.

3.8*. На каждой стороне четырёхугольника $ABCD$ взято по две точки, и они соединены так, как показано на рис. 3.1. Докажите, что если все пять заштрихованных четырёхугольников описанные, то четырёхугольник $ABCD$ тоже описанный.

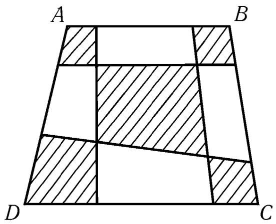


Рис. 3.1

3.9*. Дана окружность и точка вне её; из этой точки мы совершаем путь по замкнутой ломаной, состоящей из отрезков прямых, касательных к окружности, и заканчиваем путь в начальной точке. Участки пути, по которым мы приближались к центру окружности, берём со знаком плюс, а участки пути, по которым удалялись от центра, — со знаком минус. Докажите, что для любого такого пути сумма длин участков пути, взятых с указанными знаками, равна нулю.

См. также задачи 1.21 а), 1.61, 1.65, 1.67.

§ 2. Произведение длин отрезков хорд

3.10. Через точку P, лежащую на общей хорде AB двух пересекающихся окружностей, проведены хорда KM первой окружности и хорда LN второй окружности. Докажите, что четырёхугольник $KLMN$ вписанный.

3.11. Две окружности пересекаются в точках A и B; MN — общая касательная к ним. Докажите, что прямая AB делит отрезок MN пополам.

3.12. Прямая OA касается окружности в точке A, а хорда BC параллельна OA. Прямые OB и OC вторично пересекают окружность в точках K и L. Докажите, что прямая KL делит отрезок OA пополам.

3.13. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC больше диагонали BD; M — такая точка диагонали AC, что четырёхугольник $BCDM$ вписанный. Докажите, что прямая BD является общей касательной к описанным окружностям треугольников ABM и ADM.

3.14. Даны окружность S и точки A и B вне её. Для каждой прямой l, проходящей через точку A и пересекающей окружность S в точках M и N, рассмотрим описанную окружность треугольника BMN. Докажите, что все эти окружности имеют общую точку, отличную от точки B.

3.15. Даны окружность S, точки A и B на ней и точка C хорды AB. Для каждой окружности S', касающейся хорды AB в точке C

и пересекающей окружность S в точках P и Q, рассмотрим точку M пересечения прямых AB и PQ. Докажите, что положение точки M не зависит от выбора окружности S'.

См. также задачи 1.32, 2.29.

§ 3. Касающиеся окружности

3.16. Две окружности касаются внешним образом в точке A. К ним проведена общая (внешняя) касательная, касающаяся окружностей в точках C и D. Докажите, что $\angle CAD = 90^\circ$.

3.17. Две окружности S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 касаются в точке A. Через точку A проведена прямая, пересекающая S_1 в точке A_1 и S_2 в точке A_2. Докажите, что $O_1A_1 \parallel O_2A_2$.

3.18. Три окружности S_1, S_2 и S_3 попарно касаются друг друга в трёх различных точках. Докажите, что прямые, соединяющие точку касания окружностей S_1 и S_2 с двумя другими точками касания, пересекают окружность S_3 в точках, являющихся концами её диаметра.

3.19. Две касающиеся окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внутренним образом окружности радиуса R с центром O. Найдите периметр треугольника OO_1O_2.

3.20. Окружности S_1 и S_2 касаются окружности S внутренним образом в точках A и B, причём одна из точек пересечения окружностей S_1 и S_2 лежит на отрезке AB. Докажите, что сумма радиусов окружностей S_1 и S_2 равна радиусу окружности S.

3.21. Радиусы окружностей S_1 и S_2, касающихся в точке A, равны R и r ($R > r$). Найдите длину касательной, проведённой к окружности S_2 из точки B окружности S_1, если известно, что $AB = a$. (Разберите случаи внутреннего и внешнего касания.)

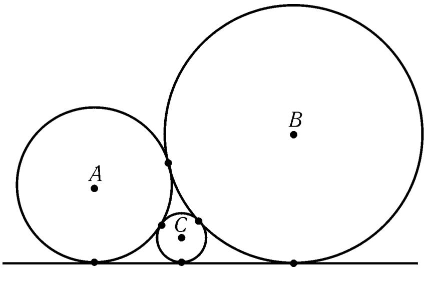


Рис. 3.2

3.22. На отрезке AB взята точка C. Прямая, проходящая через точку C, пересекает окружности с диаметрами AC и BC в точках K и L, а окружность с диаметром AB — в точках M и N. Докажите, что $KM = LN$.

3.23. Даны четыре окружности S_1, S_2, S_3 и S_4, причём окружности S_i и S_{i+1} касаются внешним образом для $i = 1, 2, 3, 4$ ($S_5 = S_1$). Докажите, что точки касания образуют вписанный четырёхугольник.

3.24*. а) Три окружности с центрами A, B, C, касающиеся друг друга и прямой l, расположены так, как показано на рис. 3.2. Пусть a, b и c — радиусы окружностей с центрами A, B, C. Докажите, что $1/\sqrt{c} = 1/\sqrt{a} + 1/\sqrt{b}$.

б) Четыре окружности попарно касаются внешним образом (в шести различных точках). Пусть a, b, c, d — их радиусы, $\alpha = 1/a$, $\beta = 1/b$, $\gamma = 1/c$ и $\delta = 1/d$. Докажите, что $2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) = (\alpha + \beta + \gamma + \delta)^2$.

§ 4. Три окружности одного радиуса

3.25. Три окружности радиуса R проходят через точку H; A, B и C — точки их попарного пересечения, отличные от H. Докажите, что:

а) H — точка пересечения высот треугольника ABC;

б) радиус описанной окружности треугольника ABC тоже равен R.

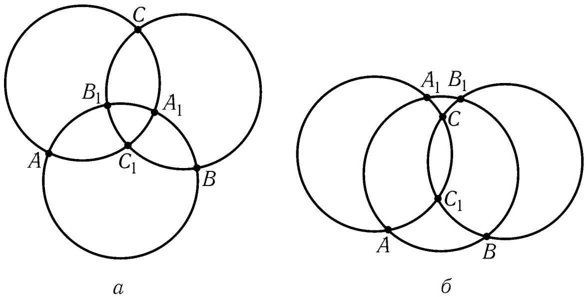


Рис. 3.3

3.26*. Три равные окружности пересекаются так, как показано на рис. 3.3, *а* или *б*. Докажите, что $\smile AB_1 + \smile BC_1 \pm \smile CA_1 = 180^\circ$, где знак минус берётся в случае *б*.

3.27*. Три окружности одного радиуса проходят через точку P; A, B и Q — точки их попарного пересечения. Четвёртая окружность того же радиуса проходит через точку Q и пересекается с двумя другими в точках C и D. При этом треугольники ABQ и CDP остроугольные, а четырёхугольник $ABCD$ выпуклый (рис. 3.4). Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

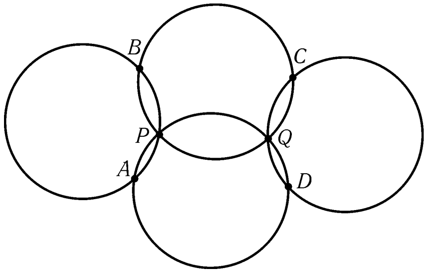


Рис. 3.4

§ 5. Две касательные, проведённые из одной точки

3.28. Из точки A проведены касательные AB и AC к окружности с центром O. Докажите, что если из точки M отрезок AO виден под углом 90°, то отрезки OB и OC видны из неё под равными углами.

3.29. Из точки A проведены касательные AB и AC к окружности с центром O. Через точку X отрезка BC проведена прямая KL, перпендикулярная XO (точки K и L лежат на прямых AB и AC). Докажите, что $KX = XL$.

3.30. На продолжении хорды KL окружности с центром O взята точка A, и из неё проведены касательные AP и AQ; M — середина отрезка PQ. Докажите, что $\angle MKO = \angle MLO$.

3.31*. Из точки A проведены касательные AB и AC к окружности и секущая, пересекающая окружность в точках D и E; M — середина отрезка BC. Докажите, что $BM^2 = DM \cdot ME$ и угол DME в два раза больше угла DBE или угла DCE; кроме того, $\angle BEM = \angle DEC$.

3.32*. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причём касательные в точках B и D пересекаются в точке K, лежащей на прямой AC.

а) Докажите, что $AB \cdot CD = BC \cdot AD$.

б) Прямая, параллельная KB, пересекает прямые BA, BD и BC в точках P, Q и R. Докажите, что $PQ = QR$.

* * *

3.33. Даны окружность S и прямая l, не имеющие общих точек. Из точки P, движущейся по прямой l, проводятся касательные PA и PB к окружности S. Докажите, что все хорды AB имеют общую точку.

Если точка P лежит вне окружности S, а PA и PB — касательные к окружности, то прямую AB называют *полярой* точки P относительно окружности S.

3.34*. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B, причём центр O окружности S_1 лежит на S_2. Прямая, проходящая через точку O, пересекает отрезок AB в точке P, а окружность S_2 в точке C. Докажите, что точка P лежит на поляре точки C относительно окружности S_1.

§ 6. Применение теоремы о высотах треугольника

3.35. Точки C и D лежат на окружности с диаметром AB. Прямые AC и BD, AD и BC пересекаются в точках P и Q. Докажите, что $AB \perp PQ$.

3.36*. Прямые PC и PD касаются окружности с диаметром AB (C и D — точки касания). Докажите, что прямая, соединяющая P с точкой пересечения прямых AC и BD, перпендикулярна AB.

3.37*. Даны диаметр AB окружности и точка C, не лежащая на прямой AB. С помощью одной линейки (без циркуля) опустите перпендикуляр из точки C на AB, если: а) точка C не лежит на окружности; б) точка C лежит на окружности.

3.38*. Пусть O_a, O_b и O_c — центры описанных окружностей треугольников PBC, PCA и PAB. Докажите, что если точки O_a и O_b лежат на прямых PA и PB, то точка O_c лежит на прямой PC.

§ 7. Площади криволинейных фигур

3.39. На гипотенузе и катетах прямоугольного треугольника построены полуокружности, расположенные так, как показано на рис. 3.5. Докажите, что сумма площадей образовавшихся «луночек» равна площади данного треугольника.

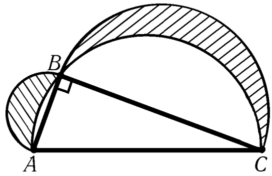


Рис. 3.5

3.40*. В круге проведены два перпендикулярных диаметра, т. е. четыре радиуса, а затем построены четыре круга, диаметрами которых служат эти радиусы. Докажите, что суммарная площадь попарно общих частей этих кругов равна площади части исходного круга, лежащей вне рассматриваемых четырёх кругов (рис. 3.6).

3.41*. На трёх отрезках OA, OB и OC одинаковой длины (точка B лежит внутри угла AOC) как на диаметрах построены окружности. Докажите, что площадь криволинейного треугольника, ограниченного дугами этих окружностей и не содержащего точку O, равна половине площади (обычного) треугольника ABC.

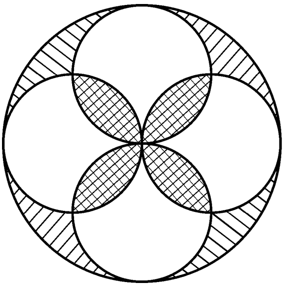


Рис. 3.6

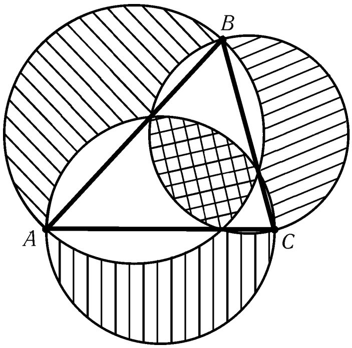


Рис. 3.7

3.42*. На сторонах произвольного остроугольного треугольника ABC как на диаметрах построены окружности. При этом образуется три «внешних» криволинейных треугольника и один «внутренний» (рис. 3.7). Докажите, что если из суммы площадей «внешних» треугольников вычесть площадь «внутреннего» треугольника, то получится удвоенная площадь треугольника ABC.

§ 8. Окружности, вписанные в сегмент

3.43. Хорда AB разбивает окружность S на две дуги. Окружность S_1 касается хорды AB в точке M и одной из дуг в точке N.

Докажите, что:

а) прямая MN проходит через середину P второй дуги;

б) длина касательной PQ к окружности S_1 равна PA.

3.44. Из точки D окружности S опущен перпендикуляр DC на диаметр AB. Окружность S_1 касается отрезка CA в точке E, а также отрезка CD и окружности S. Докажите, что DE — биссектриса треугольника ADC.

3.45*. Две окружности, вписанные в сегмент AB данной окружности, пересекаются в точках M и N. Докажите, что прямая MN проходит через середину C дополнительной для данного сегмента дуги AB.

3.46*. На диаметре AB окружности S взята точка K и из неё восставлен перпендикуляр, пересекающий S в точке L. Окружности S_A и S_B касаются окружности S, отрезка LK и диаметра AB, а именно, S_A касается отрезка AK в точке A_1, S_B касается отрезка BK в точке B_1. Докажите, что $\angle A_1LB_1 = 45^\circ$.

3.47*. Окружность, касающаяся сторон AC и BC треугольника ABC в точках M и N, касается также его описанной окружности (внутренним образом). Докажите, что середина отрезка MN совпадает с центром вписанной окружности треугольника ABC.

3.48*. Треугольники ABC_1 и ABC_2 вписаны в окружность S, причём хорды AC_2 и BC_1 пересекаются. Окружность S_1 касается хорды AC_2 в точке M_2, хорды BC_1 в точке N_1 и окружности S. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABC_1 и ABC_2 лежат на отрезке M_2N_1.

3.49*. На стороне BC треугольника ABC взята точка D. Окружность S_1 касается отрезков BD и DA и описанной окружности, окружность S_2 касается отрезков CD и DA и описанной окружности. Пусть I, I_1, I_2 и r, r_1, r_2 — центры и радиусы вписанной окружности и окружностей S_1, S_2; $\varphi = \angle ADB$. Докажите, что точка I лежит на отрезке I_1I_2, причём $I_1I : I_2I = \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}$. Докажите также, что $r = r_1 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + r_2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ (Тебо).

3.50*. Четырёхугольник $ABCD$ вписанный. Пусть r_a, r_b, r_c, r_d — радиусы вписанных окружностей треугольников BCD, ACD, ABD, ABC. Докажите, что $r_a + r_c = r_b + r_d$.

См. также задачи 5.102, 6.104, 19.15, 28.23, 28.26.

§ 9. Разные задачи

3.51. Две окружности имеют радиусы R_1 и R_2, а расстояние между их центрами равно d. Докажите, что эти окружности ортогональны тогда и только тогда, когда $d^2 = R_1^2 + R_2^2$.

3.52. Три окружности попарно касаются внешним образом в точках A, B и C. Докажите, что описанная окружность треугольника ABC перпендикулярна всем трём окружностям.

3.53. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая, пересекающая первую окружность в точке M_1, а вторую в точке M_2. Докажите, что $\angle BO_1M_1 = \angle BO_2M_2$.

§ 10. Радикальная ось

3.54. На плоскости даны окружность S и точка P. Прямая, проведённая через точку P, пересекает окружность в точках A и B. Докажите, что произведение $PA \cdot PB$ не зависит от выбора прямой.

> Эта величина, взятая со знаком плюс для точки P вне окружности и со знаком минус для точки P внутри окружности, называется *степенью точки P относительно окружности S*.

3.55. Докажите, что для точки P, лежащей вне окружности S, её степень относительно S равна квадрату длины касательной, проведённой из этой точки.

3.56. Докажите, что степень точки P относительно окружности S равна $d^2 - R^2$, где R — радиус S, d — расстояние от точки P до центра S.

3.57. Окружность задана уравнением $f(x, y) = 0$, где $f(x, y) = x^2 + y^2 + ax + by + c$. Докажите, что степень точки (x_0, y_0) относительно этой окружности равна $f(x_0, y_0)$.

3.58*. На плоскости даны две неконцентрические окружности S_1 и S_2. Докажите, что геометрическим местом точек, для которых степень относительно S_1 равна степени относительно S_2, является прямая.

> Эту прямую называют *радикальной осью* окружностей S_1 и S_2.

3.59*. Докажите, что радикальная ось двух пересекающихся окружностей проходит через точки их пересечения.

3.60*. На плоскости даны три окружности, центры которых не лежат на одной прямой. Проведём радикальные оси для каждой пары этих окружностей. Докажите, что все три радикальные оси пересекаются в одной точке.

> Эту точку называют *радикальным центром* трёх окружностей.

3.61*. На плоскости даны три попарно пересекающиеся окружности. Через точки пересечения любых двух из них проведена прямая. Докажите, что эти три прямые пересекаются в одной точке или параллельны.

3.62*. Постройте радикальную ось двух непересекающихся окружностей S_1 и S_2.

3.63*. Даны две неконцентрические окружности S_1 и S_2. Докажите, что множеством центров окружностей, пересекающих обе эти окружности под прямым углом, является их радикальная ось, из которой (если данные окружности пересекаются) выброшена их общая хорда.

3.64*. а) Докажите, что середины четырёх общих касательных к двум непересекающимся кругам лежат на одной прямой.

б) Через две из точек касания общих внешних касательных с двумя окружностями проведена прямая. Докажите, что окружности высекают на этой прямой равные хорды.

3.65*. На окружности S с диаметром AB взята точка C, из точки C опущен перпендикуляр CH на прямую AB. Докажите, что общая хорда окружности S и окружности S_1 с центром C и радиусом CH делит отрезок CH пополам.

3.66*. На сторонах BC и AC треугольника ABC взяты точки A_1 и B_1; l — прямая, проходящая через общие точки окружностей с диаметрами AA_1 и BB_1. Докажите, что:

а) прямая l проходит через точку H пересечения высот треугольника ABC;

б) прямая l тогда и только тогда проходит через точку C, когда $AB_1 : AC = BA_1 : BC$.

3.67*. Продолжения сторон AB и CD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке F, а продолжения сторон BC и AD — в точке E. Докажите, что окружности с диаметрами AC, BD и EF имеют общую радикальную ось, причём на ней лежат ортоцентры треугольников ABE, CDE, ADF и BCF.

3.68*. Три окружности попарно пересекаются в точках A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2. Докажите, что $A_1B_2 \cdot B_1C_2 \cdot C_1A_2 = A_2B_1 \cdot B_2C_1 \cdot C_2A_1$.

3.69*. На стороне BC треугольника ABC взята точка A'. Серединный перпендикуляр к отрезку $A'B$ пересекает сторону AB в точке M, а серединный перпендикуляр к отрезку $A'C$ пересекает сторону AC в точке N. Докажите, что точка, симметричная точке A' относительно прямой MN, лежит на описанной окружности треугольника ABC.

3.70*. Решите задачу 1.67, используя свойства радикальной оси.

3.71*. Внутри выпуклого многоугольника расположено несколько попарно непересекающихся кругов различных радиусов. Докажите, что многоугольник можно разрезать на маленькие многоугольники так, чтобы все они были выпуклыми и в каждом из них содержался ровно один из данных кругов.

3.72*. а) В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Прямые AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 пересекаются в точках C', A' и B'. Докажите, что точки A', B' и C' лежат на радикальной оси окружности девяти точек и описанной окружности.

б) Биссектрисы внешних углов треугольника ABC пересекают продолжения противоположных сторон в точках A', B' и C'. Докажите, что точки A', B' и C' лежат на одной прямой, причём эта прямая перпендикулярна прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC.

3.73*. Докажите, что диагонали AD, BE и CF описанного шестиугольника $ABCDEF$ пересекаются в одной точке (Брианшон).

3.74*. Даны четыре окружности S_1, S_2, S_3 и S_4, причём окружности S_i и S_{i+1} касаются внешним образом для $i = 1, 2, 3, 4$ ($S_5 = S_1$). Докажите, что радикальная ось окружностей S_1 и S_3 проходит через точку пересечения общих внешних касательных к S_2 и S_4.

3.75*. а) Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B. Степень точки P окружности S_1 относительно окружности S_2 равна p, расстояние от точки P до прямой AB равно h, а расстояние между центрами окружностей равно d. Докажите, что $|p| = 2dh$.

б) Степени точек A и B относительно описанных окружностей треугольников BCD и ACD равны p_a и p_b. Докажите, что $|p_a|S_{BCD} = |p_b|S_{ACD}$.

См. также задачи 3.76—3.82, 8.90, 14.56 б), 28.6.

§ 11. Пучки окружностей

Пучком окружностей называют семейство окружностей, обладающее следующим свойством: радикальной осью любой пары окружностей из этого семейства служит некоторая фиксированная прямая. При этом подразумевается, что это семейство максимально в том смысле, что нет окружностей, которые можно было бы к нему добавить, не нарушая указанного свойства.

3.76*. а) Докажите, что пучок окружностей полностью задаётся парой окружностей.

б) Докажите, что пучок окружностей полностью задаётся одной окружностью и радикальной осью.

3.77*. Пусть $f(x, y) = x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1$ и $g(x, y) = x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2$. Докажите, что для любого вещественного $\lambda \neq 1$ уравнение $f - \lambda g = 0$ задаёт окружность из пучка окружностей, порождённого окружностями $f = 0$ и $g = 0$.

3.78*. Докажите, что любая окружность пучка либо пересекает радикальную ось в двух фиксированных точках (*эллиптический пучок*), либо касается радикальной оси в фиксированной точке (*параболический пучок*), либо не пересекает радикальную ось (*гиперболический пучок*).

Предельными точками пучка окружностей называют принадлежащие ему окружности нулевого радиуса (т. е. точки).

3.79*. Докажите, что гиперболический пучок содержит две предельные точки, параболический — одну, а эллиптический — ни одной.

3.80*. Докажите, что если окружность ортогональна двум окружностям пучка, то она ортогональна и всем остальным окружностям пучка.

3.81*. Докажите, что семейство всех окружностей, ортогональных окружностям данного пучка, образует пучок.

Этот пучок называют *ортогональным* пучком.

3.82*. Докажите, что предельная точка пучка является общей точкой окружностей ортогонального пучка, и наоборот.

Задачи для самостоятельного решения

3.83. Качалка, имеющая форму сектора круга радиуса R, качается на горизонтальном столе. По какой траектории движется её вершина?

3.84. Из точки A, лежащей вне окружности радиуса R, проведены к ней две касательные AB и AC, где B и C — точки касания. Пусть $BC = a$. Докажите, что $4R^2 = r^2 + r_a^2 + a^2/2$, где r и r_a — радиусы вписанной и вневписанной окружностей треугольника ABC.

3.85. Две окружности касаются внутренним образом. Прямая, проходящая через центр меньшей окружности, пересекает бóльшую в точках A и D, а меньшую в точках B и C. Найдите отношение радиусов окружностей, если $AB : BC : CD = 2 : 4 : 3$.

3.86. Центры трёх окружностей радиуса R, где $1 < R < 2$, образуют правильный треугольник со стороной 2. Чему равно расстояние между точками пересечения этих окружностей, лежащими вне треугольника?

3.87. На отрезке AB взята точка C и построены полуокружности с диаметрами AB, AC и BC (по одну сторону от прямой AB). Найдите отношение площади криволинейного треугольника, ограниченного этими полуокружностями, к площади треугольника, образованного серединами дуг этих полуокружностей.

3.88. Окружность пересекает сторону BC треугольника ABC в точках A_1 и A_2, сторону AC в точках B_1 и B_2, сторону AB в точках C_1 и C_2. Докажите, что

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \left(\frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{BA_2}{A_2C} \cdot \frac{CB_2}{B_2A}\right)^{-1}.$$

3.89. Из точки A к окружности проведены касательные AB и AC; PQ — диаметр окружности; прямая l касается окружности в точке Q. Прямые PA, PB и PC пересекают прямую l в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что $A_1B_1 = A_1C_1$.

Решения

3.1. Пусть прямая XY касается данной окружности в точке Z. Соответственные стороны треугольников XOA и XOZ равны, поэтому $\angle XOA = \angle XOZ$. Аналогично $\angle ZOY = \angle BOY$. Следовательно, $\angle XOY = \angle XOZ + \angle ZOY = (\angle AOZ + \angle ZOB)/2 = \angle AOB/2$.

3.2. Пусть M и N — точки касания вписанной окружности со сторонами AB и BC. Тогда $BK + AN = BM + AM = AB$, поэтому $CK + CN = a + b - c$.

Пусть P и Q — точки касания вневписанной окружности с продолжениями сторон AB и BC. Тогда $AP = AB + BP = AB + BL$ и $AQ = AC + CQ = AC + CL$. Поэтому $AP + AQ = a + b + c$. Следовательно, $BL = BP = AP - AB = (a + b - c)/2$.

3.3. Согласно задаче 3.2 $CM = (AC + CE - AE)/2$ и $CN = (BC + CE - BE)/2$. Учитывая, что $AC = BC$, получаем $MN = |CM - CN| = |AE - BE|/2$.

3.4. Пусть прямые AB, BC, CD и DA касаются окружности в точках P, Q, R и S. Тогда $CQ = CR = x$, поэтому $BP = BC + CQ = BC + x$ и $DS = DC + CR = DC + x$. Следовательно, $AP = AB + BP = AB + BC + x$ и $AS = AD + DS = AD + DC + x$. Учитывая, что $AP = AS$, получаем требуемое.

3.5. Пусть прямая AB касается окружностей с центрами O_1 и O_2 в точках C и D. Так как $\angle O_1AO_2 = 90^\circ$, прямоугольные треугольники AO_1C и O_2AD подобны. Поэтому $O_1C : AC = AD : DO_2$. Кроме того, $AD = CB$ (см. задачу 3.2). Следовательно, $AC \cdot CB = Rr$.

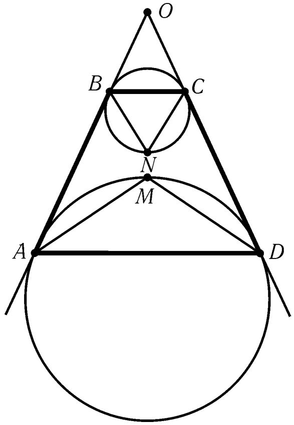


Рис. 3.8

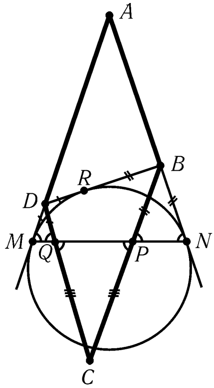


Рис. 3.9

3.6. Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке O. Для определённости будем считать, что точки A и D принадлежат первой окружности, а B и C — второй, причём $OB < OA$ (рис. 3.8). Точка M пересечения биссектрис углов A и D четырёхугольника $ABCD$ является серединой той дуги первой окружности, которая лежит внутри треугольника AOD, а точка N пересечения биссектрис углов B и C — серединой той дуги второй окружности, которая лежит вне треугольника BOC (см. задачу 2.96 а). Четырёхугольник $ABCD$ описанный тогда и только тогда, когда точки M и N совпадают.

3.7. Пусть R — точка касания вневписанной окружности со стороной BD, P и Q — точки пересечения отрезка MN с BC и CD соответственно (рис. 3.9). Так как $\angle DMQ = \angle BPN$, $\angle DQM = \angle BNP$ и $\angle DMQ = \angle BNP$, то треугольники MDQ, PBN и PCQ равнобедренные. Поэтому $CP = CQ$, $DQ = DM = DR$ и $BP = BN = BR$. Следовательно, P, Q и R — точки касания вписанной окружности треугольника BCD с его сторонами (см. задачу 5.1).

3.8. Обозначим некоторые точки касания так, как показано на рис. 3.10. Сумма длин одной пары противоположных сторон среднего четырёхугольника равна сумме длин пары других его сторон. Продолжим стороны этого

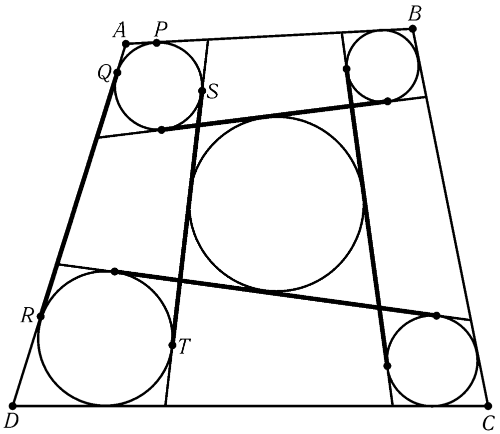


Рис. 3.10

четырёхугольника до точек касания с вписанными окружностями остальных четырёхугольников (ST — один из полученных отрезков). При этом обе суммы длин пар противоположных отрезков увеличатся на одно и то же число. Каждый из полученных отрезков является общей касательной к паре «угловых» окружностей; его можно заменить на равную ему по длине другую общую внешнюю касательную (т. е. ST заменить на QR). Для доказательства равенства $AB + CD = BC + AD$ остаётся воспользоваться равенствами вида $AP = AQ$.

3.9. Пусть $ABCD\ldots YZ$ — указанная замкнутая ломаная, t_A, t_B, …, t_Z — длины касательных к окружности, проведённых из вершин ломаной. В соответствии с соглашением о знаках алгебраическая длина участка пути от A к B равна $t_A - t_B$. Поэтому алгебраическая сумма длин участков пути с указанными знаками равна

$$(t_A - t_B) + (t_B - t_C) + \ldots + (t_Y - t_Z) + (t_Z - t_A) = 0.$$

3.10. Пусть O — точка пересечения диагоналей выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Четырёхугольник $ABCD$ вписанный тогда и только тогда, когда $\triangle AOB \sim \triangle DOC$, т. е. $OA \cdot OC = OB \cdot OD$. Так как четырёхугольники $ALBN$ и $AMBK$ вписанные, то $PL \cdot PN = PA \cdot PB = PM \cdot PK$. Поэтому четырёхугольник $KLMN$ вписанный.

3.11. Пусть O — точка пересечения прямой AB и отрезка MN. Тогда $OM^2 = OA \cdot OB = ON^2$, т. е. $OM = ON$.

3.12. Пусть для определённости лучи OA и BC сонаправлены; M — точка пересечения прямых KL и OA. Тогда $\angle LOM = \angle LCB = \angle OKM$, а значит, $\triangle KOM \sim \triangle OLM$. Следовательно, $OM : KM = LM : OM$, т. е. $OM^2 = KM \cdot LM$. Кроме того, $MA^2 = MK \cdot ML$. Поэтому $MA = OM$.

3.13. Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD. Тогда $MO \cdot OC = BO \cdot OD$. Тогда как $OC = OA$ и $BO = OD$, то $MO \cdot OA = BO^2$ и $MO \cdot OA = DO^2$. Эти равенства означают, что OB касается описанной окружности треугольника ABM и OD касается описанной окружности треугольника ADM.

3.14. Пусть C — точка пересечения прямой AB с описанной окружностью треугольника BMN, отличная от точки B; AP — касательная к окружности S. Тогда $AB \cdot AC = AM \cdot AN = AP^2$, а значит, $AC = AP^2/AB$, т. е. точка C одна и та же для всех прямых l.

Замечание. Следует исключить случай, когда длина касательной, проведённой из A к S, равна AB.

3.15. Ясно, что $MC^2 = MP \cdot MQ = MA \cdot MB$, причём точка M лежит на луче AB, если $AC > BC$, и на луче BA, если $AC < BC$. Пусть для определённости точка M лежит на луче AB. Тогда $(MB + BC)^2 = (MB + BA) \cdot MB$. Следовательно, $MB = BC^2/(AB - 2BC)$, а значит, положение точки M не зависит от выбора окружности S'.

3.16. Пусть M — точка пересечения прямой CD и касательной к окружностям в точке A. Тогда $MC = MA = MD$. Поэтому точка A лежит на окружности с диаметром CD.

3.17. Точки O_1, A и O_2 лежат на одной прямой, поэтому $\angle A_2AO_2 = \angle A_1AO_1$. Треугольники AO_2A_2 и AO_1A_1 равнобедренные, поэтому $\angle A_2AO_2 = \angle AA_2O_2$ и $\angle A_1AO_1 = \angle AA_1O_1$. Следовательно, $\angle AA_2O_2 = \angle AA_1O_1$, т. е. $O_1A_1 \parallel O_2A_2$.

3.18. Пусть O_1, O_2 и O_3 — центры окружностей S_1, S_2 и S_3; A, B, C — точки касания окружностей S_2 и S_3, S_3 и S_1, S_1 и S_2; A_1 и B_1 — точки пересечения прямых CA и CB с окружностью S_3. Согласно предыдущей задаче $B_1O_3 \parallel CO_1$ и $A_1O_3 \parallel CO_2$. Точки O_1, C и O_2 лежат на одной прямой, поэтому точки A_1, O_3 и B_1 тоже лежат на одной прямой, т. е. A_1B_1 — диаметр окружности S_3.

3.19. Пусть A_1, A_2 и B — точки касания окружностей с центрами O и O_1, O и O_2, O_1 и O_2,. Тогда $O_1O_2 = O_1B + BO_2 = O_1A_1 + O_2A_2$. Поэтому $OO_1 + OO_2 + O_1O_2 = (OO_1 + O_1A_1) + (OO_2 + O_2A_2) = OA_1 + OA_2 = 2R$.

3.20. Пусть O, O_1 и O_2 — центры окружностей S, S_1 и S_2; C — общая точка окружностей S_1 и S_2, лежащая на отрезке AB. Треугольники AOB, AO_1C и CO_2B равнобедренные, поэтому OO_1CO_2 — параллелограмм и $OO_1 = O_2C = O_2B$, а значит, $AO = AO_1 + O_1O = AO_1 + O_2B$.

3.21. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей S_1 и S_2; X — вторая точка пересечения прямой AB с окружностью S_2. Квадрат искомой длины касательной равен $BA \cdot BX$. Согласно задаче 3.17 $BO_1 \parallel XO_2$, поэтому $AB : BX = O_1A : O_1O_2$ и $AB \cdot BX = AB^2 \cdot O_1O_2/R = a^2(R \pm r)/R$, где знак минус берётся в случае внутреннего касания.

3.22. Пусть O, O_1 и O_2 — центры окружностей с диаметрами AB, AC и BC. Достаточно проверить, что $KO = OL$. Докажем, что $\triangle O_1KO = \triangle O_2OL$. В самом деле, $O_1K = AC/2 = O_2O$, $O_1O = BC/2 = O_2L$ и $\angle KO_1O = \angle OO_2L = 180^\circ - 2\alpha$, где α — угол между прямыми KL и AB.

3.23. Пусть O_i — центр окружности S_i, A_i — точка касания окружностей S_i и S_{i+1}. Четырёхугольник $O_1O_2O_3O_4$ выпуклый; пусть α_1, α_2, α_3 и α_4 — величины его углов. Легко проверить, что $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1} = (\alpha_i + \alpha_{i+1})/2$, поэтому $\angle A_1 + \angle A_3 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)/2 = \angle A_2 + \angle A_4$.

3.24. а) Пусть A_1, B_1 и C_1 — проекции точек A, B и C на прямую l; C_2 — проекция точки C на прямую AA_1. По теореме Пифагора $CC_2^2 = AC^2 - AC_2^2$,

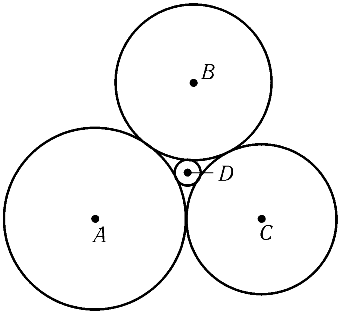


Рис. 3.11

т. е. $A_1C_1^2 = (a+c)^2 - (a-c)^2 = 4ac$. Аналогично $B_1C_1^2 = 4bc$ и $A_1B_1^2 = 4ab$. Так как $A_1C_1 + C_1B_1 = A_1B_1$, то $\sqrt{ac} + \sqrt{bc} = \sqrt{ab}$, т. е. $1/\sqrt{b} + 1/\sqrt{a} = 1/\sqrt{c}$.

б) Пусть A, B, C — центры «внешних» окружностей, D — центр «внутренней» окружности (рис. 3.11). Полупериметр треугольника BDC равен $b+c+d$, поэтому

$$\cos^2\left(\frac{BDC}{2}\right) = \frac{d(b+c+d)}{(b+d)(c+d)},$$
$$\sin^2\left(\frac{BDC}{2}\right) = \frac{bc}{(b+d)(c+d)}$$

(см. задачу 12.13). Если $\alpha' + \beta' + \gamma' = 180^\circ$, то $\sin^2\alpha' + \sin^2\beta' - \sin^2\gamma' + 2\sin\beta'\sin\gamma'\cos\alpha' = 0$ (это утверждение эквивалентно теореме косинусов). Подставив в эту формулу значения $\alpha' = \angle BDC/2$, $\beta' = \angle ADC/2$ и $\gamma' = \angle ADB/2$, получим

$$\frac{bc}{(b+d)(c+d)} - \frac{ac}{(a+d)(c+d)} - \frac{ab}{(a+d)(b+d)} + 2\frac{a\sqrt{bcd(b+c+d)}}{(a+d)(b+d)(c+d)} = 0,$$

т. е.

$$\frac{a+d}{a} - \frac{b+d}{b} - \frac{c+d}{c} + 2\sqrt{\frac{d(b+c+d)}{bc}} = 0.$$

Разделив на d, имеем $\alpha - \beta - \gamma - \delta + 2\sqrt{\beta\gamma + \gamma\delta + \delta\beta} = 0$. Поэтому

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2 = (\alpha-\beta-\gamma-\delta)^2 + 4(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta) =$$
$$= 4(\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\beta) + 4(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta) = 2(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2 - 2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2),$$

т. е. $2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2) = (\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2$.

3.25. Пусть A_1, B_1 и C_1 — центры данных окружностей (рис. 3.12). Тогда A_1BC_1H — ромб, а значит, $BA_1 \parallel HC_1$. Аналогично $B_1A \parallel HC_1$, поэтому $B_1A \parallel BA_1$ и B_1ABA_1 — параллелограмм.

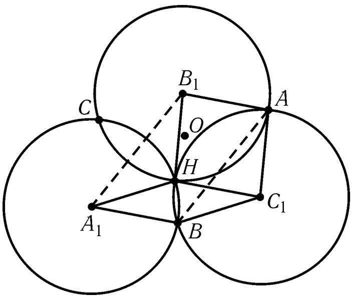


Рис. 3.12

а) Так как $A_1B_1 \perp CH$ и $A_1B_1 \parallel AB$, то $AB \perp CH$. Аналогично доказывается, что $BC \perp AH$ и $CA \perp BH$.

б) Так же, как было доказано, что $B_1A \parallel BA_1$, можно доказать, что $B_1C \parallel BC_1$ и $A_1C \parallel AC_1$; кроме того, длины всех этих шести отрезков равны R. Достроим треугольник BA_1C до ромба BA_1CO. Тогда AB_1CO тоже ромб. Поэтому $AO = BO = CO = R$, т. е. O — центр описанной окружности треугольника ABC, и её радиус равен R.

3.26. Легко проверить, что $\smile AB_1 \pm \smile B_1A_1 = \smile AC_1 + \smile C_1A_1$, $\smile BC_1 + \smile C_1B_1 = \smile BA_1 \pm \smile B_1A_1$ и $\smile C_1A_1 \pm \smile CA_1 = \smile C_1B_1 \pm \smile B_1C$, где знак минус берётся только в случае *б*. Складывая эти равенства, получаем $\smile AB_1 + \smile BC_1 \pm \smile CA_1 = \smile AC_1 + \smile BA_1 \pm \smile CB_1$. С другой стороны, удвоенные величины углов треугольника ABC равны $\smile BA_1 \pm \smile CA_1$, $\smile AB_1 \pm \smile CB_1$ и $\smile BC_1 + \smile AC_1$, а их сумма равна 360°.

3.27. Так как $\smile AP + \smile BP + \smile PQ = 180^\circ$ (см. задачу 3.26), то $\smile AB = 180^\circ - \smile PQ$. Аналогично $\smile CD = 180^\circ - \smile PQ$, т. е. $\smile AB = \smile CD$, а значит, $AB = CD$. Кроме того, $PQ \perp AB$ и $PQ \perp CD$ (см. задачу 3.25), поэтому $AB \parallel CD$.

3.28. Точки M, B и C лежат на окружности с диаметром AO. Кроме того, хорды OB и OC этой окружности равны.

3.29. Точки B и X лежат на окружности с диаметром KO, поэтому $\angle XKO = \angle XBO$. Аналогично $\angle XLO = \angle XCO$. Так как $\angle XBO = \angle XCO$, то треугольник KOL равнобедренный, причём OX — его высота.

3.30. Достаточно проверить, что $AK \cdot AL = AM \cdot AO$. В самом деле, тогда точки K, L, M и O лежат на одной окружности, и поэтому $\angle MKO = \angle MLO$. Так как $\triangle AOP \sim \triangle APM$, то $AM \cdot AO = AP^2$; ясно также, что $AK \cdot AL = AP^2$.

3.31. Для определённости будем считать, что угол DBE острый. Пусть O — центр окружности; точки D' и E' симметричны точкам D и E относительно прямой AO. Согласно задаче 28.7 прямые ED' и $E'D$ пересекаются в точке M. Поэтому $\angle BDM = \angle EBM$ и $\angle BEM = \angle DBM$, а значит, $\triangle BDM \sim \triangle EBM$. Следовательно, $BM : DM = EM : BM$. Кроме того, $\angle DME = \smile DE = 2\angle DBE$.

Из равенства $\angle BEM = \angle DBM$ следует, что $\angle BEM = \angle DBC = \angle DEC$.

3.32. а) Так как $\triangle KAB \sim \triangle KBC$, то $AB : BC = KB : KC$. Аналогично $AD : DC = KD : KC$. Учитывая, что $KB = KD$, получаем требуемое.

б) Задача сводится к предыдущей, так как

$$\frac{PQ}{BQ} = \frac{\sin PBQ}{\sin BPQ} = \frac{\sin ABD}{\sin KBA} = \frac{\sin ABD}{\sin ADB} = \frac{AD}{AB}, \qquad \frac{QR}{BQ} = \frac{CD}{CB}.$$

3.33. Опустим из центра O окружности S перпендикуляр OM на прямую l. Докажем, что точка X, в которой пересекаются AB и OM, остаётся неподвижной. Точки A, B и M лежат на окружности с диаметром PO. Поэтому $\angle AMO = \angle ABO = \angle BAO$, а значит, $\triangle AMO \sim \triangle XAO$, так как угол при вершине O у этих треугольников общий. Следовательно, $AO : MO = XO : AO$, т. е. $OX = OA^2/MO$ — постоянная величина.

3.34. Так как $\angle OBP = \angle OAB = \angle OCB$, то $\triangle OBP \sim \triangle OCB$, а значит, $OB^2 = OP \cdot OC$. Проведём из точки C касательную CD к окружности S_1. Тогда $OD^2 = OB^2 = OP \cdot OC$. Следовательно, $\triangle ODC \sim \triangle OPD$ и $\angle OPD = \angle ODC = 90^\circ$.

3.35. Прямые BC и AD являются высотами треугольника APB, поэтому прямая PQ, проходящая через точку Q их пересечения, перпендикулярна прямой AB.

3.36. Обозначим точки пересечения прямых AC и BD, BC и AD через K и K_1 соответственно. Согласно предыдущей задаче $KK_1 \perp AB$, поэтому достаточно доказать, что точка пересечения касательных в точках C и D лежит на прямой KK_1.

Докажем, что касательная в точке C проходит через середину отрезка KK_1. Пусть M — точка пересечения касательной в точке C и отрезка KK_1. Стороны острых углов ABC и CKK_1 соответственно перпендикулярны, поэтому углы равны. Аналогично $\angle CAB = \angle CK_1K$. Ясно также, что $\angle KCM = \angle ABC$, поэтому треугольник CMK равнобедренный. Аналогично треугольник CMK_1 равнобедренный и $KM = CM = K_1M$, т. е. M — середина отрезка KK_1.

Аналогично доказывается, что касательная в точке D проходит через середину отрезка KK_1.

3.37. а) Прямая AC пересекает окружность в точках A и A_1, прямая BC — в точках B и B_1. Если $A = A_1$ (или $B = B_1$), то прямая AC (или BC) — искомый перпендикуляр. Если же это не так, то AB_1 и BA_1 являются высотами треугольника ABC и искомая прямая — это прямая, проходящая через точку C и точку пересечения прямых AB_1 и BA_1.

б) Возьмём точку C_1, не лежащую на окружности, и опустим из неё перпендикуляр на AB. Пусть он пересекается с окружностью в точках D и E. Построим точку P пересечения прямых DC и AB, а затем точку F пересечения прямой PE с окружностью. При симметрии относительно AB точка C переходит в точку F. Поэтому CF — искомый перпендикуляр.

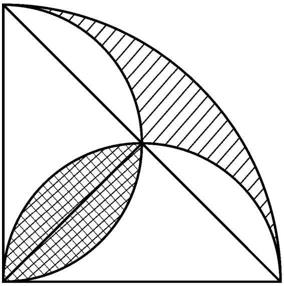


Рис. 3.13

3.38. Так как $PA \perp O_bO_c$, то прямая PA проходит через точку O_a тогда и только тогда, когда прямая PO_a проходит через точку пересечения высот треугольника $O_aO_bO_c$. Аналогичные утверждения верны и для точек B и C. Из условия задачи следует, что P — точка пересечения высот треугольника $O_aO_bO_c$, а значит, $PO_c \perp O_aO_b$.

3.39. Пусть $2a$ и $2b$ — длины катетов, $2c$ — длина гипотенузы. Сумма площадей «луночек» равна $\pi a^2 + \pi b^2 + S_{ABC} - \pi c^2$. Ясно, что $\pi(a^2 + b^2 - c^2) = 0$.

3.40. Доказательство достаточно провести для каждой из четырёх частей, на которые диаметры делят исходный круг (рис. 3.13). Рассмотрим в круге сегмент, отсекаемый хордой, на которую опирается центральный угол 90°; пусть S и s — площади таких сегментов для исходного и четырёх построенных кругов соответственно. Ясно, что $S = 4s$. Остаётся заметить, что площадь части с одинарной штриховкой равна $S - 2s = 2s$, а площадь части с двойной штриховкой равна $2s$.

3.41. Обозначим точки пересечения окружностей, построенных на отрезках OB и OC, OA и OC, OA и OB, через A_1, B_1, C_1 соответственно (рис. 3.14). $\angle OA_1B = \angle OA_1C = 90^\circ$, поэтому точки B, A_1 и C лежат на одной прямой, а так как окружности имеют одинаковые радиусы, то $BA_1 = A_1C$.

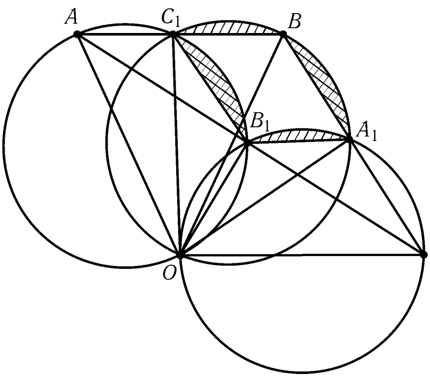


Рис. 3.14

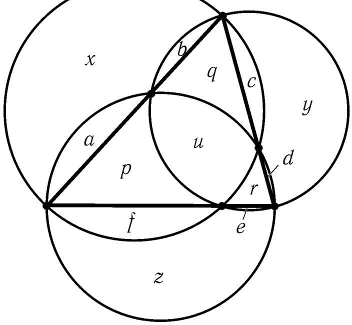


Рис. 3.15

Точки A_1, B_1, C_1 являются серединами сторон треугольника ABC, поэтому $BA_1 = C_1B_1$ и $BC_1 = A_1B_1$. Так как круги имеют одинаковый радиус, то равные хорды BA_1 и C_1B_1 отсекают от кругов части равной площади, а равные хорды C_1B и B_1A_1 также отсекают от кругов части равной площади. Поэтому площадь криволинейного треугольника $A_1B_1C_1$ равна площади параллелограмма $A_1B_1C_1B$, т. е. равна половине площади треугольника ABC.

3.42. Рассматриваемые окружности проходят через основания высот треугольника, а значит, точки их пересечения лежат на сторонах треугольника. Пусть x, y, z и u — площади рассматриваемых криволинейных треугольников; a, b, c, d, e и f — площади сегментов, отсекаемых от окружностей сторонами треугольника; p, q и r — площади частей треугольника, лежащих вне внутреннего криволинейного треугольника (рис. 3.15). Тогда $x + (a + b) = u + p + q + (c + f)$, $y + (c + d) = u + q + r + (e + b)$ и $z + (e + f) = u + r + p + (a + d)$. Складывая эти равенства, получаем $x + y + z = 2(p + q + r + u) + u$.

3.43. а) Пусть O и O_1 — центры окружностей S и S_1. Треугольники MO_1N и PON равнобедренные, причём $\angle MO_1N = \angle PON$. Следовательно, точки P, M и N лежат на одной прямой.

б) Ясно, что $PQ^2 = PM \cdot PN = PM \cdot (PM + MN)$. Пусть K — середина хорды AB. Тогда $PM^2 = PK^2 + MK^2$ и $PM \cdot MN = AM \cdot MB = AK^2 - MK^2$. Поэтому $PQ^2 = PK^2 + AK^2 = PA^2$.

3.44. Согласно задаче 3.43 б) $BE = BD$. Поэтому $\angle DAE + \angle ADE = \angle DEB = \angle BDE = \angle BDC + \angle CDE$. А так как $\angle DAB = \angle BDC$, то $\angle ADE = \angle CDE$.

3.45. Пусть O_1 и O_2 — центры вписанных окружностей, CP и CQ — касательные к ним. Тогда $CO_1^2 = CP^2 + PO_1^2 = CP^2 + O_1M^2$ и, так как $CQ = CA = CP$ (задача 3.43 б), $CO_2^2 = CQ^2 + QO_2^2 = CP^2 + O_2M^2$. Следовательно, $CO_1^2 - CO_2^2 = MO_1^2 - MO_2^2$, а значит, прямая CM перпендикулярна O_1O_2 (см. задачу 7.6). Поэтому прямая MN проходит через точку C.

Замечание. Если окружности не пересекаются, а касаются, утверждение остаётся верным; в этом случае прямую MN нужно заменить на касательную к окружностям в их общей точке.

3.46. Пусть $\angle LAB = \alpha$ и $\angle LBA = \beta$ $(\alpha + \beta = 90^\circ)$. Согласно задаче 3.43 б) $AB_1 = AL$, поэтому $\angle AB_1L = 90^\circ - \alpha/2$. Аналогично $\angle BA_1L = 90^\circ - \beta/2$. Следовательно, $\angle A_1LB_1 = (\alpha + \beta)/2 = 45^\circ$.

3.47. Пусть A_1 и B_1 — середины дуг BC и AC; O — центр вписанной окружности. Тогда $A_1B_1 \perp CO$ (см. задачу 2.20 а) и $MN \perp CO$, а значит, $MN \parallel A_1B_1$. Будем перемещать точки M' и N' по лучам CA и CB так, что $M'N' \parallel A_1B_1$. Лишь при одном положении точек M' и N' точка L, в которой пересекаются прямые B_1M' и A_1N', попадает на описанную окружность треугольника ABC. С другой стороны, если отрезок MN проходит через точку O, точка L попадает на эту окружность (см. задачу 2.52).

3.48. Решение этой задачи обобщает решение предыдущей задачи. Достаточно доказать, что центр O_1 вписанной окружности треугольника ABC_1 лежит на отрезке M_2N_1. Пусть A_1 и A_2 — середины дуг BC_1 и BC_2, B_1 и B_2 — середины дуг AC_1 и AC_2; PQ — диаметр окружности S, перпендикулярный хорде AB, причём Q и C_1 лежат по одну сторону от прямой AB. Точка O_1 является точкой пересечения хорд AA_1 и BB_1, а точка L касания окружностей S и S_1 согласно задаче 3.43 а) является точкой пересечения

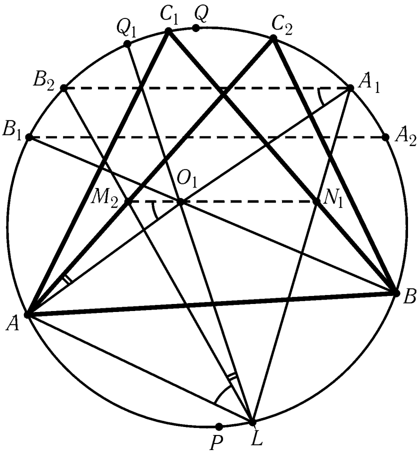


Рис. 3.16

прямых A_1N_1 и B_2M_2 (рис. 3.16). Пусть $\angle C_1AB = 2\alpha$, $\angle C_1BA = 2\beta$, $\angle C_1AC_2 = 2\varphi$. Тогда $\smile A_1A_2 = 2\varphi = \smile B_1B_2$, т. е. $A_1B_2 \parallel B_1A_2$. Угол между хордами A_1B_2 и BC_1 равен $(\smile B_2C_1 + \smile A_1B)/2 = \beta - \varphi + \alpha$. Далее, угол между хордами BC_1 и AC_2 равен $(\smile C_1C_2 + \smile AB)/2 = 2\varphi + 180^\circ - 2\alpha - 2\beta$, поэтому хорда M_2N_1 образует с касательными BC_1 и AC_2 углы $\alpha + \beta - \varphi$, а значит, $M_2N_1 \parallel A_1B_2$.

Предположим теперь, что точки M_2' и N_1' перемещаются по хордам AC_2 и BC_1 так, что $M_2'N_1' \parallel A_1B_2$. Пусть прямые A_1N_1' и B_2M_2' пересекаются в точке L'. Точка L' лежит на окружности S лишь при одном положении точек M_2' и N_1'. Поэтому достаточно указать на дуге AB такую точку L_1, что если M_2'', N_1'' — точки пересечения хорд AC_2 и L_1B_2, BC_1 и L_1A_1, то $M_2''N_1'' \parallel A_1B_2$ и точка O_1 лежит на отрезке $M_2''N_1''$. Пусть Q_1 — такая точка окружности S, что $2\angle(PQ, PQ_1) = \angle(PC_2, PC_1)$, и L_1 — точка пересечения прямой Q_1O_1 с окружностью S. Докажем, что точка L_1 искомая. Так как $\smile B_1Q = 2\alpha$, то $\smile B_2Q_1 = 2(\alpha - 2\varphi) = \smile C_2A_1$. Поэтому четырёхугольник $AM_2''O_1L_1$ вписанный, а значит, $\angle M_2''O_1A = \angle M_2''L_1A = \angle B_2A_1A$, т. е. $M_2''O_1 \parallel B_2A_1$. Аналогично $N_1''O_1 \parallel B_2A_1$.

3.49. Пусть E_1 и E_2 — основания перпендикуляров, опущенных из точек I_1 и I_2 на прямую BC. Согласно задаче 3.48 точка I является точкой пересечения прямой, проходящей через точку E_1 и точку касания прямой AD и окружности S_1, и прямой, проходящей через точку E_2 и точку касания прямой AD и окружности S_2. Пусть F_1 — точка пересечения прямых E_1I_1 и E_2I, F_2 — точка пересечения прямых E_2I_2 и E_1I. Ясно, что $DI_1 \perp E_1I$, $DI_2 \perp E_2I$ и $DI_1 \perp DI_2$. Поэтому $I_1D \parallel F_1E_2$ и $I_2D \parallel F_2E_1$. Следовательно, $E_1I_1 : I_1F_1 = E_1D : DE_2 = F_2I_2 : I_2E_2$. Это означает, что точка I лежит на отрезке I_1I_2, причём

$$I_1I : I_2I = E_1F_1 : E_2F_2 = E_1E_2 \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} : E_1E_2 \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} = \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}.$$

Пусть E — проекция точки I на прямую BC. Тогда $r = IE$. Согласно задаче 1.1 б)

$$IE = \frac{I_1E_1 \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} + I_2E_2 \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}} = r_1\cos^2\frac{\varphi}{2} + r_2\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

3.50. Пусть $\varphi = \angle AOB$, где O — точка пересечения диагоналей AC и BD. Пусть, далее, r_{ab}, r_{bc}, r_{cd}, r_{ad} — радиусы окружностей, касающихся описанной окружности четырёхугольника $ABCD$ и отрезков CO и DO, DO и AO, AO и BO,

BO и CO. Согласно теореме Тебо (задача 3.49)

$$2r_a = r_{ad}\sin^2\frac{\varphi}{2} + r_{ab}\cos^2\frac{\varphi}{2}, \qquad r_b = r_{ab}\cos^2\frac{\varphi}{2} + r_{bc}\sin^2\frac{\varphi}{2},$$
$$r_c = r_{bc}\sin^2\frac{\varphi}{2} + r_{cd}\cos^2\frac{\varphi}{2}, \qquad r_d = r_{cd}\cos^2\frac{\varphi}{2} + r_{ad}\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Поэтому $r_a + r_c = (r_{ad} + r_{bc})\sin^2\dfrac{\varphi}{2} + (r_{ab} + r_{cd})\cos^2\dfrac{\varphi}{2} = r_b + r_d$.

3.51. Пусть окружности с центрами O_1 и O_2 проходят через точку A. Радиусы O_1A и O_2A перпендикулярны касательным к окружностям в точке A, поэтому окружности ортогональны тогда и только тогда, когда $\angle O_1AO_2 = 90^\circ$, т. е. $O_1O_2^2 = O_1A^2 + O_2A^2$.

3.52. Пусть A_1, B_1 и C_1 — центры данных окружностей, причём точки A, B и C лежат на отрезках B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1 соответственно. Так как $A_1B = A_1C$, $B_1A = B_1C$ и $C_1A = C_1B$, то A, B и C — точки касания вписанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ с его сторонами (см. задачу 5.1). Таким образом, радиусы A_1B, B_1C и C_1A данных окружностей касаются описанной окружности треугольника ABC.

3.53. Легко проверить, что угол поворота от вектора $\overrightarrow{O_iB}$ до вектора $\overrightarrow{O_iM_i}$ (против часовой стрелки) равен $2\angle(AB, AM_i)$. Ясно также, что $\angle(AB, AM_1) = \angle(AB, AM_2)$.

3.54. Проведём через точку P другую прямую, пересекающую окружность в точках A_1 и B_1. Тогда $\triangle PAA_1 \sim \triangle PB_1B$, поэтому $PA : PA_1 = PB_1 : PB$.

3.55. Проведём через точку P касательную PC. $\triangle PAC \sim \triangle PCB$, поэтому $PA : PC = PC : PB$.

3.56. Пусть прямая, проходящая через точку P и центр окружности, пересекает окружность в точках A и B. Тогда $PA = d + R$ и $PB = |d - R|$. Поэтому $PA \cdot PB = |d^2 - R^2|$. Ясно также, что величина $d^2 - R^2$ и степень точки P относительно окружности S имеют одинаковые знаки.

3.57. Пусть $\alpha = -a/2$, $\beta = -b/2$ и $R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - c}$. Тогда $f(x, y) = (x - \alpha)^2 + (y - \beta^2) - R^2$, т. е. (α, β) — центр данной окружности S, а R — её радиус. Таким образом, квадрат расстояния от точки (x_0, y_0) до центра окружности S равен $(x - \alpha)^2 + (y - \beta^2)$. Поэтому согласно задаче 3.56 степень точки (x_0, y_0) относительно окружности S равна $f(x_0, y_0)$.

3.58. Пусть R_1 и R_2 — радиусы окружностей. Рассмотрим систему координат, в которой центры окружностей имеют координаты $(-a, 0)$ и $(a, 0)$. Согласно задаче 3.56 степени точки с координатами (x, y) относительно данных окружностей равны $(x + a)^2 + y^2 - R_1^2$ и $(x - a)^2 + y^2 - R_2^2$ соответственно. Приравнивая эти выражения, получаем $x = (R_1^2 - R_2^2)/4a$. Это уравнение задаёт прямую, перпендикулярную отрезку, соединяющему центры окружностей.

3.59. Степени точки пересечения окружностей относительно каждой из них равны нулю, поэтому она лежит на радикальной оси. Если точек пересечения две, то они однозначно задают радикальную ось.

3.60. Так как центры окружностей не лежат на одной прямой, радикальная ось первой и второй окружностей пересекается с радикальной осью второй и третьей окружностей. Степени точки пересечения относительно всех трёх окружностей равны, поэтому она лежит на радикальной оси первой и третьей окружностей.

3.61. Согласно задаче 3.59 прямые, содержащие хорды, являются радикальными осями. Согласно задаче 3.60 радикальные оси пересекаются в одной точке, если центры окружностей не лежат на одной прямой. В противном случае они перпендикулярны этой прямой.

3.62. Проведём вспомогательную окружность S, пересекающую обе данные окружности. Затем проведём прямую через общие точки окружностей S_1 и S и прямую через общие точки окружностей S_2 и S. Точка пересечения этих прямых — радикальный центр окружностей S_1, S_2 и S. С помощью какой-нибудь другой вспомогательной окружности построим ещё один радикальный центр. Искомая прямая соединяет построенные радикальные центры.

3.63. Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей, r_1 и r_2 — их радиусы. Окружность S радиуса r с центром O ортогональна окружности S_i тогда и только тогда, когда $r^2 = OO_i^2 - r_i^2$, т. е. квадрат радиуса окружности S равен степени точки O относительно окружности S_i. Поэтому множеством центров искомых окружностей является множество тех точек радикальной оси, степени которых относительно данных окружностей положительны.

3.64. а) Указанные точки лежат на радикальной оси.

б) Точки касания внешних касательных с окружностями являются вершинами трапеции $ABCD$ с основанием AB. Середины боковых сторон AD и BC принадлежат радикальной оси, поэтому середина O диагонали AC тоже принадлежит радикальной оси. Если прямая AC пересекает окружности в точках A_1 и C_1, то $OA_1 \cdot OA = OC_1 \cdot OC$, а значит, $OA_1 = OC_1$ и $AA_1 = CC_1$.

3.65. Пусть M — середина отрезка CH. Требуется доказать, что точка M лежит на радикальной оси окружностей S и S_1, т. е. её степени относительно этих окружностей равны. Пусть радиусы окружностей S и S_1 равны $2R$ и $2r$. Тогда степень точки M относительно окружности S_1 равна $CM^2 - 4r^2 = -3r^2$, а её степень относительно S равна $OM^2 - 4R^2$, где O — середина отрезка AB. Ясно, что $OH^2 = 4R^2 - 4r^2$, поэтому $OM^2 = OH^2 + HM^2 = 4R^2 - 4r^2 + r^2 = 4R^2 - 3r^2$. Следовательно, $OM^2 - 4R^2 = -3r^2$.

3.66. а) Пусть S_A и S_B — окружности с диаметрами AA_1 и BB_1; S — окружность с диаметром AB. Общими хордами окружностей S и S_A, S и S_B являются высоты AH_a и BH_b, поэтому они (или их продолжения) пересекаются в точке H. Согласно задаче 3.61 общая хорда окружностей S_A и S_B проходит через точку пересечения хорд AH_a и BH_b.

б) Общая хорда окружностей S_A и S_B проходит через точку пересечения прямых A_1H_a и B_1H_b (т. е. через точку C) тогда и только тогда, когда $CB_1 \cdot CH_b = CA_1 \cdot CH_a$ (длины отрезков следует считать ориентированными). Так как $CH_b = (a^2 + b^2 - c^2)/2b$ и $CH_a = (a^2 + b^2 - c^2)/2a$, приходим к соотношению $CB_1/b = CA_1/a$.

3.67. Проведём в треугольнике CDE высоты CC_1 и DD_1; пусть H — точка их пересечения. Окружности с диаметрами AC и BD проходят через точки C_1 и D_1 соответственно, поэтому степень точки H относительно каждой из этих окружностей равна её степени относительно окружности с диаметром CD (эта окружность проходит через точки C_1 и D_1). Аналогично доказывается, что степени точки H относительно окружностей с диаметрами AC, BD и EF равны, т. е. радикальные оси этих окружностей проходят через точку H. Для точек пересечения высот остальных трёх треугольников доказательство проводится аналогично.

Замечание. Центры рассматриваемых окружностей лежат на прямой Гаусса (см. задачу 4.56), поэтому их общая радикальная ось перпендикулярна прямой Гаусса.

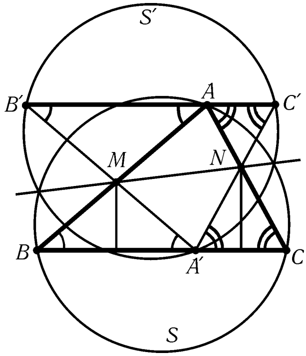


Рис. 3.17

3.68. Прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в некоторой точке O (см. задачу 3.61). Так как $\triangle A_1OB_2 \sim \triangle B_1OA_2$, то $A_1B_2 : A_2B_1 = OA_1 : OB_1$. Аналогично $B_1C_2 : B_2C_1 = OB_1 : OC_1$ и $C_1A_2 : C_2A_1 = OC_1 : OA_1$. Перемножая эти равенства, получаем требуемое.

3.69. Обозначим через B' и C' точки пересечения прямых $A'M$ и $A'N$ с прямой, проведённой через точку A параллельно BC (рис. 3.17). Так как треугольники $A'BM$ и $A'NC$ равнобедренные, то $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$. Поскольку $AM \cdot BM = A'M \cdot B'M$, степени точки M относительно окружностей S и S', описанных около треугольников ABC и $A'B'C'$ соответственно, равны. Это верно и для точки N, поэтому прямая MN является радикальной осью окружностей S и S'. Окружности S и S' имеют одинаковые радиусы, поэтому их радикальная ось является их осью симметрии. Точка A', лежащая на окружности S', при симметрии относительно прямой MN переходит в точку, лежащую на окружности S.

3.70. Пусть AC и BD — касательные; E и K — точки пересечения прямых AC и BD, AB и CD; O_1 и O_2 — центры окружностей (рис. 3.18). Так

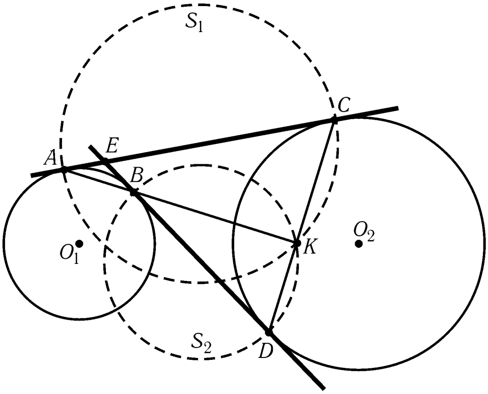


Рис. 3.18

как $AB \perp O_1E$, $O_1E \perp O_2E$ и $O_2E \perp CD$, то $AB \perp CD$, а значит, K — точка пересечения окружностей S_1 и S_2 с диаметрами AC и BD. Точка K лежит на радикальной оси окружностей S_1 и S_2; остаётся проверить, что этой радикальной осью является прямая O_1O_2. Радиусы O_1A и O_1B являются касательными к S_1 и S_2, поэтому точка O_1 лежит на радикальной оси. Аналогично точка O_2 лежит на радикальной оси.

3.71. Обозначим данные окружности через $S_1, \ldots, S_n$. Для каждой окружности S_i рассмотрим множество M_i, состоящее из тех точек X, для которых степень относительно S_i не больше степеней относительно $S_1, \ldots, S_n$. Тогда M_i — выпуклое множество. В самом деле, пусть M_{ij} — множество точек X, для которых степень относительно S_i не больше степени относительно S_j. M_{ij} является полуплоскостью, состоящей из точек, лежащих по одну сторону с окружностью S_i от радикальной оси окружностей S_i и S_j. Множество M_i является пересечением выпуклых множеств M_{ij}, поэтому оно само выпуклое. Кроме того, поскольку каждое из множеств M_{ij} содержит окружность S_i, то M_i содержит S_i. Так как для каждой точки плоскости какая-то из степеней относительно $S_1, \ldots, S_n$ является наименьшей, множества M_i покрывают всю плоскость. Рассматривая те части множеств M_i, которые лежат внутри исходного многоугольника, получаем требуемое разбиение.

3.72. а) Точки B_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром BC, поэтому степени точки A' относительно описанных окружностей треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC равны степени точки A' относительно этой окружности. Значит, точка A' лежит на радикальной оси окружности девяти точек и описанной окружности треугольника ABC. Для точек B' и C' доказательство аналогично.

б) Рассмотрим треугольник $A_1B_1C_1$, образованный внешними биссектрисами треугольника ABC (треугольник $A_1B_1C_1$ остроугольный). Согласно задаче а) точки A', B' и C' лежат на радикальной оси описанных окружностей треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Радикальная ось этих окружностей перпендикулярна прямой, соединяющей их центры, т. е. прямой Эйлера треугольника $A_1B_1C_1$. Остаётся заметить, что точка пересечения высот треугольника $A_1B_1C_1$ является точкой пересечения биссектрис треугольника ABC (см. задачу 1.57 а).

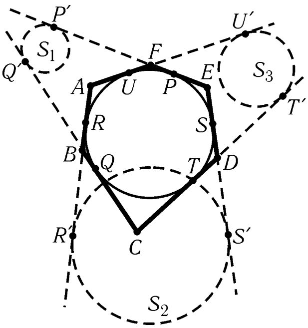


Рис. 3.19

3.73. Пусть выпуклый шестиугольник $ABCDEF$ касается окружности в точках R, Q, T, S, P, U (точка R лежит на AB, Q — на BC и т. д.).

Выберем произвольное число $a > 0$ и построим на прямых BC и EF точки Q' и P' так, что $QQ' = PP' = a$, а векторы $\overrightarrow{QQ'}$ и $\overrightarrow{PP'}$ сонаправлены с векторами $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{EF}$. Аналогично строим точки R', S', T', U' (рис. 3.19; $RR' = SS' = TT' = UU' = a$). Построим окружность S_1, касающуюся прямых BC и EF в точках Q' и P'. Аналогично построим окружности S_2 и S_3.

Докажем, что точки B и E лежат на радикальной оси окружностей S_1 и S_2. $BQ' = QQ' - BQ = RR' - BR = BR'$ (если $QQ' < BQ$, то $BQ' = BQ - QQ' = BR - RR' = BR'$) и $EP' = EP + PP' = ES + SS' = ES'$. Аналогично доказывается, что прямые FC и AD являются радикальными осями окружностей S_1 и S_3, S_2 и S_3 соответственно. Так как радикальные оси трёх окружностей пересекаются в одной точке, прямые AD, BE и CF пересекаются в одной точке.

3.74. Пусть A_i — точка касания окружностей S_i и S_{i+1}, X — точка пересечения прямых A_1A_4 и A_2A_3. Тогда X — точка пересечения общих внешних касательных к окружностям S_2 и S_4 (см. задачу 5.73). А так как четырёхугольник $A_1A_2A_3A_4$ вписанный (задача 3.23), то $XA_1 \cdot XA_4 = XA_2 \cdot XA_3$, а значит, точка X лежит на радикальной оси окружностей S_1 и S_3.

3.75. а) Рассмотрим систему координат с началом O в середине отрезка, соединяющего центры окружностей, а ось Ox направим вдоль этого отрезка. Пусть точка P имеет координаты (x, y); R и r — радиусы окружностей S_1 и S_2;

$a = d/2$. Тогда $(x+a)^2 + y^2 = R^2$ и $p = (x-a)^2 + y^2 - r^2 = ((x+a)^2 + y^2 - R^2) - 4ax - r^2 + R^2 = R^2 - r^2 - 4ax$.

Пусть точка A имеет координаты (x_0, y_0). Тогда $(x_0 + a)^2 + y_0^2 - R^2 = (x_0 - a)^2 + y_0^2 - r^2$, т. е. $x_0 = (R^2 - r^2)/4a$. Поэтому $2dh = 4a|x_0 - x| = |R^2 - r^2 - 4ax| = |p|$.

б) Пусть d — расстояние между центрами описанных окружностей треугольников ACD и BCD; h_a и h_b — расстояния от точек A и B до прямой CD. Согласно задаче а) $|p_a| = 2dh_a$ и $|p_b| = 2dh_b$. Учитывая, что $S_{BCD} = h_b CD/2$ и $S_{ACD} = h_a CD/2$, получаем требуемое.

3.76. Две окружности задают радикальную ось, поэтому а) следует из б). Пусть задана окружность S с центром O и радиусом R и прямая l. Окружность S_1 с центром O_1 и радиусом R_1 и окружность S имеют радикальную ось l тогда и только тогда, когда точка O_1 лежит на прямой, перпендикулярной прямой l и проходящей через точку O, а кроме того, для любой точки A прямой l выполняется равенство $AO^2 - R^2 = AO_1 - R_1^2$, т. е. $R_1^2 = AO_1^2 - AO^2 + R^2$ (теорема Пифагора показывает, что эта величина не зависит от выбора точки A на прямой l). Легко видеть, что все окружности, центры которых лежат на указанной прямой, а радиусы удовлетворяют указанному соотношению, образуют пучок. Действительно, если $AO^2 - R^2 = AO_1 - R_1^2$ и $AO^2 - R^2 = AO_2 - R_2^2$, то $AO_1^2 - R_1^2 = AO_2 - R_2^2$, поэтому прямая l служит радикальной осью окружностей S_1 и S_2.

3.77. Если $\lambda \neq 1$, то

$$\frac{1}{1-\lambda}(f - \lambda g) = x^2 + y^2 + \frac{a_1 - \lambda a_2}{1-\lambda}x + \frac{b_1 - \lambda b_2}{1-\lambda}y + \frac{c_1 - \lambda c_2}{1-\lambda}.$$

Поэтому согласно задаче 3.57 радикальная ось окружностей $f - \lambda g = 0$ и $f - \mu g = 0$ задаётся уравнением $\frac{1}{1-\lambda}(f - \lambda g) = \frac{1}{1-\mu}(f - \mu g)$. Если $\lambda \neq \mu$, то после очевидных преобразований получаем уравнение $f = g$. Таким образом, радикальная ось этих окружностей совпадает с радикальной осью окружностей $f = 0$ и $g = 0$.

3.78. Из решения задачи 3.76 видно, что если окружность пучка проходит через точку радикальной оси, то и все остальные окружности пучка тоже проходят через эту точку.

3.79. В эллиптическом пучке любая окружность пересекает радикальную ось в двух фиксированных точках; радиус такой окружности больше нуля.

В параболическом пучке любая окружность касается радикальной оси в фиксированной точке; именно эта точка является предельной.

Рассмотрим теперь гиперболический пучок. Пусть A — точка пересечения радикальной оси и прямой m, на которой лежат центры окружностей пучка. Пусть, далее, k — степень точки A относительно всех окружностей пучка. Для гиперболического пучка $k > 0$. Точка O прямой m является центром окружности нулевого радиуса, если $AO^2 = k$. Таких точек две.

3.80. Пусть S — окружность с центром O и радиусом R, S_1 — окружность с центром O_1 и радиусом R_1. Ортогональность этих окружностей эквивалентна тому, что $OO_1^2 = R^2 + R_1^2$. Степень точки O относительно окружности S_1 равна $OO_1^2 - R_1^2$, поэтому ортогональность окружностей S и S_1 эквивалентна тому, что степень точки O относительно окружности S_1 равна R^2.

Предположим, что окружность S ортогональна окружностям S_1 и S_2. Тогда степень точки O относительно окружностей S_1 и S_2 равна R^2. Поэтому точка O лежит на их радикальной оси. Степень точки O относительно любой окружности пучка, порождённого окружностями S_1 и S_2, равна R^2.

3.81. Пусть окружность S с центром O и радиусом R принадлежит данному пучку. Тогда, как следует из решения задачи 3.80, степень точки O относительно любой окружности, ортогональной S, равна R^2. Поэтому прямая, на которой лежат центры окружностей данного пучка, является радикальной осью для семейства ортогональных окружностей.

3.82. Точка O является предельной точкой пучка тогда и только тогда, когда её степень относительно любой окружности ортогонального пучка равна 0, т. е. точка O принадлежит любой окружности ортогонального пучка. Ясно также, что пучок, ортогональный ортогональному пучку, совпадает с исходным пучком.

ГЛАВА 4

ПЛОЩАДЬ

Основные сведения

1. Площадь S треугольника ABC можно вычислять по следующим формулам:

а) $S = ah_a/2$, где $a = BC$, h_a — длина высоты, опущенной на BC;

б) $S = \frac{1}{2}bc\sin A$, где b, c — стороны треугольника, A — угол между ними;

в) $S = pr$, где p — полупериметр, r — радиус вписанной окружности. В самом деле, если O — центр вписанной окружности, то

$$S = S_{ABO} + S_{AOC} + S_{OBC} = \frac{1}{2}(c + b + a)r = pr.$$

2. Если многоугольник разрезан на несколько многоугольников, то сумма их площадей равна площади исходного многоугольника.

3. Фигуры, имеющие равную площадь, иногда называют *равновеликими*.

Вводные задачи

1. Докажите, что площадь выпуклого четырёхугольника равна $\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$, где d_1 и d_2 — длины диагоналей, а φ — угол между ними.

2. Пусть E и F — середины сторон BC и AD параллелограмма $ABCD$. Найдите площадь четырёхугольника, образованного прямыми AE, ED, BF и FC, если известно, что площадь $ABCD$ равна S.

3. Многоугольник описан около окружности радиуса r. Докажите, что его площадь равна pr, где p — полупериметр многоугольника.

4. Точка X расположена внутри параллелограмма $ABCD$. Докажите, что $S_{ABX} + S_{CDX} = S_{BCX} + S_{ADX}$.

5. Пусть A_1, B_1, C_1 и D_1 — середины сторон CD, DA, AB, BC квадрата $ABCD$, площадь которого равна S. Найдите площадь четырёхугольника, образованного прямыми AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1.

§ 1. Медиана делит площадь пополам

4.1. Докажите, что медианы разбивают треугольник на шесть равновеликих треугольников.

4.2. Дан треугольник ABC. Найдите все такие точки P, что площади треугольников ABP, BCP и ACP равны.

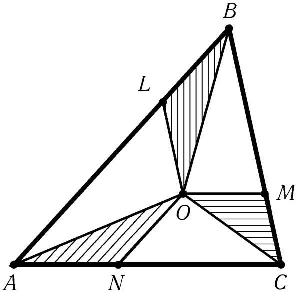


Рис. 4.1

4.3. Внутри данного треугольника ABC найдите такую точку O, что площади треугольников BOL, COM и AON равны (точки L, M и N лежат на сторонах AB, BC и CA, причём $OL \parallel BC$, $OM \parallel AC$ и $ON \parallel AB$; рис. 4.1).

4.4. На продолжениях сторон треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 так, что $\overrightarrow{AB_1} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC_1} = 2\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA_1} = 2\overrightarrow{AC}$. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если известно, что площадь треугольника ABC равна S.

4.5. На продолжениях сторон DA, AB, BC, CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ взяты точки A_1, B_1, C_1, D_1 так, что $\overrightarrow{DA_1} = 2\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AB_1} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC_1} = 2\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD_1} = 2\overrightarrow{CD}$. Найдите площадь получившегося четырёхугольника $A_1B_1C_1D_1$, если известно, что площадь четырёхугольника $ABCD$ равна S.

4.6*. Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Диагонали AD, BE и CF являются диаметрами этой окружности. Докажите, что площадь шестиугольника $ABCDEF$ равна удвоенной площади треугольника ACE.

4.7*. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ существует такая точка O, что площади треугольников OAB, OBC, OCD и ODA равны. Докажите, что одна из диагоналей четырёхугольника делит другую пополам.

§ 2. Вычисление площадей

4.8. Высота трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна 4. Найдите площадь трапеции, если известно, что длина одной из её диагоналей равна 5.

4.9. Каждая диагональ выпуклого пятиугольника $ABCDE$ отсекает от него треугольник единичной площади. Вычислите площадь пятиугольника $ABCDE$.

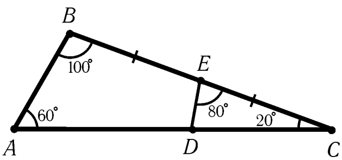


Рис. 4.2

4.10. В прямоугольник $ABCD$ вписаны два различных прямоугольника, имеющих общую вершину K на стороне AB. Докажите, что сумма их площадей равна площади прямоугольника $ABCD$.

4.11*. В треугольнике ABC точка E — середина стороны BC, точка D лежит на стороне AC, $AC = 1$, $\angle BAC = 60°$, $\angle ABC = 100°$, $\angle ACB = 20°$ и $\angle DEC = 80°$ (рис. 4.2). Чему равна сумма площади треугольника ABC и удвоенной площади треугольника CDE?

4.12*. В треугольник $T_a = \triangle A_1A_2A_3$ вписан треугольник $T_b = \triangle B_1B_2B_3$, а в треугольник T_b вписан треугольник $T_c = \triangle C_1C_2C_3$, причём стороны треугольников T_a и T_c параллельны. Выразите площадь треугольника T_b через площади треугольников T_a и T_c.

4.13*. На сторонах треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1, делящие его стороны в отношениях $BA_1 : A_1C = p$, $CB_1 : B_1A = q$ и $AC_1 : C_1B = r$. Точки пересечения отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 расположены так, как показано на рис. 4.3. Найдите отношение площадей треугольников PQR и ABC.

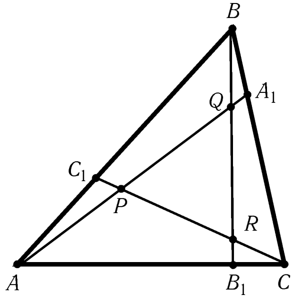


Рис. 4.3

§ 3. Площади треугольников, на которые разбит четырёхугольник

4.14. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что $S_{AOB} = S_{COD}$ тогда и только тогда, когда $BC \parallel AD$.

4.15. а) Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Известны площади треугольников ABP, BCP, CDP. Найдите площадь треугольника ADP.

б) Выпуклый четырёхугольник разбит диагоналями на четыре треугольника, площади которых выражаются целыми числами. Докажите, что произведение этих чисел представляет собой точный квадрат.

4.16*. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, причём $S^2_{ABP} + S^2_{CDP} = S^2_{BCP} + S^2_{ADP}$. Докажите, что P — середина одной из диагоналей.

4.17*. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ существуют три внутренние точки P_1, P_2, P_3, не лежащие на одной прямой и обладающие тем свойством, что сумма площадей треугольников ABP_i и CDP_i равна сумме площадей треугольников BCP_i и ADP_i для $i = 1, 2, 3$. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

§ 4. Площади частей, на которые разбит четырёхугольник

4.18. Пусть K, L, M и N — середины сторон AB, BC, CD и DA выпуклого четырёхугольника $ABCD$; отрезки KM и LN пересекаются в точке O. Докажите, что $S_{AKON} + S_{CLOM} = S_{BKOL} + S_{DNOM}$.

4.19. Точки K, L, M и N лежат на сторонах AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$, причём отрезки KM и LN параллельны сторонам параллелограмма. Эти отрезки пересекаются в точке O. Докажите, что площади параллелограммов $KBLO$ и $MDNO$ равны тогда и только тогда, когда точка O лежит на диагонали AC.

4.20. На сторонах AB и CD четырёхугольника $ABCD$ взяты точки M и N так, что $AM:MB=CN:ND$. Отрезки AN и DM пересекаются в точке K, а отрезки BN и CM — в точке L. Докажите, что $S_{KMLN}=S_{ADK}+S_{BCL}$.

4.21. На стороне AB четырёхугольника $ABCD$ взяты точки A_1 и B_1, а на стороне CD — точки C_1 и D_1, причём $AA_1=BB_1=pAB$ и $CC_1=$ $=DD_1=pCD$, где $p<0,5$. Докажите, что $S_{A_1B_1C_1D_1}/S_{ABCD}=1-2p$.

4.22*. Каждая из сторон выпуклого четырёхугольника разделена на пять равных частей и соответствующие точки противоположных сторон соединены (рис. 4.4). Докажите, что площадь среднего (заштрихованного) четырёхугольника в 25 раз меньше площади исходного.

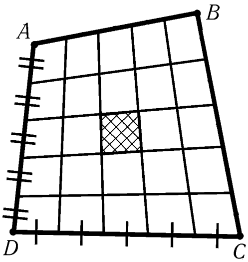


Рис. 4.4

4.23*. На каждой стороне параллелограмма взято по точке. Площадь четырёхугольника с вершинами в этих точках равна половине площади параллелограмма. Докажите, что хотя бы одна из диагоналей четырёхугольника параллельна стороне параллелограмма.

4.24*. Точки K и M — середины сторон AB и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$, точки L и N расположены на сторонах BC и AD так, что $KLMN$ — прямоугольник. Докажите, что площадь четырёхугольника $ABCD$ вдвое больше площади прямоугольника $KLMN$.

4.25*. Квадрат разделён на четыре части двумя перпендикулярными прямыми, точка пересечения которых лежит внутри его. Докажите, что если площади трёх из этих частей равны, то равны и площади всех четырёх частей.

§ 5. Разные задачи

4.26. Даны параллелограмм $ABCD$ и некоторая точка M. Докажите, что $S_{ACM}=|S_{ABM}\pm S_{ADM}|$.

4.27. На сторонах AB и BC треугольника ABC внешним образом построены параллелограммы; P — точка пересечения продолжений их сторон, параллельных AB и BC. На стороне AC построен параллелограмм, вторая сторона которого равна и параллельна BP. Докажите, что его площадь равна сумме площадей первых двух параллелограммов.

4.28*. Точка O, лежащая внутри правильного шестиугольника, соединена с вершинами. Возникшие при этом шесть треугольников раскрашены попеременно в красный и синий цвет. Докажите, что сумма площадей красных треугольников равна сумме площадей синих.

4.29*. Продолжения сторон AD и BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O; M и N — середины сторон AB и CD, P и Q — середины диагоналей AC и BD. Докажите, что:

а) $S_{PMQN} = |S_{ABD} - S_{ACD}|/2$;

б) $S_{OPQ} = S_{ABCD}/4$.

4.30*. На сторонах AB и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ взяты точки E и F. Пусть K, L, M и N — середины отрезков DE, BF, CE и AF. Докажите, что четырёхугольник $KLMN$ выпуклый и его площадь не зависит от выбора точек E и F.

4.31*. Середины диагоналей AC, BD, CE, ... выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ образуют выпуклый шестиугольник. Докажите, что его площадь в четыре раза меньше площади исходного шестиугольника.

4.32*. Диаметр PQ и перпендикулярная ему хорда RS пересекаются в точке A. Точка C лежит на окружности, а точка B — внутри окружности, причём $BC \parallel PQ$ и $BC = RA$. Из точек A и B опущены перпендикуляры AK и BL на прямую CQ. Докажите, что $S_{ACK} = S_{BCL}$.

4.33*. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O; P и Q — произвольные точки. Докажите, что

$$\frac{S_{AOP}}{S_{BOQ}} = \frac{S_{ACP}}{S_{BDQ}} \cdot \frac{S_{ABD}}{S_{ABC}}.$$

* * *

4.34*. Через точку O, лежащую внутри треугольника ABC, проведены отрезки, параллельные сторонам. Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 разбивают треугольник ABC на четыре треугольника и три четырёхугольника (рис. 4.5). Докажите, что сумма площадей треугольников, прилегающих к вершинам A, B и C, равна площади четвёртого треугольника.

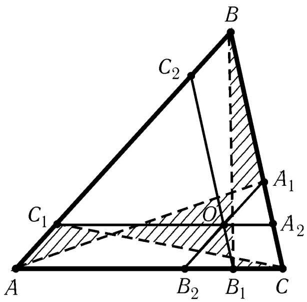


Рис. 4.5

4.35*. На биссектрисе угла A треугольника ABC взята точка A_1 так, что $AA_1 = p - a = (b + c - a)/2$, и через точку A_1 проведена прямая l_a, перпендикулярная биссектрисе. Если аналогично провести прямые l_b и l_c, то треугольник ABC разобьётся на части, среди которых четыре треугольника. Докажите, что площадь одного из этих треугольников равна сумме площадей трёх других.

См. также задачи 3.39—3.42, 13.55—13.59, 16.5, 24.7.

§ 6. Прямые и кривые, делящие фигуры на равновеликие части

4.36. Отрезок MN, параллельный стороне CD четырёхугольника $ABCD$, делит его площадь пополам (точки M и N лежат на сторонах BC и AD). Длины отрезков, проведённых из точек A и B

параллельно CD до пересечения с прямыми BC и AD, равны a и b. Докажите, что $MN^2 = (ab + c^2)/2$, где $c = CD$.

4.37. Каждая из трёх прямых делит площадь фигуры пополам. Докажите, что часть фигуры, заключённая внутри треугольника, образованного этими прямыми, имеет площадь, не превосходящую $1/4$ площади всей фигуры.

4.38*. Прямая l делит площадь выпуклого многоугольника пополам. Докажите, что эта прямая делит проекцию данного многоугольника на прямую, перпендикулярную l, в отношении, не превосходящем $1 + \sqrt{2}$.

4.39*. Докажите, что любой выпуклый многоугольник можно разрезать двумя взаимно перпендикулярными прямыми на четыре фигуры равной площади.

4.40*. а) Докажите, что любая прямая, делящая пополам площадь и периметр треугольника, проходит через центр вписанной окружности.

б) Докажите аналогичное утверждение для любого описанного многоугольника.

4.41*. Точки A и B окружности S_1 соединены дугой окружности S_2, делящей площадь круга, ограниченного S_1, на равные части. Докажите, что дуга S_2, соединяющая A и B, по длине больше диаметра S_1.

4.42*. Кривая Γ делит квадрат на две части равной площади. Докажите, что на ней можно выбрать две точки A и B так, что прямая AB проходит через центр O квадрата.

См. также задачи 2.73, 6.55, 6.56, 16.8, 18.33.

§ 7. Формулы для площади четырёхугольника

4.43. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Расстояния от точек A, B и P до прямой CD равны a, b и p. Докажите, что площадь четырёхугольника $ABCD$ равна $ab \cdot CD/2p$.

4.44. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R, φ — угол между его диагоналями. Докажите, что площадь S четырёхугольника $ABCD$ равна $2R^2 \sin A \sin B \sin \varphi$.

4.45*. Докажите, что площадь четырёхугольника, диагонали которого не перпендикулярны, равна $\operatorname{tg} \varphi \cdot |a^2 + c^2 - b^2 - d^2|/4$, где a, b, c и d — длины последовательных сторон, φ — угол между диагоналями.

4.46*. а) Докажите, что площадь выпуклого четырёхугольника $ABCD$ вычисляется по формуле

$$S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2 \frac{B+D}{2},$$

где p — полупериметр, a, b, c, d — длины сторон.

б) Докажите, что если четырёхугольник $ABCD$ вписанный, то $S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$.

в) Докажите, что если четырёхугольник $ABCD$ описанный, то $S^2 = abcd\sin^2((B+D)/2)$.

См. также задачу 11.34.

§ 8. Вспомогательная площадь

4.47. Докажите, что сумма расстояний от точки, взятой произвольно внутри правильного треугольника, до его сторон постоянна (и равна высоте треугольника).

4.48. Докажите, что длина биссектрисы AD треугольника ABC равна $\dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

4.49. Внутри треугольника ABC взята точка O; прямые AO, BO и CO пересекают его стороны в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что: а) $\dfrac{OA_1}{AA_1}+\dfrac{OB_1}{BB_1}+\dfrac{OC_1}{CC_1}=1$; б) $\dfrac{AC_1}{C_1B}\cdot\dfrac{BA_1}{A_1C}\cdot\dfrac{CB_1}{B_1A}=1$.

4.50. Даны $(2n-1)$-угольник $A_1\ldots A_{2n-1}$ и точка O. Прямые A_kO и $A_{n+k-1}A_{n+k}$ пересекаются в точке B_k. Докажите, что произведение отношений $A_{n+k-1}B_k/A_{n+k}B_k$ $(k=1, \ldots, n)$ равно 1.

4.51. Дан выпуклый многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$. На стороне A_1A_2 взяты точки B_1 и D_2, на стороне A_2A_3 — точки B_2 и D_3 и т. д. таким образом, что если построить параллелограммы $A_1B_1C_1D_1, \ldots, A_nB_nC_nD_n$, то прямые $A_1C_1, \ldots, A_nC_n$ пересекутся в одной точке O. Докажите, что $A_1B_1\cdot A_2B_2\cdot\ldots\cdot A_nB_n = A_1D_1\cdot A_2D_2\cdot\ldots\cdot A_nD_n$.

4.52. Длины сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что радиус вписанной окружности равен трети одной из высот треугольника.

4.53. Расстояния от точки X стороны BC треугольника ABC до прямых AB и AC равны d_b и d_c. Докажите, что $d_b/d_c = BX\cdot AC/(CX\cdot AB)$.

4.54*. Многоугольник, описанный около окружности радиуса r, разрезан на треугольники (произвольным образом). Докажите, что сумма радиусов вписанных окружностей этих треугольников больше r.

4.55*. Через точку M, лежащую внутри параллелограмма $ABCD$, проведены прямые PR и QS, параллельные сторонам BC и AB (точки P, Q, R и S лежат на сторонах AB, BC, CD и DA соответственно). Докажите, что прямые BS, PD и MC пересекаются в одной точке.

4.56*. Докажите, что если никакие стороны четырёхугольника не параллельны, то середина отрезка, соединяющего точки пересечения противоположных сторон, лежит на прямой, соединяющей середины диагоналей (*прямая Гаусса*).

4.57*. На сторонах BC и DC параллелограмма $ABCD$ выбраны точки D_1 и B_1 так, что $BD_1 = DB_1$. Отрезки BB_1 и DD_1 пересекаются в точке Q. Докажите, что AQ — биссектриса угла BAD.

4.58*. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1 и на сторонах AB и AC взяты точки K и L так, что

$AK = BC_1$ и $AL = CB_1$. Докажите, что прямая AO, где O — центр описанной окружности треугольника ABC, делит отрезок KL пополам.

4.59*. Медианы AA_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Докажите, что если четырёхугольник A_1BC_1M описанный, то $AB = BC$.

4.60*. Внутри треугольника ABC взята точка O. Обозначим расстояния от точки O до сторон BC, CA, AB треугольника через d_a, d_b, d_c, а расстояния от точки O до вершин A, B, C через R_a, R_b, R_c. Докажите, что:

а) $aR_a \geqslant cd_c + bd_b$;

б) $d_aR_a + d_bR_b + d_cR_c \geqslant 2(d_ad_b + d_bd_c + d_cd_a)$;

в) $R_a + R_b + R_c \geqslant 2(d_a + d_b + d_c)$ (Эрдёш—Морделл);

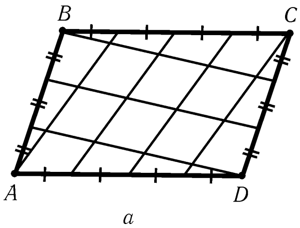
г) $R_aR_bR_c \geqslant (R/2r)(d_a + d_b)(d_b + d_c)(d_c + d_a)$.

См. также задачи 1.60, 5.5, 5.34, 6.5, 6.31, 6.38, 6.40, 6.83, 9.26, 10.6, 10.52, 10.99, 11.21, 12.35, 22.49.

§ 9. Перегруппировка площадей

4.61. Докажите, что площадь правильного восьмиугольника равна произведению длин наибольшей и наименьшей его диагоналей.

4.62. Из середины каждой стороны остроугольного треугольника опущены перпендикуляры на две другие стороны. Докажите, что площадь ограниченного ими шестиугольника равна половине площади исходного треугольника.



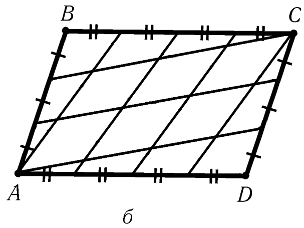


Рис. 4.6

4.63*. Стороны AB и CD параллелограмма $ABCD$ площади 1 разбиты на n равных частей, AD и BC — на m равных частей.

а) Точки деления соединены так, как показано на рис. 4.6, *а*.

б) Точки деления соединены так, как показано на рис. 4.6, *б*.

Чему равны площади образовавшихся при этом маленьких параллелограммов?

4.64*. а) Четыре вершины правильного двенадцатиугольника расположены в серединах сторон квадрата (рис. 4.7). Докажите, что площадь заштрихованной части в 12 раз меньше площади двенадцатиугольника.

б) Докажите, что площадь двенадцатиугольника, вписанного в окружность радиуса 1, равна 3.

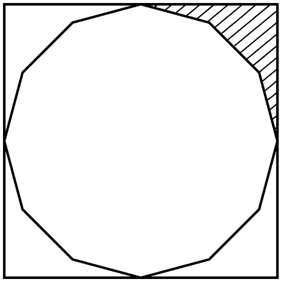


Рис. 4.7

См. также задачи 2.77, 3.41, 4.35, 9.44.

Задачи для самостоятельного решения

4.65. Стороны вписанного четырёхугольника $ABCD$ удовлетворяют соотношению $AB \cdot BC = AD \cdot DC$. Докажите, что площади треугольников ABC и ADC равны.

4.66. Можно ли двумя прямолинейными разрезами, проходящими через две вершины треугольника, разрезать его на четыре части так, чтобы три треугольника (из числа этих частей) были равновеликими?

4.67. Докажите, что все выпуклые четырёхугольники, имеющие общие середины сторон, равновелики.

4.68. Докажите, что если два треугольника, получающихся при продолжении сторон выпуклого четырёхугольника до их пересечения, равновелики, то одна из диагоналей делит другую пополам.

4.69. Площадь треугольника равна S, периметр равен P. Прямые, на которых расположены его стороны, отодвигаются (во внешнюю сторону) на расстояние h. Найдите площадь и периметр треугольника, образованного тремя полученными прямыми.

4.70. На стороне AB треугольника ABC взяты точки D и E так, что $\angle ACD = \angle DCE = \angle ECB = \varphi$. Найдите отношение $CD : CE$, если известны длины сторон AC и BC и угол φ.

4.71. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — биссектрисы треугольника ABC. Докажите, что

$$S_{A_1B_1C_1}/S_{ABC} = 2abc/((a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)).$$

4.72. Точки M и N являются серединами боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$. Докажите, что если удвоенная площадь трапеции равна $AN \cdot NB + CM \cdot MD$, то $AB = CD = BC + AD$.

4.73. Если четырёхугольник с попарно различными длинами сторон вписан в окружность радиуса R, то существует ещё два не равных ему четырёхугольника с такими же длинами сторон, вписанных в ту же окружность. Эти четырёхугольники имеют не более трёх различных длин диагоналей: d_1, d_2 и d_3. Докажите, что площадь четырёхугольника равна $d_1d_2d_3/4R$.

4.74. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки C_1, A_1 и B_1; точки C_2, A_2 и B_2 симметричны этим точкам относительно середин соответствующих сторон. Докажите, что $S_{A_1B_1C_1} = S_{A_2B_2C_2}$.

4.75. Внутри треугольника ABC взята точка P. Прямые, проходящие через точку P и вершины треугольника, пересекают стороны в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что площадь треугольника, образованного серединами отрезков AA_1, BB_1 и CC_1, равна четверти площади треугольника $A_1B_1C_1$.

Решения

4.1. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Прямая BM разрезает каждый из треугольников ABC и AMC на два равновеликих треугольника, поэтому $S_{ABM} = S_{BCM}$. Аналогично $S_{BCM} = S_{CAM}$.

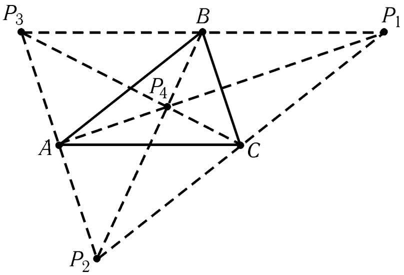


Рис. 4.8

4.2. Из равенства площадей треугольников ABP и BCP следует, что расстояния от точек A и C до прямой BP равны. Поэтому прямая BP либо проходит через середину отрезка AC, либо параллельна ему. Искомые точки изображены на рис. 4.8.

4.3. Обозначим точку пересечения прямой LO со стороной AC через L_1. Так как $S_{LOB} = S_{MOC}$ и $\triangle MOC = \triangle L_1OC$, то $S_{LOB} = S_{L_1OC}$. Высоты треугольников LOB и L_1OC равны, поэтому $LO = L_1O$, т. е. точка O лежит на медиане, проведённой из вершины A. Аналогично доказывается, что точка O лежит на медианах, проведённых из вершин B и C, т. е. O — точка пересечения медиан треугольника. Эти рассуждения показывают также, что точка пересечения медиан треугольника обладает требуемым свойством.

4.4. Так как $S_{A_1BB_1} = S_{A_1AB} = S_{ABC}$, то $S_{AA_1B_1} = 2S$. Аналогично $S_{BB_1C_1} = S_{CC_1A_1} = 2S$. Поэтому $S_{ABC} = 7S$.

4.5. Поскольку $AB = BB_1$, то $S_{BB_1C} = S_{BAC}$. А так как $BC = CC_1$, то $S_{B_1C_1C} = S_{BB_1C} = S_{BAC}$ и $S_{BB_1C_1} = 2S_{BAC}$. Аналогично $S_{DD_1A_1} = 2S_{ACD}$, поэтому $S_{BB_1C_1} + S_{DD_1A_1} = 2S_{ABC} + 2S_{ACD} = 2S_{ABCD}$. Аналогично $S_{AA_1B_1} + S_{CC_1D_1} = 2S_{ABCD}$, поэтому $S_{A_1B_1C_1D_1} = S_{ABCD} + S_{AA_1B_1} + S_{BB_1C_1} + S_{CC_1D_1} + S_{DD_1A_1} = 5S_{ABCD}$.

4.6. Пусть O — центр описанной окружности. Так как AD, BE и CF — диаметры, то $S_{ABO} = S_{DEO} = S_{AEO}$, $S_{BCO} = S_{EFO} = S_{CEO}$, $S_{CDO} = S_{AFO} = S_{ACO}$. Ясно также, что $S_{ABCDEF} = 2(S_{ABO} + S_{BCO} + S_{CDO})$ и $S_{ACE} = S_{AEO} + S_{CEO} + S_{ACO}$. Следовательно, $S_{ABCDEF} = 2S_{ACE}$.

4.7. Пусть E и F — середины диагоналей AC и BD. Так как $S_{AOB} = S_{AOD}$, точка O лежит на прямой AF. Аналогично точка O лежит на прямой CF. Предположим, что точка пересечения диагоналей не является серединой ни одной из них. Тогда прямые AF и CF имеют единственную общую точку F, поэтому $O = F$. Аналогично доказывается, что $O = E$. Получено противоречие.

4.8. Пусть диагональ AC трапеции $ABCD$ с основанием AD равна 5. Достроим треугольник ACB до параллелограмма $ACBE$. Площадь трапеции $ABCD$ равна площади прямоугольного треугольника DBE. Пусть BH — высота треугольника DBE. Тогда $EH^2 = BE^2 - BH^2 = 5^2 - 4^2 = 3^2$ и $ED = BE^2/EH = 25/3$. Поэтому $S_{DBE} = ED \cdot BH/2 = 50/3$.

4.9. Так как $S_{ABE} = S_{ABC}$, то $EC \parallel AB$. Остальные диагонали тоже параллельны соответствующим сторонам. Пусть P — точка пересечения BD и EC.

Если $S_{BPC}=x$, то $S_{ABCDE}=S_{ABE}+S_{EPB}+S_{EDC}+S_{BPC}=3+x$ ($S_{EPB}=S_{ABE}=1$, так как $ABPE$ — параллелограмм). Так как $S_{BPC}:S_{DPC}=BP:DP=S_{EPB}:S_{EPD}$, то $x:(1-x)=1:x$, а значит, $x=(\sqrt{5}-1)/2$ и $S_{ABCDE}=(\sqrt{5}+5)/2$.

4.10. Центры всех трёх прямоугольников совпадают (см. задачу 1.7), поэтому два меньших прямоугольника имеют общую диагональ KL. Пусть M и N — вершины этих прямоугольников, лежащие на стороне BC. Точки M и N лежат на окружности с диаметром KL. Пусть O — центр этой окружности. O_1 — проекция точки O на BC. Тогда $BO_1=CO_1$ и $MO_1=NO_1$, а значит, $BM=NC$. Чтобы доказать, что $S_{KLM}+S_{KLN}=S_{KBCL}$, достаточно проверить, что $(S_{KBM}+S_{LCM})+(S_{KBN}+S_{LCN})=S_{KBCL}=BC(KB+CL)/2=BC\cdot AB/2$. Остаётся заметить, что $KB\cdot BM+KB\cdot BN=KB\cdot BC$, $LC\cdot CM+LC\cdot CN=LC\cdot BC$ и $KB\cdot BC+LC\cdot BC=AB\cdot BC$.

4.11. Опустим из точки C перпендикуляр l на прямую AB. Пусть точки A', B' и E' симметричны точкам A, B и E относительно прямой l. Тогда треугольник $AA'C$ равносторонний, причём $\angle ACB=\angle BCB'=\angle B'CA'=20^\circ$. Треугольники $EE'C$ и DEC равнобедренные с углом при вершине 20°, причём боковая сторона EC у них общая. Следовательно, $S_{ABC}+2S_{EDC}=S_{ABC}+2S_{EE'C}$. Так как E — середина BC, то $2S_{EE'C}=S_{BE'C}=S_{BB'C}/2$. Поэтому $S_{ABC}+2S_{EDC}=$ $=S_{AA'C}/2=\sqrt{3}/8$.

4.12. Пусть площади треугольников T_a, T_b и T_c равны a, b и c. Треугольники T_a и T_c гомотетичны, поэтому прямые, соединяющие их соответственные вершины, пересекаются в одной точке O. Коэффициент k подобия этих треугольников равен $\sqrt{a/c}$. Ясно, что $S_{A_1B_3O}:S_{C_1B_3O}=A_1O:C_1O=k$. Записывая аналогичные равенства и складывая их, получаем $a:b=k$, а значит, $b=\sqrt{ac}$.

4.13. Воспользовавшись результатом задачи 1.3 а), легко проверить, что

$$\frac{BQ}{BB_1}=\frac{p+pq}{1+p+pq},\qquad \frac{B_1R}{BB_1}=\frac{qr}{1+q+qr},\qquad \frac{CR}{CC_1}=\frac{q+qr}{1+q+qr},\qquad \frac{CP}{CC_1}=\frac{pr}{1+r+pr}.$$

Ясно также, что

$$\frac{S_{PQR}}{S_{RB_1C}}=\frac{QR}{RB_1}\cdot\frac{PR}{RC}\quad\text{и}\quad \frac{S_{RB_1C}}{S_{ABC}}=\frac{B_1C}{AC}\cdot\frac{B_1R}{BB_1}.$$

Поэтому

$$\frac{S_{PQR}}{S_{ABC}}=\frac{QR}{BB_1}\cdot\frac{PR}{RC}\cdot\frac{B_1C}{AC}=\frac{QR}{BB_1}\cdot\frac{PR}{CC_1}\cdot\frac{CC_1}{CR}\cdot\frac{B_1C}{AC}.$$

Учитывая, что

$$\frac{QR}{BB_1}=1-\frac{p+pq}{1+p+pq}-\frac{qr}{1+q+rq}=\frac{1}{1+p+pq}-\frac{rq}{1+q+rq}=\frac{(1+q)(1-pqr)}{(1+p+pq)(1+q+qr)}$$

и

$$\frac{PR}{CC_1}=\frac{(1+r)(1-pqr)}{(1+q+qr)(1+r+pr)},$$

получаем

$$\frac{S_{PQR}}{S_{ABC}}=\frac{(1-pqr)^2}{(1+p+pq)(1+q+qr)(1+r+pr)}.$$

4.14. Если $S_{AOB}=S_{COD}$, то $AO\cdot BO=CO\cdot DO$. Поэтому $\triangle AOD\sim\triangle COB$ и $AD\parallel BC$. Эти рассуждения обратимы.

4.15. а) Так как $S_{ADP}:S_{ABP}=DP:BP=S_{CDP}:S_{BCP}$, то $S_{ADP}=S_{ABP}\cdot S_{CDP}/S_{BCP}$.

б) Согласно задаче а) $S_{ADP} \cdot S_{CBP} = S_{ABP} \cdot S_{CDP}$. Поэтому

$$S_{ABP} \cdot S_{CBP} \cdot S_{CDP} \cdot S_{ADP} = (S_{ADP} \cdot S_{CBP})^2.$$

4.16. После сокращения на $\sin^2\varphi/4$, где φ — угол между диагоналями, данное равенство площадей перепишется в виде $(AP \cdot BP)^2 + (CP \cdot DP)^2 = (BP \cdot CP)^2 + (AP \cdot DP)^2$, т. е. $(AP^2 - CP^2)(BP^2 - DP^2) = 0$.

4.17. Предположим, что четырёхугольник $ABCD$ не параллелограмм; например, прямые AB и CD пересекаются. Согласно задаче 7.2 множеством точек P, лежащих внутри четырёхугольника $ABCD$, для которых $S_{ABP} + S_{CDP} = S_{BCP} + S_{ADP} = S_{ABCD}/2$, является отрезок. Следовательно, точки P_1, P_2 и P_3 лежат на одной прямой. Получено противоречие.

4.18. Ясно, что $S_{AKON} = S_{AKO} + S_{ANO} = (S_{AOB} + S_{AOD})/2$. Аналогично $S_{CLOM} = (S_{BCO} + S_{COD})/2$. Поэтому $S_{AKON} + S_{CLOM} = S_{ABCD}/2$.

4.19. Если площади параллелограммов $KBLO$ и $MDNO$ равны, то $OK \cdot OL = OM \cdot ON$. Учитывая, что $ON = KA$ и $OM = LC$, получаем $KO : KA = LC : LO$. Следовательно, $\triangle KOA \sim \triangle LCO$, а значит, точка O лежит на диагонали AC. Эти рассуждения обратимы.

4.20. Пусть h_1, h и h_2 — расстояния от точек A, M и B до прямой CD. Согласно задаче 1.1 б) $h = ph_2 + (1-p)h_1$, где $p = AM/AB$. Поэтому $S_{DMC} = h \cdot DC/2 = (h_2 p \cdot DC + h_1(1-p) \cdot DC)/2 = S_{BCN} + S_{ADN}$. Вычитая из обеих частей этого равенства $S_{DKN} + S_{CLN}$, получаем требуемое.

4.21. Согласно задаче 4.20 $S_{ABD_1} + S_{CDB_1} = S_{ABCD}$. Поэтому $S_{A_1B_1C_1D_1} = S_{A_1B_1D_1} + S_{C_1D_1B_1} = (1-2p)S_{ABD_1} + (1-2p)S_{CDB_1} = (1-2p)S_{ABCD}$.

4.22. Согласно задаче 4.21 площадь среднего из четырёхугольников, заданных отрезками, соединяющими точки сторон AB и CD, в пять раз меньше площади исходного четырёхугольника. А так как каждый из рассматриваемых отрезков делится отрезками, соединяющими соответствующие точки другой пары противоположных сторон, на пять равных частей (см. задачу 1.16), то, воспользовавшись ещё раз результатом задачи 4.21, получим требуемое.

4.23. На сторонах AB, BC, CD и AD взяты точки K, L, M и N соответственно. Предположим, что диагональ KM не параллельна стороне AD. Фиксируем точки K, M, N и будем двигать точку L по стороне BC. При этом площадь треугольника KLM изменяется строго монотонно. Кроме того, если $LN \parallel AB$, то выполняется равенство $S_{AKN} + S_{BKL} + S_{CLM} + S_{DMN} = S_{ABCD}/2$, т. е. $S_{KLMN} = S_{ABCD}/2$.

4.24. Пусть L_1 и N_1 — середины сторон BC и AD соответственно. Тогда KL_1MN_1 — параллелограмм и его площадь равна половине площади четырёхугольника $ABCD$ (см. задачу 1.38 а). Поэтому достаточно доказать, что площади параллелограммов $KLMN$ и KL_1MN_1 равны. Если эти параллелограммы совпадают, то доказывать больше ничего не нужно, а если они не совпадают, то, так как середина отрезка KM является их центром симметрии, $LL_1 \parallel NN_1$ и $BC \parallel AD$. В этом случае средняя линия KM трапеции $ABCD$ параллельна основаниям BC и AD, и поэтому высоты треугольников KLM и KL_1M, опущенные на сторону KM, равны, т. е. равны площади параллелограммов $KLMN$ и KL_1MN_1.

4.25. Пусть данные прямые l_1 и l_2 делят квадрат на четыре части, площади которых равны S_1, S_2, S_3 и S_4, причём для первой прямой площади частей, на которые она делит квадрат, равны $S_1 + S_2$ и $S_3 + S_4$ а для второй они равны S_2+S_3 и S_1+S_4. Так как по условию $S_1=S_2=S_3$, то $S_1+S_2=S_2+S_3$. Это означает, что образ прямой l_1 при повороте относительно центра квадрата на $+90^\circ$ или -90° не просто параллелен прямой l_2, а совпадает с ней.

Остаётся доказать, что прямая l_1 (а значит, и прямая l_2) проходит через центр квадрата. Предположим, что это не верно. Рассмотрим образы прямых l_1 и l_2 при поворотах на $\pm 90^\circ$ и обозначим площади частей, на которые они делят квадрат, так, как показано на рис. 4.9 (на этом рисунке изображены

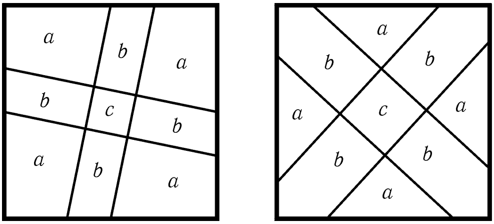


Рис. 4.9

оба различных варианта расположения прямых). Прямые l_1 и l_2 делят квадрат на четыре части, площади которых равны a, $a+b$, $a+2b+c$ и $a+b$, причём числа a, b и c ненулевые. Ясно, что три из указанных четырёх чисел не могут быть равны. Получено противоречие.

4.26. Все три рассматриваемых треугольника имеют общее основание AM. Пусть h_b, h_c и h_d — расстояния от точек B, C и D до прямой AM. Так как $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$, то $h_c=|h_b\pm h_d|$.

4.27. Можно считать, что P — общая точка параллелограммов, построенных на сторонах AB и BC, т. е. эти параллелограммы имеют вид $ABPQ$ и $CBPR$. Ясно, что $S_{ACRQ}=S_{ABPQ}+S_{CBPR}$.

4.28. Пусть сторона данного шестиугольника равна a. Продолжения красных сторон шестиугольника образуют правильный треугольник со стороной $3a$, причём сумма площадей красных треугольников равна половине произведения a на сумму расстояний от точки O до сторон этого треугольника, поэтому она равна $a^2\cdot 3\sqrt{3}/4$ (см. задачу 4.47). Сумма площадей синих треугольников вычисляется аналогично.

4.29. а) Площадь параллелограмма $PMQN$ равна $BC\cdot AD\sin\alpha/4$, где α — угол между прямыми AD и BC. Высоты треугольников ABD и ACD, опущенные из вершин B и C, равны $OB\sin\alpha$ и $OC\sin\alpha$, поэтому $|S_{ABD}-S_{ACD}|=$ $=|OB-OC|\cdot AD\sin\alpha/2=BC\cdot AD\sin\alpha/2$.

б) Пусть для определённости пересекаются лучи AD и BC. Так как $PN\parallel AO$ и $QN\parallel CO$, точка N лежит внутри треугольника OPQ. Поэтому $S_{OPQ}=S_{PQN}+$
$$+S_{PON}+S_{QON}=\frac{S_{PMQN}}{2}+\frac{S_{ACD}}{4}+\frac{S_{BCD}}{4}=\frac{S_{ABD}-S_{ACD}+S_{ACD}+S_{BCD}}{4}=\frac{S_{ABCD}}{4}.$$

4.30. Отрезки KM и LN являются средними линиями треугольников CED и AFB, поэтому они имеют общую точку — середину отрезка EF. Кроме того, $KM=CD/2$, $LN=AB/2$ и угол между прямыми KM и LN равен углу α между прямыми AB и CD. Поэтому площадь четырёхугольника $KLMN$ равна $AB\cdot CD\sin\alpha/8$.

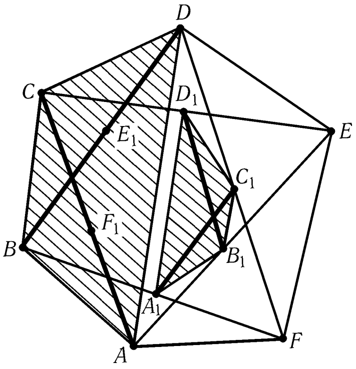


Рис. 4.10

4.31. Обозначим середины диагоналей шестиугольника $ABCDEF$ так, как показано на рис. 4.10. Докажем, что площадь четырёхугольника $A_1B_1C_1D_1$ в четыре раза меньше площади четырёхугольника $ABCD$. Воспользуемся для этого тем, что площадь четырёхугольника равна половине произведения длин диагоналей на синус угла между ними. Так как A_1C_1 и B_1D_1 — средние линии треугольников BDF и ACE, получаем требуемое. Аналогично доказывается, что площадь четырёхугольника $D_1E_1F_1A_1$ в четыре раза меньше площади четырёхугольника $DEFA$.

4.32. Пусть $\alpha = \angle PQC$. Так как $PC \parallel AK$, то $CK = AP\cos\alpha$. Поэтому $2S_{ACK} = CK \cdot AK = (AP\cos\alpha) \cdot (AQ\sin\alpha) = AR^2\sin\alpha\cos\alpha = BC^2\sin\alpha\cos\alpha = BL \cdot CL = 2S_{BCL}$.

4.33. Ясно, что $\dfrac{S_{CBD}}{S_{ABD}} = \dfrac{CO}{AO}$. Прибавив к обеим частям этого равенства 1, получим

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{ABD}} = \frac{AC}{AO} = \frac{S_{ACP}}{S_{AOP}}. \qquad (1)$$

Аналогично доказывается, что

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{ABC}} = \frac{BD}{BO} = \frac{S_{BDQ}}{S_{BOQ}}. \qquad (2)$$

Поделив равенство (2) на (1), получаем требуемое.

4.34. Пусть S_a, S_b и S_c — площади треугольников, прилегающих к вершинам A, B и C; S — площадь четвёртого рассматриваемого треугольника. Ясно, что $S_{ACC_1} + S_{BAA_1} + S_{CBB_1} = S_{ABC} - S + S_a + S_b + S_c$. Кроме того, $S_{ABC} = S_{AOC} + S_{AOB} + S_{BOC} = S_{ACC_1} + S_{BAA_1} + S_{CBB_1}$.

4.35. Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC, B_1 — точка касания вписанной окружности со стороной AC. Вырежем из треугольника ABC треугольник AOB_1 и отразим его симметрично относительно биссектрисы угла OAB_1. При этом прямая OB_1 перейдёт в прямую l_a. Проделаем такую операцию для остальных треугольников. Общие части полученных при этом треугольников являются тремя треугольниками рассматриваемого разбиения, а непокрытая часть треугольника ABC — четвёртым треугольником. Ясно также, что площадь непокрытой части равна сумме площадей частей, покрытых дважды.

4.36. Пусть для определённости лучи AD и BC пересекаются в точке O. Тогда $S_{CDO} : S_{MNO} = c^2 : x^2$, где $x = MN$, и $S_{ABO} : S_{MNO} = ab : x^2$, так как $OA : ON = a : x$ и $OB : OM = b : x$. Следовательно, $x^2 - c^2 = ab - x^2$, т. е. $2x^2 = ab + c^2$.

4.37. Обозначим площади частей фигуры, на которые её делят прямые, так, как показано на рис. 4.11. Площадь всей фигуры обозначим через S. Так как $S_3 + (S_2 + S_7) = S/2 = S_1 + S_6 + (S_2 + S_7)$, то $S_3 = S_1 + S_6$. Складывая это равенство с равенством $S/2 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$, получаем $S/2 = 2S_1 + S_2 + S_4 + S_6 \geqslant 2S_1$, т. е. $S_1 \leqslant S/4$.

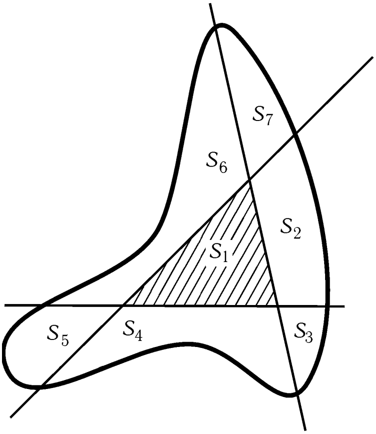


Рис. 4.11

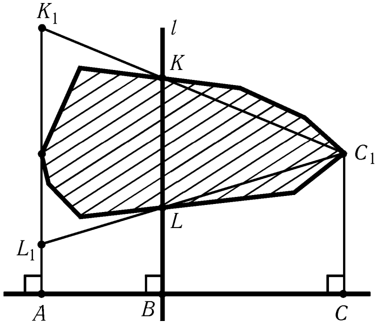


Рис. 4.12

4.38. Обозначим проекцию прямой l через B, крайние точки проекции многоугольника — через A и C. Пусть C_1 — точка многоугольника, проецирующаяся в точку C; прямая l пересекает многоугольник в точках K и L, а K_1 и L_1 — точки прямых C_1K и C_1L, проецирующиеся в точку A (рис. 4.12).

Одна из частей, на которые прямая l делит многоугольник, содержится в трапеции K_1KLL_1, другая часть содержит треугольник C_1KL. Поэтому $S_{K_1KLL_1} \geqslant S_{C_1KL}$, т. е. $AB \cdot (KL + K_1L_1) \geqslant BC \cdot KL$. Так как $K_1L_1 = KL \cdot (AB + BC)/BC$, то $AB \cdot (2 + AB/BC) \geqslant BC$. Решая это квадратное неравенство, получаем $BC/AB \leqslant 1 + \sqrt{2}$. Аналогично $AB/BC \leqslant 1 + \sqrt{2}$ (нужно провести те же рассуждения, поменяв местами A и C).

4.39. Обозначим площадь многоугольника через S. Пусть l — произвольная прямая. Введём систему координат, для которой прямая l является осью Ox.

Пусть $S(a)$ — площадь той части многоугольника, которая лежит ниже прямой $y = a$. При изменении a от $-\infty$ до $+\infty$ $S(a)$ непрерывно меняется от 0 до S, поэтому $S(a) = S/2$ для некоторого a, т. е. прямая $y = a$ делит площадь многоугольника пополам. Аналогично существует прямая, перпендикулярная l и делящая площадь многоугольника пополам. Эти две прямые разбивают многоугольник на части, площади которых равны S_1, S_2, S_3 и S_4 (рис. 4.13). Так как $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$ и $S_1 + S_4 = S_2 + S_3$, то $S_1 = S_3 = A$ и $S_2 = S_4 = B$. При повороте прямой l на 90° A заменится на B, а B — на A. Так как A и B изменяются при повороте l непрерывно, то для некоторого положения прямой $A = B$, т. е. площади всех четырёх фигур равны.

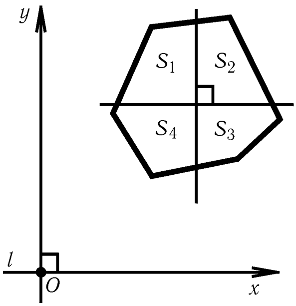


Рис. 4.13

4.40. а) Пусть прямая, делящая пополам площадь и периметр треугольника ABC, пересекает стороны AC и BC в точках P и Q соответственно. Обозначим центр вписанной окружности треугольника ABC через O, радиус вписанной окружности через r. Тогда $S_{ABQOP} = r(AP + AB + BQ)/2$ и $S_{OQCP} = r(QC + CP)/2$. Так как прямая PQ делит периметр пополам, то $AP + AB + BQ = QC + CP$, поэтому $S_{ABQOP} = S_{OQCP}$. Кроме того, $S_{ABQP} = S_{QCP}$ по условию. Поэтому $S_{OQP} = 0$, т. е. прямая QP проходит через точку O.

б) Доказательство проводится аналогично.

4.41. Рассматривая образ окружности S_2 при симметрии относительно центра окружности S_1 и учитывая равенство площадей, можно доказать, что диаметр AA_1 окружности S_1 пересекает S_2 в некоторой точке K, отличной от A, причём $AK > A_1K$. Окружность радиуса KA_1 с центром K касается окружности S_1 в точке A_1, поэтому $BK > A_1K$, т. е. $BK + KA > A_1A$. Ясно также, что сумма длин отрезков BK и KA меньше длины дуги S_2, соединяющей точки A и B.

4.42. Случай, когда точка O принадлежит Γ, очевиден; поэтому будем предполагать, что O не принадлежит Γ. Пусть Γ' — образ кривой Γ при симметрии относительно точки O. Если кривые Γ и Γ' не пересекаются, то части, на которые Γ делит квадрат, не могут быть равной площади. Пусть X — точка пересечения Γ и Γ', а точка X' симметрична X относительно точки O. Так как при симметрии относительно точки O кривая Γ' переходит в Γ, то X' принадлежит Γ. Поэтому прямая XX' искомая.

4.43. Пусть площади треугольников APB, BPC, CPD и DPA равны S_1, S_2, S_3 и S_4. Тогда $a/p = (S_3 + S_4)/S_3$ и $b \cdot CD/2 = S_3 + S_2$, а значит, $ab \cdot CD/2p = (S_3 + S_4)(S_3 + S_2)/S_3$. Учитывая, что $S_2S_4 = S_1S_3$, получаем требуемое.

4.44. Применяя теорему синусов к треугольникам ABC и ABD, получаем $AC = 2R \sin B$ и $BD = 2R \sin A$. Поэтому $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin\varphi = 2R^2 \sin A \sin B \sin\varphi$.

4.45. Так как площадь четырёхугольника равна $(d_1d_2 \sin\varphi)/2$, где d_1 и d_2 — длины диагоналей, то остаётся проверить, что $2d_1d_2 \cos\varphi = |a^2 + c^2 - b^2 - d^2|$. Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$, $\varphi = \angle AOB$. Тогда $AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cos\varphi$ и $BC^2 = BO^2 + CO^2 + 2BO \cdot CO \cos\varphi$. Поэтому $AB^2 - BC^2 = AO^2 - CO^2 - 2BO \cdot AC \cos\varphi$. Аналогично $CD^2 - AD^2 = CO^2 - AO^2 - 2DO \cdot AC \cos\varphi$. Складывая эти равенства, получаем требуемое.

З а м е ч а н и е. Так как $16S^2 = 4d_1^2d_2^2 \sin^2\varphi = 4d_1^2d_2^2 - (2d_1d_2 \cos\varphi)^2$, то $16S^2 = 4d_1^2d_2^2 - (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2$.

4.46. а) Пусть $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ и $AD = d$. Ясно, что $S = S_{ABC} + S_{ADC} = (ab \sin B + cd \sin D)/2$ и $a^2 + b^2 - 2ab \cos B = AC^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos D$. Поэтому

$$16S^2 = 4a^2b^2 - 4a^2b^2 \cos^2 B + 8abcd \sin B \sin D + 4c^2d^2 - 4c^2d^2 \cos^2 D,$$

$$(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + 8abcd \cos B \cos D = 4a^2b^2 \cdot \cos^2 B + 4c^2d^2 \cos^2 D.$$

Подставляя второе равенство в первое, получаем

$$16S^2 = 4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 8abcd(1 + \cos B \cos D - \sin B \sin D).$$

Ясно, что $4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 16(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)$ и $1 + \cos B \cos D - \sin B \sin D = 2\cos^2((B + D)/2)$.

б) Если $ABCD$ — вписанный четырёхугольник, то $\angle B + \angle D = 180^\circ$, а значит, $\cos^2((B + D)/2) = 0$.

в) Если $ABCD$ — описанный четырёхугольник, то $a+c=b+d$, поэтому $p=a+c=b+d$ и $p-a=c$, $p-b=d$, $p-c=a$, $p-d=b$. Следовательно, $S^2=abcd(1-\cos^2((B+D)/2))=abcd\sin^2((B+D)/2)$.

Если четырёхугольник $ABCD$ вписанный и описанный одновременно, то $S^2=abcd$.

4.47. Из точки O, лежащей внутри правильного треугольника ABC, опустим перпендикуляры OA_1, OB_1 и OC_1 на стороны BC, AC и AB соответственно. Пусть a — длина стороны треугольника ABC, h — длина высоты. Ясно, что $S_{ABC}=S_{BCO}+S_{ACO}+S_{ABO}$. Следовательно, $ah=a\cdot OA_1+a\cdot OB_1+a\cdot OC_1$, т. е. $h=OA_1+OB_1+OC_1$.

4.48. Пусть $AD=l$. Тогда $2S_{ABD}=cl\sin(\alpha/2)$, $2S_{ACD}=bl\sin(\alpha/2)$ и $2S_{ABC}=bc\sin\alpha$. Следовательно, $cl\sin(\alpha/2)+bl\sin(\alpha/2)=bc\sin\alpha=2bc\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)$.

4.49. а) Пусть расстояния от точек A и O до прямой BC равны h и h_1. Тогда $S_{OBC}:S_{ABC}=h_1:h=OA_1:AA_1$. Аналогично $S_{OAC}:S_{ABC}=OB_1:BB_1$ и $S_{OAB}:S_{ABC}=OC_1:CC_1$. Складывая эти равенства и учитывая, что $S_{OBC}+S_{OAC}+S_{OAB}=S_{ABC}$, получаем требуемое.

б) Пусть расстояния от точек B и C до прямой AA_1 равны d_b и d_c. Тогда $S_{ABO}:S_{ACO}=d_b:d_c=BA_1:A_1C$. Аналогично $S_{ACO}:S_{BCO}=AC_1:C_1B$ и $S_{BCO}:S_{ABO}=CB_1:B_1A$. Остаётся перемножить эти равенства.

4.50. Легко проверить, что отношение длин отрезков $A_{n+k-1}B_k$ и $A_{n+k}B_k$ равно отношению площадей треугольников $A_{n+k-1}OA_k$ и A_kOA_{n+k}. Перемножая эти равенства, получаем требуемое.

4.51. Так как $A_iB_iC_iD_i$ — параллелограмм и точка O лежит на продолжении его диагонали A_iC_i, то $S_{A_iB_iO}=S_{A_iD_iO}$, а значит, $A_iB_i:A_iD_i=h_i:h_{i-1}$, где h_i — расстояние от точки O до стороны A_iA_{i+1}. Остаётся перемножить эти равенства для $i=1, \ldots, n$.

4.52. Пусть длины сторон треугольника ABC равны a, b и c, причём $a\leqslant b\leqslant c$. Тогда $2b=a+c$ и $2S_{ABC}=r(a+b+c)=3rb$, где r — радиус вписанной окружности. С другой стороны, $2S_{ABC}=h_bb$. Поэтому $r=h_b/3$.

4.53. Достаточно заметить, что $d_b\cdot AB=2S_{AXB}=BX\cdot AX\sin\varphi$, где $\varphi=\angle AXB$ и $d_c\cdot AC=2S_{AXC}=CX\cdot AX\sin\varphi$.

4.54. Пусть $r_1, \ldots, r_n$ — радиусы вписанных окружностей полученных треугольников, $P_1, \ldots, P_n$ — их периметры, а $S_1, \ldots, S_n$ — площади. Площадь и периметр исходного многоугольника обозначим через S и P соответственно. Заметим, что $P_i<P$ (см. задачу 9.29 б). Поэтому

$$r_1+\ldots+r_n=2\frac{S_1}{P_1}+\ldots+2\frac{S_n}{P_n}>2\frac{S_1}{P}+\ldots+2\frac{S_n}{P}=2\frac{S}{P}=r.$$

4.55. Через точку N пересечения прямых BS и CM проведём прямые Q_1S_1 и P_1R_1, параллельные прямым QS и PR (точки P_1, Q_1, R_1 и S_1 лежат на сторонах AB, BC, CD и DA). Пусть F и G — точки пересечения прямых PR и Q_1S_1, P_1R_1 и QS. Так как точка M лежит на диагонали NC параллелограмма NQ_1CR_1, то $S_{FQ_1QM}=S_{MRR_1G}$ (задача 4.19), а значит, $S_{NQ_1QG}=S_{NFRR_1}$. Точка N лежит на диагонали BS параллелограмма $ABQS$, поэтому $S_{AP_1NS_1}=S_{NQ_1QG}=S_{NFRR_1}$. Следовательно, точка N лежит на диагонали PD параллелограмма $APRD$.

4.56. Пусть E и F — точки пересечения продолжений сторон данного четырёхугольника. Обозначим вершины четырёхугольника так, что E — точка пересечения продолжений сторон AB и CD за точки B и C, F — точка пересечения лучей BC и AD. Достроим треугольники AEF и ABD до параллелограммов $AERF$ и $ABLD$.

При гомотетии с центром A и коэффициентом 2 середина диагонали BD, середина диагонали AC и середина отрезка EF переходят в точки L, C и R соответственно. Поэтому достаточно доказать, что точки L, C и R лежат на одной прямой. Именно этот факт был доказан в задаче 4.55.

4.57. Ясно, что $S_{BQD} = S_{BD_1D} - S_{BQD_1} = \frac{1}{2}d_1 \cdot D_1B$, где d_1 — расстояние от точки Q до прямой AD. Аналогично $S_{BQD} = \frac{1}{2}d_2 \cdot DB_1$, где d_2 — расстояние от точки Q до прямой AB. Поэтому из равенства $BD_1 = DB_1$ следует, что $d_1 = d_2$.

4.58. Достаточно проверить, что $S_{AKO} = S_{ALO}$, т. е. $AO \cdot AL \sin OAL = AO \cdot AK \sin OAK$. Ясно, что $AL = CB_1 = BC \cos C$, $\sin OAL = \cos B$, $AK = BC_1 = BC \cos B$ и $\sin OAK = \cos C$.

4.59. Так как четырёхугольник A_1BC_1M описанный, то, во-первых, суммы длин его противоположных сторон равны: $\frac{a}{2} + \frac{m_c}{3} = \frac{c}{2} + \frac{m_a}{3}$, а во-вторых, его вписанная окружность является одновременно вписанной окружностью треугольников AA_1B и CC_1B, имеющих к тому же равные площади, поэтому периметры этих треугольников равны: $c + m_a + \frac{a}{2} = a + m_c + \frac{c}{2}$. Умножая первое равенство на 3 и складывая его со вторым, получаем требуемое.

4.60. Докажем сначала одно общее утверждение, которым мы воспользуемся при решении задач а)—г). Возьмём на лучах AB и AC произвольные точки B_1 и C_1 и опустим из них перпендикуляры B_1K и C_1L на прямую AO. Так как $B_1C_1 \geqslant B_1K + C_1L$, то $B_1C_1 \cdot R_a \geqslant B_1K \cdot R_a + C_1L \cdot R_a = 2S_{AOB_1} + 2S_{AOC_1} = AB_1 \cdot d_c + AC_1 \cdot d_b$.

а) Полагая $B_1 = B$ и $C_1 = C$, получаем требуемое.

б) Домножая обе части неравенства $aR_a \geqslant cd_c + bd_b$ на d_a/a, получаем $d_aR_a \geqslant (c/a)d_ad_c + (b/a)d_ad_b$. Складывая это неравенство с аналогичными неравенствами для d_bR_b и d_cR_c и учитывая, что $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2$, получаем требуемое.

в) Возьмём точки B_1 и C_1 так, что $AB_1 = AC$ и $AC_1 = AB$. Тогда $aR_a \geqslant bd_c + cd_b$, т. е. $R_a \geqslant (b/a)d_c + (c/a)d_b$. Складывая это неравенство с аналогичными неравенствами для R_b и R_c и учитывая, что $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2$, получаем требуемое.

г) Возьмём точки B_1 и C_1 так, что $AB_1 = AC_1 = 1$. Тогда $B_1C_1 = 2\sin(A/2)$, а значит, $2\sin(A/2)R_a \geqslant d_c + d_b$. Умножая это неравенство на аналогичные неравенства для R_b и R_c и учитывая, что $\sin(A/2)\sin(B/2)\sin(C/2) = r/4R$ (задача 12.38 а), получаем требуемое.

4.61. Отрежем от правильного восьмиугольника треугольники и переставим их так, как показано на рис. 4.14. В результате получим прямоугольник, стороны которого равны наибольшей и наименьшей диагоналям восьмиугольника.

4.62. Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC. Проведённые отрезки являются высотами треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C. Пусть P, Q и R — точки пересечения высот этих треугольников, а O — точка пересечения высот треугольника $A_1B_1C_1$ (рис. 4.15).

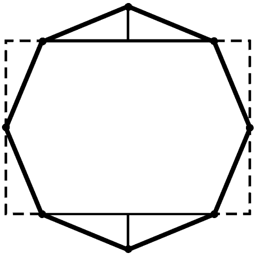


Рис. 4.14

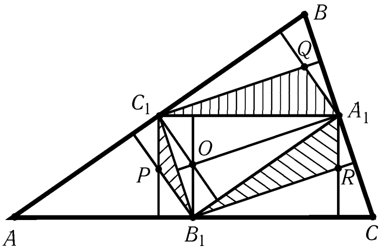


Рис. 4.15

Рассматриваемый шестиугольник состоит из треугольника $A_1B_1C_1$ и треугольников B_1C_1P, C_1A_1Q и A_1B_1R. Ясно, что $\triangle B_1C_1P = \triangle C_1B_1O$, $\triangle C_1A_1Q = \triangle A_1C_1O$ и $\triangle A_1B_1R = \triangle B_1A_1O$. Поэтому площадь рассматриваемого шестиугольника равна удвоенной площади треугольника $A_1B_1C_1$. Остаётся заметить, что $S_{ABC} = 4S_{A_1B_1C_1}$.

4.63. а) Отрежем от параллелограмма две части (рис. 4.16, *а*) и переставим их так, как показано на рис. 4.16, *б*. Получится фигура, состоящая из $mn+1$ маленьких параллелограммов. Поэтому площадь маленького параллелограмма равна $1/(mn+1)$.

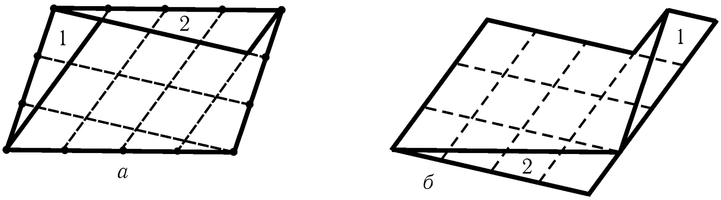


Рис. 4.16

б) Отрежем от параллелограмма три части (рис. 4.17, *а*) и переставим их так, как показано на рис. 4.17, *б*. Получится фигура, состоящая из $mn-1$ маленьких параллелограммов. Поэтому площадь маленького параллелограмма равна $1/(mn-1)$.

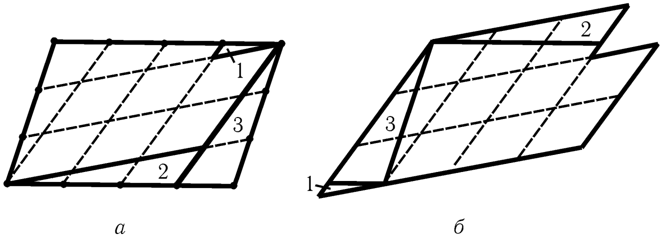


Рис. 4.17

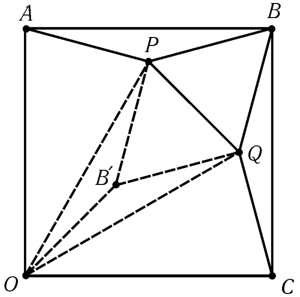


Рис. 4.18

4.64. а) Разрежем исходный квадрат на четыре квадрата и рассмотрим один из них (рис. 4.18). Пусть точка B' симметрична точке B относительно прямой PQ. Докажем, что $\triangle APB = \triangle OB'P$. Треугольник OPC равносторонний, значит, треугольник APB равнобедренный, причём угол при его основании равен 15°, поэтому треугольник BPQ равносторонний. Следовательно, $\angle OPB' = \angle OPQ - \angle B'PQ = 75^\circ - 60^\circ = 15^\circ$ и $\angle POB' = \angle POQ/2 = 15^\circ$. Кроме того, $AB = OP$. Аналогично доказывается, что $\triangle BQC = \triangle OB'Q$. Следовательно, площадь заштрихованной на рис. 4.7 части равна площади треугольника OPQ.

б) Пусть площадь правильного двенадцатиугольника, вписанного в окружность радиуса 1, равна $12x$. Согласно задаче а) площадь квадрата, описанного около этой окружности, равна $12x + 4x = 16x$; с другой стороны, площадь этого квадрата равна 4, поэтому $x = 1/4$ и $12x = 3$.

ГЛАВА 5

ТРЕУГОЛЬНИКИ

Основные сведения

1. *Вписанной окружностью треугольника* называют окружность, касающуюся всех его сторон. Центром вписанной окружности является точка пересечения биссектрис.

Вневписанной окружностью треугольника ABC называют окружность, касающуюся одной стороны треугольника и продолжений двух других его сторон. Для каждого треугольника имеется ровно три вневписанные окружности. Центром вневписанной окружности, касающейся стороны AB, является точка пересечения биссектрисы угла C и биссектрис внешних углов A и B.

Описанной окружностью треугольника называют окружность, проходящую через его вершины. Центром описанной окружности треугольника является точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам.

2. Для элементов треугольника ABC часто используются следующие обозначения:

a, b и c — длины сторон BC, CA и AB;

α, β и γ — величины углов при вершинах A, B, C;

p — полупериметр;

R — радиус описанной окружности;

r — радиус вписанной окружности;

r_a, r_b и r_c — радиусы вневписанных окружностей, касающихся сторон BC, CA и AB соответственно;

h_a, h_b и h_c — длины высот, опущенных из вершин A, B и C.

3. Если AD — биссектриса угла A треугольника ABC (или биссектриса внешнего угла A), то $BD : CD = AB : AC$ (см. задачу 1.17).

4. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы (см. задачу 5.19).

5. Для доказательства того, что точки пересечения некоторых прямых лежат на одной прямой, часто используется теорема Менелая (задача 5.69).

Для доказательства того, что некоторые прямые пересекаются в одной точке, часто используется теорема Чевы (см. задачу 5.85).

Вводные задачи

1. а) Докажите, что если в треугольнике медиана совпадает с высотой, то этот треугольник равнобедренный.

б) Докажите, что если в треугольнике биссектриса совпадает с высотой, то этот треугольник равнобедренный.

2. Докажите, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

3. На высоте AH треугольника ABC взята точка M. Докажите, что $AB^2 - AC^2 = MB^2 - MC^2$.

4. На сторонах AB, BC, CA правильного треугольника ABC взяты точки P, Q, R так, что $AP : PB = BQ : QC = CR : RA = 2 : 1$. Докажите, что стороны треугольника PQR перпендикулярны сторонам треугольника ABC.

§ 1. Вписанная и описанная окружности

5.1. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1, причём $AC_1 = AB_1$, $BA_1 = BC_1$ и $CA_1 = CB_1$. Докажите, что A_1, B_1 и C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами.

5.2. Пусть O_a, O_b и O_c — центры вневписанных окружностей треугольника ABC. Докажите, что точки A, B и C — основания высот треугольника $O_aO_bO_c$.

5.3. Докажите, что сторона BC треугольника ABC видна из центра O вписанной окружности под углом $90^\circ + \angle A/2$, а из центра O_a вневписанной окружности под углом $90^\circ - \angle A/2$.

5.4. Внутри треугольника ABC взята точка P так, что $\angle PAB : \angle PAC = \angle PCA : \angle PCB = \angle PBC : \angle PBA = x$. Докажите, что $x = 1$.

5.5*. Пусть A_1, B_1 и C_1 — проекции некоторой внутренней точки O треугольника ABC на высоты. Докажите, что если длины отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 равны, то они равны $2r$.

5.6*. Угол величиной $\alpha = \angle BAC$ вращается вокруг своей вершины O — середины основания AC равнобедренного треугольника ABC. Стороны этого угла пересекают отрезки AB и BC в точках P и Q. Докажите, что периметр треугольника PBQ остаётся постоянным.

5.7*. В неравнобедренном треугольнике ABC через середину M стороны BC и центр O вписанной окружности проведена прямая MO, пересекающая высоту AH в точке E. Докажите, что $AE = r$.

5.8*. Окружность касается сторон угла с вершиной A в точках P и Q. Расстояния от точек P, Q и A до некоторой касательной к этой окружности равны u, v и w. Докажите, что $uv/w^2 = \sin^2(A/2)$.

5.9*. а) На стороне AB треугольника ABC взята точка P. Пусть r, r_1 и r_2 — радиусы вписанных окружностей треугольников ABC, BCP и ACP; h — высота, опущенная из вершины C. Докажите, что $r = r_1 + r_2 - 2r_1r_2/h$.

б) Точки A_1, A_2, A_3, ... лежат на одной прямой (в указанном порядке). Докажите, что если радиусы вписанных окружностей всех треугольников BA_iA_{i+1} равны одному и тому же числу r_1, то радиусы вписанных окружностей всех треугольников BA_iA_{i+k} равны одному и тому же числу r_k.

* * *

5.10. Докажите, что точки, симметричные точке H пересечения высот треугольника ABC относительно его сторон, лежат на описанной окружности.

5.11*. Из точки P дуги BC описанной окружности треугольника ABC опущены перпендикуляры PX, PY и PZ на BC, CA и AB соответственно. Докажите, что $\dfrac{BC}{PX} = \dfrac{AC}{PY} + \dfrac{AB}{PZ}$.

* * *

5.12*. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, I — центр вписанной окружности, I_a — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Докажите, что:

а) $d^2 = R^2 - 2Rr$, где $d = OI$ (Эйлер);

б) $d_a^2 = R^2 + 2Rr_a$, где $d_a = OI_a$.

5.13*. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, I — центр вписанной окружности. Докажите, что $OI \perp BI$ (или же O совпадает с I) тогда и только тогда, когда $b = (a + c)/2$.

5.14*. Продолжения биссектрис углов треугольника ABC пересекают описанную окружность в точках A_1, B_1 и C_1; M — точка пересечения биссектрис. Докажите, что: а) $\dfrac{MA \cdot MC}{MB_1} = 2r$; б) $\dfrac{MA_1 \cdot MC_1}{MB} = R$.

5.15*. Длины сторон треугольника ABC образуют арифметическую прогрессию, причём $a < b < c$. Биссектриса угла B пересекает описанную окружность в точке B_1. Докажите, что центр O вписанной окружности делит отрезок BB_1 пополам.

5.16*. В треугольнике ABC сторона BC наименьшая. На лучах BA и CA отложены отрезки BD и CE, равные BC. Докажите, что радиус описанной окружности треугольника ADE равен расстоянию между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника ABC.

* * *

5.17*. Медианы треугольника ABC разрезают его на 6 треугольников. Докажите, что центры описанных окружностей этих треугольников лежат на одной окружности.

§ 2. Прямоугольные треугольники

5.18. В треугольнике ABC угол C прямой. Докажите, что $r = (a + b - c)/2$ и $r_c = (a + b + c)/2$.

5.19. Пусть M — середина стороны AB треугольника ABC. Докажите, что $CM = AB/2$ тогда и только тогда, когда $\angle ACB = 90°$.

5.20. Дана трапеция $ABCD$ с основанием AD. Биссектрисы внешних углов при вершинах A и B пересекаются в точке P, а при вершинах C и D — в точке Q. Докажите, что длина отрезка PQ равна половине периметра трапеции.

5.21. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса CD. Прямая, проходящая через точку D перпендикулярно DC, пересекает AC в точке E. Докажите, что $EC = 2AD$.

5.22. На медиане BM и на биссектрисе BK треугольника ABC (или на их продолжениях) взяты точки D и E так, что $DK \parallel AB$ и $EM \parallel BC$. Докажите, что $ED \perp BK$.

5.23. Сумма углов при основании трапеции равна 90°. Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований, равен полуразности оснований.

5.24. Диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Точка M лежит на прямой AB, причём $\angle AMO = \angle MAD$. Докажите, что точка M равноудалена от точек C и D.

5.25. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CK из вершины прямого угла C, а в треугольнике ACK — биссектриса CE. Докажите, что $CB = BE$.

5.26. В треугольнике ABC с прямым углом C проведены высота CD и биссектриса CF; DK и DL — биссектрисы треугольников BDC и ADC. Докажите, что $CLFK$ — квадрат.

5.27*. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC внешним образом построен квадрат $ABPQ$. Пусть $\alpha = \angle ACQ$, $\beta = \angle QCP$ и $\gamma = \angle PCB$. Докажите, что $\cos\beta = \cos\alpha\cos\gamma$.

См. также задачи 1.40, 1.43, 1.50 а), 2.5, 2.41, 2.68, 2.69, 3.39, 5.18—5.27, 5.35, 5.43, 5.46, 5.75, 5.157, 6.82, 11.14.

§ 3. Правильный треугольник

5.28. Из точки M, лежащей внутри правильного треугольника ABC, опущены перпендикуляры MP, MQ и MR на стороны AB, BC и CA соответственно. Докажите, что $AP^2 + BQ^2 + CR^2 = PB^2 + QC^2 + RA^2$ и $AP + BQ + CR = PB + QC + RA$.

5.29. Точки D и E делят стороны AC и AB правильного треугольника ABC в отношениях $AD : DC = BE : EA = 1 : 2$. Прямые BD и CE пересекаются в точке O. Докажите, что $\angle AOC = 90^\circ$.

* * *

5.30. Окружность делит каждую из сторон треугольника на три равные части. Докажите, что этот треугольник правильный.

5.31. Докажите, что если точка пересечения высот остроугольного треугольника делит высоты в одном и том же отношении, то треугольник правильный.

5.32. а) Докажите, что если $a+h_a=b+h_b=c+h_c$, то треугольник ABC правильный.

б) В треугольник ABC вписаны три квадрата: у одного две вершины лежат на стороне AC, у другого — на BC, у третьего — на AB. Докажите, что если все три квадрата равны, то треугольник ABC правильный.

5.33. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся его сторон в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что если треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, то треугольник ABC правильный.

5.34. Радиус вписанной окружности треугольника равен 1, длины высот — целые числа. Докажите, что треугольник правильный.

См. также задачи 1.29, 1.45, 1.46, 1.50 б), 1.59, 2.14, 2.16, 2.19, 2.38, 2.47, 2.57, 4.47, 5.64, 5.65, 6.48, 6.61, 6.82, 7.16 б), 7.18, 7.23, 7.39, 7.47, 10.3, 10.80, 11.3, 11.5, 14.21 а), 16.7, 18.10—18.16, 18.18—18.21, 18.23—18.25, 18.42, 18.43, 24.1, 29.34, 29.42, 29.46, 29.47, 31.44, 31.70.

§ 4. Треугольник с углом 60° или 120°

5.35. В треугольнике ABC с углом A, равным 120°, проведены биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ прямоугольный.

5.36. В треугольнике ABC с углом A, равным 120°, биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O. Докажите, что $\angle A_1C_1O=30^\circ$.

5.37. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BB_1 и CC_1. Докажите, что если описанные окружности треугольников ABB_1 и ACC_1 пересекаются в точке, лежащей на стороне BC, то $\angle A=60^\circ$.

5.38. а) Докажите, что если угол A треугольника ABC равен 120°, то центр описанной окружности и ортоцентр симметричны относительно биссектрисы внешнего угла A.

б) В треугольнике ABC угол A равен 60°; O — центр описанной окружности, H — ортоцентр, I — центр вписанной окружности, а I_a — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Докажите, что $IO=IH$ и $I_aO=I_aH$.

5.39. В треугольнике ABC угол A равен 120°. Докажите, что из отрезков длиной a, b, $b+c$ можно составить треугольник.

5.40*. В остроугольном треугольнике ABC с углом A, равным 60°, высоты пересекаются в точке H.

а) Пусть M и N — точки пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам BH и CH со сторонами AB и AC соответственно. Докажите, что точки M, N и H лежат на одной прямой.

б) Докажите, что на той же прямой лежит центр O описанной окружности.

5.41*. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BB_1 и CC_1. Докажите, что если $\angle CC_1B_1=30^\circ$, то либо $\angle A=60^\circ$, либо $\angle B=120^\circ$.

См. также задачи 2.34, 2.35, 12.55.

§ 5. Целочисленные треугольники

5.42. Длины сторон треугольника — последовательные целые числа. Найдите эти числа, если известно, что одна из медиан перпендикулярна одной из биссектрис.

5.43. Длины всех сторон прямоугольного треугольника являются целыми числами, причём наибольший общий делитель этих чисел равен 1. Докажите, что его катеты равны $2mn$ и $m^2 - n^2$, а гипотенуза равна $m^2 + n^2$, где m и n — натуральные числа.

Прямоугольный треугольник, длины сторон которого — целые числа, называют *пифагоровым*.

5.44*. Радиус вписанной окружности треугольника равен 1, а длины его сторон — целые числа. Докажите, что эти числа равны 3, 4, 5.

5.45*. Приведите пример вписанного четырёхугольника с попарно различными целочисленными длинами сторон, у которого длины диагоналей, площадь и радиус описанной окружности — целые числа (Брахмагупта).

5.46*. а) Укажите два прямоугольных треугольника, из которых можно сложить треугольник, длины сторон и площадь которого — целые числа.

б) Докажите, что если площадь треугольника — целое число, а длины сторон — последовательные натуральные числа, то этот треугольник можно сложить из двух прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами.

5.47*. а) В треугольнике ABC, длины сторон которого рациональные числа, проведена высота BB_1. Докажите, что длины отрезков AB_1 и CB_1 — рациональные числа.

б) Длины сторон и диагоналей выпуклого четырёхугольника — рациональные числа. Докажите, что диагонали разрезают его на четыре треугольника, длины сторон которых — рациональные числа.

См. также задачу 26.7.

§ 6. Разные задачи

5.48. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что их соответственные углы равны или составляют в сумме $180°$. Докажите, что в действительности все соответственные углы равны.

5.49. Внутри треугольника ABC взята произвольная точка O и построены точки A_1, B_1 и C_1, симметричные O относительно середин сторон BC, CA и AB. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ и прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

5.50. Через точку O пересечения биссектрис треугольника ABC проведены прямые, параллельные его сторонам. Прямая, параллельная AB, пересекает AC и BC в точках M и N, а прямые, параллельные AC и BC, пересекают AB в точках P и Q. Докажите, что $MN = AM + BN$ и периметр треугольника OPQ равен длине отрезка AB.

5.51. а) Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

б) Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC, R — радиус описанной окружности. Докажите, что $AH^2 + BC^2 = 4R^2$ и $AH = BC|\operatorname{ctg}\alpha|$.

5.52. Пусть $x = \sin 18^\circ$. Докажите, что $4x^2 + 2x = 1$.

5.53. В треугольнике ABC сторона AB больше стороны BC. Пусть A_1 и B_1 — середины сторон BC и AC, а B_2 и C_2 — точки касания вписанной окружности со сторонами AC и AB. Докажите, что отрезки A_1B_1 и B_2C_2 пересекаются в точке X, лежащей на биссектрисе угла B.

5.54. Докажите, что проекции вершины A треугольника ABC на биссектрисы внешних и внутренних углов при вершинах B и C лежат на одной прямой.

5.55*. Докажите, что если в треугольнике две биссектрисы равны, то он равнобедренный.

5.56*. а) В треугольниках ABC и $A'B'C'$ равны стороны AC и $A'C'$, углы при вершинах B и B' и биссектрисы углов B и B'. Докажите, что эти треугольники равны (точнее говоря, $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ или $\triangle ABC = \triangle C'B'A'$).

б) Через точку D биссектрисы BB_1 угла ABC проведены прямые AA_1 и CC_1 (точки A_1 и C_1 лежат на сторонах треугольника). Докажите, что если $AA_1 = CC_1$, то $AB = BC$.

5.57*. Докажите, что прямая делит периметр и площадь треугольника в равных отношениях тогда и только тогда, когда она проходит через центр вписанной окружности.

5.58*. Точка E — середина той дуги AB описанной окружности треугольника ABC, на которой лежит точка C; C_1 — середина стороны AB. Из точки E опущен перпендикуляр EF на AC. Докажите, что:

а) прямая C_1F делит пополам периметр треугольника ABC;

б) три такие прямые, построенные для каждой стороны треугольника, пересекаются в одной точке.

5.59*. На сторонах AB и BC остроугольного треугольника ABC внешним образом построены квадраты ABC_1D_1 и A_2BCD_2. Докажите, что точка пересечения прямых AD_2 и CD_1 лежит на высоте BH.

5.60*. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены квадраты с центрами A_1, B_1 и C_1. Пусть a_1, b_1 и c_1 — длины сторон треугольника $A_1B_1C_1$, S и S_1 — площади треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что:

а) $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 6S$;

б) $S_1 - S = (a^2 + b^2 + c^2)/8$.

5.61*. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC (или на их продолжениях) взяты точки C_1, A_1 и B_1 так, что $\angle(CC_1, AB) = \angle(AA_1, BC) = \angle(BB_1, CA) = \alpha$. Прямые AA_1 и BB_1, BB_1 и CC_1,

CC_1 и AA_1 пересекаются в точках C', A', B' соответственно. Докажите, что:

а) точка пересечения высот треугольника ABC совпадает с центром описанной окружности треугольника $A'B'C'$;

б) $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$, причём коэффициент подобия равен $2\cos\alpha$.

5.62*. В каждый из углов треугольника ABC вписано по окружности. Из одной вершины окружности, вписанные в два других угла, видны под равными углами. Из другой — тоже. Докажите, что тогда и из третьей вершины две окружности видны под равными углами.

5.63*. На сторонах треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 так, что $AB_1 : B_1C = c^n : a^n$, $BC_1 : C_1A = a^n : b^n$ и $CA_1 : A_1B = b^n : c^n$ (a, b и c — длины сторон треугольника). Описанная окружность треугольника $A_1B_1C_1$ высекает на сторонах треугольника ABC отрезки длиной $\pm x$, $\pm y$ и $\pm z$ (знаки выбираются в соответствии с ориентацией треугольника). Докажите, что $\dfrac{x}{a^{n-1}} + \dfrac{y}{b^{n-1}} + \dfrac{z}{c^{n-1}} = 0$.

5.64*. В треугольнике ABC проведены триссектрисы (лучи, делящие углы на три равные части). Ближайшие к стороне BC триссектрисы углов B и C пересекаются в точке A_1; аналогично определим точки B_1 и C_1 (рис. 5.1). Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ равносторонний (*теорема Морли*).

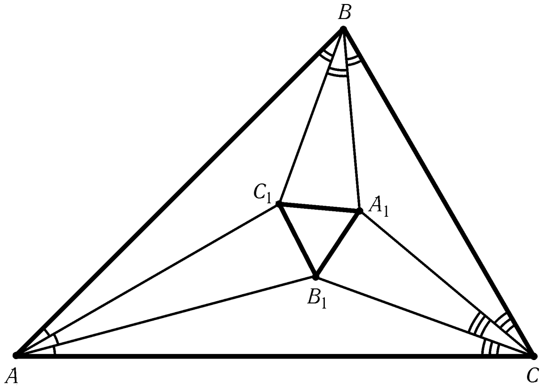


Рис. 5.1

5.65*. На сторонах правильного треугольника ABC как на основаниях внутренним образом построены равнобедренные треугольники A_1BC, AB_1C и ABC_1 с углами α, β и γ при основаниях, причём $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$. Прямые BC_1 и B_1C пересекаются в точке A_2, AC_1 и A_1C — в точке B_2, AB_1 и A_1B — в точке C_2. Докажите, что углы треугольника $A_2B_2C_2$ равны 3α, 3β и 3γ.

5.66*. Окружность радиуса u_a вписана в угол A треугольника ABC, окружность радиуса u_b вписана в угол B; эти окружности касаются друг друга внешним образом. Докажите, что радиус описанной окружности треугольника со сторонами $a_1 = \sqrt{u_a \operatorname{ctg}(\alpha/2)}$, $b_1 = \sqrt{u_b \operatorname{ctg}(\beta/2)}$ и $c_1 = \sqrt{c}$ равен $\sqrt{p}/2$, где p — полупериметр треугольника ABC.

5.67*. Окружность S_1 вписана в угол A треугольника ABC; окружность S_2 вписана в угол B и касается S_1 (внешним образом); окружность S_3 вписана в угол C и касается S_2; окружность S_4 вписана в угол A и касается S_3 и т. д. Докажите, что окружность S_7 совпадает с S_1.

5.68*. Окружность S_1 вписана в угол A треугольника ABC. Из вершины C к ней проведена касательная (отличная от CA), и в образовавшийся треугольник с вершиной B вписана окружность S_2. Из вершины A к S_2 проведена касательная, и в образовавшийся треугольник с вершиной C вписана окружность S_3 и т. д. Докажите, что окружность S_7 совпадает с S_1.

§ 7. Теорема Менелая

Пусть $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ — коллинеарные векторы. Обозначим через $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ величину $\pm\dfrac{AB}{CD}$, где знак плюс берётся в том случае, когда векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ сонаправлены, а знак минус — в случае, когда векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ направлены в разные стороны. Эту величину будем называть *ориентированным отношением* отрезков AB и CD.

5.69*. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC (или на их продолжениях) взяты точки A_1, B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}} = 1 \qquad (\textit{теорема Менелая}).$$

5.70*. а) В треугольнике ABC проведены биссектрисы внешних углов AA_1, BB_1 и CC_1 (точки A_1, B_1 и C_1 лежат на прямых BC, CA и AB). Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

б) В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и BB_1 и биссектриса внешнего угла CC_1. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

5.71*. Касательные к описанной окружности неравнобедренного треугольника ABC в точках A, B и C пересекают продолжения сторон в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

5.72*. Решите задачу 5.105 а) с помощью теоремы Менелая.

5.73*. Окружность S касается окружностей S_1 и S_2 в точках A_1 и A_2. Докажите, что прямая A_1A_2 проходит через точку пересечения общих внешних или общих внутренних касательных к окружностям S_1 и S_2.

5.74*. а) Серединный перпендикуляр к биссектрисе AD треугольника ABC пересекает прямую BC в точке E. Докажите, что $BE : CE = c^2 : b^2$.

б) Докажите, что точки пересечения серединных перпендикуляров к биссектрисам треугольников и продолжений соответствующих сторон лежат на одной прямой.

5.75*. Из вершины C прямого угла треугольника ABC опущена высота CK, и в треугольнике ACK проведена биссектриса CE. Прямая, проходящая через точку B параллельно CE, пересекает CK в точке F. Докажите, что прямая EF делит отрезок AC пополам.

5.76*. На прямых BC, CA и AB взяты точки A_1, B_1 и C_1, причём точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой. Прямые, симметричные прямым AA_1, BB_1 и CC_1 относительно соответствующих биссектрис треугольника ABC, пересекают прямые BC, CA и AB в точках A_2, B_2 и C_2. Докажите, что точки A_2, B_2 и C_2 лежат на одной прямой.

5.77*. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC (или на их продолжениях) взяты точки A_1, B_1 и C_1, лежащие на одной прямой. Докажите, что

$$\frac{AB}{BC_1} \cdot \frac{C_1A_1}{B_1A_1} \cdot \frac{A_1B}{BC} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

* * *

5.78*. Прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке O. Докажите, что точки пересечения прямых AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 лежат на одной прямой (Дезарг).

5.79*. На одной прямой взяты точки A_1, B_1 и C_1, а на другой — точки A_2, B_2 и C_2. Прямые A_1B_2 и A_2B_1, B_1C_2 и B_2C_1, C_1A_2 и C_2A_1 пересекаются в точках C, A и B соответственно. Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой (Папп).

5.80*. На сторонах AB, BC и CD четырёхугольника $ABCD$ (или на их продолжениях) взяты точки K, L и M. Прямые KL и AC пересекаются в точке P, LM и BD — в точке Q. Докажите, что точка пересечения прямых KQ и MP лежит на прямой AD.

5.81*. Продолжения сторон AB и CD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, а продолжения сторон BC и AD — в точке Q. Через точку P проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках E и F. Докажите, что точки пересечения диагоналей четырёхугольников $ABCD$, $ABEF$ и $CDFE$ лежат на прямой, проходящей через точку Q.

5.82*. а) Через точки P и Q проведены тройки прямых. Обозначим их точки пересечения так, как показано на рис. 5.2. Докажите, что прямые KL, AC и MN пересекаются в одной точке (или параллельны).

б) Докажите, далее, что если точка O лежит на прямой BD, то точка пересечения прямых KL, AC и MN лежит на прямой PQ.

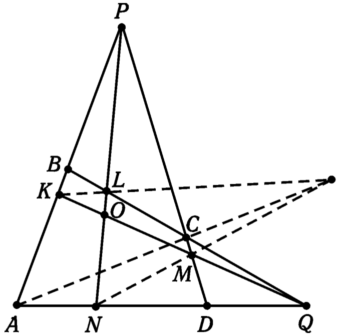


Рис. 5.2

5.83*. На прямых BC, CA и AB взяты точки A_1, B_1 и C_1. Пусть P_1 — произвольная точка прямой BC, P_2 — точка пересечения прямых P_1B_1 и AB, P_3 — точка пересечения прямых P_2A_1 и CA, P_4 — точка пересечения P_3C_1 и BC и т. д. Докажите, что точки P_7 и P_1 совпадают.

5.84*. Диагонали AD, BE и CF шестиугольника $ABCDEF$ пересекаются в одной точке. Пусть A' — точка пересечения прямых AC и FB, B' — точка пересечения BD и AC, C' — точка пересечения CE и BD, и т. д. Докажите, что точки пересечения прямых $A'B'$ и $D'E'$, $B'C'$ и $E'F'$, $C'D'$ и $F'A'$ лежат на одной прямой.

См. также задачи 6.106, 14.43.

§ 8. Теорема Чевы

5.85*. Дан треугольник ABC. На прямых AB, BC и CA взяты точки C_1, A_1 и B_1, причём k из них лежат на сторонах треугольника и $3-k$ — на продолжениях сторон. Пусть

$$R=\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}\cdot\frac{AC_1}{BC_1}.$$

Докажите, что:

а) точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $R=1$ и k чётно (Менелай);

б) прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны тогда и только тогда, когда $R=1$ и k нечётно (Чева).

5.86*. Вписанная (или вневписанная) окружность треугольника ABC касается прямых BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Точку пересечения прямых, соединяющих вершины треугольника с точками касания вписанной окружности, называют *точкой Жергонна*.

5.87*. Докажите, что прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания вневписанных окружностей со сторонами, пересекаются в одной точке (*точка Нагеля*).

5.88*. Докажите, что высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке.

5.89*. Прямые AP, BP и CP пересекают стороны треугольника ABC (или их продолжения) в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что:

а) прямые, проходящие через середины сторон BC, CA и AB параллельно прямым AP, BP и CP, пересекаются в одной точке;

б) прямые, соединяющие середины сторон BC, CA и AB с серединами отрезков AA_1, BB_1 и CC_1, пересекаются в одной точке.

5.90*. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 так, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Прямые A_1B_1 и A_1C_1 пересекают прямую, проходящую через вершину A параллельно стороне BC, в точках C_2 и B_2 соответственно. Докажите, что $AB_2 = AC_2$.

5.91*. а) Пусть α, β и γ — произвольные углы, причём сумма любых двух из них меньше 180°. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены треугольники A_1BC, AB_1C и ABC_1, имеющие при вершинах A, B и C углы α, β и γ. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

б) Докажите аналогичное утверждение для треугольников, построенных на сторонах треугольника ABC внутренним образом.

5.92*. Стороны BC, CA и AB треугольника ABC касаются окружности с центром O в точках A_1, B_1 и C_1. На лучах OA_1, OB_1 и OC_1 отложены равные отрезки OA_2, OB_2 и OC_2. Докажите, что прямые AA_2, BB_2 и CC_2 пересекаются в одной точке.

5.93*. Прямые AP, BP и CP пересекают прямые BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Точки A_2, B_2 и C_2 выбраны на прямых BC, CA и AB так, что $\overline{BA_2} : \overline{A_2C} = \overline{A_1C} : \overline{BA_1}$, $\overline{CB_2} : \overline{B_2A} = \overline{B_1A} : \overline{CB_1}$ и $\overline{AC_2} : \overline{C_2B} = \overline{C_1B} : \overline{AC_1}$. Докажите, что прямые AA_2, BB_2 и CC_2 тоже пересекаются в одной точке Q (или параллельны).

Такие точки P и Q называют *изотомически сопряжёнными* относительно треугольника ABC.

5.94*. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1, C_1. Докажите, что

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{\sin ACC_1}{\sin C_1CB} \cdot \frac{\sin BAA_1}{\sin A_1AC} \cdot \frac{\sin CBB_1}{\sin B_1BA}.$$

5.95*. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1, причём прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке P. Докажите, что прямые AA_2, BB_2 и CC_2, симметричные этим прямым относительно соответствующих биссектрис, тоже пересекаются в одной точке Q.

Такие точки P и Q называют *изогонально сопряжёнными* относительно треугольника ABC.

5.96*. Докажите, что при изогональном сопряжении окружность, проходящая через вершины B и C и отличная от описанной окружности, переходит в окружность, проходящую через вершины B и C.

5.97*. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C пересекаются в точке P. Точка Q симметрична точке A относительно середины отрезка BC. Докажите, что точки P и Q изогонально сопряжены.

5.98*. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника попарно параллельны. Докажите, что прямые, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются в одной точке.

5.99*. Из некоторой точки P опущены перпендикуляры PA_1 и PA_2 на сторону BC треугольника ABC и на высоту AA_3. Аналогично определяются точки B_1, B_2 и C_1, C_2. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке или параллельны.

5.100*. Через точки A и D, лежащие на окружности, проведены касательные, пересекающиеся в точке S. На дуге AD взяты точки B и C. Прямые AC и BD пересекаются в точке P, AB и CD — в точке Q. Докажите, что прямая PQ проходит через точку S.

5.101*. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон в точках A_1, B_1 и C_1. Внутри треугольника ABC взята точка X. Прямая AX пересекает дугу B_1C_1 вписанной окружности в точке A_2; точки B_2 и C_2 определяются аналогично. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке.

5.102*. Внутри треугольника ABC взята точка X. Прямая AX пересекает описанную окружность в точке A_1. В сегмент, отсекаемый стороной BC, вписана окружность, касающаяся дуги BC в точке A_1, а стороны BC — в точке A_2. Точки B_2 и C_2 определяются аналогично. Докажите, что прямые AA_2, BB_2 и CC_2 пересекаются в одной точке.

5.103*. а) На сторонах BC, CA и AB равнобедренного треугольника ABC с основанием AB взяты точки A_1, B_1 и C_1 так, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Докажите, что

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{\sin ABB_1 \sin CAA_1}{\sin BAA_1 \sin CBB_1}.$$

б) Внутри равнобедренного треугольника ABC с основанием AB взяты точки M и N так, что $\angle CAM=\angle ABN$ и $\angle CBM=\angle BAN$. Докажите, что точки C, M и N лежат на одной прямой.

5.104*. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1. Биссектрисы AA_1 и CC_1 пересекают отрезки C_1B_1 и B_1A_1 в точках M и N. Докажите, что $\angle MBB_1=\angle NBB_1$.

См. также задачи 4.49 б), 10.59, 14.7, 14.43.

§ 9. Прямая Симсона

5.105*. а) Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из точки P описанной окружности треугольника на его стороны или их продолжения, лежат на одной прямой (*прямая Симсона*[1]).

[1]Открытие этой прямой долго приписывалось Роберту Симсону (1687—1768), но в действительности она была открыта лишь в 1797 г. Вильямом Уоллесом. Поэтому наряду с традиционным названием этой прямой часто используется исторически более справедливое название *прямая Уоллеса*.

б) Основания перпендикуляров, опущенных из некоторой точки P на стороны треугольника или их продолжения, лежат на одной прямой. Докажите, что точка P лежит на описанной окружности треугольника.

5.106*. Точки A, B и C лежат на одной прямой, точка P — вне этой прямой. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ABP, BCP, ACP и точка P лежат на одной окружности.

5.107*. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD и из точки D опущены перпендикуляры DB' и DC' на прямые AC и AB; точка M лежит на прямой $B'C'$, причём $DM \perp BC$. Докажите, что точка M лежит на медиане AA_1.

5.108*. а) Из точки P описанной окружности треугольника ABC проведены прямые PA_1, PB_1 и PC_1 под данным (ориентированным) углом α к прямым BC, CA и AB соответственно (точки A_1, B_1 и C_1 лежат на прямых BC, CA и AB). Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

б) Докажите, что при замене в определении прямой Симсона угла 90° на угол α она повернётся на угол $90^\circ - \alpha$.

5.109*. а) Из точки P описанной окружности треугольника ABC опущены перпендикуляры PA_1 и PB_1 на прямые BC и AC. Докажите, что $PA \cdot PA_1 = 2Rd$, где R — радиус описанной окружности, d — расстояние от точки P до прямой A_1B_1.

б) Пусть α — угол между прямыми A_1B_1 и BC. Докажите, что $\cos\alpha = PA/2R$.

5.110*. Пусть A_1 и B_1 — проекции точки P описанной окружности треугольника ABC на прямые BC и AC. Докажите, что длина отрезка A_1B_1 равна длине проекции отрезка AB на прямую A_1B_1.

5.111*. На окружности фиксированы точки P и C; точки A и B перемещаются по окружности так, что угол ACB остаётся постоянным. Докажите, что прямые Симсона точки P относительно треугольников ABC касаются фиксированной окружности.

5.112*. Точка P движется по описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что при этом прямая Симсона точки P относительно треугольника ABC поворачивается на угол, равный половине угловой величины дуги, пройденной точкой P.

5.113*. Докажите, что прямые Симсона двух диаметрально противоположных точек описанной окружности треугольника ABC перпендикулярны, а их точка пересечения лежит на окружности девяти точек (см. задачу 5.129).

5.114*. Точки A, B, C, P и Q лежат на окружности с центром O, причём углы между вектором $\overrightarrow{OP}$ и векторами $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OQ}$ равны α, β, γ и $(\alpha+\beta+\gamma)/2$. Докажите, что прямая Симсона точки P относительно треугольника ABC параллельна OQ.

5.115*. Точки A, B, C и P лежат на окружности с центром O. Стороны треугольника $A_1B_1C_1$ параллельны прямым PA, PB, PC

($PA \parallel B_1C_1$ и т. д.). Через вершины треугольника $A_1B_1C_1$ проведены прямые, параллельные сторонам треугольника ABC.

а) Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке P_1, которая лежит на описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$.

б) Докажите, что прямая Симсона точки P_1 параллельна прямой OP.

5.116*. Хорда PQ описанной окружности треугольника ABC перпендикулярна стороне BC. Докажите, что прямая Симсона точки P относительно треугольника ABC параллельна прямой AQ.

5.117*. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H; P — точка его описанной окружности. Докажите, что прямая Симсона точки P относительно треугольника ABC делит отрезок PH пополам.

5.118*. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность; l_a — прямая Симсона точки A относительно треугольника BCD, прямые l_b, l_c и l_d определяются аналогично. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.

5.119*. а) Докажите, что проекции точки P описанной окружности четырёхугольника $ABCD$ на прямые Симсона треугольников BCD, CDA, DAB и BAC лежат на одной прямой (прямая Симсона вписанного четырёхугольника).

б) Докажите, что аналогично по индукции можно определить прямую Симсона вписанного n-угольника как прямую, содержащую проекции точки P на прямые Симсона всех $(n-1)$-угольников, полученных выбрасыванием одной из вершин n-угольника.

См. также задачи 2.88 б), 2.92, 5.11, 5.72, 19.61, 29.40.

§ 10. Подерный треугольник

Пусть A_1, B_1 и C_1 — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые BC, CA и AB. Треугольник $A_1B_1C_1$ называют *подéрным* (или *педальным*) треугольником точки P относительно треугольника ABC. Описанную окружность подерного треугольника называют *подерной* (или *педальной*) окружностью.

5.120. Пусть $A_1B_1C_1$ — подерный треугольник точки P относительно треугольника ABC. Докажите, что $B_1C_1 = BC \cdot AP/2R$, где R — радиус описанной окружности треугольника ABC.

5.121*. Прямые AP, BP и CP пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_2, B_2 и C_2; $A_1B_1C_1$ — подерный треугольник точки P относительно треугольника ABC. Докажите, что $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$.

5.122*. Внутри остроугольного треугольника ABC дана точка P. Опустив из неё перпендикуляры PA_1, PB_1 и PC_1 на стороны, получим $\triangle A_1B_1C_1$. Проделав для него ту же операцию, получим $\triangle A_2B_2C_2$, а затем $\triangle A_3B_3C_3$. Докажите, что $\triangle A_3B_3C_3 \sim \triangle ABC$.

5.123*. Треугольник ABC вписан в окружность радиуса R с центром O. Докажите, что площадь подерного треугольника точки P относительно треугольника ABC равна $\frac{1}{4}\left|1-\frac{d^2}{R^2}\right|S_{ABC}$, где $d=PO$.

5.124*. Из точки P опущены перпендикуляры PA_1, PB_1 и PC_1 на стороны треугольника ABC. Прямая l_a соединяет середины отрезков PA и B_1C_1. Аналогично определяются прямые l_b и l_c. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.

5.125*. Точки P_1 и P_2 изогонально сопряжены относительно треугольника ABC.

а) Докажите, что их подерные окружности совпадают, причём центром этой окружности является середина отрезка P_1P_2.

б) Докажите, что это утверждение останется верным, если из точек P_1 и P_2 проводить не перпендикуляры к сторонам, а прямые под данным (ориентированным) углом.

в) Докажите, что стороны подерного треугольника точки P_1 перпендикулярны прямым, соединяющим точку P_2 с вершинами треугольника ABC.

5.126*. Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Перпендикуляры, опущенные из точек A, B, C на прямые B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 пересекаются в одной точке. Докажите, что тогда перпендикуляры, опущенные из точек A_1, B_1, C_1 на прямые BC, CA, AB тоже пересекаются в одной точке (Штейнер).

> Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, для которых выполняется условие из задачи 5.126, называют *ортологическими*.

5.127*. Дан параллелограмм $ABCD$. Докажите, что подерная окружность точки D относительно треугольника ABC проходит через точку пересечения его диагоналей.

См. также задачи 5.162, 5.163, 14.21 б).

§ 11. Прямая Эйлера и окружность девяти точек

5.128*. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC, O — центр описанной окружности, M — точка пересечения медиан. Докажите, что точка M лежит на отрезке OH, причём $OM:MH=1:2$. (Прямую, содержащую точки O, M и H, называют *прямой Эйлера*.)

5.129*. Докажите, что середины сторон треугольника, основания высот и середины отрезков, соединяющих точку пересечения высот с вершинами, лежат на одной окружности (*окружности девяти точек*), причём центром этой окружности является середина отрезка OH.

5.130*. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H.

а) Докажите, что треугольники ABC, HBC, AHC и ABH имеют общую окружность девяти точек.

б) Докажите, что прямые Эйлера треугольников ABC, HBC, AHC и ABH пересекаются в одной точке.

в) Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ABC, HBC, AHC и ABH образуют четырёхугольник, симметричный четырёхугольнику $HABC$.

5.131*. Какие стороны пересекает прямая Эйлера в остроугольном и тупоугольном треугольниках?

5.132*. а) Докажите, что описанная окружность треугольника ABC является окружностью девяти точек для треугольника, образованного центрами вневписанных окружностей треугольника ABC.

б) Докажите, что описанная окружность делит пополам отрезок, соединяющий центры вписанной и вневписанной окружностей.

5.133*. Докажите, что прямая Эйлера треугольника ABC параллельна стороне BC тогда и только тогда, когда $\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = 3$.

5.134*. Докажите, что отрезок, высекаемый на стороне AB остроугольного треугольника ABC окружностью девяти точек, виден из её центра под углом $2|\angle A - \angle B|$.

5.135*. Докажите, что если прямая Эйлера проходит через центр вписанной окружности треугольника, то треугольник равнобедренный.

5.136*. Вписанная окружность касается сторон треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что прямая Эйлера треугольника $A_1B_1C_1$ проходит через центр описанной окружности треугольника ABC.

5.137*. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Пусть A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 — диаметры окружности девяти точек треугольника ABC. Докажите, что прямые AA_2, BB_2 и CC_2 пересекаются в одной точке (или параллельны).

См. также задачи 3.72 а), 5.12, 8.34, 13.36 б), 14.55, 14.58, 28.31, 29.40, 31.42, 31.59, 31.80.

§ 12. Точки Брокара

5.138*. а) Докажите, что внутри треугольника ABC существует такая точка P, что $\angle ABP = \angle CAP = \angle BCP$.

б) На сторонах треугольника ABC внешним образом построены подобные ему треугольники CA_1B, CAB_1 и C_1AB (углы при первых вершинах всех четырёх треугольников равны и т. д.). Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, причём эта точка совпадает с точкой P из задачи а).

> Точку P называют *точкой Брокара* треугольника ABC. Аналогично доказывается, что существует ещё и вторая точка Брокара Q, для которой $\angle BAQ = \angle ACQ = \angle CBQ$.

5.139*. а) Через точку Брокара P треугольника ABC проведены прямые AP, BP и CP, пересекающие описанную окружность в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle B_1C_1A_1$.

б) Треугольник ABC вписан в окружность S. Докажите, что треугольник, образованный точками пересечения прямых PA, PB и PC с окружностью S, может быть равен треугольнику ABC не более чем для восьми различных точек P. (Предполагается, что точки пересечения прямых PA, PB и PC с окружностью отличны от точек A, B и C.)

5.140*. а) Пусть P — точка Брокара треугольника ABC. Угол $\varphi = \angle ABP = \angle BCP = \angle CAP$ называют *углом Брокара* этого треугольника. Докажите, что

$$\operatorname{ctg}\varphi = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma \quad \text{и} \quad \sin^3\varphi = \sin(\alpha-\varphi)\sin(\beta-\varphi)\sin(\gamma-\varphi).$$

б) Докажите, что точки Брокара треугольника ABC изогонально сопряжены.

в) Касательная к описанной окружности треугольника ABC в точке C и прямая, проходящая через точку B параллельно AC, пересекаются в точке A_1. Докажите, что угол Брокара треугольника ABC равен углу A_1AC.

5.141*. а) Докажите, что угол Брокара любого треугольника не превосходит 30°.

б) Внутри треугольника ABC взята точка M. Докажите, что один из углов ABM, BCM и CAM не превосходит 30°.

5.142*. Пусть Q — вторая точка Брокара треугольника ABC, O — центр его описанной окружности, A_1, B_1 и C_1 — центры описанных окружностей треугольников CAQ, ABQ и BCQ. Докажите, что $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$ и O — первая точка Брокара треугольника $A_1B_1C_1$.

5.143*. Пусть P — точка Брокара треугольника ABC; R_1, R_2 и R_3 — радиусы описанных окружностей треугольников ABP, BCP и CAP. Докажите, что $R_1R_2R_3 = R^3$, где R — радиус описанной окружности треугольника ABC.

5.144*. Пусть P и Q — первая и вторая точки Брокара треугольника ABC. Прямые CP и BQ, AP и CQ, BP и AQ пересекаются в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что описанная окружность треугольника $A_1B_1C_1$ проходит через точки P и Q.

5.145*. На сторонах CA, AB и BC остроугольного треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 так, что $\angle AB_1A_1 = \angle BC_1B_1 = \angle CA_1C_1$. Докажите, что $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$, причём центр поворотной гомотетии, переводящей один треугольник в другой, совпадает с первой точкой Брокара обоих треугольников.

5.146*. Докажите, что для угла Брокара φ выполняются следующие неравенства:

а) $\varphi^3 \leqslant (\alpha-\varphi)(\beta-\varphi)(\gamma-\varphi)$;

б) $8\varphi^3 \leqslant \alpha\beta\gamma$ (*неравенство Йиффа*).

5.147*. Пусть вершины B и C треугольника фиксированы, а вершина A движется так, что угол Брокара φ треугольника ABC остаётся постоянным. Докажите, что точка A движется по окружности радиуса $(a/2)\sqrt{\operatorname{ctg}^2\varphi - 3}$, где $a = BC$ (*окружность Нейберга*).

5.148*. Опустим из точки M перпендикуляры MA_1, MB_1 и MC_1 на прямые BC, CA и AB. Докажите, что для фиксированного треугольника ABC множество точек M, для которых угол Брокара треугольника $A_1B_1C_1$ имеет заданное значение, состоит из двух окружностей, причём одна из них расположена внутри описанной окружности треугольника ABC, а другая вне её (*окружности Схоуте*).

См. также задачи 14.45, 14.52, 19.59.

§ 13. Точка Лемуана

Пусть AM — медиана треугольника ABC, а прямая AS симметрична прямой AM относительно биссектрисы угла A (точка S лежит на отрезке BC). Тогда отрезок AS называют *симедианой* треугольника ABC; иногда симедианой называют луч AS.

Симедианы треугольника пересекаются в точке, изогонально сопряжённой точке пересечения медиан. Точку пересечения симедиан треугольника называют *точкой Лемуана*.

5.149. Прямые AM и AN симметричны относительно биссектрисы угла A треугольника ABC (точки M и N лежат на прямой BC). Докажите, что $BM\cdot BN/(CM\cdot CN) = c^2/b^2$. В частности, если AS — симедиана, то $BS/CS = c^2/b^2$.

5.150. Выразите длину симедианы AS через длины сторон треугольника ABC.

5.151. Отрезок B_1C_1, где точки B_1 и C_1 лежат на лучах AC и AB, называют *антипараллельным* стороне BC, если $\angle AB_1C_1 = \angle ABC$ и $\angle AC_1B_1 = \angle ACB$.

а) Докажите, что симедиана AS делит пополам любой отрезок B_1C_1, антипараллельный стороне BC.

б) Докажите, что если симедиана AS делит пополам отрезок B_1C_1, то этот отрезок антипараллелен стороне BC.

5.152. Докажите, что если отрезок B_1C_1 антипараллелен стороне BC, то $B_1C_1 \perp OA$, где O — центр описанной окружности.

5.153. Касательная в точке B к описанной окружности S треугольника ABC пересекает прямую AC в точке K. Из точки K проведена вторая касательная KD к окружности S. Докажите, что BD — симедиана треугольника ABC.

5.154*. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C пересекаются в точке P. Докажите, что прямая AP содержит симедиану AS.

5.155*. Окружность S_1 проходит через точки A и B и касается прямой AC, окружность S_2 проходит через точки A и C и касается прямой AB. Докажите, что прямая, проходящая через общие точки этих окружностей, содержит симедиану треугольника ABC.

5.156*. Биссектрисы внешнего и внутреннего углов при вершине A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках D и E. Окружность с диаметром DE пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках A и X. Докажите, что прямая AX содержит симедиану треугольника ABC.

* * *

5.157*. Докажите, что точка Лемуана треугольника ABC с прямым углом C является серединой высоты CH.

5.158*. Через точку X, лежащую внутри треугольника ABC, проведены три отрезка, антипараллельных его сторонам. Докажите, что эти отрезки равны тогда и только тогда, когда X — точка Лемуана.

5.159*. Точки A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2 лежат на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC (A_1 ближе к C, чем A_2, B_1 ближе к A, C_1 ближе к B).

а) Докажите, что если эти точки являются точками пересечения сторон треугольника ABC с продолжениями сторон треугольника $A'B'C'$, полученного из треугольника ABC при гомотетии с центром в точке Лемуана K, то точки A_1, B_2, B_1, C_2, C_1, A_2 лежат на одной окружности (*окружность Тукера*).

б) Докажите, что если длины отрезков A_1B_2, B_1C_2 и C_1A_2 равны и эти отрезки антипараллельны сторонам AB, BC и CA, то точки A_1, B_2, B_1, C_2, C_1, A_2 лежат на одной окружности.

5.160*. Докажите, что центр окружности Тукера лежит на прямой KO, где K — точка Лемуана, O — центр описанной окружности.

5.161*. а) Через точку Лемуана K проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. Докажите, что точки их пересечения со сторонами треугольника лежат на одной окружности (*первая окружность Лемуана*).

б) Через точку Лемуана K проведены прямые, антипараллельные сторонам треугольника. Докажите, что точки их пересечения со сторонами треугольника лежат на одной окружности (*вторая окружность Лемуана*).

5.162*. Пусть A_1, B_1 и C_1 — проекции точки Лемуана K на стороны треугольника ABC. Докажите, что K — точка пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$.

5.163*. Пусть A_1, B_1 и C_1 — проекции точки Лемуана K треугольника ABC на стороны BC, CA и AB. Докажите, что медиана AM треугольника ABC перпендикулярна прямой B_1C_1.

5.164*. Прямые AK, BK и CK, где K — точка Лемуана треугольника ABC, пересекают описанную окружность в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что K — точка Лемуана треугольника $A_1B_1C_1$.

5.165*. Докажите, что прямые, соединяющие середины сторон треугольника с серединами соответствующих высот, пересекаются в точке Лемуана.

См. также задачи 6.41, 7.17, 11.22, 19.58—19.60.

Задачи для самостоятельного решения

5.166. Докажите, что проекция диаметра описанной окружности, перпендикулярного первой стороне треугольника, на прямую, содержащую вторую сторону, равна по длине третьей стороне.

5.167. Докажите, что площадь треугольника с вершинами в центрах вневписанных окружностей треугольника ABC равна $2pR$.

5.168. Равнобедренный треугольник с основанием a и боковой стороной b и равнобедренный треугольник с основанием b и боковой стороной a вписаны в окружность радиуса R. Докажите, что если $a \neq b$, то $ab = \sqrt{5}R^2$.

5.169. Вписанная окружность прямоугольного треугольника ABC касается гипотенузы AB в точке P; CH — высота треугольника ABC. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника ACH лежит на перпендикуляре, опущенном из точки P на AC.

5.170. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон CA и AB в точках B_1 и C_1, а вневписанная окружность касается продолжения сторон в точках B_2 и C_2. Докажите, что середина стороны BC равноудалена от прямых B_1C_1 и B_2C_2.

5.171. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Пусть O, O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников ABC, ABD и ACD. Докажите, что $OO_1 = OO_2$.

5.172. Треугольник, составленный: а) из медиан; б) из высот треугольника ABC, подобен треугольнику ABC. Каким соотношением связаны длины сторон треугольника ABC?

5.173. Через центр O правильного треугольника ABC проведена прямая, пересекающая прямые BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что одно из чисел $1/OA_1$, $1/OB_1$ и $1/OC_1$ равно сумме двух других.

5.174. В треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Докажите, что если $\angle A = 45^\circ$, то B_1C_1 — диаметр окружности девяти точек треугольника ABC.

5.175. Углы треугольника ABC удовлетворяют соотношению $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 1$. Докажите, что его описанная окружность и окружность девяти точек пересекаются под прямым углом.

Решения

5.1. Пусть $AC_1 = AB_1 = x$, $BA_1 = BC_1 = y$ и $CA_1 = CB_1 = z$. Тогда $a = y + z$, $b = z + x$ и $c = x + y$. Вычитая третье равенство из суммы первых двух, получаем $z = (a + b - c)/2$. Поэтому, если треугольник ABC задан, то положение точек A_1 и B_1 определено однозначно. Аналогично положение точки C_1 определено однозначно. Остаётся заметить, что точки касания вписанной окружности со сторонами удовлетворяют указанным в условии задачи соотношениям.

5.2. Лучи CO_a и CO_b — биссектрисы внешних углов при вершине C, поэтому C лежит на прямой O_aO_b и $\angle O_aCB = \angle O_bCA$. Так как CO_c — биссектриса угла BCA, то $\angle BCO_c = \angle ACO_c$. Складывая эти равенства, получаем $\angle O_aCO_c = \angle O_cCO_b$, т. е. O_cC — высота треугольника $O_aO_bO_c$. Аналогично доказывается, что O_aA и O_bB — высоты этого треугольника.

5.3. Ясно, что $\angle BOC = 180^\circ - \angle CBO - \angle BCO = 180^\circ - \angle B/2 - \angle C/2 = 90^\circ + \angle A/2$, а $\angle BO_aC = 180^\circ - \angle BOC$, так как $\angle OBO_a = \angle OCO_a = 90^\circ$.

5.4. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — биссектрисы треугольника ABC, O — точка их пересечения. Предположим, что $x > 1$. Тогда $\angle PAB > \angle PAC$, т. е. точка P лежит внутри треугольника AA_1C. Аналогично точка P лежит внутри треугольников CC_1B и BB_1A. Но единственной общей точкой трёх этих треугольников является точка O. Получено противоречие. Случай $x < 1$ разбирается аналогично.

5.5. Пусть d_a, d_b и d_c — расстояния от точки O до сторон BC, CA и AB. Тогда $ad_a + bd_b + cd_c = 2S$ и $ah_a = bh_b = ch_c = 2S$. Если $h_a - d_a = h_b - d_b = h_c - d_c = x$, то $(a + b + c)x = a(h_a - d_a) + b(h_b - d_b) + c(h_c - d_c) = 6S - 2S = 4S$. Поэтому $x = 4S/2p = 2r$.

5.6. Докажем, что точка O является центром вневписанной окружности треугольника PBQ, касающейся стороны PQ. В самом деле, $\angle POQ = \angle A = 90^\circ - \angle B/2$; из центра вневписанной окружности отрезок PQ виден под таким же углом (задача 5.3). Кроме того, точка O лежит на биссектрисе угла B. Следовательно, полупериметр треугольника PBQ равен длине проекции отрезка OB на прямую CB.

5.7. Пусть P — точка касания вписанной окружности со стороной BC, PQ — диаметр вписанной окружности, R — точка пересечения прямых AQ и BC. Так как $CR = BP$ (см. задачу 19.11 а) и M — середина стороны BC, то $RM = PM$. Кроме того, O — середина диаметра PQ, поэтому $MO \parallel QR$, а так как $AH \parallel PQ$, то $AE = OQ$.

5.8. Данная окружность может быть как вписанной, так и вневписанной окружностью треугольника ABC, отсекаемого касательной от угла. Используя результат задачи 3.2, в обоих случаях легко проверить, что $uv/w^2 = (p - b)(p - c) \sin B \sin C/h_a^2$. Остаётся заметить, что $h_a = b \sin C = c \sin B$ и $(p - b)(p - c)/bc = \sin^2(A/2)$ (задача 12.13).

5.9. а) Пусть $p = CP$, $x_1 = BP$ и $x_2 = AP$. Тогда $r_1 = \dfrac{x_1 h}{a + p + x_1}$, $r_2 = \dfrac{x_2 h}{b + p + x_2}$, $r = \dfrac{(x_1 + x_2)h}{a + b + x_1 + x_2}$. После несложных преобразований требуемое равенство приводится к виду $x_2(p^2 + x_1^2 - a^2) + x_1(p^2 + x_2^2 - b^2) = 0$. Остаётся заметить, что $p^2 + x_1^2 - a^2 = 2px_1 \cos BPC$, $p^2 + x_2^2 - b^2 = 2px_2 \cos APC$ и $\cos BPC = -\cos APC$.

б) Согласно задаче а) $r_{k+1} = r_1 + r_k - \dfrac{2r_1 r_k}{h}$, где h — расстояние от точки B до прямой A_1A_2.

5.10. Пусть A_1, B_1 и C_1 — точки, симметричные точке H относительно сторон BC, CA и AB соответственно. Так как $AB \perp CH$ и $BC \perp AH$, то $\angle(AB, BC) = \angle(CH, HA)$, а так как треугольник AC_1H равнобедренный, то $\angle(CH, HA) = \angle(AC_1, C_1C)$. Следовательно, $\angle(AB, BC) = \angle(AC_1, C_1C)$, т. е. точка C_1 лежит на описанной окружности треугольника ABC. Аналогично доказывается, что точки A_1 и B_1 лежат на этой окружности.

5.11. Точки X, Y и Z лежат на одной прямой (задача 5.105 а). Поэтому $S_{PYZ} = S_{PXZ} + S_{PXY}$. Кроме того, $S_{PYZ} = \frac{1}{2}PY \cdot PZ \sin\alpha$, так как $PY \perp CA$ и $PZ \perp AB$. Подставив аналогичным образом две другие площади, получим

$$\frac{\sin\alpha}{PX} = \frac{\sin\beta}{PY} + \frac{\sin\gamma}{PZ}.$$

Остаётся заметить, что $\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = BC : CA : AB$.

5.12. а) Пусть M — точка пересечения прямой AI с описанной окружностью. Проведя через точку I диаметр описанной окружности, получим $AI \cdot IM = (R+d)(R-d) = R^2 - d^2$. Так как $IM = CM$ (задача 2.4 а), то $R^2 - d^2 = AI \cdot CM$. Остаётся заметить, что $AI = r/\sin(A/2)$ и $CM = 2R\sin(A/2)$.

б) Пусть M — точка пересечения прямой AI_a с описанной окружностью. Тогда $AI_a \cdot I_aM = d_a^2 - R^2$. Так как $I_aM = CM$ (задача 2.4 а), то $d_a^2 - R^2 = AI_a \cdot CM$. Остаётся заметить, что $AI_a = r_a/\sin(A/2)$ и $CM = 2R\sin(A/2)$.

5.13. В треугольнике OIB угол при вершине I прямой тогда и только тогда, когда $OB^2 = OI^2 + BI^2$. Ясно, что $OB = R$ и $BI = r/\sin\frac{\beta}{2}$. Кроме того, согласно задаче 5.12 а) $OI^2 = R^2 - 2Rr$. Поэтому приходим к равенству $r = 2R\sin^2\frac{\beta}{2}$. Согласно задаче 12.38 а) $r = 4R\sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)\sin(\gamma/2)$. Поэтому полученное равенство можно переписать в виде $2\sin(\alpha/2)\sin(\gamma/2) = \sin(\beta/2)$. Это равенство эквивалентно равенству $2\sin\beta = \sin\alpha + \sin\gamma$. Действительно, последнее равенство можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} 4\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2} &= 2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2};\\ 2\sin\frac{\beta}{2} &= \cos\frac{\alpha-\gamma}{2};\\ \sin\frac{\beta}{2} &= \cos\frac{\alpha-\gamma}{2} - \cos\frac{\alpha+\gamma}{2};\\ \sin\frac{\beta}{2} &= 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

5.14. а) Так как B_1 — центр описанной окружности треугольника AMC (см. задачу 2.4 а), то $AM = 2MB_1\sin ACM$. Ясно также, что $MC = r/\sin ACM$. Поэтому $MA \cdot MC/MB_1 = 2r$.

б) Так как $\angle MBC_1 = \angle BMC_1 = 180^\circ - \angle BMC$ и $\angle BC_1M = \angle A$, то

$$\frac{MC_1}{BC} = \frac{BM}{BC} \cdot \frac{MC_1}{BM} = \frac{\sin BCM}{\sin BMC} \cdot \frac{\sin MBC_1}{\sin BC_1M} = \frac{\sin BCM}{\sin A}.$$

Кроме того, $MB = 2MA_1\sin BCM$. Поэтому $MC_1 \cdot MA_1/MB = BC/2\sin A = R$.

5.15. Пусть M — середина стороны AC, N — точка касания вписанной окружности со стороной BC. Тогда $BN = p - b$ (см. задачу 3.2), поэтому $BN = AM$, так как $p = 3b/2$ по условию. Кроме того, $\angle OBN = \angle B_1AM$, а значит, $\triangle OBN = \triangle B_1AM$, т. е. $OB = B_1A$. Но $B_1A = B_1O$ (см. задачу 2.4 а).

5.16. Пусть O и O_1 — центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC. Рассмотрим окружность радиуса $d = OO_1$ с центром O.

Проведём в этой окружности хорды O_1M и O_1N, параллельные сторонам AB и AC соответственно. Пусть K — точка касания вписанной окружности со стороной AB, L — середина стороны AB. Так как $OK \perp AB$, $O_1L \perp AB$ и $O_1M \parallel AB$, то $O_1M = 2KL = 2BL - 2BK = c - (a + c - b) = b - a = AE$. Аналогично $O_1N = AD$, а значит, $\triangle MO_1N = \triangle EAD$. Следовательно, радиус описанной окружности треугольника EAD равен d.

5.17. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — медианы, M — точка их пересечения, A_+, B_-, C_+, A_-, B_+, C_- — центры описанных окружностей треугольников B_1MC, CMA_1, A_1MB, BMC_1, C_1MA, AMB_1. Проекции точек B_+ и B_- на прямую AA_1 являются серединами отрезков AM и MA_1. Поэтому проекция вектора $\overrightarrow{B_+B_-}$ на прямую AA_1 равна $\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$. Аналогично проекция этого вектора на прямую CC_1 равна $\frac{1}{2}\overrightarrow{CC_1}$. Аналогичные утверждения верны и для векторов $\overrightarrow{A_+A_-}$ и $\overrightarrow{C_+C_-}$.

Сумма векторов $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ равна нулевому вектору (задача 13.1), поэтому существует треугольник $A_2B_2C_2$, для которого $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{B_2C_2}$, $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{C_2A_2}$ и $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{A_2B_2}$. Для любой точки X вектор $\overrightarrow{B_2X}$ полностью определяется проекциями на прямые B_2A_2 и B_2C_2. С другой стороны, вектор $\overrightarrow{B_2O}$, где O — центр описанной окружности треугольника $A_2B_2C_2$, имеет такие же проекции на эти прямые, как и вектор $\overrightarrow{B_+B_-}$. Следовательно, длины векторов $\overrightarrow{A_+A_-}$, $\overrightarrow{B_+B_-}$ и $\overrightarrow{C_+C_-}$ равны (они равны радиусу описанной окружности треугольника $A_2B_2C_2$).

Противоположные стороны шестиугольника $A_+B_-C_+A_-B_+C_-$ параллельны, а его диагонали A_+A_-, B_+B_- и C_+C_- равны. Согласно задаче 6.57 такой шестиугольник вписанный.

5.18. Пусть вписанная окружность касается стороны AC в точке K, а вневписанная окружность касается продолжения стороны AC в точке L. Тогда $r = CK$ и $r_c = CL$. Остаётся воспользоваться результатом задачи 3.2.

5.19. Так как $AB/2 = AM = BM$, то $CM = AB/2$ тогда и только тогда, когда точка C лежит на окружности с диаметром AB.

5.20. Пусть M и N — середины сторон AB и CD. Треугольник APB прямоугольный, поэтому $PM = AB/2$ и $\angle MPA = \angle PAM$, а значит, $PM \parallel AD$. Аналогичные рассуждения показывают, что точки P, M, N и Q лежат на одной прямой и $PQ = PM + MN + NQ = (AB + (BC + AD) + CD)/2$.

5.21. Пусть F — точка пересечения прямых DE и BC; K — середина отрезка EC. Отрезок CD является биссектрисой и высотой треугольника ECF, поэтому $ED = DF$, а значит, $DK \parallel FC$. Медиана DK прямоугольного треугольника EDC в два раза меньше его гипотенузы EC (задача 5.19), поэтому $AD = DK = EC/2$.

5.22. Прямая EM проходит через середину стороны AB, поэтому она проходит через середину O отрезка DK. Кроме того, $\angle EKO = \angle ABK = \angle KBC = \angle KEO$. Поэтому $OE = OK = OD$. Согласно задаче 5.19 $\angle DEK = 90^\circ$.

5.23. Пусть сумма углов при основании AD трапеции $ABCD$ равна 90°. Обозначим точку пересечения прямых AB и CD через O. Точка O лежит на прямой, проходящей через середины оснований. Проведём через точку C прямую CK, параллельную этой прямой, и прямую CE, параллельную прямой AB (точки K и E лежат на основании AD). Тогда CK — медиана прямоугольного треугольника ECD, поэтому $CK = ED/2 = (AD - BC)/2$ (см. задачу 5.19).

5.24. Пусть P и Q — середины сторон AB и CD. Рассмотрим для определённости случай, когда точка M не лежит на отрезке AP (случай, когда точка M лежит на отрезке AP, разбирается аналогично). Ясно, что $\angle MPO = \angle MAD = \angle PMO$, а значит, $MO = PO = OQ$. Поэтому согласно задаче 5.19 $MQ \perp MP$. Следовательно, MQ — серединный перпендикуляр к отрезку CD.

5.25. Ясно, что $\angle CEB = \angle A + \angle ACE = \angle BCK + \angle KCE = \angle BCE$.

5.26. Отрезки CF и DK являются биссектрисами подобных треугольников ACB и CDB, поэтому $AB : FB = CB : KB$. Следовательно, $FK \parallel AC$. Аналогично доказывается, что $LF \parallel CB$. Поэтому $CLFK$ — прямоугольник, у которого диагональ CF является биссектрисой угла LCK, т. е. он — квадрат.

5.27. Так как $\dfrac{\sin ACQ}{AQ} = \dfrac{\sin AQC}{AC}$, то $\dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin(180^\circ - \alpha - 90^\circ - \varphi)}{a\cos\varphi} = \dfrac{\cos(\alpha+\varphi)}{a\cos\varphi}$, где a — сторона квадрата $ABPQ$, $\varphi = \angle CAB$. Поэтому $\operatorname{ctg}\alpha = 1 + \operatorname{tg}\varphi$. Аналогично $\operatorname{ctg}\gamma = 1 + \operatorname{tg}(90^\circ - \varphi) = 1 + \operatorname{ctg}\varphi$. Следовательно, $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}\varphi} + \dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}\varphi} = 1$, а значит, $\cos\alpha\cos\gamma = \cos\alpha\sin\gamma + \cos\gamma\sin\alpha = \sin(\alpha+\gamma) = \cos\beta$.

5.28. По теореме Пифагора $AP^2 + BQ^2 + CR^2 = (AM^2 - PM^2) + (BM^2 - QM^2) + (CM^2 - RM^2)$ и $PB^2 + QC^2 + RA^2 = (BM^2 - PM^2) + (CM^2 - QM^2) + (AM^2 - RM^2)$. Эти выражения равны.

Так как $AP^2 + BQ^2 + CR^2 = (a - PB)^2 + (a - QC)^2 + (a - RA)^2 = 3a^2 - 2a(PB + QC + RA) + PB^2 + QC^2 + RA^2$, где $a = AB$, то $PB + QC + RA = 3a/2$.

5.29. Пусть точка F делит отрезок BC в отношении $CF : FB = 1 : 2$; P и Q — точки пересечения отрезка AF с BD и CE соответственно. Ясно, что треугольник OPQ правильный. Используя результат задачи 1.3 а), легко проверить, что $AP : PF = 3 : 4$ и $AQ : QF = 6 : 1$. Следовательно, $AP : PQ : QF = 3 : 3 : 1$, а значит, $AP = PQ = OP$. Поэтому $\angle AOP = 30^\circ$ и $\angle AOC = 90^\circ$.

5.30. Пусть A и B, C и D, E и F — точки пересечения окружности со сторонами PQ, QR, RP треугольника PQR. Рассмотрим медиану PS. Она соединяет середины параллельных хорд FA и DC и поэтому перпендикулярна им. Следовательно, PS является высотой треугольника PQR, а значит $PQ = PR$. Аналогично $PQ = QR$.

5.31. Пусть H — точка пересечения высот AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC. По условию $A_1H \cdot BH = B_1H \cdot AH$. С другой стороны, так как точки A_1 и B_1 лежат на окружности с диаметром AB, то $AH \cdot A_1H = BH \cdot B_1H$. Следовательно, $AH = BH$ и $A_1H = B_1H$, а значит, $AC = BC$. Аналогично $BC = AB$.

5.32. а) Предположим, что треугольник ABC неправильный; например $a \neq b$. Так как $a + h_a = a + b\sin\gamma$ и $b + h_b = b + a\sin\gamma$, то $(a - b)(1 - \sin\gamma) = 0$. Поэтому $\sin\gamma = 1$, т. е. $\gamma = 90^\circ$. Но тогда $a \neq c$, и аналогичные рассуждения показывают, что $\beta = 90^\circ$. Получено противоречие.

б) Обозначим сторону квадрата, две вершины которого лежат на стороне BC, через x. Из подобия треугольников ABC и APQ, где P и Q — вершины квадрата, лежащие на AB и AC, получаем $\dfrac{x}{a} = \dfrac{h_a - x}{h_a}$, т. е. $x = \dfrac{ah_a}{a + h_a} = \dfrac{2S}{a + h_a}$. Аналогичные рассуждения для других квадратов показывают, что $a + h_a = b + h_b = c + h_c$.

5.33. Если α, β и γ — углы треугольника ABC, то углы треугольника $A_1B_1C_1$ равны $(\beta+\gamma)/2$, $(\gamma+\alpha)/2$ и $(\alpha+\beta)/2$. Пусть для определённости

$\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$. Тогда $(\alpha+\beta)/2 \geqslant (\alpha+\gamma)/2 \geqslant (\beta+\gamma)/2$. Следовательно, $\alpha = (\alpha+\beta)/2$ и $\gamma = (\beta+\gamma)/2$, т.е. $\alpha = \beta$ и $\beta = \gamma$.

5.34. В любом треугольнике высота больше диаметра вписанной окружности. Поэтому длины высот — целые числа, бóльшие 2, т.е. все они не меньше 3. Пусть S — площадь треугольника, a — наибольшая его сторона, h — соответствующая высота.

Предположим, что треугольник неправильный. Тогда его периметр P меньше $3a$. Поэтому $3a > P = Pr = 2S = ha$, т.е. $h < 3$. Получено противоречие.

5.35. Так как внешний угол при вершине A треугольника ABA_1 равен 120° и $\angle A_1AB_1 = 60^\circ$, то AB_1 — биссектриса этого внешнего угла. Кроме того, BB_1 — биссектриса внутреннего угла при вершине B, поэтому A_1B_1 — биссектриса угла AA_1C. Аналогично A_1C_1 — биссектриса угла AA_1B. Поэтому $\angle B_1A_1C_1 = (\angle AA_1C + \angle AA_1B)/2 = 90^\circ$.

5.36. Согласно решению задачи 5.35 луч A_1C_1 является биссектрисой угла AA_1B. Пусть K — точка пересечения биссектрис треугольника A_1AB. Тогда $\angle C_1KO = \angle A_1KB = 90^\circ + \angle A/2 = 120^\circ$. Поэтому $\angle C_1KO + \angle C_1AO = 180^\circ$, т.е. четырёхугольник $AOKC_1$ вписанный. Следовательно, $\angle A_1C_1O = \angle KC_1O = \angle KAO = 30^\circ$.

5.37. Пусть описанные окружности треугольников ABB_1 и ACC_1 пересекаются в точке X, лежащей на стороне BC. Тогда $\angle XAC = \angle CBB_1 = \frac{1}{2}\angle B$ и $\angle XAB = \angle BCC_1 = \frac{1}{2}\angle C$. Поэтому $\angle A = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$, а значит, $\angle A = 60^\circ$.

5.38. а) Пусть S — описанная окружность треугольника ABC, S_1 — окружность, симметричная S относительно прямой BC. Ортоцентр H треугольника ABC лежит на окружности S_1 (задача 5.10). Проверим, что центр O окружности S тоже принадлежит S_1 и биссектриса внешнего угла A проходит через центр окружности S_1.

Пусть PQ — диаметр окружности S, перпендикулярный прямой BC, причём точки P и A лежат по одну сторону от прямой BC. Тогда AQ — биссектриса угла A, а AP — биссектриса внешнего угла A. Так как $\angle BPC = 120^\circ = \angle BOC$, то точка P является центром окружности S_1, а точка O принадлежит окружности S_1. Тогда $POAH$ — ромб, так как $PO \parallel HA$.

б) Пусть S — описанная окружность треугольника ABC, Q — точка пересечения биссектрисы угла BAC с окружностью S. Легко проверить, что Q — центр окружности S_1, симметричной окружности S относительно прямой BC. Кроме того, точки O и H лежат на окружности S_1, а так как $\angle BIC = 120^\circ$ и $\angle BI_aC = 60^\circ$ (см. задачу 5.3), то I_aI — диаметр окружности S_1. Ясно также, что $\angle OQI = \angle QAH = \angle AQH$, так как $OQ \parallel AH$ и $HA = QO = QH$. Поэтому точки O и H симметричны относительно прямой I_aI.

5.39. Построим внешним образом на стороне AC треугольника ABC правильный треугольник AB_1C. Так как $\angle A = 120^\circ$, точка A лежит на отрезке BB_1. Поэтому $BB_1 = b + c$ и, кроме того, $BC = a$ и $B_1C = b$, т.е. треугольник BB_1C искомый.

5.40. а) Пусть M_1 и N_1 — середины отрезков BH и CH, BB_1 и CC_1 — высоты. Прямоугольные треугольники ABB_1 и BHC_1 имеют общий острый угол при вершине B, поэтому $\angle C_1HB = \angle A = 60^\circ$. Так как треугольник BMH равнобедренный, $\angle BHM = \angle HBM = 30^\circ$. Следовательно, $\angle C_1HM = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ =$

$= \angle BHM$, т. е. точка M лежит на биссектрисе угла C_1HB. Аналогично точка N лежит на биссектрисе угла B_1HC.

б) Воспользуемся обозначениями задачи а), и пусть, кроме того, B' и C' — середины сторон AC и AB. Так как $AC_1 = AC\cos A = AC/2$, то $C_1C' = |AB - AC|/2$. Аналогично $B_1B' = |AB - AC|/2$, т. е. $B_1B' = C_1C'$. Следовательно, параллельные прямые BB_1 и $B'O$, CC_1 и $C'O$ образуют не просто параллелограмм, а ромб. Поэтому его диагональ HO является биссектрисой угла при вершине H.

5.41. Так как $\angle BB_1C = \angle B_1BA + \angle B_1AB > \angle B_1BA = \angle B_1BC$, то $BC > B_1C$. Поэтому точка K, симметричная B_1 относительно биссектрисы CC_1, лежит на стороне BC, а не на её продолжении. Так как $\angle CC_1B = 30^\circ$, то $\angle B_1C_1K = 60^\circ$, а значит, треугольник B_1C_1K правильный. В треугольниках BC_1B_1 и BKB_1 сторона BB_1 общая, стороны C_1B_1 и KB_1 равны, равны также и углы C_1BB_1 и KBB_1 но это углы не между равными сторонами. Поэтому возможны два случая:

1. $\triangle BC_1B_1 = \triangle BKB_1$. Тогда $\angle BB_1C_1 = \angle BB_1K = 60^\circ/2 = 30^\circ$. Следовательно, если O — точка пересечения биссектрис BB_1 и CC_1, то $\angle BOC = \angle B_1OC_1 = 180^\circ - \angle OC_1B_1 - \angle OB_1C_1 = 120^\circ$. С другой стороны, $\angle BOC = 90^\circ + \angle A/2$ (см. задачу 5.3), т. е. $\angle A = 60^\circ$.

2. $\angle BC_1B_1 + \angle BKB_1 = 180^\circ$. Тогда четырёхугольник BC_1B_1K вписанный, а так как треугольник B_1C_1K правильный, то $\angle B = 180^\circ - \angle C_1B_1K = 120^\circ$.

5.42. Пусть BM — медиана, AK — биссектриса треугольника ABC и $BM \perp AK$. Прямая AK является биссектрисой и высотой треугольника ABM, поэтому $AM = AB$, т. е. $AC = 2AM = 2AB$. Следовательно, $AB = 2$, $BC = 3$ и $AC = 4$.

5.43. Пусть a и b — катеты, c — гипотенуза данного треугольника. Если числа a и b нечётные, то $a^2 + b^2$ при делении на 4 даёт остаток 2 и не может быть квадратом целого числа. Поэтому одно из чисел a и b чётное, а другое нечётное; пусть для определённости $a = 2p$. Числа b и c нечётные, поэтому $c + b = 2q$ и $c - b = 2r$. Следовательно $4p^2 = a^2 = c^2 - b^2 = 4qr$. Если бы числа q и r имели общий делитель d, то на d делились бы числа $a = 2\sqrt{qr}$, $b = q - r$ и $c = q + r$. Поэтому числа q и r взаимно просты, а так как $p^2 = qr$, то $q = m^2$ и $r = n^2$. В итоге получаем $a = 2mn$, $b = m^2 - n^2$ и $c = m^2 + n^2$.

Легко проверить также, что если $a = 2mn$, $b = m^2 - n^2$ и $c = m^2 + n^2$, то $a^2 + b^2 = c^2$.

5.44. Пусть p — полупериметр треугольника, а a, b, c — длины его сторон. По формуле Герона $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$. С другой стороны, $S^2 = p^2r^2 = p^2$, так как $r = 1$. Поэтому $p = (p-a)(p-b)(p-c)$. Если ввести неизвестные $x = p - a$, $y = p - b$, $z = p - c$, то это уравнение перепишется в виде $x + y + z = xyz$. Заметим, что число p целое или полуцелое (т. е. число вида $(2n+1)/2$, где n целое), поэтому все числа x, y, z одновременно целые или полуцелые. Но если они полуцелые, то число $x + y + z$ полуцелое, а число xyz имеет вид $m/8$, где число m нечётное. Следовательно, числа x, y, z целые. Пусть для определённости $x \leqslant y \leqslant z$. Тогда $xyz = x + y + z \leqslant 3z$, т. е. $xy \leqslant 3$. Возможны три случая.

1. $x = 1$, $y = 1$. Тогда $2 + z = z$, чего не может быть.
2. $x = 1$, $y = 2$. Тогда $3 + z = 2z$, т. е. $z = 3$.
3. $x = 1$, $y = 3$. Тогда $4 + z = 3z$, т. е. $z = 2 < y$, чего не может быть.

Итак, $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. Поэтому $p = x + y + z = 6$ и $a = p - x = 5$, $b = 4$, $c = 3$.

5.45. Пусть a_1 и b_1, a_2 и b_2 — катеты двух различных пифагоровых треугольников, c_1 и c_2 — их гипотенузы. Возьмём две перпендикулярные прямые и отложим на них отрезки $OA = a_1a_2$, $OB = a_1b_2$, $OC = b_1b_2$ и $OD = a_2b_1$ (рис. 5.3). Так как $OA \cdot OC = OB \cdot OD$, то четырёхугольник $ABCD$ вписанный. Согласно задаче 2.74 а) $4R^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = (c_1c_2)^2$, т. е. $R = c_1c_2/2$. Увеличив, если нужно, четырёхугольник $ABCD$ в два раза, получим искомый четырёхугольник.

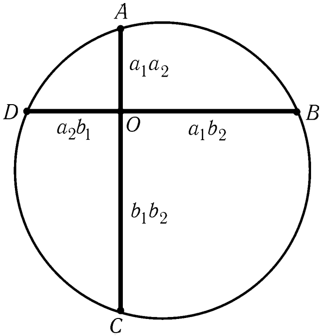


Рис. 5.3

5.46. а) Длины гипотенуз прямоугольных треугольников с катетами 5 и 12, 9 и 12 равны 13 и 15. Приложив равные катеты этих треугольников друг к другу, получим треугольник площади $12(5+9)/2 = 84$.

б) Предположим сначала, что длина наименьшей стороны данного треугольника — чётное число, т. е. длины сторон треугольника равны $2n$, $2n+1$, $2n+2$. Тогда по формуле Герона $16S^2 = (6n+3)(2n+3)(2n+1)(2n-1) = 4(3n^2+6n+2)(4n^2-1) + 4n^2 - 1$. Получено противоречие, так как число, стоящее в правой части, не делится на 4. Следовательно, длины сторон треугольника равны $2n-1$, $2n$ и $2n+1$, причём $S^2 = 3n^2(n^2-1)$. Поэтому $S = nk$, где k — целое число, и $k^2 = 3(n^2-1)$. Ясно также, что k — длина высоты, опущенной на сторону $2n$. Эта высота делит исходный треугольник на два прямоугольных треугольника с общим катетом k и гипотенузами $2n+1$ и $2n-1$; квадраты длин других катетов этих треугольников равны $(2n \pm 1)^2 - k^2 = 4n^2 \pm 4n + 1 - 3n^2 + 3 = (n \pm 2)^2$.

5.47. а) Так как $AB^2 - AB_1^2 = BB_1^2 = BC^2 - (AC \pm AB_1)^2$, то $AB_1 = \pm(AB^2 + AC^2 - BC^2)/2AC$.

б) Пусть диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Докажем, например, что число $q = BO/OD$ рациональное (тогда число $OD = BD/(q+1)$ тоже рациональное). Проведём в треугольниках ABC и ADC высоты BB_1 и DD_1. Согласно задаче а) числа AB_1 и CD_1 рациональные, а значит, число B_1D_1 тоже рациональное. Пусть E — точка пересечения прямой BB_1 и прямой, проходящей через точку D параллельно AC. В прямоугольном треугольнике BDE катет $ED = B_1D_1$ и гипотенуза BD — рациональные числа, поэтому число BE^2 тоже рациональное. Из треугольников ABB_1 и CDD_1 получаем, что числа BB_1^2 и DD_1^2 рациональные. А так как $BE^2 = (BB_1 + DD_1)^2 = BB_1^2 + DD_1^2 + 2BB_1 \cdot DD_1$, то число $BB_1 \cdot DD_1$ рациональное. Следовательно, число $BO/OD = BB_1/DD_1 = BB_1 \cdot DD_1/DD_1^2$ рациональное.

5.48. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ не может быть двух пар соответственных углов, составляющих в сумме 180°, так как иначе их сумма равна 360° и третьи углы треугольников должны быть нулевыми. Предположим теперь, что углы первого треугольника равны α, β и γ, а углы второго равны $180^\circ - \alpha$, β и γ. Сумма углов двух треугольников равна 360°, поэтому $180^\circ + 2\beta + 2\gamma = 360^\circ$, т. е. $\beta + \gamma = 90^\circ$. Следовательно, $\alpha = 90^\circ = 180^\circ - \alpha$.

5.49. Ясно, что $\overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{BO}$ и $\overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{OA}$, поэтому $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{BA}$. Аналогично $\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{C_1A_1} = \overrightarrow{AC}$, т. е. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Кроме того, ABA_1B_1

и ACA_1C_1 — параллелограммы. Значит, отрезки BB_1 и CC_1 проходят через середину отрезка AA_1.

5.50. Так как $\angle MAO = \angle PAO = \angle AOM$, то $AMOP$ — ромб. Аналогично $BNOQ$ — ромб. Следовательно, $MN = MO + ON = AM + BN$ и $OP + PQ + QO = AP + PQ + QB = AB$.

5.51. а) Проведём через вершины треугольника ABC прямые, параллельные его противоположным сторонам. В результате получим треугольник $A_1B_1C_1$, серединами сторон которого являются точки A, B и C. Высоты треугольника ABC являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника $A_1B_1C_1$, поэтому центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ является точкой пересечения высот треугольника ABC.

б) Точка H является центром описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$, поэтому $4R^2 = B_1H^2 = B_1A^2 + AH^2 = BC^2 + AH^2$. Следовательно, $AH^2 = 4R^2 - BC^2 = \left(\frac{1}{\sin^2\alpha} - 1\right)BC^2 = (BC\operatorname{ctg}\alpha)^2$.

5.52. Пусть AD — биссектриса равнобедренного треугольника ABC с основанием AB и углом 36° при вершине C. Тогда треугольник ACD равнобедренный и $\triangle ABC \sim \triangle BDA$. Поэтому $CD = AD = AB = 2xBC$ и $DB = 2xAB = 4x^2BC$, а значит, $BC = CD + DB = (2x + 4x^2)BC$.

5.53. Ясно, что $B_1C - B_2C = \frac{b}{2} - \frac{a+b-c}{2} = \frac{c-a}{2} > 0$. Из этого следует, что отрезки A_1B_1 и B_2C_2 пересекаются в некоторой точке X. Треугольник XB_1B_2 подобен равнобедренному треугольнику C_2AB_2, поэтому $XB_1 = B_1B_2 = \frac{c-a}{2}$. Следовательно, $A_1X = \frac{c}{2} - \frac{c-a}{2} = \frac{a}{2} = A_1B$. Таким образом, треугольник XA_1B равнобедренный, а значит, $\angle XBA_1 = \angle A_1XB = \angle ABX$.

5.54. Пусть B_1 и B_2 — проекции точки A на биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине B, M — середина стороны AB. Так как биссектрисы внутреннего и внешнего углов перпендикулярны, то AB_1BB_2 — прямоугольник, и его диагональ B_1B_2 проходит через точку M. Кроме того, $\angle B_1MB = 180^\circ - 2\angle MBB_1 = 180^\circ - \angle B$. Следовательно, $B_1B_2 \parallel BC$, а значит, прямая B_1B_2 совпадает с прямой l, соединяющей середины сторон AB и AC. Аналогично доказывается, что проекции точки A на биссектрисы углов при вершине C лежат на прямой l.

5.55. Предположим, что биссектрисы углов A и B равны, но $a > b$. Тогда $\cos\frac{A}{2} < \cos\frac{B}{2}$ и $\frac{1}{c} + \frac{1}{b} > \frac{1}{c} + \frac{1}{a}$, т. е. $\frac{bc}{b+c} < \frac{ac}{a+c}$. Перемножая полученные неравенства, приходим к противоречию, так как $l_a = 2bc\cos(A/2)/(b+c)$ и $l_b = 2ac\cos(B/2)/(a+c)$ (см. задачу 4.48).

5.56. а) Согласно задаче 4.48 длина биссектрисы угла B треугольника ABC равна $2ac\cos(B/2)/(a+c)$, поэтому достаточно проверить, что система уравнений $ac/(a+c) = p$, $a^2 + c^2 - 2ac\cos B = q$ имеет (с точностью до перестановки чисел a и c) единственное положительное решение. Пусть $a + c = u$. Тогда $ac = pu$ и $q = u^2 - 2pu(1 + \cos)$. Произведение корней этого квадратного уравнения относительно u равно $-q$, поэтому оно имеет единственный положительный корень. Ясно, что система уравнений $a + c = u$, $ac = pu$ имеет единственное решение.

б) В треугольниках AA_1B и CC_1B равны стороны AA_1 и CC_1, углы при вершине B и биссектрисы углов при вершине B. Следовательно, эти треугольники равны, а значит, $AB = BC$ или $AB = BC_1$. Второе равенство выполняться не может.

5.57. Пусть точки M и N лежат на сторонах AB и AC. Если r_1 — радиус окружности с центром на отрезке MN, касающейся сторон AB и AC, то $S_{AMN} = qr_1$, где $q = (AM + AN)/2$. Прямая MN проходит через центр вписанной окружности тогда и только тогда, когда $r_1 = r$, т. е. $S_{AMN}/q = S_{ABC}/p = (S_{ABC} - S_{AMN})/(p - q) = S_{BCNM}/(p - q)$.

5.58. а) Возьмём на продолжении отрезка AC за точку C такую точку B', что $CB' = CB$. Треугольник BCB' равнобедренный, поэтому $\angle AEB = \angle ACB = 2\angle CBB'$, а значит, E — центр описанной окружности треугольника ABB'. Следовательно, точка F делит отрезок AB' пополам; поэтому прямая C_1F делит пополам периметр треугольника ABC.

б) Легко проверить, что прямая, проведённая через точку C параллельно BB', является биссектрисой угла ACB. А так как $C_1F \parallel BB'$, то прямая C_1F — биссектриса угла треугольника с вершинами в серединах сторон треугольника ABC. Биссектрисы этого треугольника пересекаются в одной точке.

5.59. Пусть X — точка пересечения прямых AD_2 и CD_1; M, E_1 и E_2 — проекции точек X, D_1 и D_2 на прямую AC. Тогда $CE_2 = CD_2 \sin\gamma = a\sin\gamma$ и $AE_1 = c\sin\alpha$. Так как $a\sin\gamma = c\sin\alpha$, то $CE_2 = AE_1 = q$. Поэтому

$$\frac{XM}{AM} = \frac{D_2E_2}{AE_2} = \frac{a\cos\gamma}{b+q} \quad \text{и} \quad \frac{XM}{CM} = \frac{c\cos\alpha}{b+q}.$$

Следовательно, $AM : CM = c\cos\alpha : a\cos\gamma$. Высота BH делит сторону AC в таком же отношении.

5.60. а) По теореме косинусов $B_1C_1^2 = AC_1^2 + AB_1^2 - 2AC_1 \cdot AB_1 \cdot \cos(90^\circ + \alpha)$, т. е. $a_1^2 = \dfrac{c^2}{2} + \dfrac{b^2}{2} + bc\sin\alpha = \dfrac{b^2+c^2}{2} + 2S$. Записывая аналогичные равенства для b_1^2 и c_1^2 и складывая их, получаем требуемое.

б) Для остроугольного треугольника ABC, прибавив к S площади треугольников ABC_1, AB_1C и A_1BC и прибавив к S_1 площади треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C, получим одинаковые величины (для треугольника с тупым углом A площадь треугольника AB_1C_1 следует взять со знаком минус). Поэтому $S_1 = S + (a^2 + b^2 + c^2)/4 - (ab\cos\gamma + ac\cos\beta + bc\cos\alpha)/4$. Остаётся заметить, что $ab\cos\gamma + bc\cos\alpha + ac\cos\beta = 2S(\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta) = (a^2 + b^2 + c^2)/2$ (см. задачу 12.46 а).

5.61. Докажем сначала, что точка B' лежит на описанной окружности треугольника AHC, где H — точка пересечения высот треугольника ABC. $\angle(AB', B'C) = \angle(AA_1, CC_1) = \angle(AA_1, BC) + \angle(BC, AB) + \angle(AB, CC_1) = \angle(BC, AB)$. Но, как следует из решения задачи 5.10, $\angle(BC, AB) = \angle(AH, HC)$, поэтому точки A, B', H и C лежат на одной окружности, причём эта окружность симметрична описанной окружности треугольника ABC относительно прямой AC. Следовательно, обе эти окружности имеют радиус R, а значит, $B'H = 2R\sin B'AH = 2R\cos\alpha$. Аналогично $A'H = 2R\cos\alpha = C'H$. Решение задачи а) тем самым завершено, а для решения задачи б) остаётся заметить, что $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$, так как после поворота треугольника $A'B'C'$ на угол α его стороны будут параллельны сторонам треугольника ABC.

5.62. Пусть из вершины A окружности, вписанные в углы B и C, видны под углами α_b и α_c, а радиусы этих окружностей равны r_b и r_c. Тогда

$$b = r_c\left(\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\alpha_c}{2}\right) \qquad \text{и} \qquad c = r_b\left(\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\alpha_b}{2}\right).$$

Поэтому равенство $\alpha_b = \alpha_c$ эквивалентно равенству

$$\frac{b}{r_c} - \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \frac{c}{r_b} - \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}, \qquad \text{т. е.} \qquad \frac{b}{r_c} - \frac{a+b-c}{2r} = \frac{c}{r_b} - \frac{a-b+c}{2r}.$$

После несложных преобразований получаем равенство $\dfrac{b}{1/r_b - 1/r} = \dfrac{c}{1/r_c - 1/r}$. Ясно, что из этого равенства и из равенства $\dfrac{c}{1/r_c - 1/r} = \dfrac{a}{1/r_a - 1/r}$ следует равенство $\dfrac{a}{1/r_a - 1/r} = \dfrac{b}{1/r_b - 1/r}$.

5.63. Пусть $a_1 = BA_1$, $a_2 = A_1C$, $b_1 = CB_1$, $b_2 = B_1A$, $c_1 = AC_1$ и $c_2 = C_1B$. Произведения длин отрезков секущих, проходящих через одну точку, равны, поэтому $a_1(a_1 + x) = c_2(c_2 - z)$, т. е. $a_1x + c_2z = c_2^2 - a_1^2$. Аналогично получаем для x, y и z ещё два уравнения: $b_1y + a_2x = a_2^2 - b_1^2$ и $c_1z + b_2y = b_2^2 - c_1^2$. Домножим первое уравнение на b^{2n}, а второе и третье на c^{2n} и a^{2n} и сложим полученные уравнения. Так как, например, $c_2b^n - c_1a^n = 0$ по условию, то в правой части получим нуль. В левой части, например, коэффициент при x равен $a_1b^{2n} + a_2c^{2n} = (ac^nb^{2n} + ab^nc^{2n})/(b^n + c^n) = ab^nc^n$. Поэтому $ab^nc^nx + ba^nc^ny + ca^nb^nz = 0$. Поделив обе части равенства на $(abc)^n$, получим требуемое.

5.64. Пусть в исходном треугольнике $\angle A = 3\alpha$, $\angle B = 3\beta$ и $\angle C = 3\gamma$. Возьмём равносторонний треугольник $A_2B_2C_2$ и построим на его сторонах как на основаниях равнобедренные треугольники A_2B_2R, B_2C_2P и C_2A_2Q с углами при основаниях $60^\circ - \gamma$, $60^\circ - \alpha$, $60^\circ - \beta$ соответственно (рис. 5.4).

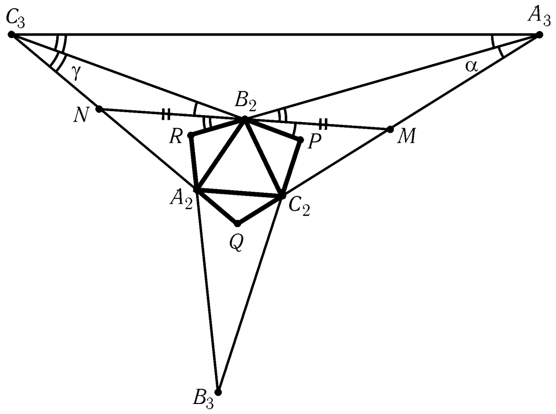


Рис. 5.4

Продолжим боковые стороны этих треугольников за точки A_2, B_2 и C_2 и обозначим точку пересечения продолжений сторон RB_2 и QC_2 через A_3,

PC_2 и RA_2 через B_3, QA_2 и PB_2 через C_3. Проведём через B_2 прямую, параллельную A_2C_2, и обозначим через M и N точки её пересечения с прямыми QA_3 и QC_3. Ясно, что B_2 — середина отрезка NM. Вычислим углы треугольников B_2C_3N и B_2A_3M: $\angle C_3B_2N = \angle PB_2M = \angle C_2B_2M - \angle C_2B_2P = \alpha$; $\angle B_2NC_3 = 180^\circ - \angle C_2A_2Q = 120^\circ + \beta$, значит, $\angle B_2C_3N = 180^\circ - \alpha - (120^\circ + \beta) = \gamma$. Аналогично $\angle A_3B_2M = \gamma$ и $\angle B_2A_3M = \alpha$. Следовательно, $\triangle B_2C_3N \sim \triangle A_3B_2M$. Значит, $C_3B_2 : B_2A_3 = C_3N : B_2M$, а так как $B_2M = B_2N$ и $\angle C_3B_2A_3 = \angle C_3NB_2$, то $C_3B_2 : B_2A_3 = C_3N : NB_2$ и $\triangle C_3B_2A_3 \sim \triangle C_3NB_2$, следовательно, $\angle B_2C_3A_3 = \gamma$. Аналогично $\angle A_2C_3B_3 = \gamma$, а значит, $\angle A_3C_3B_3 = 3\gamma = \angle C$ и C_3B_2, C_3A_2 — триссектрисы угла C_3 треугольника $A_3B_3C_3$. Аналогичные рассуждения для вершин A_3 и B_3 показывают, что $\triangle ABC \sim \triangle A_3B_3C_3$, а точки пересечения триссектрис треугольника $A_3B_3C_3$ образуют правильный треугольник $A_2B_2C_2$.

5.65. Точка A_1 лежит на биссектрисе угла BAC, поэтому точка A лежит на продолжении биссектрисы угла $B_2A_1C_2$. Кроме того, $\angle B_2AC_2 = \alpha = (180^\circ - \angle B_2A_1C_2)/2$. Поэтому A — центр вневписанной окружности треугольника $B_2A_1C_2$ (см. задачу 5.3). Пусть D — точка пересечения прямых AB и CB_2. Тогда $\angle AB_2C_2 = \angle AB_2D = 180^\circ - \angle B_2AD - \angle ADB_2 = 180^\circ - \gamma - (60^\circ + \alpha) = 60^\circ + \beta$. А так как $\angle AB_2C = 180^\circ - (\alpha + \beta) - (\beta + \gamma) = 120^\circ - \beta$, то $\angle CB_2C_2 = \angle AB_2C - \angle AB_2C_2 = 60^\circ - 2\beta$. Аналогично $\angle AB_2A_2 = 60^\circ - 2\beta$. Поэтому $\angle A_2B_2C_2 = \angle AB_2C - \angle AB_2A_2 - \angle CB_2C_2 = 3\beta$. Аналогично $\angle B_2A_2C_2 = 3\alpha$ и $\angle A_2C_2B_2 = 3\gamma$.

5.66. Длина общей касательной к данным окружностям равна $2\sqrt{u_au_b}$, поэтому

$$u_a \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + 2\sqrt{u_au_b} + u_b \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = c,$$

т. е. $a_1^2 + 2a_1b_1\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} + b_1^2 = c_1^2$. Согласно задаче 12.38 б)

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{r}{p}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{p}\cdot\frac{p-c}{r} < 1.$$

Поэтому существует угол γ_1, для которого

$$\cos\gamma_1 = -\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = -\sqrt{\frac{r}{p}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}.$$

Мы проверили, что треугольник со сторонами a_1, b_1, c_1 действительно существует; кроме того, угол между сторонами a_1 и b_1 равен γ_1. Поэтому диаметр описанной окружности рассматриваемого треугольника равен

$$\frac{c_1}{\sin\gamma_1} = \sqrt{\frac{c}{1 - \frac{r}{p}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}} = \sqrt{p},$$

поскольку $c = p - r\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$.

5.67. Пусть u_1 и u_2 — радиусы окружностей S_1 и S_2. Согласно задаче 5.66 радиус описанной окружности треугольника со сторонами $\tilde{u}_1 = \sqrt{u_1 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$, $\tilde{u}_2 = \sqrt{u_2 \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}$, $\tilde{c} = \sqrt{c}$ равен $\sqrt{p}/2$; кроме того, в этом треугольнике угол между сторонами $\tilde{u}_1$ и $\tilde{u}_2$ тупой. Пусть φ_1, φ_2 и γ' — острые углы, опирающиеся на хорды $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_2$ и $\tilde{c}$. Тогда $\varphi_1+\varphi_2=\gamma'$; при этом u_1 и u_2 однозначно восстанавливаются по φ_1 и φ_2. Аналогично получаем равенства

$$\varphi_1+\varphi_2=\gamma'=\varphi_4+\varphi_5, \tag{1}$$

$$\varphi_2+\varphi_3=\alpha'=\varphi_5+\varphi_6, \tag{2}$$

$$\varphi_3+\varphi_4=\beta'=\varphi_6+\varphi_7. \tag{3}$$

Сложим равенства (1) и (3) и вычтем из них равенство (2). В результате получим $\varphi_1=\varphi_7$. Из этого следует, что радиусы окружностей S_1 и S_7 равны.

5.68. Пусть r_i — радиус окружности S_i, h_i — высота треугольника ABC, опущенная из вершины A при $i=3k+1$, из вершины B при $i=3k+2$, из вершины C при $i=3k$. Формулу из задачи 5.9 а) можно записать в виде

$$\left(\frac{r}{r_i}-1\right)\left(\frac{r}{r_{i+1}}-1\right)=1-\frac{2r}{h_{i+2}}. \tag{i}$$

Перемножим равенства (i) и ($i+2$), а затем поделим их произведение на ($i+1$). В результате получим

$$\left(\frac{r}{r_i}-1\right)\left(\frac{r}{r_{i+3}}-1\right)=\left(1-\frac{2r}{h_{i+1}}\right)\left(1-\frac{2r}{h_{i+2}}\right)\Big/\left(1-\frac{2r}{h_i}\right).$$

Правая часть полученного выражения не изменяется при замене i на $i+3$. Поэтому

$$\left(\frac{r}{r_i}-1\right)\left(\frac{r}{r_{i+3}}-1\right)=\left(\frac{r}{r_{i+3}}-1\right)\left(\frac{r}{r_{i+6}}-1\right).$$

Предполагается, что все треугольники невырожденные. В таком случае можно сократить обе части на $\dfrac{r}{r_{i+3}}-1\neq 0$, поэтому $r_i=r_{i+6}$.

5.69. Пусть при проекции на прямую, перпендикулярную прямой A_1B_1, точки A, B и C переходят в A', B' и C', точка C_1 — в Q, а две точки A_1 и B_1 — в одну точку P. Так как $\overline{A_1B}:\overline{A_1C}=\overline{PB'}:\overline{PC'}$, $\overline{B_1C}:\overline{B_1A}=\overline{PC'}:\overline{PA'}$ и $\overline{C_1A}:\overline{C_1B}=\overline{QA'}:\overline{QB'}$, то $\dfrac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}\cdot\dfrac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}\cdot\dfrac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}}=\dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PC'}}\cdot\dfrac{\overline{PC'}}{\overline{PA'}}\cdot\dfrac{\overline{QA'}}{\overline{QB'}}=\dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PA'}}\cdot\dfrac{\overline{QA'}}{\overline{QB'}}=$ $=\dfrac{b'}{a'}\cdot\dfrac{a'+x}{b'+x}$, где $|x|=PQ$. Равенство $\dfrac{b'}{a'}\cdot\dfrac{a'+x}{b'+x}=1$ эквивалентно тому, что $x=0$ (нужно учесть, что $a'\neq b'$, так как $A'\neq B'$). А равенство $x=0$ означает, что $P=Q$, т. е. точка C_1 лежит на прямой A_1B_1.

5.70. Согласно задаче 1.17 а)

$$\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}\cdot\frac{AC_1}{BC_1}=\frac{BA}{CA}\cdot\frac{CB}{AB}\cdot\frac{AC}{BC}=1.$$

Остаётся заметить, что в задаче а) все три точки лежат на продолжениях сторон треугольника, а в задаче б) на продолжениях сторон лежит одна точка.

5.71. Из свойства угла между касательной и хордой следует, что $\angle A_1AB=$ $=\angle A_1CA$, поэтому $\triangle A_1AB\sim\triangle A_1CA$. Следовательно, $BA_1/CA_1=AB/CA$. Таким образом,

$$\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}\cdot\frac{AC_1}{BC_1}=\frac{BA}{CA}\cdot\frac{CB}{AB}\cdot\frac{AC}{BC}=1.$$

5.72. Пусть точка P лежит на дуге BC описанной окружности треугольника ABC, A_1, B_1 и C_1 — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые BC, CA и AB. Тогда $\frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}} = -\frac{BP\cos PBC}{CP\cos PCB}$, $\frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}} = -\frac{CP\cos PCA}{AP\cos PAC}$ и $\frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}} = -\frac{AP\cos PAB}{PB\cos PBA}$. Перемножая эти равенства и учитывая, что $\angle PAC = \angle PBC$, $\angle PAB = \angle PCB$ и $\angle PCA + \angle PBA = 180^\circ$, получаем $\frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}} = 1$.

5.73. Пусть O, O_1 и O_2 — центры окружностей S, S_1 и S_2; X — точка пересечения прямых O_1O_2 и A_1A_2. Применяя теорему Менелая к треугольнику OO_1O_2 и точкам A_1, A_2 и X, получаем $\frac{O_1X}{O_2X} \cdot \frac{O_2A_2}{OA_2} \cdot \frac{OA_1}{O_1A_1} = 1$, а значит, $O_1X : O_2X = R_1 : R_2$, где R_1 и R_2 — радиусы окружностей S_1 и S_2. Следовательно, X — точка пересечения общих внешних или общих внутренних касательных к окружностям S_1 и S_2.

5.74. а) Пусть для определённости $\angle B < \angle C$. Тогда $\angle DAE = \angle ADE = \angle B + \angle A/2$, а значит, $\angle CAE = \angle B$. Так как

$$\frac{BE}{AB} = \frac{\sin BAE}{\sin AEB} \quad \text{и} \quad \frac{AC}{CE} = \frac{\sin AEC}{\sin CAE},$$

то

$$\frac{BE}{CE} = \frac{c\sin BAE}{b\sin CAE} = \frac{c\sin(A+B)}{b\sin B} = \frac{c\sin C}{b\sin B} = \frac{c^2}{b^2}.$$

б) В задаче а) точка E лежит на продолжении стороны BC, так как $\angle ADC = \angle BAD + \angle B > \angle CAD$. Поэтому, используя результат задачи а) и теорему Менелая, получаем требуемое.

5.75. Так как $\angle BCE = 90^\circ - \angle B/2$, то $\angle BCE = \angle BEC$, а значит, $BE = BC$. Поэтому $CF : KF = BE : BK = BC : BK$ и $AE : KE = CA : CK = BC : BK$. Пусть прямая EF пересекает AC в точке D. По теореме Менелая $\frac{AD}{CD} \cdot \frac{CF}{KF} \cdot \frac{KE}{AE} = 1$. Учитывая, что $CF : KF = AE : KE$, получаем требуемое.

5.76. Доказательство аналогично решению задачи 5.95; нужно только рассмотреть отношение ориентированных отрезков и углов.

5.77. Применим теорему Менелая к треугольникам AC_1B_1, C_1A_1B, A_1CB_1 и CAB:

$$\frac{AB}{BC_1} \cdot \frac{C_1A_1}{A_1B_1} \cdot \frac{B_1C}{CA} = 1, \qquad \frac{C_1B_1}{B_1A_1} \cdot \frac{A_1C}{CB} \cdot \frac{BA}{AC_1} = 1,$$
$$\frac{A_1B}{BC} \cdot \frac{CA}{AB_1} \cdot \frac{B_1C_1}{C_1A_1} = 1, \qquad \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} = 1.$$

Перемножив эти равенства, получим

$$\left(\frac{AB}{BC_1} \cdot \frac{C_1A_1}{B_1A_1} \cdot \frac{A_1B}{BC} \cdot \frac{CB_1}{B_1A}\right)^2 = 1.$$

5.78. Пусть A_2, B_2, C_2 — точки пересечения прямых BC и B_1C_1, AC и A_1C_1, AB и A_1B_1. Применим теорему Менелая к следующим треугольникам и точкам на их сторонах: OAB и (A_1, B_1, C_2), OBC и (B_1, C_1, A_2), OAC и (A_1, C_1, B_2). Тогда

$$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{OA_1}} \cdot \frac{\overline{OB_1}}{\overline{BB_1}} \cdot \frac{\overline{BC_2}}{\overline{AC_2}} = 1, \qquad \frac{\overline{OC_1}}{\overline{CC_1}} \cdot \frac{\overline{BB_1}}{\overline{OB_1}} \cdot \frac{\overline{CA_2}}{\overline{BA_2}} = 1, \qquad \frac{\overline{OA_1}}{\overline{AA_1}} \cdot \frac{\overline{CC_1}}{\overline{OC_1}} \cdot \frac{\overline{AB_2}}{\overline{CB_2}} = 1.$$

Перемножая эти равенства, получаем
$$\frac{\overline{BC_2}}{\overline{AC_2}} \cdot \frac{\overline{AB_2}}{\overline{CB_2}} \cdot \frac{\overline{CA_2}}{\overline{BA_2}} = 1.$$
Из теоремы Менелая следует, что точки A_2, B_2, C_2 лежат на одной прямой.

5.79. Рассмотрим треугольник $A_0B_0C_0$, образованный прямыми A_1B_2, B_1C_2 и C_1A_2 (A_0 — точка пересечения прямых A_1B_2 и A_2C_1 и т. д.), и применим для него теорему Менелая к следующим пяти тройкам точек: (A, B_2, C_1), (B, C_2, A_1), (C, A_2, B_1), (A_1, B_1, C_1) и (A_2, B_2, C_2). В результате получим
$$\frac{\overline{B_0A}}{\overline{C_0A}} \cdot \frac{\overline{A_0B_2}}{\overline{B_0B_2}} \cdot \frac{\overline{C_0C_1}}{\overline{A_0C_1}} = 1, \qquad \frac{\overline{C_0B}}{\overline{A_0B}} \cdot \frac{\overline{B_0C_2}}{\overline{C_0C_2}} \cdot \frac{\overline{A_0A_1}}{\overline{B_0A_1}} = 1,$$
$$\frac{\overline{A_0C}}{\overline{B_0C}} \cdot \frac{\overline{C_0A_2}}{\overline{A_0A_2}} \cdot \frac{\overline{B_0B_1}}{\overline{C_0B_1}} = 1, \qquad \frac{\overline{B_0A_1}}{\overline{A_0A_1}} \cdot \frac{\overline{C_0B_1}}{\overline{B_0B_1}} \cdot \frac{\overline{A_0C_1}}{\overline{C_0C_1}} = 1,$$
$$\frac{\overline{A_0A_2}}{\overline{C_0A_2}} \cdot \frac{\overline{B_0B_2}}{\overline{A_0B_2}} \cdot \frac{\overline{C_0C_2}}{\overline{B_0C_2}} = 1.$$
Перемножая эти равенства, получаем $\frac{\overline{B_0A}}{\overline{C_0A}} \cdot \frac{\overline{C_0B}}{\overline{A_0B}} \cdot \frac{\overline{A_0C}}{\overline{B_0C}} = 1$, а значит, точки A, B и C лежат на одной прямой.

5.80. Пусть N — точка пересечения прямых AD и KQ, P' — точка пересечения прямых KL и MN. Применяя теорему Дезарга к треугольникам KBL и NDM, получаем, что точки P', A и C лежат на одной прямой. Значит, $P' = P$.

5.81. Достаточно применить теорему Дезарга к треугольникам AED и BFC и теорему Паппа к тройкам точек (B, E, C) и (A, F, D).

5.82. а) Пусть R — точка пересечения прямых KL и MN. Применяя теорему Паппа к тройкам точек (P, L, N) и (Q, M, K), получаем, что точки A, C и R лежат на одной прямой.

б) Применяя теорему Дезарга к треугольникам NDM и LBK, получаем, что точки пересечения прямых ND и LB, DM и BK, NM и LK лежат на одной прямой.

5.83. Воспользуемся результатом задачи 5.82 а). В качестве точек P и Q возьмём точки P_2 и P_4, в качестве A и C — точки C_1 и P_1, в качестве K, L, M и N — точки P_5, A_1, B_1 и P_3. В итоге получим, что прямая P_6C_1 проходит через точку P_1.

5.84. Согласно теореме Дезарга точки пересечения прямых AC и DF, CE и FB, EA и BD лежат на одной прямой. Это означает, что точки пересечения прямых $A'B'$ и $D'E'$, $C'D'$ и $F'A'$, $E'F'$ и $B'C'$ лежат на одной прямой.

5.85. а) Эта задача является переформулировкой задачи 5.69, так как число $\overline{BA_1} : \overline{CA_1}$ имеет знак минус, если точка A_1 лежит на отрезке BC, и знак плюс, если она лежит вне отрезка BC.

б) Предположим сначала, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке M. Любые три вектора на плоскости линейно зависимы, т. е. существуют такие числа λ, μ и ν (не все равные нулю), что $\lambda\overrightarrow{AM} + \mu\overrightarrow{BM} + \nu\overrightarrow{CM} = 0$. Рассмотрим проекцию на прямую BC параллельно прямой AM. При этой проекции точки A и M переходят в A_1, а точки B и C переходят сами в себя. Поэтому $\mu\overline{BA_1} + \nu\overline{CA_1} = 0$, т. е. $\overline{BA_1} : \overline{CA_1} = -\nu : \mu$. Аналогично $\overline{CB_1} : \overline{AB_1} = -\lambda : \nu$

и $\overline{AC_1} : \overline{BC_1} = -\mu : \lambda$. Перемножая эти равенства, получаем требуемое. В случае, когда прямые AA_1, BB_1 и CC_1 параллельны, для доказательства достаточно заметить, что $\overline{BA_1} : \overline{CA_1} = \overline{BA} : \overline{C_1A}$ и $\overline{CB_1} : \overline{AB_1} = \overline{C_1B} : \overline{AB}$.

Предположим теперь, что выполняется указанное соотношение, и докажем, что тогда прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Пусть C_1^* — точка пересечения прямой AB с прямой, проходящей через точку C и точку пересечения прямых AA_1 и BB_1. Для точки C_1^* выполняется такое же соотношение, как и для точки C_1. Поэтому $\overline{C_1^*A} : \overline{C_1^*B} = \overline{C_1A} : \overline{C_1B}$. Следовательно, $C_1^* = C_1$, т. е. прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Можно проверить также, что если выполняется указанное соотношение и две из прямых AA_1, BB_1 и CC_1 параллельны, то третья прямая им параллельна.

5.86. Ясно, что $AB_1 = AC_1$, $BA_1 = BC_1$ и $CA_1 = CB_1$, причём в случае вписанной окружности на сторонах треугольника ABC лежат три точки, а в случае вневписанной — одна точка. Остаётся воспользоваться теоремой Чевы.

5.87. Пусть вневписанные окружности касаются сторон BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1. Тогда

$$\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{p-c}{p-b} \cdot \frac{p-a}{p-c} \cdot \frac{p-b}{p-a} = 1.$$

5.88. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC. Тогда

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{b\cos A}{a\cos B} \cdot \frac{c\cos B}{b\cos C} \cdot \frac{a\cos C}{c\cos A} = 1.$$

5.89. Пусть A_2, B_2 и C_2 — середины сторон BC, CA и AB. Рассматриваемые прямые проходят через вершины треугольника $A_2B_2C_2$, причём в задаче а) они делят его стороны в таких же отношениях, в каких прямые AP, BP и CP делят стороны треугольника ABC, а в задаче б) они делят их в обратных отношениях. Остаётся воспользоваться теоремой Чевы.

5.90. Так как $\triangle AC_1B_2 \sim \triangle BC_1A_1$ и $\triangle AB_1C_2 \sim \triangle CB_1A_1$, то $AB_2 \cdot C_1B = AC_1 \cdot BA_1$ и $AC_2 \cdot CB_1 = A_1C \cdot B_1A$. Поэтому

$$\frac{AB_2}{AC_2} = \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

5.91. Пусть прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекают прямые BC, CA и AB в точках A_2, B_2 и C_2.

а) Если $\angle B + \beta < 180^\circ$ и $\angle C + \gamma < 180^\circ$, то $\dfrac{BA_2}{A_2C} = \dfrac{S_{ABA_1}}{S_{ACA_1}} = \dfrac{AB \cdot BA_1 \sin(B+\beta)}{AC \cdot CA_1 \sin(C+\gamma)} = \dfrac{AB}{AC} \cdot \dfrac{\sin\gamma}{\sin\beta} \cdot \dfrac{\sin(B+\beta)}{\sin(C+\gamma)}$. Последнее выражение равно $\overline{BA_2} : \overline{A_2C}$ во всех случаях. Запишем аналогичные выражения для $\overline{CB_2} : \overline{B_2A}$ и $\overline{AC_2} : \overline{C_2B}$ и перемножим их. Остаётся воспользоваться теоремой Чевы.

б) Точка A_2 лежит вне отрезка BC, только если ровно один из углов β и γ больше соответствующего ему угла B или C. Поэтому

$$\frac{\overline{BA_2}}{\overline{A_2C}} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} \cdot \frac{\sin(B-\beta)}{\sin(C-\gamma)}.$$

5.92. Легко проверить, что эта задача является частным случаем задачи 5.91.

З а м е ч а н и е. Аналогичное утверждение верно и для вневписанной окружности.

5.93. Решение задачи очевидным образом следует из теоремы Чевы.

5.94. Применяя теорему синусов к треугольникам ACC_1 и BCC_1, получаем $\frac{AC_1}{C_1C} = \frac{\sin ACC_1}{\sin A}$ и $\frac{CC_1}{C_1B} = \frac{\sin B}{\sin C_1CB}$, т. е. $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{\sin ACC_1}{\sin C_1CB} \cdot \frac{\sin B}{\sin A}$. Аналогично $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{\sin BAA_1}{\sin A_1AC} \cdot \frac{\sin C}{\sin B}$ и $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{\sin CBB_1}{\sin B_1BA} \cdot \frac{\sin A}{\sin C}$. Для завершения доказательства остаётся перемножить эти равенства.

З а м е ч а н и е. Аналогичное утверждение справедливо и для отношений ориентированных отрезков и углов в том случае, когда точки взяты на продолжениях сторон.

5.95. Можно считать, что точки A_2, B_2 и C_2 лежат на сторонах треугольника ABC. Согласно задаче 5.94

$$\frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{BA_2}{A_2C} \cdot \frac{CB_2}{B_2A} = \frac{\sin ACC_2}{\sin C_2CB} \cdot \frac{\sin BAA_2}{\sin A_2AC} \cdot \frac{\sin CBB_2}{\sin B_2BA}.$$

Так как прямые AA_2, BB_2 и CC_2 симметричны прямым AA_1, BB_1 и CC_1 относительно биссектрис, то $\angle ACC_2 = \angle C_1CB$, $\angle C_2CB = \angle ACC_1$ и т. д., поэтому

$$\frac{\sin ACC_2}{\sin C_2CB} \cdot \frac{\sin BAA_2}{\sin A_2AC} \cdot \frac{\sin CBB_2}{\sin B_2BA} = \frac{\sin C_1CB}{\sin ACC_1} \cdot \frac{\sin A_1AC}{\sin BAA_1} \cdot \frac{\sin B_1BA}{\sin CBB_1} = \frac{C_1B}{AC_1} \cdot \frac{A_1C}{BA_1} \cdot \frac{B_1A}{CB_1} = 1.$$

Следовательно, $\frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{BA_2}{A_2C} \cdot \frac{CB_2}{B_2A} = 1$, т. е. прямые AA_2, BB_2 и CC_2 пересекаются в одной точке.

З а м е ч а н и е. Утверждение остаётся верным и в том случае, когда точки A_1, B_1 и C_1 взяты на продолжениях сторон, если только точка P не лежит на описанной окружности S треугольника ABC; если же P лежит на окружности S, то прямые AA_2, BB_2 и CC_2 параллельны (см. задачу 2.95).

5.96. Пусть точки P и Q изогонально сопряжены относительно треугольника ABC. Тогда $\angle(AB, BP) = \angle(QB, BC)$ и $\angle(CP, BC) = \angle(AC, QC)$. Ясно также, что

$$\angle(CP, BP) = \angle(CP, BC) + \angle(BC, AB) + \angle(AB, BP),$$
$$\angle(QB, QC) = \angle(QB, BC) + \angle(BC, AC) + \angle(AC, QC).$$

Поэтому $\angle(CP, BP) = \angle(QB, QC) + \angle(AC, AB)$. Таким образом, если угол $\angle(CP, BP)$ постоянен, то угол $\angle(QB, QC)$ тоже постоянен.

5.97. Докажем, что прямые BP и BQ симметричны относительно биссектрисы угла B, т. е. $\angle PBC = \angle A'BQ$, где A' — точка, лежащая на продолжении стороны AB за точку B. По свойству угла между касательной и хордой $\angle PBC = \angle BAC$. Прямые AC и BQ параллельны, поэтому $\angle BAC = \angle A'BQ$. Аналогично доказывается, что прямые CP и CQ симметричны относительно биссектрисы угла C.

5.98. Пусть диагонали AD и BE данного шестиугольника $ABCDEF$ пересекаются в точке P; K и L — середины сторон AB и ED. Так как $ABDE$ — трапеция, отрезок KL проходит через точку P (задача 19.2). По теореме синусов $\sin APK : \sin AKP = AK : AP$ и $\sin BPK : \sin BKP = BK : BP$. Так как $\sin AKP = \sin BKP$ и $AK = BK$, то $\sin APK : \sin BPK = BP : AP = BE : AD$. Аналогичные соотношения можно записать и для отрезков, соединяющих середины двух других пар противоположных сторон. Перемножая эти соотношения и применяя результат задачи 5.94 к треугольнику, образованному прямыми AD, BE и CF, получаем требуемое.

5.99. Рассмотрим гомотетию с центром P и коэффициентом 2. Так как $PA_1A_3A_2$ — прямоугольник, то при этой гомотетии прямая A_1A_2 переходит в прямую l_a, проходящую через точку A_3, причём прямые l_a и A_3P симметричны относительно прямой A_3A. Прямая A_3A делит пополам угол $B_3A_3C_3$ (задача 1.57 а). Аналогично доказывается, что прямые l_b и l_c симметричны прямым B_3P и C_3P относительно биссектрис треугольника $A_3B_3C_3$. Следовательно, прямые l_a, l_b и l_c пересекаются в одной точке или параллельны (задача 5.95), а значит, в одной точке пересекаются и прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2.

5.100. Согласно задачам 5.94 и 5.85 б)

$$\frac{\sin ASP}{\sin PSD}\cdot\frac{\sin DAP}{\sin PAS}\cdot\frac{\sin SDP}{\sin PDA}=1=\frac{\sin ASQ}{\sin QSD}\cdot\frac{\sin DAQ}{\sin QAS}\cdot\frac{\sin SDQ}{\sin QDA}.$$

Но $\angle DAP=\angle SDQ$, $\angle SDP=\angle DAQ$, $\angle PAS=\angle QDA$ и $\angle PDA=\angle QAS$. Поэтому $\sin ASP:\sin PSD=\sin ASQ:\sin QSD$. Из этого следует, что точки S, P и Q лежат на одной прямой, так как функция $\dfrac{\sin(\alpha-x)}{\sin x}$ монотонна по x:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin(\alpha-x)}{\sin x}\right)=-\frac{\sin\alpha}{\sin^2 x}.$$

5.101. Второе равенство из задачи 2.61 а) означает, что

$$\left(\frac{\sin A_2A_1C_1}{\sin A_2A_1B_1}\right)^2=\frac{\sin A_2AC_1}{\sin A_2AB_1}.$$

Поэтому

$$\left(\frac{\sin A_2A_1C_1}{\sin A_2A_1B_1}\cdot\frac{\sin B_2B_1A_1}{\sin B_2B_1C_1}\cdot\frac{\sin C_2C_1B_1}{\sin C_2C_1A_1}\right)^2=1.$$

5.102. Согласно задаче 3.43 а) отрезок A_1A_2 является биссектрисой треугольника A_1BC. Поэтому

$$\frac{BA_2}{CA_2}=\frac{BA_1}{CA_1}=\frac{\sin BAA_1}{\sin CAA_1}.$$

Из того, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, следует, что

$$\frac{\sin BAA_1}{\sin CAA_1}\cdot\frac{\sin CBB_1}{\sin ABB_1}\cdot\frac{\sin ACC_1}{\sin BCC_1}=1.$$

Поэтому

$$\frac{BA_2}{CA_2}\cdot\frac{CB_2}{AB_2}\cdot\frac{AC_2}{BC_2}=1,$$

а значит, прямые AA_2, BB_2 и CC_2 пересекаются в одной точке.

5.103. а) По теореме Чевы $\dfrac{AC_1}{C_1B}=\dfrac{CA_1}{A_1B}\cdot\dfrac{AB_1}{B_1C}$, а по теореме синусов

$$CA_1=\frac{CA\sin CAA_1}{\sin AA_1B},\qquad A_1B=\frac{AB\sin BAA_1}{\sin AA_1B},$$
$$AB_1=\frac{AB\sin ABB_1}{\sin AB_1B},\qquad B_1C=\frac{BC\sin CBB_1}{\sin AB_1B}.$$

Подставляя эти четыре равенства в предыдущее равенство и учитывая, что $AC = BC$, получаем требуемое.

б) Обозначим точки пересечения прямых CM и CN с основанием AB через M_1 и N_1. Нужно доказать, что $M_1 = N_1$. Из а) следует, что $AM_1 : M_1B = AN_1 : N_1B$, т. е. $M_1 = N_1$.

5.104. Пусть отрезки BM и BN пересекают сторону AC в точках P и Q. Тогда

$$\frac{\sin PBB_1}{\sin PBA} = \frac{\sin PBB_1}{\sin BPB_1} \cdot \frac{\sin APB}{\sin PBA} = \frac{PB_1}{BB_1} \cdot \frac{AB}{PA}.$$

Если O — точка пересечения биссектрис треугольника ABC, то $\frac{AP}{PB_1} \cdot \frac{B_1O}{OB} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$, а значит, $\frac{\sin PBB_1}{\sin PBA} = \frac{AB}{BB_1} \cdot \frac{B_1O}{OB} \cdot \frac{BC_1}{C_1A}$. Заметив, что $BC_1 : C_1A = BC : CA$, и проведя аналогичные вычисления для отношения $\sin QBB_1 : \sin QBC$, получим $\sin PBB_1 : \sin PBA = \sin QBB_1 : \sin QBC$. А так как $\angle ABB_1 = \angle CBB_1$, то $\angle PBB_1 = \angle QBB_1$ (см. решение задачи 5.100).

5.105. а) Пусть точка P лежит на дуге AC описанной окружности треугольника ABC; A_1, B_1 и C_1 — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые BC, CA и AB. Сумма углов при вершинах A_1 и C_1 четырёхугольника A_1BC_1P равна 180°, поэтому $\angle A_1PC_1 = 180^\circ - \angle B = \angle APC$. Следовательно, $\angle APC_1 = \angle A_1PC$, причём одна из точек A_1 и C_1 (например, A_1) лежит на стороне треугольника, а другая — на продолжении стороны. Четырёхугольники AB_1PC_1 и A_1B_1PC вписанные, поэтому $\angle AB_1C_1 = \angle APC_1 = \angle A_1PC = \angle A_1B_1C$, а значит, точка B_1 лежит на отрезке A_1C_1.

б) Как и в задаче а), получаем $\angle(AP, PC_1) = \angle(AB_1, B_1C) = \angle(CB_1, B_1A_1) = \angle(CP, PA_1)$. Прибавляя $\angle(PC_1, PC)$, получаем $\angle(AP, PC) = \angle(PC_1, PA_1) = \angle(BC_1, BA_1) = \angle(AB, BC)$, т. е. точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC.

5.106. Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины отрезков PA, PB и PC; O_a, O_b и O_c — центры описанных окружностей треугольников BCP, ACP и ABP. Точки A_1, B_1 и C_1 являются основаниями перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны треугольника $O_aO_bO_c$ (или их продолжения). Точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой, поэтому точка P лежит на описанной окружности треугольника $O_aO_bO_c$ (см. задачу 5.105 б).

5.107. Пусть продолжение биссектрисы AD пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке P. Опустим из точки P перпендикуляры PA_1, PB_1 и PC_1 на прямые BC, CA и AB; ясно, что A_1 — середина отрезка BC. При гомотетии с центром A, переводящей P в D, точки B_1 и C_1 переходят в B' и C', а значит, точка A_1 переходит в M, так как она лежит на прямой B_1C_1 и $PA_1 \parallel DM$.

5.108. а) Решение задачи 5.105 проходит без изменений и в этом случае.

б) Пусть A_1 и B_1 — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые BC и CA, а точки A_2 и B_2 прямых BC и AC таковы, что $\angle(PA_2, BC) = \alpha = \angle(PB_2, AC)$. Тогда $\triangle PA_1A_2 \sim \triangle PB_1B_2$, поэтому точки A_1 и B_1 переходят в A_2 и B_2 при поворотной гомотетии с центром P, причём $\angle A_1PA_2 = 90^\circ - \alpha$ — угол поворота.

5.109. а) Пусть угол между прямыми PC и AC равен φ. Тогда $PA = 2R\sin\varphi$. Так как точки A_1 и B_1 лежат на окружности с диаметром PC, угол между прямыми PA_1 и A_1B_1 тоже равен φ. Поэтому $PA_1 = d/\sin\varphi$, а значит, $PA \cdot PA_1 = 2Rd$.

б) Так как $PA_1 \perp BC$, то $\cos\alpha = \sin\varphi = d/PA_1$. Остаётся заметить, что $PA_1 = 2Rd/PA$.

5.110. Точки A_1 и B_1 лежат на окружности с диаметром PC, поэтому $A_1B_1 = PC\sin A_1CB_1 = PC\sin C$. Пусть угол между прямыми AB и A_1B_1 равен γ и C_1 — проекция точки P на прямую A_1B_1. Прямые A_1B_1 и B_1C_1 совпадают, поэтому $\cos\gamma = PC/2R$ (см. задачу 5.109). Следовательно, длина проекции отрезка AB на прямую A_1B_1 равна $AB\cos\gamma = (2R\sin C)PC/2R = PC\sin C$.

5.111. Пусть A_1 и B_1 — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые BC и AC. Точки A_1 и B_1 лежат на окружности с диаметром PC. Так как $\sin A_1CB_1 = \sin ACB$, хорды A_1B_1 этой окружности имеют фиксированную длину. Следовательно, прямые A_1B_1 касаются фиксированной окружности.

5.112. Пусть A_1 и B_1 — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые BC и CA. Тогда $\angle(A_1B_1, PB_1) = \angle(A_1C, PC) = \smile BP/2$. Ясно также, что для всех точек P прямые PB_1 имеют одно и то же направление.

5.113. Пусть P_1 и P_2 — диаметрально противоположные точки описанной окружности треугольника ABC; A_i и B_i — основания перпендикуляров, опущенных из точки P_i на прямые BC и AC; M и N — середины сторон AC и BC; X — точка пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2. Согласно задаче 5.112 $A_1B_1 \perp A_2B_2$. Остаётся проверить, что $\angle(MX, XN) = \angle(BC, AC)$. Так как $AB_2 = B_1C$, то XM — медиана прямоугольного треугольника B_1XB_2. Поэтому $\angle(XM, XB_2) = \angle(XB_2, B_2M)$. Аналогично $\angle(XA_1, XN) = \angle(A_1N, XA_1)$. Следовательно, $\angle(MX, XN) = \angle(XM, XB_2) + \angle(XB_2, XA_1) + \angle(XA_1, XN) = \angle(XB_2, B_2M) + \angle(A_1N, XA_1) + 90^\circ$. А так как $\angle(XB_2, B_2M) + \angle(AC, CB) + \angle(NA_1, A_1X) + 90^\circ = 0^\circ$, то $\angle(MN, XN) + \angle(AC, CB) = 0^\circ$.

5.114. Если точка R данной окружности такова, что $\angle(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OR}) = (\beta+\gamma)/2$, то $OR \perp BC$. Остаётся проверить, что $\angle(OR, OQ) = \angle(PA_1, A_1B_1)$. Но $\angle(OR, OQ) = \alpha/2$, а $\angle(PA_1, A_1B_1) = \angle(PB, BC_1) = \angle(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OA})/2 = \alpha/2$.

5.115. Не теряя общности, можно считать, что описанные окружности треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают. Определим углы α, β и γ, как в условии задачи 5.114. Покажем, что точки с угловыми координатами $(\alpha+\beta+\gamma)/2$, $(-\alpha+\beta+\gamma)/2$, $(\alpha-\beta+\gamma)/2$ и $(\alpha+\beta-\gamma)/2$ можно взять в качестве точек P_1, A_1, B_1 и C_1. Действительно, биссектриса угла A_1OB_1 задаётся угловой координатой $\gamma/2$, т. е. $A_1B_1 \parallel PC$; биссектриса угла P_1OA_1 задаётся угловой координатой $(\beta+\gamma)/2$, т. е. $P_1A_1 \parallel BC$.

5.116. Пусть прямые AC и PQ пересекаются в точке M. Проведём в треугольнике MPC высоты PB_1 и CA_1. Тогда A_1B_1 — прямая Симсона точки P относительно треугольника ABC. Кроме того, согласно задаче 1.53 $\angle(MB_1, B_1A_1) = \angle(CP, PM)$. Ясно также, что $\angle(CP, PM) = \angle(CA, AQ) = \angle(MB_1, AQ)$. Следовательно, $A_1B_1 \parallel AQ$.

5.117. Проведём хорду PQ, перпендикулярную BC. Пусть точки H' и P' симметричны точкам H и P относительно прямой BC; точка H' лежит на описанной окружности треугольника ABC (задача 5.10). Докажем сначала, что $AQ \parallel P'H$. В самом деле, $\angle(AH', AQ) = \angle(PH', PQ) = \angle(AH', P'H)$. Прямая Симсона точки P параллельна AQ (задача 5.116), т. е. она проходит через середину стороны PP' треугольника $PP'H$ и параллельна стороне $P'H$, а значит, она проходит через середину стороны PH.

5.118. Пусть H_a, H_b, H_c и H_d — ортоцентры треугольников BCD, CDA, DAB и ABC. Прямые l_a, l_b, l_c и l_d проходят через середины отрезков AH_a, BH_b, CH_c и DH_d (см. задачу 5.117). Середины этих отрезков совпадают с такой точкой H, что $2\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$, где O — центр окружности (см. задачу 13.35).

5.119. а) Пусть B_1, C_1 и D_1 — проекции точки P на прямые AB, AC и AD. Точки B_1, C_1 и D_1 лежат на окружности с диаметром AP. Прямые B_1C_1, C_1D_1 и D_1B_1 являются прямыми Симсона точки P относительно треугольников ABC, ACD и ADB соответственно. Поэтому проекции точки P на прямые Симсона этих треугольников лежат на одной прямой — прямой Симсона треугольника $B_1C_1D_1$. Аналогично доказывается, что на одной прямой лежит любая тройка рассматриваемых точек.

б) Пусть P — точка описанной окружности n-угольника $A_1\dots A_n$; B_2, B_3, ..., B_n — проекции точки P на прямые A_1A_2, ..., A_1A_n. Точки B_2, ..., B_n лежат на окружности с диаметром A_1P. Докажем по индукции, что прямая Симсона точки P относительно n-угольника $A_1\dots A_n$ совпадает с прямой Симсона точки P относительно $(n-1)$-угольника $B_2\dots B_n$ (для $n = 4$ это было доказано в задаче а). По предложению индукции прямая Симсона $(n-1)$-угольника $A_1A_3\dots A_n$ совпадает с прямой Симсона $(n-2)$-угольника $B_3\dots B_n$. Поэтому проекции точки P на прямые Симсона $(n-1)$-угольников, вершины которых получаются последовательным исключением точек A_2, ..., A_n из набора A_1, ..., A_n, лежат на прямой Симсона $(n-1)$-угольника $B_2\dots B_n$. А проекция точки P на прямую Симсона $(n-1)$-угольника $A_2\dots A_n$ лежит на той же прямой потому, что наши рассуждения показывают, что любые $n-1$ из рассматриваемых n точек проекций лежат на одной прямой.

5.120. Точки B_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром AP. Поэтому $B_1C_1 = AP\sin B_1AC_1 = AP(BC/2R)$.

5.121. Эта задача является частным случаем задачи 2.46.

5.122. Ясно, что $\angle C_1AP = \angle C_1B_1P = \angle A_2B_1P = \angle A_2C_2P = \angle B_3C_2P = \angle B_3A_3P$ (первое, третье и пятое равенства получаются из вписанности соответствующих четырёхугольников; остальные равенства очевидны). Аналогично $\angle B_1AP = \angle C_3A_3P$. Поэтому $\angle B_3A_3C_3 = \angle B_3A_3P + \angle C_3A_3P = \angle C_1AP + \angle B_1AP = \angle BAC$. Аналогично получаются равенства остальных углов треугольников ABC и $A_3B_3C_3$.

5.123. Пусть A_1, B_1 и C_1 — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые BC, CA и AB; A_2, B_2 и C_2 — точки пересечения прямых PA, PB и PC с описанной окружностью треугольника ABC. Пусть далее S, S_1 и S_2 — площади треугольников ABC, $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Легко проверить, что $a_1 = a\cdot AP/2R$ (задача 5.120) и $a_2 = a\cdot B_2P/CP$. Треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны (задача 5.121), поэтому $S_1/S_2 = k^2$, где $k = a_1/a_2 = AP\cdot CP/(2R\cdot B_2P)$. А так как $B_2P\cdot BP = |d^2 - R^2|$, то $S_1/S_2 = (AP\cdot BP\cdot CP)^2/4R^2(d^2-R^2)^2$. Треугольники $A_2B_2C_2$ и ABC вписаны в одну окружность, поэтому $S_2/S = a_2b_2c_2/abc$ (см. задачу 12.1). Ясно также, что, например, $a_2/a = B_2P/CP = |d^2 - R^2|/(BP\cdot CP)$. Следовательно, $S_2 : S = |d^2-R^2|^3 : (AP\cdot BP\cdot CP)^2$. Поэтому $S_1/S = (S_1/S_2)(S_2/S) = |d^2 - R^2|/4R^2$.

5.124. Точки B_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром PA, поэтому середина отрезка PA является центром описанной окружности треугольника AB_1C_1. Следовательно, l_a — серединный перпендикуляр к отрезку B_1C_1. Поэтому прямые l_a, l_b и l_c проходят через центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$.

5.125. а) Опустим из точек P_1 и P_2 перпендикуляры P_1B_1 и P_2B_2 на AC и перпендикуляры P_1C_1 и P_2C_2 на AB. Докажем, что точки B_1, B_2, C_1 и C_2 лежат на одной окружности. В самом деле, $\angle P_1B_1C_1 = \angle P_1AC_1 = \angle P_2AB_2 = \angle P_2C_2B_2$, а так как $\angle P_1B_1A = \angle P_2C_2A$, то $\angle C_1B_1A = \angle B_2C_2A$. Центр окружности, на которой лежат указанные точки, является точкой пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам B_1B_2 и C_1C_2, а оба эти перпендикуляра проходят через середину O отрезка P_1P_2, т. е. O — центр этой окружности. В частности, точки B_1 и C_1 равноудалены от точки O. Аналогично точки A_1 и B_1 равноудалены от точки O, т. е. O — центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$. Кроме того, $OB_1 = OB_2$.

З а м е ч а н и е. Если точка P_1 лежит на описанной окружности треугольника, то её подерная окружность вырождается в прямую, а именно, прямую Симсона точки P_1. Точка P_2, изогонально сопряжённая этой точке, в этом случае является бесконечно удалённой. Направление этой бесконечно удалённой точки перпендикулярно прямой Симсона точки P_1. Действительно, если точка P_2' стремится к точке P_2, то подерная окружность точки P_2' близка к окружности с диаметром $P_2'X$, где X — произвольная точка треугольника ABC.

б) Предыдущее доказательство проходит почти без изменений и в этом случае.

в) Пусть B_1 и C_1 — проекции точки P_1 на стороны AC и AB. Отрезок AP_1 является диаметром описанной окружности треугольника AB_1C_1. Пусть O — центр этой окружности (т. е. середина отрезка AP_1), K — середина отрезка AB_1, H — точка пересечения прямых AP_2 и B_1C_1. Тогда $\angle KOA = \angle HC_1A$ и $\angle KAO = \angle HAC_1$. Поэтому $\angle AHC_1 = \angle AKO = 90^\circ$.

5.126. Пусть перпендикуляры, опущенные из точек A, B, C на прямые B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 пересекаются в точке P. Проведём через вершины треугольника ABC прямые, параллельные сторонам треугольника $A_1B_1C_1$. В результате получим треугольник $A'B'C'$. Пусть P' — точка, изогонально сопряжённая точке P относительно треугольника $A'B'C'$. Согласно задаче 5.125 в) прямые, соединяющие вершины треугольника $A'B'C'$ с точкой P', перпендикулярны сторонам треугольника ABC. Треугольник $A_1B_1C_1$ гомотетичен треугольнику $A'B'C'$; пусть P_1 — образ точки P' при соответствующей гомотетии. Тогда прямые, соединяющие вершины треугольника $A_1B_1C_1$ с точкой P_1, перпендикулярны сторонам треугольника ABC, т. е. P_1 — искомая точка.

З а м е ч а н и е. Другое доказательство приведено в решении задачи 7.45.

5.127. Если данный параллелограмм является прямоугольником, то подерная окружность точки D вырождается в прямую AC; эта прямая проходит через точку пересечения диагоналей. Поэтому будем считать, что данный параллелограмм отличен от прямоугольника. Тогда согласно задаче 5.97 точка D изогонально сопряжена (относительно треугольника ABC) точке P, в которой пересекаются касательные в точках A и C к описанной окружности треугольника ABC. Поэтому согласно задаче 5.125 а) подерные окружности точек P и D совпадают. Основанием перпендикуляра, опущенного из точки P на прямую AC, служит середина отрезка AC. Поэтому подерная окружность точки P проходит через середину диагонали AC.

5.128. Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB. Треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны, причём коэффициент подобия равен 2. Высоты треугольника $A_1B_1C_1$ пересекаются в точке O, поэтому $OA_1 : HA = 1 : 2$. Пусть

M' — точка пересечения отрезков OH и AA_1. Тогда $OM' : M'H = OA_1 : HA = 1 : 2$ и $AM' : M'A_1 = OA_1 : HA = 1 : 2$, т. е. $M' = M$.

5.129. Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB; A_2, B_2 и C_2 — основания высот; A_3, B_3 и C_3 — середины отрезков, соединяющих точку пересечения высот с вершинами. Так как $A_2C_1 = C_1A = A_1B_1$ и $A_1A_2 \parallel B_1C_1$, точка A_2 лежит на описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$. Аналогично точки B_2 и C_2 лежат на описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$.

Рассмотрим теперь окружность S с диаметром A_1A_3. Так как $A_1B_3 \parallel CC_2$ и $A_3B_3 \parallel AB$, то $\angle A_1B_3A_3 = 90^\circ$, а значит, точка B_3 лежит на окружности S. Аналогично доказывается, что точки C_1, B_1 и C_3 лежат на окружности S. Окружность S проходит через вершины треугольника $A_1B_1C_1$, поэтому она является его описанной окружностью.

При гомотетии с центром H и коэффициентом $1/2$ описанная окружность треугольника ABC переходит в описанную окружность треугольника $A_3B_3C_3$, т. е. в окружность девяти точек. Значит, при этой гомотетии точка O переходит в центр окружности девяти точек.

5.130. а) Докажем, например, что треугольники ABC и HBC имеют общую окружность девяти точек. В самом деле, окружности девяти точек обоих треугольников проходят через середину стороны BC и середины отрезков BH и CH.

б) Прямая Эйлера проходит через центр окружности девяти точек, а окружность девяти точек у этих треугольников общая.

в) Центром симметрии является центр окружности девяти точек этих треугольников.

5.131. Пусть $AB > BC > CA$. Легко проверить, что для остроугольного и тупоугольного треугольников точка H пересечения высот и центр O описанной окружности расположены именно так, как на рис. 5.5 (т. е. для остроугольного

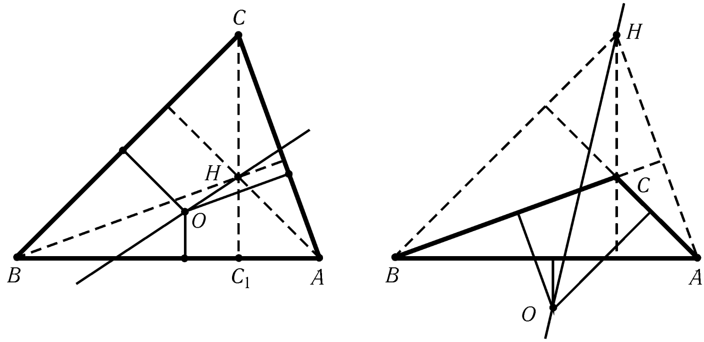


Рис. 5.5

треугольника точка O лежит внутри треугольника BHC_1, а для тупоугольного точки O и B лежат по одну сторону от прямой CH). Поэтому в остроугольном треугольнике прямая Эйлера пересекает наибольшую сторону AB и наименьшую сторону AC, а в тупоугольном треугольнике — наибольшую сторону AB и среднюю по длине сторону BC.

5.132. а) Пусть O_a, O_b и O_c — центры вневписанных окружностей треугольника ABC. Вершины треугольника ABC являются основаниями высот треугольника $O_aO_bO_c$ (задача 5.2), поэтому окружность девяти точек треугольника $O_aO_bO_c$ проходит через точки A, B и C.

б) Пусть O — точка пересечения высот треугольника $O_aO_bO_c$, т.е. точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Окружность девяти точек треугольника $O_aO_bO_c$ делит пополам отрезок OO_a.

5.133. Пусть AA_1 — высота, H — точка пересечения высот. Согласно задаче 5.51 б) $AH = 2R|\cos A|$. Медианы делятся точкой их пересечения в отношении $1 : 2$, поэтому прямая Эйлера параллельна BC тогда и только тогда, когда $AH : AA_1 = 2 : 3$ и векторы $\overrightarrow{AH}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ сонаправлены, т.е. $2R\cos A : 2R\sin B\sin C = 2 : 3$. Учитывая, что $\cos A = -\cos(B + C) = \sin B\sin C - \cos B\cos C$, получаем $\sin B\sin C = 3\cos B\cos C$.

5.134. Пусть CD — высота, H — точка пересечения высот, O — центр описанной окружности, N — середина стороны AB, а точка E делит пополам отрезок, соединяющий C с точкой пересечения высот. Тогда $CENO$ — параллелограмм, поэтому $\angle NED = \angle OCH = |\angle A - \angle B|$ (см. задачу 2.93). Точки N, E и D лежат на окружности девяти точек, поэтому отрезок ND виден из её центра под углом $2\angle NED = 2|\angle A - \angle B|$.

5.135. Пусть O и I — центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC, H — точка пересечения высот; прямые AI и BI пересекают описанную окружность в точках A_1 и B_1. Предположим, что треугольник ABC не равнобедренный. Тогда $OI : IH = OA_1 : AH$ и $OI : IH = OB_1 : BH$. Так как $OB_1 = OA_1$, то $AH = BH$, а значит, $AC = BC$. Приходим к противоречию.

5.136. Пусть O и I — центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC, H — ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$. Проведём в треугольнике $A_1B_1C_1$ высоты A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2. Треугольник $A_1B_1C_1$ остроугольный (например, $\angle B_1A_1C_1 = (\angle B + \angle C)/2 < 90°$), поэтому H — центр вписанной окружности треугольника $A_2B_2C_2$ (см. задачу 1.57 а). Стороны треугольников ABC и $A_2B_2C_2$ параллельны (см. задачу 1.55 а), поэтому существует гомотетия, переводящая треугольник ABC в $A_2B_2C_2$. При этой гомотетии точка O переходит в точку I, а точка I — в точку H, поэтому прямая IH проходит через точку O.

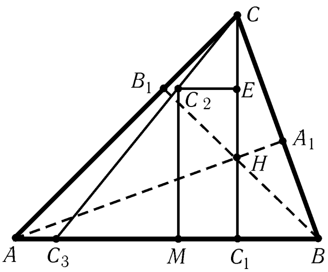


Рис. 5.6

5.137. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC, E и M — середины отрезков CH и AB (рис. 5.6). Тогда C_1MC_2E — прямоугольник. Пусть прямая CC_2 пересекает прямую AB в точке C_3. Докажем, что $\overline{AC_3} : \overline{C_3B} = \operatorname{tg} 2\beta : \operatorname{tg} 2\alpha$. Легко проверить, что $\overline{C_3M} : \overline{C_2E} = \overline{MC_2} : \overline{EC}$, $\overline{EC} = R\cos\gamma$, $\overline{MC_2} = \overline{C_1E} = 2R\sin\alpha\sin\beta - R\cos\gamma$ и $\overline{C_2E} = \overline{MC_1} = R\sin(\beta - \alpha)$, поэтому

$$\overline{C_3M} = R\sin(\beta - \alpha)(2\sin\beta\sin\alpha - \cos\gamma)/\cos\gamma = R\sin(\beta - \alpha)\cos(\beta - \alpha)/\cos\gamma.$$

Следовательно,

$$\frac{\overline{AC_3}}{\overline{C_3B}} = \frac{\overline{AM} + \overline{MC_3}}{\overline{C_3M} + \overline{MB}} = \frac{\sin 2\gamma + \sin 2(\alpha - \beta)}{\sin 2\gamma - \sin 2(\alpha - \beta)} = \frac{\operatorname{tg} 2\beta}{\operatorname{tg} 2\alpha}.$$

Аналогичные рассуждения показывают, что

$$\frac{\overline{AC_3}}{\overline{C_3B}} \cdot \frac{\overline{BA_3}}{\overline{A_3C}} \cdot \frac{\overline{CB_3}}{\overline{B_3A}} = \frac{\operatorname{tg} 2\beta}{\operatorname{tg} 2\alpha} \cdot \frac{\operatorname{tg} 2\gamma}{\operatorname{tg} 2\beta} \cdot \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 2\gamma} = 1.$$

5.138. Решим сразу задачу б). Докажем сначала, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Пусть описанные окружности треугольников A_1BC и AB_1C пересекаются в точке O. Тогда $\angle(BO, OA) = \angle(BO, OC) + \angle(OC, OA) = \angle(BA_1, A_1C) + \angle(CB_1, B_1A) = \angle(BA, AC_1) + \angle(C_1B, BA) = \angle(C_1B, AC_1)$, т.е. описанная окружность треугольника ABC_1 тоже проходит через точку O. Поэтому $\angle(AO, OA_1) = \angle(AO, OB) + \angle(BO, OA_1) = \angle(AC_1, C_1B) + \angle(BC, CA_1) = 0^\circ$, т.е. прямая AA_1 проходит через точку O. Аналогично доказывается, что прямые BB_1 и CC_1 проходят через точку O.

Докажем теперь, что точка O совпадает с искомой точкой P. Так как $\angle BAP = \angle A - \angle CAP$, то равенство $\angle ABP = \angle CAP$ эквивалентно равенству $\angle BAP + \angle ABP = \angle A$, т.е. $\angle APB = \angle B + \angle C$. Для точки O последнее равенство очевидно, так как она лежит на описанной окружности треугольника ABC_1.

5.139. а) Докажем, что $\smile AB = \smile B_1C_1$, т.е. $AB = B_1C_1$. В самом деле, $\smile AB = \smile AC_1 + \smile C_1B$, а $\smile C_1B = \smile AB_1$, поэтому $\smile AB = \smile AC_1 + \smile AB_1 = \smile B_1C_1$.

б) Будем считать, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ вписаны в одну окружность, причём треугольник ABC фиксирован, а треугольник $A_1B_1C_1$ вращается. Прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке не более чем при одном положении треугольника $A_1B_1C_1$ (задача 7.21 б). При этом может возникнуть 12 различных семейств треугольников $A_1B_1C_1$: треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ могут совмещаться поворотом или осевой симметрией; кроме того, вершинам треугольника символы A_1, B_1 и C_1 можно сопоставить шестью различными способами.

Из этих 12 семейств треугольников четыре семейства никогда не могут дать искомой точки P. Для одинаково ориентированных треугольников исключаются случаи $\triangle ABC = \triangle A_1C_1B_1$, $\triangle ABC = \triangle C_1B_1A_1$ и $\triangle ABC = \triangle B_1A_1C_1$ (например, в случае $\triangle ABC = \triangle A_1C_1B_1$ точка P является точкой пересечения прямой $BC = B_1C_1$ и касательной к окружности в точке $A = A_1$; треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ при этом совпадают). Для противоположно ориентированных треугольников исключается случай $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (в этом случае $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$).

З а м е ч а н и е. Точкам Брокара соответствуют противоположно ориентированные треугольники; для первой точки Брокара $\triangle ABC = \triangle B_1C_1A_1$, а для второй точки Брокара $\triangle ABC = \triangle C_1A_1B_1$.

5.140. а) Так как $PC = \dfrac{AC \sin CAP}{\sin APC}$ и $PC = \dfrac{BC \sin CBP}{\sin BPC}$, то $\dfrac{\sin\varphi \sin\beta}{\sin\gamma} = \dfrac{\sin(\beta-\varphi)\sin\alpha}{\sin\beta}$. Учитывая, что $\sin(\beta-\varphi) = \sin\beta\cos\varphi - \cos\beta\sin\varphi$, получаем $\operatorname{ctg}\varphi = \operatorname{ctg}\beta + \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha\sin\gamma}$. Остаётся заметить, что $\sin\beta = \sin(\alpha+\gamma) = \sin\alpha\cos\gamma + \sin\gamma\cos\alpha$. Второе тождество получаем, перемножив равенства $\dfrac{AP}{BP} = \dfrac{\sin\varphi}{\sin(\alpha-\varphi)}$, $\dfrac{BP}{CP} = \dfrac{\sin\varphi}{\sin(\beta-\varphi)}$ и $\dfrac{CP}{AP} = \dfrac{\sin\varphi}{\sin(\gamma-\varphi)}$.

б) Для второго угла Брокара получаем точно такое же выражение, как и в задаче а). Ясно также, что оба угла Брокара острые.

в) Так как $\angle A_1BC=\angle BCA$ и $\angle BCA_1=\angle CAB$, то $\triangle CA_1B\sim\triangle ABC$. Поэтому точка Брокара P лежит на отрезке AA_1 (см. задачу 5.138 б).

5.141. а) Согласно задаче 10.40 а) $\operatorname{ctg}\varphi=\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma\geqslant\sqrt{3}=\operatorname{ctg}30^\circ$, поэтому $\varphi\leqslant 30^\circ$.

б) Пусть P — первая точка Брокара треугольника ABC. Точка M лежит внутри (или на границе) одного из треугольников ABP, BCP и CAP. Если, например, точка M лежит внутри треугольника ABP, то $\angle ABM\leqslant\angle ABP\leqslant 30^\circ$.

5.142. Прямые A_1B_1, B_1C_1 и C_1A_1 являются серединными перпендикулярами к отрезкам AQ, BQ и CQ. Поэтому, например, $\angle B_1A_1C_1=180^\circ-\angle AQC=\angle A$. Для других углов доказательство аналогично.

Кроме того, прямые A_1O, B_1O и C_1O являются серединными перпендикулярами к отрезкам CA, AB и BC. Поэтому, например, острые углы OA_1C_1 и ACQ имеют взаимно перпендикулярные стороны, поэтому они равны. Аналогичные рассуждения показывают, что $\angle OA_1C_1=\angle OB_1A_1=\angle OC_1B_1=\varphi$, где φ — угол Брокара треугольника ABC.

5.143. По теореме синусов $R_1=AB/2\sin APB$, $R_2=BC/2\sin BPC$ и $R_3=CA/2\sin CPA$. Ясно также, что $\sin APB=\sin A$, $\sin BPC=\sin B$ и $\sin CPA=\sin C$.

5.144. Треугольник ABC_1 равнобедренный, причём угол при его основании AB равен углу Брокара φ. Поэтому $\angle(PC_1, C_1Q)=\angle(BC_1, C_1A)=2\varphi$. Аналогично $\angle(PA_1, A_1Q)=\angle(PB_1, B_1Q)=\angle(PC_1, C_1Q)=2\varphi$.

5.145. Так как $\angle CA_1B_1=\angle A+\angle AB_1A_1$ и $\angle AB_1A_1=\angle CA_1C_1$, то $\angle B_1A_1C_1=\angle A$. Аналогично доказывается, что равны и остальные углы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

Описанные окружности треугольников AA_1B_1, BB_1C_1 и CC_1A_1 пересекаются в одной точке O (задача 2.83 а). Ясно, что $\angle AOA_1=\angle AB_1A_1=\varphi$. Аналогично $\angle BOB_1=\angle COC_1=\varphi$. Поэтому $\angle AOB=\angle A_1OB_1=180^\circ-\angle A$. Аналогично $\angle BOC=180^\circ-\angle B$ и $\angle COA=180^\circ-\angle C$, т. е. O — первая точка Брокара обоих треугольников. Следовательно, при поворотной гомотетии на угол φ с центром O и коэффициентом AO/A_1O треугольник $A_1B_1C_1$ переходит в треугольник ABC.

5.146. а) Рассмотрим функцию $f(x)=\ln(x/\sin x)=\ln x-\ln\sin x$. Ясно, что функции

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\operatorname{ctg}x \qquad \text{и} \qquad f''(x)=\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}$$

положительны при $0<x<\pi$. Следовательно, функция $f(x)$ монотонно возрастает при возрастании x от 0 до π и, кроме того, выпукла на этом отрезке, т. е.

$$f(\lambda_1x_1+\ldots+\lambda_nx_n)\leqslant\lambda_1f(x_1)+\ldots+\lambda_nf(x_n)$$

при $0\leqslant x_i\leqslant\pi$, $0\leqslant\lambda_i$, $\lambda_1+\ldots+\lambda_n=1$. В частности, $f(\varphi)\leqslant f(\pi/6)$, так как $\varphi\leqslant\pi/6$, и

$$f\Big(\frac{\pi}{6}\Big)=f\Big(\frac{\varphi+(\alpha-\varphi)+\varphi+(\beta-\varphi)+\varphi+(\gamma-\varphi)}{6}\Big)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{6}\big(f(\varphi)+f(\alpha-\varphi)+f(\varphi)+f(\beta-\varphi)+f(\varphi)+f(\gamma-\varphi)\big).$$

Воспользовавшись монотонностью логарифма, эти неравенства можно переписать следующим образом:

$$\left(\frac{\varphi}{\sin\varphi}\right)^6 \leqslant \left(\frac{\pi/6}{\sin(\pi/6)}\right)^6 \leqslant \frac{\varphi^3(\alpha-\varphi)(\beta-\varphi)(\gamma-\varphi)}{\sin^3\varphi\sin(\alpha-\varphi)\sin(\beta-\varphi)\sin(\gamma-\varphi)}.$$

Учитывая, что $\sin(\alpha-\varphi)\sin(\beta-\varphi)\sin(\gamma-\varphi)=\sin^3\varphi$, получаем

$$\varphi^3 \leqslant (\alpha-\varphi)(\beta-\varphi)(\gamma-\varphi).$$

б) Из неравенства $\varphi^3 \leqslant (\alpha-\varphi)(\beta-\varphi)(\gamma-\varphi)$ следует, что

$$64\varphi^6 \leqslant 4^3\varphi(\alpha-\varphi)\varphi(\beta-\varphi)\varphi(\gamma-\varphi).$$

Ясно также, что

$$4\varphi(\alpha-\varphi) \leqslant \alpha^2, \qquad 4\varphi(\beta-\varphi) \leqslant \beta^2, \qquad 4\varphi(\gamma-\varphi) \leqslant \gamma^2.$$

5.147. Согласно задаче 12.46 а)

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S},$$

где S — площадь треугольника. Таким образом, для треугольника с вершинами в точках с координатами $(\pm a/2,\, 0)$ и $(x,\, y)$ угол Брокара φ определяется равенством

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{a^2+(a/2+x)^2+y^2+(-a/2+x)^2+y^2}{2ay},$$

т. е. $2x^2+2y^2+3a^2/2=2ay\operatorname{ctg}\varphi$. Последнее уравнение задаёт окружность радиуса $(a/2)\sqrt{\operatorname{ctg}^2\varphi-3}$ с центром $(0,\,(a/2)\operatorname{ctg}\varphi)$.

5.148. Пусть a_1, b_1, c_1 — длины сторон треугольника $A_1B_1C_1$, S_1 — его площадь. В теореме речь идёт о множестве точек M, для которых выполняется равенство

$$4S_1\operatorname{ctg}\varphi = a_1^2+b_1^2+c_1^2.$$

Точки B_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром AM, поэтому

$$a_1 = B_1C_1 = AM\sin B_1AC_1 = \frac{aAM}{2R},$$

где R — радиус описанной окружности треугольника ABC. Таким образом,

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2 = \frac{a^2AM^2+b^2BM^2+c^2CM^2}{4R^2}.$$

Поэтому если $(x,\, y)$ — координаты точки M в некоторой прямоугольной системе координат, то

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{4R^2}(x^2+y^2)+px+qy+r,$$

где p, q, r — постоянные числа.

Для S_1 тоже можно получить выражение через координаты $(x,\, y)$ точки M. При этом начало системы координат удобно расположить в центре O описанной окружности треугольника ABC. В таком случае

$$S_1 = \frac{S_{ABC}}{4R^2}|R^2-x^2-y^2|$$

(задача 5.123).

Уравнение $S_1 = 0$ определяет описанную окружность треугольника ABC. Это множество соответствует нулевому углу Брокара. Углу Брокара φ соответствует множество

$$\pm \operatorname{ctg} \varphi \, \frac{S_{ABC}}{4R^2} (R^2 - x^2 - y^2) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4R^2} (x^2 + y^2) + px + qy + r.$$

При этом знак плюс берётся для точек внутри описанной окружности, а знак минус берётся для точек вне описанной окружности. Легко видеть, что каждое из полученных уравнений является уравнением окружности. Дело в том, что если $f = 0$ и $g = 0$ — уравнения окружностей, то $\lambda f = g$ — тоже уравнение окружности. Более того, центр окружности $\lambda f = g$ лежит на прямой, соединяющей центры окружностей $f = 0$ и $g = 0$. В нашем случае центром одной окружности служит центр описанной окружности треугольника ABC, а центром второй окружности служит точка, для которой величина $a^2 AM^2 + b^2 BM^2 + c^2 CM^2$ минимальна (точка Лемуана).

5.149. По теореме синусов имеем $AB/BM = \sin AMB / \sin BAM$ и $AB/BN = \sin ANB / \sin BAN$. Значит,

$$\frac{AB^2}{BM \cdot BN} = \frac{\sin AMB \sin ANB}{\sin BAM \sin BAN} = \frac{\sin AMC \sin ANC}{\sin CAN \sin CAM} = \frac{AC^2}{CM \cdot CN}.$$

5.150. Так как $\angle BAS = \angle CAM$, то $BS/CM = S_{BAS}/S_{CAM} = AB \cdot AS/(AC \cdot AM)$, т. е. $AS/AM = 2b \cdot BS/ac$. Остаётся заметить, что $BS = ac^2/(b^2 + c^2)$ и $2AM = \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ (см. задачи 5.149 и 12.11 а).

5.151. а) При симметрии относительно биссектрисы угла A отрезок B_1C_1 переходит в отрезок, параллельный стороне BC, а прямая AS — в прямую AM, где M — середина стороны BC.

б) Рассмотрим гомотетию с центром A, переводящую середину отрезка B_1C_1 в точку S. При этой гомотетии отрезок B_1C_1 переходит в диагональ параллелограмма, центром которого служит точка S, а две стороны проходят по сторонам угла A. Таким образом, направление отрезка B_1C_1 определено однозначно. Остаётся воспользоваться результатом задачи а).

5.152. Согласно задаче 2.1 при симметрии относительно биссектрисы угла A прямая OA переходит в прямую, перпендикулярную BC (в случае неострого угла A доказательство аналогично). Ясно также, что при этой симметрии отрезок B_1C_1 переходит в отрезок, параллельный BC.

5.153. Возьмём на отрезках BC и BA точки A_1 и C_1 так, что $A_1C_1 \parallel BK$. Так как $\angle BAC = \angle CBK = \angle BA_1C_1$ и $\angle BCA = \angle BC_1A_1$, то отрезок A_1C_1 антипараллелен стороне AC. С другой стороны, согласно задаче 3.32 б) прямая BD делит отрезок A_1C_1 пополам.

5.154. Достаточно воспользоваться результатом задачи 3.31.

5.155. Пусть AP — общая хорда рассматриваемых окружностей, Q — точка пересечения прямых AP и BC. Тогда $BQ/AB = \sin BAQ / \sin AQB$ и $AC/CQ = \sin AQC / \sin CAQ$. Значит, $BQ/CQ = AB \sin BAP/(AC \sin CAP)$. Так как AC и AB — касательные к окружностям S_1 и S_2, то $\angle CAP = \angle ABP$ и $\angle BAP = \angle ACP$, а значит, $\angle APB = \angle APC$. Поэтому

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB}{AP} \cdot \frac{AP}{AC} = \frac{\sin APB}{\sin ABP} \cdot \frac{\sin ACP}{\sin APC} = \frac{\sin ACP}{\sin ABP} = \frac{\sin BAP}{\sin CAP}.$$

Следовательно, $BQ/CQ = AB^2/AC^2$.

5.156. Пусть S — точка пересечения прямых AX и BC. Тогда $AS/AB = CS/CX$ и $AS/AC = BS/BX$, а значит, $CS/BS = (AC/AB) \cdot (XC/XB)$. Остаётся заметить, что $XC/XB = AC/AB$, поскольку окружность с диаметром DE является окружностью Аполлония для точек B и C.

5.157. Пусть L, M и N — середины отрезков CA, CB и CH. Так как $\triangle BAC \sim \triangle CAH$, то $\triangle BAM \sim \triangle CAN$, а значит, $\angle BAM = \angle CAN$. Аналогично $\angle ABL = \angle CBN$.

5.158. Пусть B_1C_1, C_2A_2 и A_3B_3 — данные отрезки. Тогда треугольники A_2XA_3, B_1XB_3 и C_1XC_2 равнобедренные; пусть длины их боковых сторон равны a, b и c. Прямая AX делит отрезок B_1C_1 пополам тогда и только тогда, когда эта прямая содержит симедиану. Поэтому если X — точка Лемуана, то $a = b$, $b = c$ и $c = a$. А если $B_1C_1 = C_2A_2 = A_3B_3$, то $b + c = c + a = a + b$, а значит, $a = b = c$.

5.159. Легко проверить, что как из условия а), так и из условия б) вытекает следующее: четырёхугольники $A_2B_1C_2C_1$, $C_2A_1B_2B_1$ и $B_2C_1A_2A_1$ являются равнобедренными трапециями. В случае а) нужно воспользоваться результатом задачи 5.151 б); в случае б) это очевидно. Ясно также, что серединные перпендикуляры к основаниям этих трапеций пересекаются в одной точке. Эта точка является центром искомой окружности.

5.160. Воспользуемся обозначениями из задачи 5.159. Пусть O' — центр описанной окружности треугольника $A'B'C'$. Ясно, что точка O' лежит на прямой KO. Рассмотрим точку O_1 — середину отрезка OO'. Докажем, что O_1 — центр окружности Тукера. Пусть O_1M — средняя линия трапеции $AOO'A'$. Тогда $O_1M \parallel AO$. А так так $AO \perp B_1C_2$ (задача 5.152), то O_1M — серединный перпендикуляр к отрезку B_1C_2. Таким образом, O_1 — точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам B_1C_2, C_1A_2 и A_1B_2.

5.161. а) Воспользуемся обозначениями задачи 5.159. В рассматриваемой ситуации длины отрезков A_1B_2, B_1C_2 и C_1A_2 равны, поскольку они равны половинам длин антипараллелей, проходящих через точку K, а длины этих антипараллелей равны согласно задаче 5.158. Таким образом, первая окружность Лемуана является одной из окружностей Тукера. Эта окружность соответствует случаю, когда треугольник $A'B'C'$ вырождается в точку K. Поэтому согласно задаче 5.160 центром первой окружности Лемуана служит середина отрезка KO.

б) Непосредственно следует из задачи 5.158, поскольку точка Лемуана делит пополам каждую из проходящих через неё антипараллелей. Центром второй окружности Лемуана служит точка Лемуана K.

5.162. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC; a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 — расстояния от точек K и M до сторон треугольника. Так как точки K и M изогонально сопряжены, то $a_1a_2 = b_1b_2 = c_1c_2$; кроме того, $aa_2 = bb_2 = cc_2$ (см. задачу 4.1). Следовательно, $a/a_1 = b/b_1 = c/c_1$. Используя это равенство и учитывая, что площади треугольников A_1B_1K, B_1C_1K и C_1A_1K равны $a_1b_1c/4R$, $b_1c_1a/4R$ и $c_1a_1b/4R$, где R — радиус описанной окружности треугольника ABC, получаем, что площади этих треугольников равны. Кроме того, точка K лежит внутри треугольника $A_1B_1C_1$. Следовательно, K — точка пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$ (см. задачу 4.2).

5.163. Медианы треугольника $A_1B_1C_1$ пересекаются в точке K (задача 5.162), поэтому стороны треугольника ABC перпендикулярны медианам треугольника $A_1B_1C_1$. После поворота на 90° стороны треугольника ABC

станут параллельны медианам треугольника $A_1B_1C_1$, а значит, медианы треугольника ABC станут параллельны сторонам треугольника $A_1B_1C_1$ (см. задачу 13.2). Поэтому медианы треугольника ABC перпендикулярны сторонам треугольника $A_1B_1C_1$.

5.164. Пусть A_2, B_2 и C_2 — проекции точки K на прямые BC, CA и AB. Тогда $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$ (задача 5.121) и K — точка пересечения медиан треугольника $A_2B_2C_2$ (задача 5.162). Поэтому преобразование подобия, переводящее треугольник $A_2B_2C_2$ в треугольник $A_1B_1C_1$, переводит точку K в точку M пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$. Кроме того, например, $\angle KA_2C_2 = \angle KBC_2 = \angle B_1A_1K$, т. е. точки K и M изогонально сопряжены относительно треугольника $A_1B_1C_1$, а значит, K — точка Лемуана треугольника $A_1B_1C_1$.

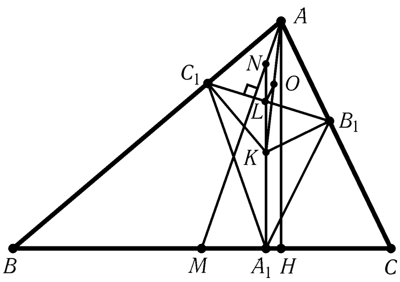


Рис. 5.7

5.165. Пусть K — точка Лемуана треугольника ABC; A_1, B_1 и C_1 — проекции точки K на стороны треугольника ABC; L — середина отрезка B_1C_1; N — точка пересечения прямой KL и медианы AM; O — середина отрезка AK (рис. 5.7). Точки B_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром AK, поэтому $OL \perp B_1C_1$. Кроме того, $AN \perp B_1C_1$ (задача 5.163) и O — середина отрезка AK, а значит, OL — средняя линия треугольника AKN и $KL = LN$. Следовательно, K — середина отрезка A_1N. Остаётся заметить, что при гомотетии с центром M, переводящей N в A, отрезок NA_1 переходит в высоту AH.

ГЛАВА 6

МНОГОУГОЛЬНИКИ

Основные сведения

1. Многоугольник называют *выпуклым*, если он лежит по одну сторону от любой прямой, соединяющей его соседние вершины.

2. Выпуклый многоугольник называют *описанным*, если все его стороны касаются некоторой окружности. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ является описанным тогда и только тогда, когда $AB+CD=BC+AD$.

Выпуклый многоугольник называют *вписанным*, если все его вершины лежат на одной окружности. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда $\angle ABC+\angle CDA=\angle DAB+\angle BCD$.

3. Выпуклый многоугольник называют *правильным*, если все его стороны равны и все углы также равны.

Выпуклый n-угольник является правильным тогда и только тогда, когда при повороте на угол $2\pi/n$ с центром в некоторой точке O он переходит в себя. Точку O называют *центром* правильного многоугольника.

Вводные задачи

1. Докажите, что выпуклый четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда $\angle ABC+\angle CDA=180^\circ$.

2. Докажите, что в выпуклый четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность тогда и только тогда, когда $AB+CD=BC+AD$.

3. а) Докажите, что оси симметрии правильного многоугольника пересекаются в одной точке.

б) Докажите, что правильный $2n$-угольник имеет центр симметрии.

4. а) Докажите, что сумма углов при вершинах выпуклого n-угольника равна $(n-2)\cdot 180^\circ$.

б) Выпуклый n-угольник разрезан непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что количество этих треугольников равно $n-2$.

§ 1. Вписанные и описанные четырёхугольники

6.1. Докажите, что если центр вписанной в четырёхугольник окружности совпадает с точкой пересечения диагоналей, то этот четырёхугольник — ромб.

6.2. Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности с центром O. Докажите, что $\angle AOB+\angle COD=180^\circ$.

6.3. Докажите, что если существует окружность, касающаяся всех сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$, и окружность, касающаяся продолжений всех его сторон, то диагонали такого четырёхугольника перпендикулярны.

6.4. Окружность высекает на всех четырёх сторонах четырёхугольника равные хорды. Докажите, что в этот четырёхугольник можно вписать окружность.

6.5. Докажите, что если в четырёхугольник можно вписать окружность, то центр этой окружности лежит на одной прямой с серединами диагоналей.

6.6. Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности с центром O. В треугольнике AOB проведены высоты AA_1 и BB_1, а в треугольнике COD — высоты CC_1 и DD_1. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 и D_1 лежат на одной прямой.

6.7. Углы при основании AD трапеции $ABCD$, отличной от параллелограмма, равны 2α и 2β. Докажите, что трапеция описанная тогда и только тогда, когда $BC/AD = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$.

6.8. В треугольнике ABC проведены отрезки PQ и RS, параллельные стороне AC, и отрезок BM (рис. 6.1). Трапеции $RPKL$ и $MLSC$ описанные. Докажите, что трапеция $APQC$ тоже описанная.

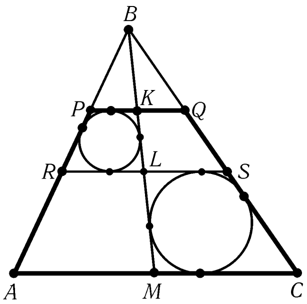


Рис. 6.1

6.9*. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке P, а лучи BC и AD — в точке Q. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ описанный тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий: $AB + CD = BC + AD$, $AP + CQ = AQ + CP$ или $BP + BQ = DP + DQ$.

6.10*. Через точки пересечения продолжений сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$ проведены две прямые, делящие его на четыре четырёхугольника. Докажите, что если четырёхугольники, примыкающие к вершинам B и D, описанные, то четырёхугольник $ABCD$ тоже описанный.

6.11*. На стороне BC треугольника ABC взяты точки K_1 и K_2. Докажите, что общие внешние касательные к вписанным окружностям треугольников ABK_1 и ACK_2 и общие внешние касательные к вписанным окружностям треугольников ABK_2 и ACK_1 пересекаются в одной точке.

6.12*. Через каждую из точек пересечения продолжений сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$ проведено по две прямые. Эти прямые делят четырёхугольник на девять четырёхугольников.

а) Докажите, что если три из четырёхугольников, примыкающих к вершинам A, B, C, D, описанные, то четвёртый четырёхугольник тоже описанный.

б) Докажите, что если r_a, r_b, r_c, r_d — радиусы окружностей, вписанных в четырёхугольники, примыкающие к вершинам A, B, C, D, то

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_d}.$$

6.13*. Окружности S_1 и S_2, S_2 и S_3, S_3 и S_4, S_4 и S_1 касаются внешним образом. Докажите, что четыре общие касательные (в точках касания окружностей) либо пересекаются в одной точке, либо касаются одной окружности.

6.14*. Докажите, что точка пересечения диагоналей описанного четырёхугольника совпадает с точкой пересечения диагоналей четырёхугольника, вершинами которого служат точки касания сторон исходного четырёхугольника с вписанной окружностью.

* * *

6.15*. Четырёхугольник $ABCD$ вписанный; H_c и H_d — ортоцентры треугольников ABD и ABC. Докажите, что CDH_cH_d — параллелограмм.

6.16*. Четырёхугольник $ABCD$ вписанный. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABC, BCD, CDA и DAB образуют прямоугольник.

6.17*. Продолжения сторон четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность с центром O, пересекаются в точках P и Q, а его диагонали пересекаются в точке S.

а) Расстояния от точек P, Q и S до точки O равны p, q и s, а радиус описанной окружности равен R. Найдите длины сторон треугольника PQS.

б) Докажите, что высоты треугольника PQS пересекаются в точке O.

* * *

6.18*. Диагональ AC разбивает четырёхугольник $ABCD$ на два треугольника, вписанные окружности которых касаются диагонали AC в одной точке. Докажите, что вписанные окружности треугольников ABD и BCD тоже касаются диагонали BD в одной точке, а точки их касания со сторонами четырёхугольника лежат на одной окружности.

6.19*. Докажите, что проекции точки пересечения диагоналей вписанного четырёхугольника на его стороны являются вершинами описанного четырёхугольника, если они не попадают на продолжения сторон.

6.20*. Докажите, что если диагонали четырёхугольника перпендикулярны, то проекции точки пересечения диагоналей на стороны являются вершинами вписанного четырёхугольника.

См. также задачи 1.9, 1.44, 2.15, 2.18, 2.43, 2.48, 2.73—2.81, 2.90, 2.91, 3.6, 3.8, 3.10, 3.23, 3.32, 3.50, 4.46, 4.59, 5.45, 5.118, 6.24, 6.31, 6.37, 6.38, 6.101, 6.102, 7.50, 8.50, 8.54 13.35, 13.36, 16.4, 17.5, 30.35, 30.44.

§ 2. Четырёхугольники

6.21. Угол между сторонами AB и CD четырёхугольника $ABCD$ равен φ. Докажите, что

$$AD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 - 2(AB \cdot BC \cos B + BC \cdot CD \cos C + CD \cdot AB \cos \varphi).$$

6.22. В четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны, причём лучи AB и DC пересекаются в точке O. Докажите, что прямая, соединяющая середины диагоналей, перпендикулярна биссектрисе угла AOD.

6.23. На сторонах BC и AD четырёхугольника $ABCD$ взяты точки M и N так, что $BM : MC = AN : ND = AB : CD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке O. Докажите, что прямая MN параллельна биссектрисе угла AOD.

6.24. Докажите, что биссектрисы углов выпуклого четырёхугольника образуют вписанный четырёхугольник.

6.25. Два различных параллелограмма $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ с соответственно параллельными сторонами вписаны в четырёхугольник $PQRS$ (точки A и A_1 лежат на стороне PQ, B и B_1 — на QR и т. д.). Докажите, что диагонали четырёхугольника параллельны сторонам параллелограммов.

6.26. Середины M и N диагоналей AC и BD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ не совпадают. Прямая MN пересекает стороны AB и CD в точках M_1 и N_1. Докажите, что если $MM_1 = NN_1$, то $AD \parallel BC$.

6.27*. Докажите, что два четырёхугольника подобны тогда и только тогда, когда у них равны четыре соответственных угла и соответственные углы между диагоналями.

6.28*. Четырёхугольник $ABCD$ выпуклый; точки A_1, B_1, C_1 и D_1 таковы, что $AB \parallel C_1D_1$, $AC \parallel B_1D_1$ и т. д. для всех пар вершин. Докажите, что четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ тоже выпуклый, причём $\angle A + \angle C_1 = 180^\circ$.

6.29*. Из вершин выпуклого четырёхугольника опущены перпендикуляры на диагонали. Докажите, что четырёхугольник, образованный основаниями перпендикуляров, подобен исходному четырёхугольнику.

6.30*. Выпуклый четырёхугольник разделён диагоналями на четыре треугольника. Докажите, что прямая, соединяющая точки пересечения медиан двух противоположных треугольников, перпендикулярна прямой, соединяющей точки пересечения высот двух других треугольников.

6.31*. Диагонали описанной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O. Радиусы вписанных окружностей треугольников AOD, AOB, BOC и COD равны r_1, r_2, r_3 и r_4 соответственно. Докажите, что $\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_3} = \dfrac{1}{r_2} + \dfrac{1}{r_4}$.

6.32*. Окружность радиуса r_1 касается сторон DA, AB и BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$, окружность радиуса r_2 — сторон AB, BC и CD; аналогично определяются r_3 и r_4. Докажите, что $\frac{AB}{r_1} + \frac{CD}{r_3} = \frac{BC}{r_2} + \frac{AD}{r_4}$.

6.33*. О выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC, BCD, CDA и DAB, равны между собой. Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник.

6.34*. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$; A_1, B_1, C_1 и D_1 — центры описанных окружностей треугольников BCD, CDA, DAB и ABC. Аналогично для четырёхугольника $A_1B_1C_1D_1$ определяются точки A_2, B_2, C_2 и D_2. Докажите, что четырёхугольники $ABCD$ и $A_2B_2C_2D_2$ подобны, а коэффициент подобия равен $|(\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} C)(\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} D)/4|$.

6.35*. Окружности, диаметрами которых служат стороны AB и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$, касаются сторон CD и AB соответственно. Докажите, что $BC \parallel AD$.

6.36*. Четыре прямые задают четыре треугольника. Докажите, что ортоцентры этих треугольников лежат на одной прямой.

См. также задачи 1.2, 1.5, 1.16, 1.38, 1.39, 1.52, 2.45, 3.4, 3.67, 4.5, 4.7, 4.14—4.25, 4.29, 4.30, 4.33, 4.36, 4.43—4.46, 4.56, 5.47 б), 5.80—5.82, 7.2, 7.10 б), 7.32, 7.36, 8.6, 8.46—8.54, 9.33, 9.34, 9.40, 9.65—9.76, 10.64, 11.29—11.34, 13.6, 14.5, 14.8, 14.50, 14.51, 15.12, 15.15, 16.5, 17.4, 17.19, 18.38, 18.41, 19.1, 20.19—20.21, 26.14, 26.15, 29.38, 30.24, 30.28, 30.30, 30.45.

§ 3. Теорема Птолемея

6.37*. Четырёхугольник $ABCD$ вписанный. Докажите, что $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ (Птолемей).

6.38*. Четырёхугольник $ABCD$ вписанный. Докажите, что

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB \cdot AD + CB \cdot CD}{BA \cdot BC + DA \cdot DC}.$$

6.39*. Пусть $\alpha = \pi/7$. Докажите, что $\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 3\alpha}$.

6.40*. Расстояния от центра описанной окружности остроугольного треугольника до его сторон равны d_a, d_b и d_c. Докажите, что $d_a + d_b + d_c = R + r$.

6.41*. Вписанная окружность касается сторон BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1. Пусть Q — середина отрезка A_1B_1. Докажите, что $\angle B_1C_1C = \angle QC_1A_1$.

6.42*. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке D. Докажите, что $AB + AC \leqslant 2AD$.

6.43*. На дуге CD описанной окружности квадрата $ABCD$ взята точка P. Докажите, что $PA + PC = \sqrt{2}PB$.

6.44*. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность, проходящая через точку A, пересекает отрезки AB, AC и AD в точках P, Q и R соответственно. Докажите, что $AP \cdot AB + AR \cdot AD = AQ \cdot AC$.

6.45*. На дуге A_1A_{2n+1} описанной окружности S правильного $(2n+1)$-угольника $A_1 \ldots A_{2n+1}$ взята точка A. Докажите, что:

а) $d_1 + d_3 + \ldots + d_{2n+1} = d_2 + d_4 + \ldots + d_{2n}$, где $d_i = AA_i$;

б) $l_1 + \ldots + l_{2n+1} = l_2 + \ldots + l_{2n}$, где l_i — длина касательной, проведённой из точки A к окружности радиуса r, касающейся S в точке A_i (все касания одновременно внутренние или внешние).

6.46*. Окружности радиусов x и y касаются окружности радиуса R, причём расстояние между точками касания равно a. Вычислите длину следующей общей касательной к первым двум окружностям:

а) внешней, если оба касания внешние или внутренние одновременно;

б) внутренней, если одно касание внутреннее, а другое внешнее.

6.47*. Окружности α, β, γ и δ касаются данной окружности в вершинах A, B, C и D выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Пусть $t_{\alpha\beta}$ — длина общей касательной к окружностям α и β (внешней, если оба касания внутренние или внешние одновременно, и внутренней, если одно касание внутреннее, а другое внешнее); $t_{\beta\gamma}$, $t_{\gamma\delta}$ и т. д. определяются аналогично. Докажите, что $t_{\alpha\beta}t_{\gamma\delta} + t_{\beta\gamma}t_{\delta\alpha} = t_{\alpha\gamma}t_{\beta\delta}$ (обобщённая теорема Птолемея).

См. также задачу 9.70.

§ 4. Пятиугольники

6.48*. В равностороннем (неправильном) пятиугольнике $ABCDE$ угол ABC вдвое больше угла DBE. Найдите величину угла ABC.

6.49*. а) Диагонали AC и BE правильного пятиугольника $ABCDE$ пересекаются в точке K. Докажите, что описанная окружность треугольника CKE касается прямой BC.

б) Пусть a — длина стороны правильного пятиугольника, d — длина его диагонали. Докажите, что $d^2 = a^2 + ad$.

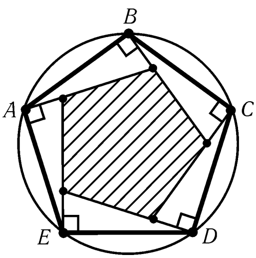


Рис. 6.2

6.50*. Докажите, что в правильный пятиугольник можно так вписать квадрат, что его вершины будут лежать на четырёх сторонах пятиугольника.

6.51*. Правильный пятиугольник $ABCDE$ со стороной a вписан в окружность S. Прямые, проходящие через его вершины перпендикулярно сторонам, образуют правильный пятиугольник со стороной b (рис. 6.2). Сторона правильного пятиугольника, описанного около окружности S, равна c. Докажите, что $a^2+b^2=c^2$.

См. также задачи 2.62, 4.9, 6.60, 6.95, 9.24, 9.46, 9.77, 9.78, 10.66, 10.70, 12.8, 13.10, 13.59, 20.12, 29.7.

§ 5. Шестиугольники

6.52*. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ противоположные стороны попарно параллельны. Докажите, что:

а) площадь треугольника ACE составляет не менее половины площади шестиугольника.

б) площади треугольников ACE и BDF равны.

6.53*. Все углы выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ равны. Докажите, что $|BC-EF|=|DE-AB|=|AF-CD|$.

6.54*. Суммы углов при вершинах A, C, E и B, D, F выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ с равными сторонами равны. Докажите, что противоположные стороны этого шестиугольника параллельны.

6.55*. Докажите, что если в выпуклом шестиугольнике каждая из трёх диагоналей, соединяющих противоположные вершины, делит площадь пополам, то эти диагонали пересекаются в одной точке.

6.56*. Докажите, что если в выпуклом шестиугольнике каждый из трёх отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, делит площадь пополам, то эти отрезки пересекаются в одной точке.

6.57*. а) Противоположные стороны выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ попарно параллельны. Докажите, что этот шестиугольник вписанный тогда и только тогда, когда его диагонали AD, BE и CF равны.

б) Докажите аналогичное утверждение для невыпуклого (возможно, самопересекающегося) шестиугольника.

См. также задачи 1.45, 2.12, 2.21, 2.49, 3.73, 4.6, 4.28, 4.31, 5.17, 5.84, 5.98, 6.97, 9.47 а), 9.79—9.81, 13.3, 14.6, 18.16, 18.17, 18.24, 18.25, 29.37 а), 30.41, 30.42.

§ 6. Правильные многоугольники

6.58. Число сторон многоугольника $A_1\ldots A_n$ нечётно. Докажите, что:

а) если этот многоугольник вписанный и все его углы равны, то он правильный;

б) если этот многоугольник описанный и все его стороны равны, то он правильный.

6.59. Все углы выпуклого многоугольника $A_1\ldots A_n$ равны, и из некоторой его внутренней точки O все стороны видны под равными углами. Докажите, что этот многоугольник правильный.

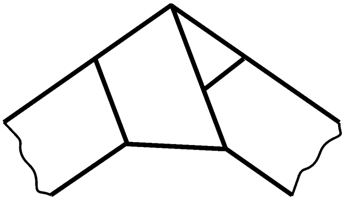


Рис. 6.3

6.60*. Бумажная лента постоянной ширины завязана простым узлом и затем стянута так, чтобы узел стал плоским (рис. 6.3). Докажите, что узел имеет форму правильного пятиугольника.

6.61*. На сторонах AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$ построены внутренним образом правильные треугольники ABK, BCL, CDM и DAN. Докажите, что середины сторон этих треугольников (не являющихся сторонами квадрата) и середины отрезков KL, LM, MN и NK образуют правильный двенадцатиугольник.

6.62*. Существует ли правильный многоугольник, длина одной диагонали которого равна сумме длин двух других диагоналей?

6.63*. Правильный $(4k+2)$-угольник вписан в окружность радиуса R с центром O. Докажите, что сумма длин отрезков, высекаемых углом A_kOA_{k+1} на прямых A_1A_{2k}, A_2A_{2k-1}, ..., A_kA_{k+1}, равна R.

6.64*. В правильном восемнадцатиугольнике $A_1 \ldots A_{18}$ проведены диагонали A_aA_d, A_bA_e и A_cA_f. Пусть $k=a-b$, $p=b-c$, $m=c-d$, $q=d-e$, $n=e-f$ и $r=f-a$. Докажите, что указанные диагонали пересекаются в одной точке в любом из следующих случаев:

а) $\{k, m, n\} = \{p, q, r\}$;

б) $\{k, m, n\} = \{1, 2, 7\}$ и $\{p, q, r\} = \{1, 3, 4\}$;

в) $\{k, m, n\} = \{1, 2, 8\}$ и $\{p, q, r\} = \{2, 2, 3\}$.

Замечание. Равенство $\{k, m, n\} = \{x, y, z\}$ означает, что указанные наборы чисел совпадают; порядок их записи при этом не учитывается.

6.65*. В правильном тридцатиугольнике проведены три диагонали. Определим для них наборы $\{k, m, n\}$ и $\{p, q, r\}$ так же, как и в предыдущей задаче. Докажите, что если $\{k, m, n\} = \{1, 3, 14\}$ и $\{p, q, r\} = \{2, 2, 8\}$, то диагонали пересекаются в одной точке.

Замечание. Тройки диагоналей, пересекающихся в одной точке, подробно обсуждаются на с. 613—617.

6.66*. В правильном n-угольнике ($n \geqslant 3$) отмечены середины всех сторон и диагоналей. Какое наибольшее число отмеченных точек лежит на одной окружности?

6.67*. Вершины правильного n-угольника окрашены в несколько цветов так, что точки одного цвета служат вершинами правильного многоугольника. Докажите, что среди этих многоугольников найдутся два равных.

6.68*. Докажите, что при $n \geqslant 6$ правильный $(n-1)$-угольник нельзя вписать в правильный n-угольник так, чтобы на всех сторонах

n-угольника, кроме одной, лежало ровно по одной вершине $(n-1)$-угольника.

* * *

6.69. Пусть O — центр правильного n-угольника $A_1\dots A_n$, X — произвольная точка. Докажите, что $\overrightarrow{OA_1} + \dots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$ и $\overrightarrow{XA_1} + \dots$ $\dots + \overrightarrow{XA_n} = n\overrightarrow{XO}$.

6.70. Докажите, что в вершинах правильного n-угольника можно расставить действительные числа $x_1, \dots, x_n$, все отличные от нуля, так, чтобы для любого правильного k-угольника, все вершины которого являются вершинами исходного n-угольника, сумма чисел, стоящих в его вершинах, равнялась нулю.

6.71. Точка A лежит внутри правильного десятиугольника $X_1\dots X_{10}$, а точка B — вне его. Пусть $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AX_1} + \dots + \overrightarrow{AX_{10}}$ и $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{BX_1} + \dots + \overrightarrow{BX_{10}}$. Может ли оказаться, что $|\boldsymbol{a}| > |\boldsymbol{b}|$?

6.72. Правильный многоугольник $A_1\dots A_n$ вписан в окружность радиуса R с центром O; X — произвольная точка. Докажите, что $A_1X^2 + \dots + A_nX^2 = n(R^2 + d^2)$, где $d = OX$.

6.73. Найдите сумму квадратов длин всех сторон и диагоналей правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса R.

6.74. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки X до вершин правильного n-угольника будет наименьшей, если X — центр n-угольника.

6.75. Правильный n-угольник $A_1\dots A_n$ вписан в окружность радиуса R с центром O; $\boldsymbol{e}_i = \overrightarrow{OA_i}$, $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OX}$ — произвольный вектор. Докажите, что $\sum(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{x})^2 = nR^2 \cdot OX^2/2$.

6.76. Найдите сумму квадратов расстояний от вершин правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса R, до произвольной прямой, проходящей через центр многоугольника.

6.77. Расстояние от точки X до центра правильного n-угольника равно d, r — радиус вписанной окружности n-угольника. Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки X до прямых, содержащих стороны n-угольника, равна $n(r^2 + d^2/2)$.

6.78. Докажите, что сумма квадратов длин проекций сторон правильного n-угольника на любую прямую равна $na^2/2$, где a — сторона n-угольника.

6.79*. Правильный n-угольник $A_1\dots A_n$ вписан в окружность радиуса R; X — точка этой окружности. Докажите, что $XA_1^4 + \dots + XA_n^4 =$ $= 6nR^4$.

6.80*. а) Правильный n-угольник $A_1\dots A_n$ вписан в окружность радиуса 1 с центром O; $\boldsymbol{e}_i = \overrightarrow{OA_i}$, $\boldsymbol{u}$ — произвольный вектор. Докажите, что $\sum(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_i = n\boldsymbol{u}/2$.

б) Из произвольной точки X опущены перпендикуляры $XA_1, \dots$ $\dots, XA_n$ на стороны правильного n-угольника (или на их продолжения). Докажите, что $\sum \overrightarrow{XA_i} = n\overrightarrow{XO}/2$, где O — центр n-угольника.

6.81*. Докажите, что если число n не является степенью простого числа, то существует выпуклый n-угольник со сторонами длиной $1, 2, \ldots, n$, все углы которого равны.

См. также задачи 2.9, 2.49, 4.28, 4.61, 4.64, 6.39, 6.45, 6.49—6.51, 8.69, 9.51, 9.79, 9.87, 9.88, 10.66, 11.46, 11.48, 13.15, 17.32, 18.34, 19.48, 23.8, 24.2, 25.3, 25.4, 27.11, 30.34.

§ 7. Вписанные и описанные многоугольники

6.82*. На сторонах треугольника внешним образом построены три квадрата. Какими должны быть углы треугольника, чтобы шесть вершин этих квадратов, отличных от вершин треугольника, лежали на одной окружности?

6.83*. В окружность вписан $2n$-угольник $A_1 \ldots A_{2n}$. Пусть $p_1, \ldots, p_{2n}$ — расстояния от произвольной точки M окружности до сторон $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{2n}A_1$. Докажите, что $p_1p_3 \ldots p_{2n-1} = p_2p_4 \ldots p_{2n}$.

6.84*. Вписанный многоугольник разбит непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что сумма радиусов всех вписанных в эти треугольники окружностей не зависит от разбиения.

6.85*. Два n-угольника вписаны в одну окружность, причём наборы длин их сторон одинаковы, но не обязательно равны соответственные стороны. Докажите, что площади этих многоугольников равны.

6.86*. Положительные числа $a_1, \ldots, a_n$ таковы, что $2a_i < a_1 + \ldots + a_n$ при всех $i = 1, \ldots, n$. Докажите, что существует вписанный n-угольник, длины сторон которого равны $a_1, \ldots, a_n$.

* * *

6.87. Точка, лежащая внутри описанного n-угольника, соединена отрезками со всеми вершинами и точками касания. Образовавшиеся при этом треугольники попеременно окрашены в красный и синий цвет. Докажите, что произведение площадей красных треугольников равно произведению площадей синих треугольников.

6.88*. В $2n$-угольнике (n нечётно) $A_1 \ldots A_{2n}$, описанном около окружности с центром O, диагонали $A_1A_{n+1}, A_2A_{n+2}, \ldots, A_{n-1}A_{2n-1}$ проходят через точку O. Докажите, что и диагональ A_nA_{2n} проходит через точку O.

6.89*. Окружность радиуса r касается сторон многоугольника в точках $A_1, \ldots, A_n$, причём длина стороны, на которой лежит точка A_i, равна a_i. Точка X удалена от центра окружности на расстояние d. Докажите, что $a_1XA_1^2 + \ldots + a_nXA_n^2 = P(r^2 + d^2)$, где P — периметр многоугольника.

6.90*. Около окружности описан n-угольник $A_1 \ldots A_n$; l — произвольная касательная к окружности, не проходящая через вершины n-угольника. Пусть a_i — расстояние от вершины A_i до прямой l, b_i — расстояние от точки касания стороны A_iA_{i+1} с окружностью до прямой l. Докажите, что:

а) величина $b_1 \dots b_n/(a_1 \dots a_n)$ не зависит от выбора прямой l;

б) величина $a_1a_3 \dots a_{2m-1}/(a_2a_4 \dots a_{2m})$ не зависит от выбора прямой l, если $n = 2m$.

6.91*. Некоторые стороны выпуклого многоугольника красные, остальные синие. Сумма длин красных сторон меньше половины периметра, и нет ни одной пары соседних синих сторон. Докажите, что в этот многоугольник нельзя вписать окружность.

См. также задачи 1.45, 2.12, 2.13, 2.62, 4.40, 4.54, 5.119 а), 9.36, 11.36, 11.46 б), 11.48 б), 13.38, 19.6, 22.13.

§ 8. Произвольные выпуклые многоугольники

6.92. Какое наибольшее число острых углов может иметь выпуклый многоугольник?

6.93*. Сколько в выпуклом многоугольнике может быть сторон, равных по длине наибольшей диагонали?

6.94*. Для каких n существует выпуклый n-угольник, у которого одна сторона имеет длину 1, а длины всех диагоналей — целые числа?

6.95*. Может ли выпуклый неправильный пятиугольник иметь ровно четыре стороны одинаковой длины и ровно четыре диагонали одинаковой длины?

Может ли в таком пятиугольнике пятая сторона иметь общую точку с пятой диагональю?

6.96*. Точка O, лежащая внутри выпуклого многоугольника, образует с каждыми двумя его вершинами равнобедренный треугольник. Докажите, что точка O равноудалена от вершин этого многоугольника.

См. также задачи 4.50, 4.51, 9.86, 9.89, 9.90, 11.35, 13.16, 14.28, 16.8, 17.35, 17.36, 19.9, 23.13, 23.15.

§ 9. Теорема Паскаля

6.97*. Докажите, что точки пересечения противоположных сторон (если эти стороны не параллельны) вписанного шестиугольника лежат на одной прямой (Паскаль).

6.98*. Точка M лежит на описанной окружности треугольника ABC; R — произвольная точка. Прямые AR, BR и CR пересекают описанную окружность в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что точки пересечения прямых MA_1 и BC, MB_1 и CA, MC_1 и AB лежат на одной прямой, проходящей через точку R.

6.99*. Даны треугольник ABC и некоторая точка T. Пусть P и Q — основания перпендикуляров, опущенных из точки T на прямые AB и AC соответственно, а R и S — основания перпендикуляров, опущенных из точки A на прямые TC и TB соответственно. Докажите, что точка пересечения прямых PR и QS лежит на прямой BC.

6.100*. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1 и биссектрисы AA_2 и BB_2; вписанная окружность касается сторон BC и AC в точках A_3 и B_3. Докажите, что прямые A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3 пересекаются в одной точке или параллельны.

6.101*. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность S; X — произвольная точка, M и N — вторые точки пересечения прямых XA и XD с окружностью S. Прямые DC и AX, AB и DX пересекаются в точках E и F. Докажите, что точка пересечения прямых MN и EF лежит на прямой BC.

6.102*. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Точка X такова, что $\angle BAX = \angle CDX = 90^\circ$. Докажите, что точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$ лежит на прямой XO.

6.103*. Точки A и A_1, лежащие внутри окружности с центром O, симметричны относительно точки O. Лучи AP и A_1P_1 сонаправлены, лучи AQ и A_1Q_1 тоже сонаправлены. Докажите, что точка пересечения прямых P_1Q и PQ_1 лежит на прямой AA_1. (Точки P, P_1, Q и Q_1 лежат на окружности.)

6.104*. Две окружности касаются описанной окружности треугольника ABC в точке K дуги BC (не содержащей точку A); кроме того, одна из этих окружностей касается стороны AB в точке M, а другая касается стороны AC в точке N. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника ABC лежит на прямой MN.

6.105*. Даны пять точек некоторой окружности. С помощью одной линейки постройте шестую точку этой окружности.

6.106*. Точки $A_1, \ldots, A_6$ лежат на одной окружности, а точки K, L, M и N — на прямых A_1A_2, A_3A_4, A_1A_6 и A_4A_5 соответственно, причём $KL \parallel A_2A_3$, $LM \parallel A_3A_6$ и $MN \parallel A_6A_5$. Докажите, что $NK \parallel A_5A_2$.

См. также задачи 5.84, 30.33, 30.42, 30.49, 31.52.

Задачи для самостоятельного решения

6.107. Докажите, что если $ABCD$ — прямоугольник, а P — произвольная точка, то $AP^2 + CP^2 = DP^2 + BP^2$.

6.108. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны. На его сторонах внешним образом построены квадраты с центрами P, Q, R и S. Докажите, что отрезок PR проходит через точку пересечения диагоналей AC и BD, причём $PR = (AC + BD)/\sqrt{2}$.

6.109. На наибольшей стороне AC треугольника ABC взяты точки A_1 и C_1 так, что $AC_1 = AB$ и $CA_1 = CB$, а на сторонах AB и BC взяты точки A_2 и C_2 так, что $AA_1 = AA_2$ и $CC_1 = CC_2$. Докажите, что четырёхугольник $A_1A_2C_2C_1$ вписанный.

6.110. В окружность вписан выпуклый семиугольник. Докажите, что если какие-то три его угла равны 120°, то какие-то две его стороны равны.

6.111. На плоскости даны правильный n-угольник $A_1 \ldots A_n$ и точка P. Докажите, что из отрезков $A_1P, \ldots, A_nP$ можно составить замкнутую линию.

6.112. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность S_1 и описан около окружности S_2; K, L, M и N — точки касания его сторон с окружностью S_2. Докажите, что $KM \perp LN$.

6.113. Около окружности описан пятиугольник $ABCDE$, длины сторон которого — целые числа, причём $AB = CD = 1$. Найдите длину отрезка BK, где K — точка касания стороны BC с окружностью.

6.114. Докажите, что в правильном $2n$-угольнике $A_1 \ldots A_{2n}$ диагонали A_1A_{n+2}, $A_{2n-1}A_3$ и $A_{2n}A_5$ пересекаются в одной точке.

6.115. Докажите, что в правильном двадцатичетырёхугольнике $A_1 \ldots A_{24}$ диагонали A_1A_7, A_3A_{11} и A_5A_{21} пересекаются в точке, лежащей на диаметре A_4A_{16}.

Решения

6.1. Пусть O — центр вписанной окружности и точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Тогда $\angle ACB = \angle ACD$ и $\angle BAC = \angle CAD$. Поэтому треугольники ABC и ADC равны, так как сторона AC у них общая. Следовательно, $AB = DA$. Аналогично $AB = BC = CD = DA$.

6.2. Ясно, что $\angle AOB = 180^\circ - \angle BAO - \angle ABO = 180^\circ - (\angle A + \angle B)/2$ и $\angle COD = 180^\circ - (\angle C + \angle D)/2$. Поэтому $\angle AOB + \angle COD = 360^\circ - (\angle A + \angle B + \angle C + \angle D)/2 = 180^\circ$.

6.3. Рассмотрим две окружности, касающиеся сторон данного четырёхугольника и их продолжений. Прямые, содержащие стороны четырёхугольника, являются общими внутренними и внешними касательными к этим окружностям. Прямая, соединяющая центры окружностей, содержит диагональ четырёхугольника, и, кроме того, она является осью симметрии четырёхугольника. Значит, вторая диагональ перпендикулярна этой прямой.

6.4. Пусть O — центр данной окружности, R — её радиус, a — длина хорд, высекаемых окружностью на сторонах четырёхугольника. Тогда расстояния от точки O до сторон четырёхугольника равны $\sqrt{R^2 - a^2/4}$, т. е. она равноудалена от сторон четырёхугольника и является центром вписанной окружности.

6.5. Для параллелограмма утверждение задачи очевидно, поэтому можно считать, что прямые AB и CD пересекаются. Пусть O — центр вписанной окружности четырёхугольника $ABCD$; M и N — середины диагоналей AC и BD. Тогда $S_{ANB} + S_{CND} = S_{AMB} + S_{CMD} = S_{AOB} + S_{COD} = S_{ABCD}/2$. Остаётся воспользоваться результатом задачи 7.2.

6.6. Пусть вписанная окружность касается сторон DA, AB и BC в точках M, H и N соответственно. Тогда OH — высота треугольника AOB и при симметрии относительно прямых AO и BO точка H переходит в точки M и N соответственно. Поэтому согласно задаче 1.58 точки A_1 и B_1 лежат на прямой MN. Аналогично точки C_1 и D_1 лежат на прямой MN.

6.7. Пусть r — расстояние от точки пересечения биссектрис углов A и D до основания AD, r' — расстояние от точки пересечения биссектрис углов B и C до основания BC. Тогда $AD = r(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)$ и $BC = r'(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)$. Поэтому $r = r'$ тогда и только тогда, когда $BC/AD = (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)/(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta) = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$.

Если $r = r'$, то рассматриваемые точки пересечения биссектрис удалены на расстояние r от боковых сторон трапеции. Но для трапеции, отличной от параллелограмма, есть только одна точка, удалённая от боковых сторон на расстояние r.

6.8. Пусть $\angle A = 2\alpha$, $\angle C = 2\beta$ и $\angle BMA = 2\varphi$. Согласно задаче 6.7 $PK/RL = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varphi$ и $LS/MC = \operatorname{ctg}\varphi\operatorname{tg}\beta$. Так как $PQ/RS = PK/RL$ и $RS/AC = LS/MC$, то $PQ/AC = (PK/RL)(LS/MC) = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$. Следовательно, трапеция $APQC$ описанная.

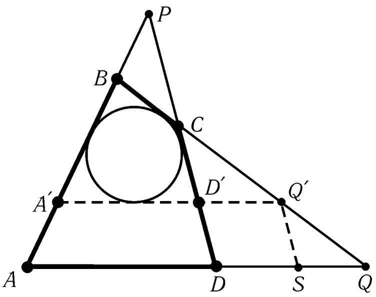


Рис. 6.4

6.9. Докажем сначала, что если четырёхугольник $ABCD$ описанный, то выполняются все условия. Пусть K, L, M и N — точки касания вписанной окружности со сторонами AB, BC, CD и DA. Тогда $AB + CD = AK + BK + CM + DM = AN + BL + CL + DN = BC + AD$, $AP + CQ = AK + PK + QL - CL = AN + PM + QN - CM = AQ + CP$ и $BP + BQ = AP - AB + BC + CQ = (AP + CQ) + (BC - AB) = AQ + CP + CD - AD = DP + DQ$.

Докажем теперь, например, что если $BP + BQ = DP + DQ$, то четырёхугольник $ABCD$ описанный. Рассмотрим для этого окружность, касающуюся стороны BC и лучей BA и CD. Предположим, что прямая AD не касается этой окружности; сдвинем эту прямую так, чтобы она коснулась окружности (рис. 6.4). Пусть S — такая точка прямой AQ, что $Q'S \parallel DD'$. Так как $BP + BQ = DP + DQ$ и $BP + BQ' = D'P + D'Q'$, то $QS + SQ' = QQ'$. Получено противоречие. В двух других случаях доказательство проводится аналогично.

6.10. Пусть лучи AB и DC пересекаются в точке P, лучи BC и AD — в точке Q; данные прямые, проходящие через точки P и Q, пересекаются в точке O. Согласно задаче 6.9 $BP + BQ = OP + OQ$ и $OP + OQ = DP + DQ$. Следовательно, $BP + BQ = DP + DQ$, а значит, четырёхугольник $ABCD$ описанный.

6.11. Пусть O — точка пересечения общих внешних касательных к вписанным окружностям треугольников ABK_1 и ACK_2 (рис. 6.5). Проведём из точки O касательную l к вписанной окружности треугольника, образованного прямыми AK_1, AK_2 и касательной к вписанным окружностям треугольников ABK_1 и ACK_2, отличной от прямой BC. Пусть прямая l пересекает прямые AB и AK_2 в точках B' и K_2'. Согласно задаче 6.10 четырёхугольник $BK_2K_2'B'$ описанный. Это означает, что прямая l касается вписанной окружности треугольника ABK_2. Аналогично доказывается, что прямая l касается вписанной окружности треугольника ACK_1.

6.12. а) Сопоставим окружности $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ с заданной на ней ориентацией (направлением обхода) точку с координатами $(a, b, \pm r)$, где знак перед r соответствует ориентации окружности. Рассмотрим пару пересекающихся прямых, на которых заданы ориентации (направления). Легко

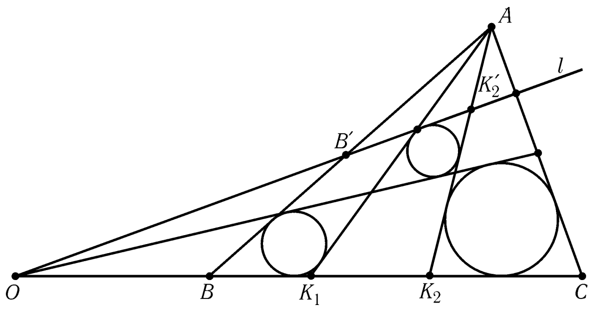


Рис. 6.5

убедиться, что семейству ориентированных окружностей, касающихся данных прямых так, что в точках касания ориентации согласованы, сопоставляется прямая в пространстве, проходящая через точку плоскости $r=0$, соответствующую точке пересечения двух данных прямых.

Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке P, а прямые BC и AD — в точке Q. Предположим, что четырёхугольники, примыкающие к вершинам A, B и C, описанные. Зададим на вписанных в них окружностях ориентации согласованным образом и перенесём эти ориентации на касательные. Пусть этим ориентированным окружностям соответствуют точки O_a, O_b и O_c. Тогда точки O_a, O_b и P лежат на одной прямой; точки O_b, O_c и Q тоже лежат на одной прямой. Следовательно, все эти точки лежат в одной плоскости. Поэтому прямые O_aQ и O_cP пересекаются в некоторой точке O_d. (Вообще говоря, эти прямые могли бы быть параллельны. Чтобы исключить такую возможность, нужно воспользоваться тем, что если, например, точка B лежит между A и P, то точка O_b лежит между O_a и P.) Точке O_d соответствует окружность, вписанная в четырёхугольник, примыкающий к вершине D.

б) Радиусы r_a, r_b, r_c, r_d пропорциональны расстояниям от точек O_a, O_b, O_c, O_d до прямой PQ. Поэтому нужно лишь воспользоваться результатом задачи 1.3 б).

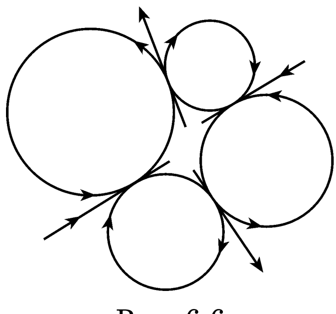


Рис. 6.6

6.13. На окружностях и касательных можно выбрать ориентации согласованным образом (рис. 6.6). Пусть A_i — точка пересечения касательных к окружности S_i. Ориентации касательных задают ориентацию четырёхугольника $A_1A_2A_3A_4$ (этот четырёхугольник может быть невыпуклым). Из равенства длин касательных, проведённых из точки A_i к окружности S_i, следует, что

$$A_1A_2 + A_3A_4 = A_2A_3 + A_1A_4. \tag{1}$$

Воспользовавшись результатом задачи 6.9, получим, что стороны четырёхугольника $A_1A_2A_3A_4$ (или их продолжения) касаются одной окружности, если только этот четырёхугольник невырожденный.

Если три касательные пересекаются в одной точке, то из равенства (1) следует, что четырёхугольник $A_1A_2A_3A_4$ вырождается в отрезок или в точку. В отрезок он вырождаться не может, поскольку если две касательные сливаются в одну прямую l, то они должны соответствовать противоположным сторонам четырёхугольника; в этом случае все касательные пересекаются в одной точке (середине отрезка, высекаемого на прямой l точками касания).

6.14. Пусть стороны AB, BC, CD, DA четырёхугольника $ABCD$ касаются вписанной окружности в точках E, F, G, H соответственно.

Покажем сначала, что прямые FH, EG и AC пересекаются в одной точке. Обозначим точки, в которых прямые FH и EG пересекают прямую AC, через M и M' соответственно. Поскольку $\angle AHM = \angle BFM$ как углы между касательными и хордой HF, то $\sin AHM = \sin CFM$. Поэтому $\dfrac{AM\cdot MH}{FM\cdot MC}=\dfrac{S_{AMH}}{S_{FMC}}=\dfrac{AH\cdot MH}{FC\cdot FM}$, т. е. $\dfrac{AM}{MC}=\dfrac{AH}{FC}$. Аналогично $\dfrac{AM'}{M'C}=\dfrac{AE}{CG}=\dfrac{AH}{FC}=\dfrac{AM}{MC}$, поэтому $M = M'$, т. е. прямые FH, EG и AC пересекаются в одной точке.

Аналогичные рассуждения показывают, что прямые FH, EG и BD пересекаются в одной точке, поэтому прямые AC, BD, FH и EG пересекаются в одной точке.

6.15. Отрезки CH_d и DH_c параллельны, так как они перпендикулярны прямой AB. Кроме того, так как $\angle BCA = \angle BDA = \varphi$, длины этих отрезков равны $AB|\operatorname{ctg}\varphi|$ (см. задачу 5.51 б).

6.16. Пусть O_a, O_b, O_c и O_d — центры вписанных окружностей треугольников BCD, ACD, ABD и ABC соответственно. Так как $\angle ADB = \angle ACB$, то $\angle AO_cB = 90^\circ + (\angle ADB/2) = 90^\circ + (\angle ACB/2) = \angle AO_dB$ (см. задачу 5.3). Поэтому четырёхугольник ABO_dO_c вписанный, т. е. $\angle O_cO_dB = 180^\circ - \angle O_cAB = 180^\circ - (\angle A/2)$. Аналогично $\angle O_aO_dB = 180^\circ - (\angle C/2)$. Так как $\angle A + \angle C = 180^\circ$, то $\angle O_cO_dB + \angle O_aO_dB = 270^\circ$, а значит, $\angle O_aO_dO_c = 90^\circ$. Аналогично доказывается, что и остальные углы четырёхугольника $O_aO_bO_cO_d$ равны 90°.

6.17. а) Пусть лучи AB и DC пересекаются в точке P, а лучи BC и AD — в точке Q. Докажем, что точка M, в которой пересекаются описанные окружности треугольников CBP и CDQ, лежит на отрезке PQ. В самом деле, $\angle CMP + \angle CMQ = \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$. Поэтому $PM + QM = PQ$, а так как $PM \cdot PQ = PD \cdot PC = p^2 - R^2$ и $QM \cdot PQ = QC \cdot QB = q^2 - R^2$, то $PQ^2 = PM \cdot PQ + QM \cdot PQ = p^2 + q^2 - 2R^2$.

Пусть N — точка пересечения описанных окружностей треугольников ACP и ABS. Докажем, что точка S лежит на отрезке PN. В самом деле, $\angle ANP = \angle ACP = 180^\circ - \angle ACD = 180^\circ - \angle ABD = \angle ANS$. Поэтому $PN - SN = PS$, а так как $PN \cdot PS = PA \cdot PB = p^2 - R^2$ и $SN \cdot PS = SA \cdot SC = R^2 - s^2$, то $PS^2 = PN \cdot PS - SN \cdot PS = p^2 + s^2 - 2R^2$. Аналогично $QS^2 = q^2 + s^2 - 2R^2$.

б) Согласно задаче а) $PQ^2 - PS^2 = q^2 - s^2 = OQ^2 - OS^2$. Следовательно, $OP \perp QS$ (см. задачу 7.6). Аналогично доказывается, что $OQ \perp PS$ и $OS \perp PQ$.

6.18. Пусть вписанные окружности треугольников ABC и ACD касаются диагонали AC в точках M и N соответственно. Тогда $AM = (AC + AB - BC)/2$ и $AN = (AC + AD - CD)/2$ (см. задачу 3.2). Точки M и N совпадают тогда и только тогда, когда $AM = AN$, т. е. $AB + CD = BC + AD$. Итак, если точки M и N совпадают, то четырёхугольник $ABCD$ описанный, и аналогичные рассуждения показывают, что точки касания вписанных окружностей треугольников ABD и BCD с диагональю BD совпадают.

Пусть вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB, BC и CA в точках P, Q и M, а вписанная окружность треугольника ACD касается сторон AC, CD и DA в точках M, R и S. Так как $AP = AM = AS$ и $CQ = CM = CR$, то треугольники APS, BPQ, CQR и DRS равнобедренные; пусть α, β, γ и δ — углы при основаниях этих равнобедренных треугольников. Сумма углов этих треугольников равна $2(\alpha+\beta+\gamma+\delta) + \angle A + \angle B + \angle C + \angle D$, поэтому $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 180^\circ$. Следовательно, $\angle SPQ + \angle SRQ = 360^\circ - (\alpha+\beta+\gamma+\delta) = 180^\circ$, т. е. четырёхугольник $PQRS$ вписанный.

6.19. Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD; A_1, B_1, C_1 и D_1 — её проекции на стороны AB, BC, CD и DA. Точки A_1 и D_1 лежат на окружности с диаметром AO, поэтому $\angle OA_1D_1 = \angle OAD_1$. Аналогично $\angle OA_1B_1 = \angle OBB_1$. А так как $\angle CAD = \angle CBD$, то $\angle OA_1D_1 = \angle OA_1B_1$. Аналогично доказывается, что B_1O, C_1O и D_1O — биссектрисы углов четырёхугольника $A_1B_1C_1D_1$, т. е. O — центр его вписанной окружности.

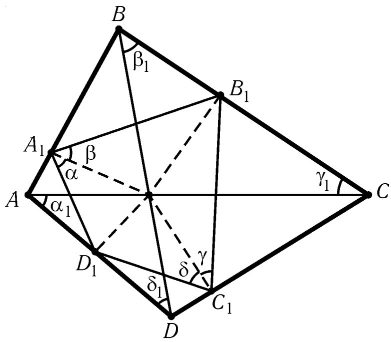


Рис. 6.7

6.20. Воспользуемся обозначениями рис. 6.7. Условие вписанности четырёхугольника $A_1B_1C_1D_1$ эквивалентно тому, что $(\alpha+\beta) + (\gamma+\delta) = 180^\circ$, а перпендикулярность диагоналей AC и BD — тому, что $(\alpha_1+\delta_1) + (\beta_1+\gamma_1) = 180^\circ$. Ясно также, что $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, $\gamma = \gamma_1$ и $\delta = \delta_1$.

6.21. По теореме косинусов $AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD \cdot \cos ACD$ и $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B$. А так как длина проекции отрезка AC на прямую l, перпендикулярную CD, равна сумме длин проекций отрезков AB и BC на прямую l, то $AC \cos ACD = AB \cos\varphi + BC \cos C$.

6.22. Пусть $\angle AOD = 2\alpha$. Тогда расстояния от точки O до проекций середин диагоналей AC и BD на биссектрису угла AOD равны $\cos\alpha(OA+OC)/2$ и $\cos\alpha(OB+OD)/2$ соответственно. Так как $OA + OC = AB + OB + OC = CD + OB + OC = OB + OD$, эти проекции совпадают.

6.23. Достроим треугольники ABM и DCM до параллелограммов $ABMM_1$ и $DCMM_2$. Так как $AM_1 : DM_2 = BM : MC = AN : DN$, то $\triangle ANM_1 \sim \triangle DNM_2$. Поэтому точка N лежит на отрезке M_1M_2 и $MM_1 : MM_2 = AB : CD = AN : ND = M_1N : M_2N$, т. е. MN — биссектриса угла M_1MM_2.

6.24. Пусть a, b, c и d — биссектрисы углов при вершинах A, B, C и D. Нужно проверить, что $\angle(a, b) + \angle(c, d) = 0^\circ$. Ясно, что $\angle(a, b) = \angle(a, AB) + \angle(AB, b)$ и $\angle(c, d) = \angle(c, CD) + \angle(CD, d)$. Так как четырёхугольник $ABCD$ выпуклый, из равенств $\angle(a, AB) = \angle(AD, AB)/2$, $\angle(AB, b) = \angle(AB, BC)/2$, $\angle(c, CD) = \angle(CB, CD)/2$ и $\angle(CD, d) = \angle(CD, DA)/2$ получаем $\angle(a, b) + \angle(c, d) = (\angle(AD, AB) + \angle(AB, BC) + \angle(CB, CD) + \angle(CD, DA))/2 = 360^\circ/2 = 0^\circ$. (По поводу ориентированных углов между прямыми см. с. 30.)

6.25. Пусть для определённости $AB > A_1B_1$. При параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{CB}$ треугольник SD_1C_1 переходит в $S'D_1'C_1'$, а отрезок CD переходит в BA. Так как $QA_1 : QA = A_1B_1 : AB = D_1'C_1' : AB = S'D_1' : S'A$, то $QS' \parallel A_1D_1'$. Следовательно, $QS \parallel AD$. Аналогично $PR \parallel AB$.

6.26. Предположим, что прямые AD и BC не параллельны. Пусть M_2, K, N_2 — середины сторон AB, BC, CD соответственно. Если $MN \| BC$, то $BC \| AD$, так как $AM = MC$ и $BN = ND$. Поэтому будем считать, что прямые MN и BC не параллельны, т. е. $M_1 \neq M_2$ и $N_1 \neq N_2$. Ясно, что $\overrightarrow{M_2M} = \overrightarrow{BC}/2 = \overrightarrow{NN_2}$ и $\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{NN_1}$. Поэтому $M_1M_2 \parallel N_1N_2$. Следовательно, $KM \parallel AB \parallel CD \parallel KN$, т. е. $M = N$. Получено противоречие.

6.27. Преобразованием подобия можно совместить одну пару соответственных сторон четырёхугольников, поэтому достаточно рассмотреть четырёхугольники $ABCD$ и ABC_1D_1, у которых точки C_1 и D_1 лежат на лучах BC и AD и $CD \parallel C_1D_1$. Обозначим точки пересечения диагоналей четырёхугольников $ABCD$ и ABC_1D_1 через O и O_1 соответственно.

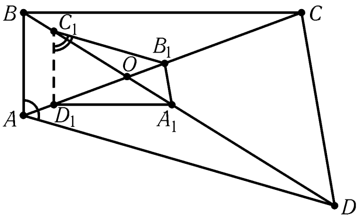


Рис. 6.8

Предположим, что точки C и D лежат ближе к точкам B и A, чем точки C_1 и D_1. Докажем, что тогда $\angle AOB > \angle AO_1B$. В самом деле, $\angle C_1AB > \angle CAB$ и $\angle D_1BA > \angle DBA$, поэтому $\angle AO_1B = 180^\circ - \angle C_1AB - \angle D_1BA < 180^\circ - \angle CAB - \angle DBA = \angle AOB$. Получено противоречие, поэтому $C_1 = C$, $D_1 = D$.

6.28. Любой четырёхугольник с точностью до подобия определяется направлениями своих сторон и диагоналей, поэтому достаточно построить один пример четырёхугольника $A_1B_1C_1D_1$ с требуемыми направлениями сторон и диагоналей. Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD. На луче OA возьмём произвольную точку D_1 и проведём $D_1A_1 \parallel BC$, $A_1B_1 \parallel CD$ и $B_1C_1 \parallel DA$ (рис. 6.8). Так как $OC_1 : OB_1 = OD : OA$, $OB_1 : OA_1 = OC : OD$ и $OA_1 : OD_1 = OB : OC$, то $OC_1 : OD_1 = OB : OA$, а значит, $C_1D_1 \parallel AB$. Из полученного рисунка ясно, что $\angle A + \angle C_1 = 180^\circ$.

6.29. Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha = \angle AOB < 90^\circ$. Опустим перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 на диагонали четырёхугольника $ABCD$. Так как $OA_1 = OA\cos\alpha$, $OB_1 = OB\cos\alpha$, $OC_1 = OC\cos\alpha$, $OD_1 = OD\cos\alpha$, то при симметрии относительно биссектрисы угла AOB четырёхугольник $ABCD$ переходит в четырёхугольник, гомотетичный четырёхугольнику $A_1B_1C_1D_1$ (с коэффициентом $1/\cos\alpha$).

6.30. Пусть диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O; H_a и H_b — ортоцентры треугольников AOB и COD; K_a и K_b — середины сторон BC и AD; P — середина диагонали AC. Точки пересечения медиан треугольников AOD и BOC делят отрезки K_aO и K_bO в отношении $1:2$, поэтому нужно доказать, что $H_aH_b \perp K_aK_b$.

Так как $OH_a = AB|\operatorname{ctg}\varphi|$ и $OH_b = CD|\operatorname{ctg}\varphi|$, где $\varphi = \angle AOB$ (см. задачу 5.51 б), то $OH_a : OH_b = PK_a : PK_b$. Соответственные стороны углов H_aOH_b и K_aPK_b перпендикулярны; кроме того, векторы $\overrightarrow{OH_a}$ и $\overrightarrow{OH_b}$ направлены к прямым AB и CD при $\varphi < 90^\circ$ и от этих прямых при $\varphi > 90^\circ$. Поэтому $\angle H_aOH_b = \angle K_aPK_b$ и $\triangle H_aOH_b \sim \triangle K_aPK_b$. Следовательно, $H_aH_b \perp K_aK_b$.

6.31. Пусть $S = S_{AOD}$, $x = AO$, $y = DO$, $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$; k — коэффициент подобия треугольников BOC и AOD. Тогда

$$2\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3}\right) = \frac{d + x + y}{S} + \frac{b + kx + ky}{k^2 S},$$
$$2\left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}\right) = \frac{a + x + ky}{kS} + \frac{c + kx + y}{kS},$$

так как $S_{BOC} = k^2 S$ и $S_{AOB} = S_{COD} = kS$. Поскольку

$$\frac{x+y}{S} + \frac{x+y}{kS} = \frac{x+ky}{kS} + \frac{kx+y}{kS},$$

остаётся заметить, что $a + c = b + d$.

6.32. Ясно, что $AB = r_1(\operatorname{ctg}(A/2) + \operatorname{ctg}(B/2))$ и $CD = r_3(\operatorname{ctg}(C/2) + \operatorname{ctg}(D/2))$. Поэтому $AB/r_1 + CD/r_3 = \operatorname{ctg}(A/2) + \operatorname{ctg}(B/2) + \operatorname{ctg}(C/2) + \operatorname{ctg}(D/2) = BC/r_2 + AD/r_4$.

6.33. Достроим треугольники ABD и DBC до параллелограммов $ABDA_1$ и $DBCC_1$. Отрезки, соединяющие точку D с вершинами параллелограмма ACC_1A_1, делят его на четыре треугольника, равных треугольникам DAB, CDA, BCD и ABC, поэтому радиусы вписанных окружностей этих треугольников равны. Докажем, что точка D совпадает с точкой O пересечения диагоналей параллелограмма. Если $D \neq O$, то можно считать, что точка D лежит внутри треугольника AOC. Тогда $r_{ADC} < r_{AOC} = r_{A_1OC_1} < r_{A_1DC_1} = r_{ABC}$ (см. задачу 10.90). Получено противоречие, поэтому $D = O$.

Так как $p = S/r$, а площади и радиусы вписанных окружностей треугольников, на которые диагонали делят параллелограмм ACC_1A_1, равны, то равны и их периметры. Поэтому ACC_1A_1 — ромб, а $ABCD$ — прямоугольник.

6.34. Точки C_1 и D_1 лежат на серединном перпендикуляре к отрезку AB, поэтому $AB \perp C_1D_1$. Аналогично $C_1D_1 \perp A_2B_2$, а значит, $AB \parallel A_2B_2$. Аналогично доказывается, что параллельны и остальные соответственные стороны и диагонали четырёхугольников $ABCD$ и $A_2B_2C_2D_2$. Следовательно, эти четырёхугольники подобны.

Пусть M — середина отрезка AC. Тогда $B_1M = |AM \operatorname{ctg} D|$ и $D_1M = |AM \operatorname{ctg} B|$, причём $B_1D_1 = |\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} D| \cdot AC/2$. Повернём четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ на 90°. Тогда, воспользовавшись результатом задачи 6.28, получим, что этот четырёхугольник выпуклый, причём $\operatorname{ctg} A = -\operatorname{ctg} C_1$ и т. д. Поэтому $A_2C_2 = |\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} C| \cdot B_1D_1/2 = |(\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} C)(\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} D)/4| \cdot AC$.

6.35. Пусть M и N — середины сторон AB и CD. Опустим из точки D перпендикуляр DP на прямую MN, а из точки M перпендикуляр MQ на CD. Тогда Q — точка касания прямой CD и окружности с диаметром AB. Прямоугольные треугольники PDN и QMN подобны, поэтому $DP = ND \cdot MQ/MN = ND \cdot MA/MN$. Аналогично расстояние от точки A до прямой MN равно $ND \cdot MA/MN$. Следовательно, $AD \parallel MN$. Аналогично $BC \parallel MN$.

6.36. Достаточно проверить, что ортоцентры любых трёх из данных четырёх треугольников лежат на одной прямой. Пусть некоторая прямая пересекает прямые B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1 в точках A, B и C соответственно; A_2, B_2 и C_2 — ортоцентры треугольников A_1BC, AB_1C и ABC_1. Прямые AB_2 и A_2B перпендикулярны прямой A_1B_1, поэтому они параллельны.

Аналогично $BC_2 \parallel B_2C$ и $CA_2 \parallel C_2A$. Точки A, B и C лежат на одной прямой, поэтому точки A_2, B_2 и C_2 тоже лежат на одной прямой (см. задачу 1.12 б).

6.37. Возьмём на диагонали BD точку M так, что $\angle MCD = \angle BCA$. Тогда $\triangle ABC \sim \triangle DMC$, так как углы BAC и BDC опираются на одну дугу. Поэтому $AB \cdot CD = AC \cdot MD$. Поскольку $\angle MCD = \angle BCA$, то $\angle BCM = \angle ACD$ и $\triangle BCM \sim \triangle ACD$, так как углы CBD и CAD опираются на одну дугу. Поэтому $BC \cdot AD = AC \cdot BM$. Следовательно, $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot MD + AC \cdot BM = AC \cdot BD$.

6.38. Пусть S — площадь четырёхугольника $ABCD$, R — радиус его описанной окружности. Тогда $S = S_{ABC} + S_{ADC} = AC(AB \cdot BC + AD \cdot DC)/4R$ (см. задачу 12.1). Аналогично $S = BD(AB \cdot AD + BC \cdot CD)/4R$. Приравнивая эти выражения для S, получаем требуемое.

6.39. Пусть правильный семиугольник $A_1 \dots A_7$ вписан в окружность. Применяя теорему Птолемея к четырёхугольнику $A_1A_3A_4A_5$, получаем $A_1A_3 \cdot A_5A_4 + A_3A_4 \cdot A_1A_5 = A_1A_4 \cdot A_3A_5$, т. е. $\sin 2\alpha \sin \alpha + \sin \alpha \sin 3\alpha = \sin 3\alpha \sin 2\alpha$.

6.40. Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB. По теореме Птолемея $AC_1 \cdot OB_1 + AB_1 \cdot OC_1 = AO \cdot B_1C_1$, где O — центр описанной окружности. Поэтому $cd_b + bd_c = aR$. Аналогично $ad_c + cd_a = bR$ и $ad_b + bd_a = cR$. Кроме того, $ad_a + bd_b + cd_c = 2S = (a + b + c)r$. Складывая все эти равенства и сокращая на $a + b + c$, получаем требуемое.

6.41. Пусть P — вторая точка пересечения отрезка CC_1 с вписанной окружностью. Тогда $\angle AB_1C_1 = \angle B_1PC_1$, поэтому $\triangle CPB_1 \sim \triangle CB_1C_1$, а значит, $PB_1/B_1C_1 = CP/CB_1$. Аналогично доказывается, что $CP/CA_1 = PA_1/A_1C_1$. Учитывая, что $CA_1 = CB_1$, получаем $PB_1 \cdot A_1C_1 = PA_1 \cdot B_1C_1$.

По теореме Птолемея $PB_1 \cdot A_1C_1 + PA_1 \cdot B_1C_1 = PC_1 \cdot A_1B_1$, т. е. $2PB_1 \cdot A_1C_1 = 2PC_1 \cdot QA_1$. Ясно также, что $\angle B_1PC_1 = \angle QA_1C_1$. Поэтому $\triangle B_1PC_1 \sim \triangle QA_1C_1$, а значит, $\angle BC_1P = \angle QC_1A_1$.

З а м е ч а н и е. Утверждение задачи можно переформулировать следующим образом: точка Жергонна треугольника ABC совпадает с точкой Лемуана треугольника $A_1B_1C_1$.

6.42. По теореме Птолемея $AB \cdot CD + AC \cdot BD = AD \cdot BC$. Учитывая, что $CD = BD \geqslant BC/2$, получаем требуемое.

6.43. Применяя теорему Птолемея к четырёхугольнику $ABCP$ и сокращая на длину стороны квадрата, получаем требуемое.

6.44. Применяя теорему Птолемея к четырёхугольнику $APQR$, получаем $AP \cdot RQ + AR \cdot QP = AQ \cdot PR$. Так как $\angle ACB = \angle RAQ = \angle RPQ$ и $\angle RQP = 180^\circ - \angle PAR = \angle ABC$, то $\triangle RQP \sim \triangle ABC$, а значит, $RQ : QP : PR = AB : BC : CA$. Остаётся заметить, что $BC = AD$.

6.45. а) Запишем теорему Птолемея для всех четырёхугольников с вершинами в точке A и трёх последовательных вершинах данного многоугольника так, чтобы сомножители d_i с чётными номерами всегда стояли в правой части: $d_1a + d_3a = d_2b$, $d_3b = d_2a + d_4b$, $\dots$, $d_{2n-1}a + d_{2n+1}a = d_{2n}b$, $d_1a + d_{2n+1}b = d_{2n}a$, $d_1b + d_{2n+1}a = d_2a$ (здесь a — сторона данного многоугольника, b — его наименьшая диагональ). Сложив эти равенства, получим $(2a + b)(d_1 + \ldots + d_{2n+1}) = (2a + b)(d_2 + \ldots + d_{2n})$.

б) Пусть R — радиус окружности S. Тогда $l_i = d_i\sqrt{(R \pm r)/R}$ (см. задачу 3.21). Остаётся воспользоваться результатом задачи а).

6.46. Пусть оба касания внешние и $x \leqslant y$. Прямая, проходящая через центр O окружности радиуса x параллельно отрезку, соединяющему точки касания, пересекает окружность радиуса $y-x$ (с центром в центре окружности радиуса y) в точках A и B (рис. 6.9). Тогда $OA = a(R+x)/R$ и $OB = OA + a(y-x)/R = a(R+y)/R$. Квадрат искомой длины общей внешней касательной равен

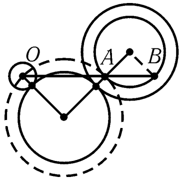


Рис. 6.9

$$OA \cdot OB = (a/R)^2 (R+x)(R+y).$$

Аналогичные рассуждения показывают, что если оба касания внутренние, то квадрат длины внешней касательной равен $(a/R)^2(R-x)(R-y)$, а если окружность радиуса x касается внешне, а окружность радиуса y — внутренне, то квадрат длины внутренней касательной равен $(a/R)^2(R-y)(R+x)$.

Замечание. В случае внутреннего касания окружностей предполагается, что $R > x$ и $R > y$.

6.47. Пусть R — радиус описанной окружности четырёхугольника $ABCD$; r_a, r_b, r_c и r_d — радиусы окружностей α, β, γ и δ. Пусть далее $a = \sqrt{R \pm r_a}$, причём знак плюс берётся в случае внешнего касания, а знак минус — в случае внутреннего; числа b, c и d определяются аналогично. Тогда $t_{\alpha\beta} = abAB/R$ (см. задачу 6.46) и т. д. Поэтому, домножая равенство $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$ на $abcd/R^2$, получаем требуемое.

6.48. Так как $\angle EBD = \angle ABE + \angle CBD$, то на стороне ED можно взять точку P так, что $\angle EBP = \angle ABE = \angle AEB$, т. е. $BP \parallel AE$. Тогда $\angle PBD = \angle EBD - \angle EBP = \angle CBD = \angle BDC$, т. е. $BP \parallel CD$. Следовательно, $AE \parallel CD$, а так как $AE = CD$, то $CDEA$ — параллелограмм. Поэтому $AC = ED$, т. е. треугольник ABC равносторонний и $\angle ABC = 60^\circ$.

6.49. а) Пусть O — центр описанной окружности треугольника CKE. Достаточно проверить, что $\angle COK = 2\angle KCB$. Оба эти угла легко вычисляются: $\angle COK = 180^\circ - 2\angle OKC = 180^\circ - \angle EKC = 180^\circ - \angle EDC = 72^\circ$ и $\angle KCB = (180^\circ - \angle ABC)/2 = 36^\circ$.

б) Так как BC — касательная к описанной окружности треугольника CKE, то $BE \cdot BK = BC^2$, т. е. $d(d-a) = a^2$.

6.50. Пусть перпендикуляры, восставленные к прямой AB в точках A и B, пересекают стороны DE и CD в точках P и Q. Любая точка отрезка CQ является вершиной прямоугольника, вписанного в пятиугольник $ABCDE$ (стороны этого прямоугольника параллельны AB и AP), причём при перемещении этой точки от Q к C отношение длин сторон прямоугольников изменяется от AP/AB до 0. Так как угол AEP тупой, то $AP > AE = AB$. Поэтому для некоторой точки отрезка QC отношение длин сторон прямоугольника равно 1.

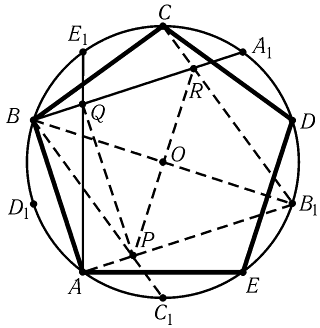


Рис. 6.10

6.51. Пусть точки $A_1, \ldots, E_1$ симметричны точкам $A, \ldots, E$ относительно центра окружности S; P, Q и R — точки пересечения прямых BC_1 и AB_1, AE_1 и BA_1, BA_1 и CB_1 (рис. 6.10). Тогда $PQ = AB = a$ и $QR = b$. Так как $PQ \parallel AB$ и $\angle ABA_1 = 90^\circ$, то $PR^2 = PQ^2 + QR^2 = a^2 + b^2$. Прямая PR проходит через центр окружности S и $\angle AB_1C = 4 \cdot 18^\circ = 72^\circ$, поэтому PR — сторона

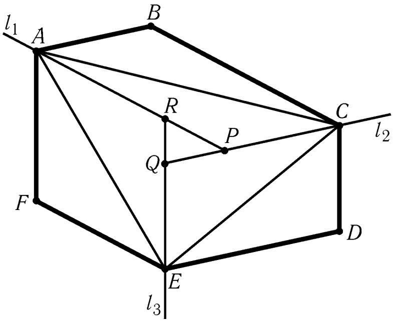


Рис. 6.11

правильного пятиугольника, описанного около окружности с центром B_1, радиус B_1O которой равен радиусу окружности S.

6.52. Проведём через точки A, C и E прямые l_1, l_2 и l_3, параллельные прямым BC, DE и FA соответственно. Обозначим точки пересечения прямых l_1 и l_2, l_2 и l_3, l_3 и l_1 через P, Q, R соответственно (рис. 6.11). Тогда

$$S_{ACE} = (S_{ABCDEF} - S_{PQR})/2 + S_{PQR} = \\ = (S_{ABCDEF} + S_{PQR})/2 \geqslant S_{ABCDEF}/2.$$

Аналогично $S_{BDF} = (S_{ABCDEF} + S_{P'Q'R'})/2$. Ясно, что $PQ = |AB - DE|$, $QR = |CD - AF|$, $PR = |EF - BC|$, поэтому треугольники PQR и $P'Q'R'$ равны. Следовательно, $S_{ACE} = S_{BDF}$.

6.53. Построим треугольник PQR, как и в предыдущей задаче. Этот треугольник правильный, и $PQ = |AB - DE|$, $QR = |CD - AF|$, $PR = |EF - BC|$. Поэтому $|AB - DE| = |CD - AF| = |EF - BC|$.

6.54. Сумма углов при вершинах A, C и E равна 360°, поэтому из равнобедренных треугольников ABF, CBD и EDF можно сложить треугольник, приложив AB к CB, а ED и EF к CD и AF. Стороны полученного треугольника равны сторонам треугольника BDF. Следовательно, при симметрии относительно прямых FB, BD и DF точки A, C и E переходят в центр O описанной окружности треугольника BDF, а значит, $AB \parallel OF \parallel DE$.

6.55. Предположим, что прямые, на которых лежат диагонали шестиугольника, образуют треугольник PQR. Обозначим вершины шестиугольника следующим образом: вершина A лежит на луче QP, B — на RP, C — на RQ и т. д. Так как прямые AD и BE делят площадь шестиугольника пополам, то $S_{APEF} + S_{PED} = S_{PDCB} + S_{ABP}$ и $S_{APEF} + S_{ABP} = S_{PDCB} + S_{PED}$. Поэтому $S_{ABP} = S_{PED}$, т. е.

$$AP \cdot BP = EP \cdot DP = (ER + RP)(DQ + QP) > ER \cdot DQ.$$

Аналогично $CQ \cdot DQ > AP \cdot FR$ и $FR \cdot ER > BP \cdot CQ$. Перемножая эти неравенства, получаем $AB \cdot BP \cdot CQ \cdot DQ \cdot FR \cdot ER > ER \cdot DQ \cdot AP \cdot FR \cdot BP \cdot CQ$, чего не может быть. Поэтому диагонали шестиугольника пересекаются в одной точке.

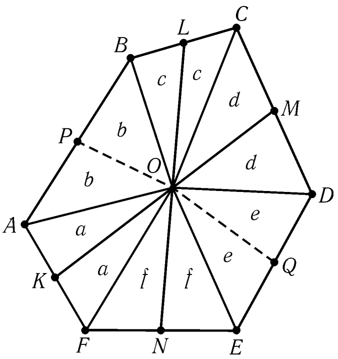


Рис. 6.12

6.56. Обозначим середины сторон выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ так, как показано на рис. 6.12. Пусть O — точка пересечения отрезков KM и LN. Площади треугольников, на которые делят шестиугольник отрезки, соединяющие точку O с вершинами и серединами сторон, обозначим так, как показано на том же рисунке. Легко проверить, что $S_{KONF} = S_{LOMC}$, т. е. $a + f = c + d$. Следовательно, ломаная POQ делит шестиугольник на две части равной площади, а значит, отрезок PQ проходит через точку O.

6.57. а) Вписанная трапеция является равнобочной, поэтому если данный шестиугольник вписанный, то его диагонали равны. Предположим теперь, что диагонали данного шестиугольника $ABCDEF$ равны. Тогда, например, $ABDE$ — равнобочная трапеция, причём прямая, соединяющая середины её оснований AB и ED, является биссектрисой угла между прямыми AD и BE. Поэтому прямые, соединяющие середины противоположных сторон шестиугольника $ABCDEF$, пересекаются в одной точке O — точке пересечения биссектрис треугольника, образованного диагоналями AD, BE и CF (если диагонали пересекаются в одной точке, то в качестве O берётся именно эта точка).

б) В случае невыпуклого шестиугольника $ABCDEF$ единственное существенное отличие заключается в том, что теперь прямая, соединяющая середины сторон AB и ED, может быть не только биссектрисой внутреннего угла треугольника, образованного диагоналями AD, BE и CF, но и биссектрисой внешнего угла. А три биссектрисы треугольника, среди которых есть как внутренние, так и внешние, не всегда пересекаются в одной точке (внешних биссектрис должно быть чётное число). Поэтому дополнительно нужно доказать, что в рассматриваемой ситуации три биссектрисы всегда пересекаются в одной точке. Для этого мы воспользуемся тем, что рассматриваемые биссектрисы l_1, l_2, l_3 можно занумеровать так, что композиция симметрий $(S_{l_1} \circ S_{l_2} \circ S_{l_3})^2$ оставляет точку A на месте: $A \to B \to C \to D \to E \to F \to A$. Действительно, согласно задаче 17.39 преобразование $S_{l_1} \circ S_{l_2} \circ S_{l_3}$ является скользящей симметрией, а согласно задаче 17.23 это преобразование является симметрией тогда и только тогда, когда прямые l_1, l_2 и l_3 пересекаются в одной точке.

6.58. а) Пусть O — центр описанной окружности. Так как $\angle A_kOA_{k+2} = 360^\circ - 2\angle A_kA_{k+1}A_{k+2} = \varphi$ — постоянная величина, то при повороте с центром O на угол φ точка A_k переходит в A_{k+2}. Для нечётного n из этого следует, что все стороны многоугольника $A_1 \dots A_n$ равны.

б) Пусть a — длина стороны данного многоугольника. Если одна из его сторон делится точкой касания с вписанной окружностью на отрезки длиной x и $a - x$, то соседние с ней стороны тоже делятся на отрезки длиной x и $a - x$ (смежные отрезки соседних сторон равны) и т. д. Для нечётного n из этого следует, что все стороны многоугольника $A_1 \dots A_n$, делятся точками касания с вписанной окружностью пополам, а значит, все его углы равны.

6.59. Стороны многоугольника $A_1 \dots A_n$ параллельны сторонам правильного n-угольника. Отложим на лучах $OA_1, \dots, OA_n$ равные отрезки $OB_1, \dots, OB_n$. Тогда многоугольник $B_1 \dots B_n$ правильный и стороны многоугольника $A_1 \dots A_n$ образуют равные углы с его сторонами. Следовательно, $OA_1 : OA_2 = OA_2 : OA_3 = \dots = OA_n : OA_1 = k$, т. е. $OA_1 = kOA_2 = k^2OA_3 = \dots = k^nOA_1$, а значит, $k = 1$.

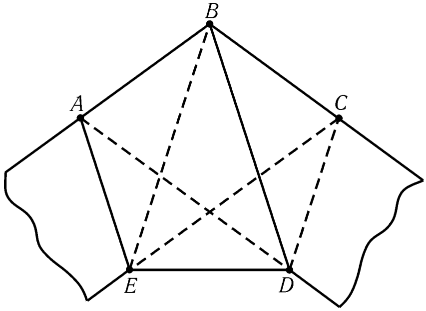


Рис. 6.13

6.60. Обозначим вершины пятиугольника так, как показано на рис. 6.13. Если в треугольнике две высоты равны, то равны и стороны, на которые опущены эти высоты. Рассматривая треугольники EAB, ABC и BCD, получаем $EA = AB$, $AB = BC$ и $BC = CD$. Поэтому трапеции $EABC$ и $ABCD$ равнобедренные, т. е. $\angle A = \angle B = \angle C$. Рассматривая треугольники ABD и BCE, получаем $AD = BD$ и $BE = CE$. Так как треугольники EAB, ABC, BCD равны, то $BE = AC = BD$. Поэтому $AD = BE$ и $BD = CE$, т. е. трапеции $ABDE$ и $CDEB$ равнобедренные. Следовательно, $ED = AB = BC = CD = AE$ и $\angle E = \angle A = \angle B = \angle C = \angle D$, т. е. $ABCDE$ — правильный пятиугольник.

6.61. Треугольник BMC равнобедренный с углом при вершине $30°$ и углом при основании $(180° - 30°)/2 = 75°$. Следовательно, треугольники BAM и BCN равнобедренные с углом $15°$ при основании. Поэтому треугольник BMN правильный. Пусть O — центр квадрата, P и Q — середины отрезков MN и BK (рис. 6.14). Так как OQ — средняя линия треугольника MBK, то $OQ = BM/2 = MP = OP$ и $\angle QON = \angle MBA = 15°$, а значит, $\angle POQ = \angle PON - \angle QON = 30°$. Дальнейшее доказательство проводится аналогично.

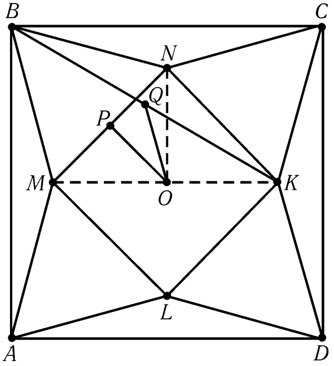


Рис. 6.14

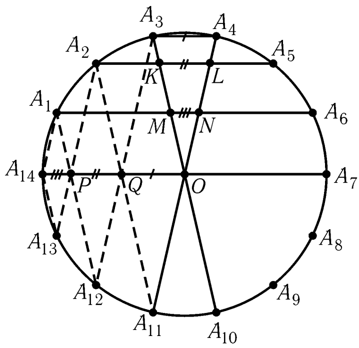


Рис. 6.15

6.62. Рассмотрим правильный двенадцатиугольник $A_1 \ldots A_{12}$, вписанный в окружность радиуса R. Ясно, что $A_1A_7 = 2R$, $A_1A_3 = A_1A_{11} = R$. Поэтому $A_1A_7 = A_1A_3 + A_1A_{11}$.

6.63. Для $k = 3$ решение задачи ясно из рис. 6.15. В самом деле, $A_3A_4 = OQ$, $KL = QP$ и $MN = PA_{14}$, поэтому $A_3A_4 + KL + MN = OQ + QP + PA_{14} = OA_{14} = R$. Доказательство проводится аналогично и для любого k.

6.64. Для доказательства достаточно применить результат задач 5.94 и 5.85 б) к треугольнику $A_aA_cA_e$ и прямым A_aA_d, A_cA_f и A_eA_b. При решении задачи б) нужно ещё заметить, что $\sin 20° \sin 70° = \sin 20° \cos 20° = (\sin 40°)/2 = \sin 30° \sin 40°$, а при решении задачи в) нужно заметить, что $\sin 10° \sin 80° = \sin 30° \sin 20°$.

6.65. Как и в предыдущей задаче, нужно проверить равенство

$$\sin 2\alpha \sin 2\alpha \sin 8\alpha = \sin \alpha \sin 3\alpha \sin 14\alpha,$$

где $\alpha = 180°/30 = 6°$. Ясно, что $\sin 14\alpha = \cos \alpha$, поэтому $2 \sin \alpha \sin 3\alpha \sin 14\alpha = \sin 2\alpha \sin 3\alpha$. Остаётся проверить, что $\sin 3\alpha = 2 \sin 2\alpha \sin 8\alpha = \cos 6\alpha - \cos 10\alpha = 1 - 2\sin^2 3\alpha - 1/2$, т. е. $4 \sin^2 18° + 2 \sin 18° = 1$ (см. задачу 5.52).

6.66. Пусть сначала $n=2m$. Диагонали и стороны правильного $2m$-угольника имеют m различных длин. Поэтому отмеченные точки лежат на $m-1$ концентрических окружностях (по n точек на каждой) или в общем центре этих окружностей. Поскольку различные окружности имеют не более двух общих точек, окружность, не принадлежащая этому семейству концентрических окружностей, содержит не более $1+2(m-1)=2m-1=n-1$ отмеченных точек.

Пусть теперь $n=2m+1$. Диагонали и стороны правильного $(2m+1)$-угольника имеют m различных длин. Поэтому отмеченные точки лежат на m концентрических окружностях (по n точек на каждой). Окружность, не принадлежащая этому семейству концентрических окружностей, содержит не более $2m=n-1$ отмеченных точек.

В обоих случаях наибольшее число отмеченных точек, лежащих на одной окружности, равно n.

6.67. Обозначим центр многоугольника через O, вершины — через $A_1, \ldots$ $\ldots, A_n$. Предположим, что среди одноцветных многоугольников нет равных, т. е. они имеют $m=m_1<m_2<m_3<\ldots<m_k$ сторон соответственно. Рассмотрим преобразование f, определённое на множестве вершин n-угольника и переводящее вершину A_k в вершину A_{mk}: $f(A_k)=A_{mk}$ (считаем, что $A_{p+qn}=A_p$). При этом преобразовании вершины правильного m-угольника переходят в одну точку B, поэтому сумма векторов $\overrightarrow{Of(A_i)}$, где A_i — вершины m-угольника, равна $m\overrightarrow{OB}\neq\overrightarrow{0}$.

Поскольку $\angle A_{mi}OA_{mj}=m\angle A_iOA_j$ вершины любого правильного многоугольника с числом сторон больше m переходят при рассматриваемом преобразовании в вершины правильного многоугольника. Поэтому и сумма векторов $\overrightarrow{Of(A_i)}$ по всем вершинам n-угольника и аналогичные суммы по вершинам m_2-, m_3-, …, m_k-угольников равны нулю. Получено противоречие с тем, что сумма векторов $\overrightarrow{Of(A_i)}$ по вершинам m-угольника не равна нулю. Поэтому среди одноцветных многоугольников найдутся два равных.

6.68. Пусть правильный $(n-1)$-угольник $B_1\ldots B_{n-1}$ вписан в правильный n-угольник $A_1\ldots A_n$. Можно считать, что A_1 и B_1 — наименее удалённые друг от друга вершины этих многоугольников и точки B_2, B_3, B_4 и B_5 лежат на сторонах A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5 и A_5A_6. Пусть $\alpha_i=\angle A_{i+1}B_iB_{i+1}$ и $\beta_i=$ $=\angle B_iB_{i+1}A_{i+1}$, где $i=1, 2, 3, 4$. По теореме синусов $A_2B_2:B_1B_2=\sin\alpha_1:\sin\varphi$ и $B_2A_3:B_2B_3=\sin\beta_2:\sin\varphi$, где φ — угол при вершине правильного n-угольника. Следовательно, $\sin\alpha_1+\sin\beta_2=a_n\sin\varphi/a_{n-1}$ где a_n и a_{n-1} — стороны данных многоугольников. Аналогичные рассуждения показывают, что $\sin\alpha_1+$ $+\sin\beta_2=\sin\alpha_2+\sin\beta_3=\sin\alpha_3+\sin\beta_4$. Заметим теперь, что $\sin\alpha_i+\sin\beta_{i+1}=$ $=2\sin((\alpha_i+\beta_{i+1})/2)\cos((\alpha_i-\beta_{i+1})/2)$, и займёмся вычислением $\alpha_i+\beta_{i+1}$ и $\alpha_i-\beta_{i+1}$. Так как $\alpha_i+\beta_i=2\pi/n$ и $\alpha_{i+1}+\beta_i=2\pi/(n-1)$, то $\alpha_{i+1}=\alpha_i+$ $+2\pi/(n(n-1))$ и $\beta_{i+1}=\beta_i-2\pi/(n(n-1))$, а значит, $\alpha_i+\beta_{i+1}=\dfrac{2\pi}{n}-\dfrac{2\pi}{n(n-1)}$ — величина постоянная и $\alpha_i-\beta_{i+1}=\alpha_{i-1}-\beta_i+4\pi/(n(n-1))$. Следовательно, $\cos\vartheta=\cos(\vartheta+2\pi/n(n-1))=\cos(\vartheta+4\pi/(n-1)n)$ для $\vartheta=(\alpha_1-\beta_2)/2$. Получено противоречие, так как на интервале, длина которого меньше 2π, косинус не может принимать одно значение в трёх различных точках.

З а м е ч а н и е. В правильный пятиугольник квадрат вписать можно (см. задачу 6.50).

6.69. Пусть $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA_1}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}$. При повороте вокруг точки O на угол $360^\circ/n$ точка A_i переходит в A_{i+1}, а значит, вектор $\boldsymbol{a}$ переходит в себя, т. е. $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

Так как $\overrightarrow{XA_i}=\overrightarrow{XO}+\overrightarrow{OA_i}$ и $\overrightarrow{OA_1}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}=\boldsymbol{0}$, то $\overrightarrow{XA_1}+\ldots+\overrightarrow{XA_n}=n\overrightarrow{XO}$.

6.70. Проведём через центр правильного многоугольника $A_1\ldots A_n$ прямую l, не проходящую через его вершины. Пусть x_i равно проекции вектора $\overrightarrow{OA_i}$ на прямую, перпендикулярную прямой l. Тогда все x_i отличны от нуля и сумма чисел x_i, стоящих в вершинах правильного k-угольника, равна нулю, поскольку равна нулю соответствующая сумма векторов $\overrightarrow{OA_i}$ (см. задачу 6.69).

6.71. Согласно задаче 6.69 $\boldsymbol{a}=10\overrightarrow{AO}$ и $\boldsymbol{b}=10\overrightarrow{BO}$, где O — центр многоугольника $X_1\ldots X_{10}$. Ясно, что если точка A расположена очень близко к вершине многоугольника, а точка B — очень близко к середине стороны, то $AO>BO$.

6.72. Так как

$$A_iX^2=|\overrightarrow{A_iO}+\overrightarrow{OX}|^2=A_iO^2+OX^2+2(\overrightarrow{A_iO},\,\overrightarrow{OX})=R^2+d^2+2(\overrightarrow{A_iO},\,\overrightarrow{OX}),$$

то $\sum A_iX^2=n(R^2+d^2)+2\left(\sum\overrightarrow{A_iO},\,\overrightarrow{OX}\right)=n(R^2+d^2)$ (см. задачу 6.69).

6.73. Обозначим через S_k сумму квадратов расстояний от вершины A_k до всех остальных вершин. Тогда

$$S_k=A_kA_1^2+A_kA_2^2+\ldots+A_kA_n^2=$$
$$=A_kO^2+2(\overrightarrow{A_kO},\,\overrightarrow{OA_1})+A_1O^2+\ldots+A_kO^2+2(\overrightarrow{A_kO},\,\overrightarrow{OA_n})+A_nO^2=2nR^2,$$

так как $\sum\limits_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}=\vec{0}$. Поэтому $\sum\limits_{k=1}^{n}S_k=2n^2R^2$. Поскольку квадрат каждой из сторон и диагоналей дважды входит в эту сумму, искомая сумма равна n^2R^2.

6.74. Пусть X_k — образ точки X при повороте относительно центра O данного n-угольника, переводящем A_k в A_1. При этом повороте отрезок A_kX переходит в A_1X_k. Следовательно, $A_1X+\ldots+A_nX=A_1X_1+\ldots+A_1X_n$. А так как n-угольник $X_1\ldots X_n$ правильный, то $\overrightarrow{A_1X_1}+\ldots+\overrightarrow{A_1X_n}=n\overrightarrow{A_1O}$ (см. задачу 6.69), а значит, $A_1X_1+\ldots+A_1X_n\geqslant nA_1O$.

6.75. Пусть B_i — проекция точки X на прямую OA_i. Тогда $(\boldsymbol{e}_i,\,\boldsymbol{x})=$ $=(\overrightarrow{OA_i},\,\overrightarrow{OB_i}+\overrightarrow{B_iX})=(\overrightarrow{OA_i},\,\overrightarrow{OB_i})=\pm R\cdot OB_i$. Точки $B_1,\,\ldots,\,B_n$ лежат на окружности с диаметром OX и являются вершинами правильного n-угольника при n нечётном и вершинами $n/2$-угольника, взятыми по два раза, при n чётном (см. задачу 2.9). Поэтому $\sum OB_i^2=nOX^2/2$ (см. задачу 6.72).

6.76. Пусть $\boldsymbol{e}_1,\,\ldots,\,\boldsymbol{e}_n$ — векторы, идущие из центра данного n-угольника в его вершины; $\boldsymbol{x}$ — единичный вектор, перпендикулярный прямой l. Искомая сумма равна $\sum(\boldsymbol{e}_i,\,\boldsymbol{x})^2=nR^2/2$ (см. задачу 6.75).

6.77. Пусть $\boldsymbol{e}_1,\,\ldots,\,\boldsymbol{e}_n$ — единичные векторы, направленные из центра O правильного n-угольника в середины его сторон; $\boldsymbol{x}=\overrightarrow{OX}$. Тогда расстояние от точки X до i-й стороны равно $|(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{e}_i)-r|$. Поэтому искомая сумма равна $\sum\left((\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{e}_i)^2-2r(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{e}_i)+r^2\right)=\sum(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{e}_i)^2+nr^2$. Согласно задаче 6.75 $\sum(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{e}_i)^2=$ $=nd^2/2$.

6.78. Пусть $\boldsymbol{x}$ — единичный вектор, параллельный прямой l, $\boldsymbol{e}_i=\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$. Тогда квадрат длины проекции стороны A_iA_{i+1} на прямую l равен $(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{e}_i)^2$. Согласно задаче 6.75 $\sum(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{e}_i)^2=na^2/2$.

6.79. Пусть $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{XO}$, $\boldsymbol{e}_i=\overrightarrow{OA_i}$. Тогда $XA_i^4=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}_i|^4=(|\boldsymbol{a}|^2+2(\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{e}_i)+|\boldsymbol{e}_i|^2)^2=$ $=4(R^2+(\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{e}_i))^2=4(R^4+2R^2(\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{e}_i)+(\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{e}_i)^2)$. Ясно, что $\sum(\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{e}_i)=\left(\boldsymbol{a},\,\sum\boldsymbol{e}_i\right)=$ $=\boldsymbol{0}$. Согласно задаче 6.75 $\sum(\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{e}_i)^2=nR^4/2$, поэтому искомая сумма равна $4(nR^4+nR^4/2)=6nR^4$.

6.80. а) Докажем сначала требуемое соотношение для $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{e}_1$. Пусть $\boldsymbol{e}_i=$ $=(\sin\varphi_i,\,\cos\varphi_i)$, причём $\cos\varphi_1=1$. Тогда

$$\sum(\boldsymbol{e}_1,\,\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_i=\sum\cos\varphi_i\boldsymbol{e}_i=\sum(\sin\varphi_i\cos\varphi_i,\,\cos^2\varphi_i)=$$
$$=\sum((\sin 2\varphi_i)/2,\,(1+\cos 2\varphi_i)/2)=(0,\,n/2)=n\boldsymbol{e}_1/2.$$

Для $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{e}_2$ доказательство проводится аналогично. Остаётся заметить, что любой вектор $\boldsymbol{u}$ можно представить в виде $\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{e}_1+\mu\boldsymbol{e}_2$.

б) Пусть $B_1\ldots B_n$ — середины сторон данного многоугольника, $\boldsymbol{e}_i=\overrightarrow{OB_i}/OB_i$ и $\boldsymbol{u}=\overrightarrow{XO}$. Тогда $\overrightarrow{XA_i}=\overrightarrow{OB_i}+(\boldsymbol{u},\,\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_i$. А так как $\sum\overrightarrow{OB_i}=\vec{0}$, то $\sum\overrightarrow{XA_i}=$ $=\sum(\boldsymbol{u},\,\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_i=n\boldsymbol{u}/2=n\overrightarrow{XO}/2$.

6.81. Пусть $\boldsymbol{e}_0,\,\ldots,\,\boldsymbol{e}_{n-1}$ — векторы сторон правильного n-угольника. Достаточно доказать, что, переупорядочив эти векторы, можно получить такой набор векторов $\{\boldsymbol{a}_1,\,\ldots,\,\boldsymbol{a}_n\}$, что $\sum\limits_{k=1}^{n}k\boldsymbol{a}_k=\boldsymbol{0}$. Число n, не являющееся степенью простого числа, можно представить в виде $n=pq$, где p и q — взаимно простые числа. Докажем теперь, что набор $\{\boldsymbol{e}_0,\,\boldsymbol{e}_p,\,\ldots,\,\boldsymbol{e}_{(q-1)p};\,\boldsymbol{e}_q,\,\boldsymbol{e}_{q+p},\,\ldots,\,\boldsymbol{e}_{q+(q-1)p},\,\ldots;$ $\boldsymbol{e}_{(p-1)q},\,\ldots,\,\boldsymbol{e}_{(p-1)q+(q-1)p}\}$ искомый. Заметим сначала, что если $x_1q+y_1p\equiv x_2q+$ $+y_2p\pmod{pq}$, то $x_1\equiv x_2\pmod p$ и $y_1\equiv y_2\pmod q$, поэтому в рассматриваемом наборе каждый из векторов $\boldsymbol{e}_0,\,\ldots,\,\boldsymbol{e}_{n-1}$ встречается ровно один раз.

Концы векторов $\boldsymbol{e}_q,\,\boldsymbol{e}_{q+p},\,\ldots,\,\boldsymbol{e}_{q+(q-1)p}$ с общим началом образуют правильный q-угольник, поэтому их сумма равна нулю. Кроме того, векторы $\boldsymbol{e}_0,\,\boldsymbol{e}_p,\,\ldots,\,\boldsymbol{e}_{(q-1)p}$ переходят в $\boldsymbol{e}_q,\,\boldsymbol{e}_{q+p},\,\ldots,\,\boldsymbol{e}_{q+(p-1)q}$, при повороте на угол $\varphi=$ $=2\pi/p$. Поэтому если $\boldsymbol{e}_0+2\boldsymbol{e}_p+\ldots+q\boldsymbol{e}_{(q-1)p}=\boldsymbol{b}$, то $(q+1)\boldsymbol{e}_q+(q+2)\boldsymbol{e}_{q+p}+\ldots$ $\ldots+2q\boldsymbol{e}_{q+(q-1)p}=q(\boldsymbol{e}_q+\ldots+\boldsymbol{e}_{q+(q-1)p})+\boldsymbol{e}_q+2\boldsymbol{e}_{q+p}+\ldots+q\boldsymbol{e}_{q+(q-1)p}=R^{\varphi}\boldsymbol{b}$, где $R^{\varphi}\boldsymbol{b}$ — вектор, полученный из вектора $\boldsymbol{b}$ поворотом на угол $\varphi=2\pi/p$. Аналогичные рассуждения показывают, что для рассматриваемого набора векторов $\sum\limits_{k=1}^{n}k\boldsymbol{a}_k=\boldsymbol{b}+R^{\varphi}\boldsymbol{b}+\ldots+R^{(p-1)\varphi}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

6.82. Предположим, что на сторонах треугольника ABC внешним образом построены квадраты ABB_1A_1, BCC_2B_2, ACC_3A_3 и вершины A_1, B_1, B_2, C_2, C_3, A_3 лежат на одной окружности S. Серединные перпендикуляры к отрезкам A_1B_1, B_2C_2, A_3C_3 проходят через центр окружности S. Ясно, что серединные перпендикуляры к отрезкам A_1B_1, B_2C_2, A_3C_3 совпадают с серединными перпендикулярами к сторонам треугольника ABC, поэтому центр окружности S совпадает с центром описанной окружности треугольника.

Обозначим центр описанной окружности треугольника ABC через O. Расстояние от точки O до прямой B_2C_2 равно $R\cos A+2R\sin A$, где R — радиус описанной окружности треугольника ABC. Поэтому $OB_2^2=(R\sin A)^2+$ $+(R\cos A+2R\sin A)^2=R^2(3+2(\sin 2A-\cos 2A))=R^2(3-2\sqrt{2}\cos(45^\circ+2A))$. Ясно, что для того, чтобы треугольник обладал требуемым свойством, необходимо и достаточно, чтобы $OB_2^2=OC_3^2=OA_1^2$, т. е. $\cos(45^\circ+2\angle A)=\cos(45^\circ+2\angle B)=$ $=\cos(45^\circ+2\angle C)$. Это равенство выполняется при $\angle A=\angle B=\angle C=60^\circ$. Если же $\angle A\neq\angle B$, то $(45^\circ+2\angle A)+(45^\circ+2\angle B)=360^\circ$, т. е. $\angle A+\angle B=135^\circ$. Тогда

$\angle C = 45^\circ$ и $\angle A = \angle C = 45^\circ$, $\angle B = 90^\circ$ (или $\angle B = 45^\circ$, $\angle A = 90^\circ$). Мы видим, что треугольник должен быть либо равносторонним, либо равнобедренным прямоугольным.

6.83. В любом треугольнике выполнено соотношение $h_c = ab/2R$ (задача 12.35), поэтому $p_k = MA_k \cdot MA_{k+1}/2R$. Следовательно,

$$p_1p_3 \ldots p_{2n-1} = MA_1 \cdot MA_2 \ldots MA_{2n}/(2R)^n = p_2p_4 \ldots p_{2n}.$$

6.84. Пусть ABC — треугольник, вписанный в окружность S. Обозначим расстояния от центра O окружности до сторон BC, CA и AB через a, b и c соответственно. Тогда $R + r = a + b + c$, если точка O лежит внутри треугольника ABC, и $R + r = -a + b + c$, если точки O и A лежат по разные стороны от прямой BC (см. задачу 12.40).

Каждая из диагоналей разбиения принадлежит двум треугольникам разбиения. Для одного из этих треугольников точка O и оставшаяся вершина лежат по одну сторону от диагонали, для другого — по разные стороны. Разбиение n-угольника непересекающимися диагоналями на треугольники состоит из $n-2$ треугольников. Поэтому сумма $(n-2)R + r_1 + \ldots + r_{n-2}$ равна сумме расстояний от точки O до сторон n-угольника (расстояния до сторон берутся с соответствующими знаками). Из этого видно, что сумма $r_1 + \ldots + r_{n-2}$ не зависит от разбиения.

6.85. Пусть многоугольник $A_1 \ldots A_n$ вписан в окружность. Рассмотрим точку A_2', симметричную точке A_2 относительно серединного перпендикуляра к отрезку A_1A_3. Тогда многоугольник $A_1A_2'A_3 \ldots A_n$ вписанный и его площадь равна площади многоугольника $A_1 \ldots A_n$. Таким образом можно поменять местами любые две соседние стороны, а значит, можно поменять местами любые две стороны. Поэтому к любой стороне можно «подогнать» любую другую сторону, к ней — любую из оставшихся и т. д. Следовательно, площадь n-угольника, вписанного в данную окружность, зависит только от набора длин сторон, но не от их порядка.

6.86. Без ограничения общности можно считать, что a_n — наибольшее из чисел $a_1, \ldots, a_n$. Пусть n-угольник $A_1 \ldots A_n$ вписан в окружность с центром O. Тогда $A_iA_{i+1} : A_1A_n = \sin(\angle A_iOA_{i+1}/2) : \sin(\angle A_1OA_n/2)$. Поэтому поступим следующим образом. Из соотношения $\sin(\varphi_i/2) : \sin(\varphi/2) = a_i : a_n$ угол φ_i однозначно выражается через φ, если $\varphi_i < \pi$. На окружности радиуса 1 фиксируем точку A_n и рассмотрим такие переменные точки $A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n'$, что $\smile A_nA_1 = \varphi$, $\smile A_1A_2 = \varphi_1, \ldots, \smile A_{n-2}A_{n-1} = \varphi_{n-2}$ и $\smile A_{n-1}A_n' = \varphi_{n-1}$, причём расположим эти точки двумя различными способами, изображёнными на рис. 6.16 (первый способ (рис. 6.16, *а*) будет соответствовать n-угольнику, содержащему центр окружности, а второй (рис. 6.16, *б*) — не содержащему). Остаётся доказать, что при изменении φ от 0 до π в одном из этих случаев точка A_n' совпадает с A_n (в самом деле, тогда с точностью до подобия получается искомый n-угольник). Предположим, что в первом случае при $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ точки A_n' и A_n никогда не совпадают, т. е. при $\varphi = \pi$ выполняется неравенство $\varphi_1 + \ldots + \varphi_{n-1} < \pi$. Рисунок 6.16, *б* требует некоторых комментариев: при малых углах $\sin\alpha \approx \alpha$, поэтому из условия задачи следует, что при малых углах точка A_n действительно лежит на дуге A_1A_n', так как $\varphi_1 + \ldots + \varphi_{n-1} > \varphi$. Итак, при малых углах $\varphi_1 + \ldots + \varphi_{n-1} > \varphi$, а если $\varphi = \pi$, то согласно предположению $\varphi_1 + \ldots + \varphi_{n-1} < \pi = \varphi$. Поэтому в некоторый момент $\varphi = \varphi_1 + \ldots + \varphi_{n-1}$, т. е. точки A_n и A_n' совпадают.

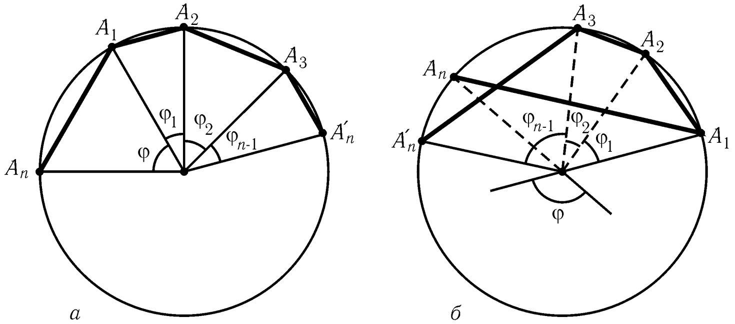


Рис. 6.16

6.87. Пусть $h_1, \ldots, h_n$ — расстояния от данной точки до соответствующих сторон, $a_1, \ldots, a_n$ — расстояния от вершин многоугольника до точек касания. Тогда произведение площадей как красных, так и синих треугольников равно $a_1 \ldots a_n h_1 \ldots h_n / 2^n$.

6.88. Пусть OH_i — высота треугольника OA_iA_{i+1}. Тогда $\angle H_{i-1}OA_i = \angle H_iOA_i = \varphi_i$. Из условия задачи следует, что $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_{n+1} + \varphi_{n+2}$, $\varphi_{n+2} + \varphi_{n+3} = \varphi_2 + \varphi_3$, $\varphi_3 + \varphi_4 = \varphi_{n+3} + \varphi_{n+4}$, ..., $\varphi_{n-2} + \varphi_{n-1} = \varphi_{2n-2} + \varphi_{2n-1}$ (при записи последнего равенства мы учли, что n нечётно) и $\varphi_{n-1} + 2\varphi_n + \varphi_{n+1} = \varphi_{2n-1} + 2\varphi_{2n} + \varphi_1$. Складывая все эти равенства, получаем $\varphi_{n-1} + \varphi_n = \varphi_{2n-1} + \varphi_{2n}$, что и требовалось.

6.89. Пусть O — центр данной окружности. Тогда $\overrightarrow{XA_i} = \overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OA_i}$, а значит, $XA_i^2 = XO^2 + OA_i^2 + 2(\overrightarrow{XO}, \overrightarrow{OA_i}) = d^2 + r^2 + 2(\overrightarrow{XO}, \overrightarrow{OA_i})$. Так как $a_1\overrightarrow{OA_1} + \ldots + a_n\overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{0}$ (см. задачу 13.4), то $a_1XA_1^2 + \ldots + a_nXA_n^2 = (a_1 + \ldots + a_n)(d^2 + r^2)$.

6.90. Согласно задаче 5.8 $b_{i-1}b_i/a_i^2 = \sin^2(A_i/2)$. Для решения задачи а) достаточно перемножить все такие равенства, а для решения задачи б) произведение равенств с чётным индексом i нужно поделить на произведение равенств с нечётным индексом i.

6.91. Пусть BC — синяя сторона, AB и CD — соседние с BC стороны. По условию стороны AB и CD красные. Предположим, что многоугольник описанный; P, Q, R — точки касания сторон AB, BC, CD с вписанной окружностью. Ясно, что $BP = BQ$, $CR = CQ$ и отрезки BP, CR граничат только с одним синим отрезком. Поэтому сумма длин красных сторон не меньше суммы длин синих сторон. Получено противоречие с тем, что сумма длин красных сторон меньше половины периметра. Поэтому в многоугольник нельзя вписать окружность.

6.92. Пусть выпуклый n-угольник имеет k острых углов. Тогда сумма его углов меньше $k \cdot 90^\circ + (n-k) \cdot 180^\circ$. С другой стороны, сумма углов n-угольника равна $(n-2) \cdot 180^\circ$. Поэтому $(n-2) \cdot 180^\circ < k \cdot 90^\circ + (n-k) \cdot 180^\circ$, т. е. $k < 4$. Поскольку k — целое число, $k \leqslant 3$.

Для любого $n \geqslant 3$ существует выпуклый n-угольник с тремя острыми углами (рис. 6.17).

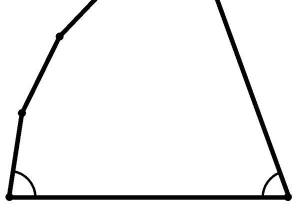


Рис. 6.17

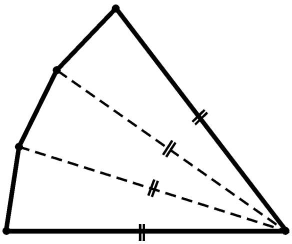


Рис. 6.18

6.93. Предположим, что несмежные стороны AB и CD равны по длине наибольшей диагонали. Тогда $AB + CD \geqslant AC + BD$. Но согласно задаче 9.15 $AB + CD < AC + BD$. Получено противоречие, поэтому стороны, равные по длине наибольшей диагонали, должны быть смежными, т.е. таких сторон не больше двух.

Пример многоугольника с двумя сторонами, равными по длине наибольшей диагонали, приведён на рис. 6.18. Ясно, что такой n-угольник существует при любом $n > 3$.

6.94. Докажем, что $n \leqslant 5$. Пусть $AB = 1$, а C — вершина, не соседняя ни с A, ни с B. Тогда $|AC - BC| < AB = 1$. Поэтому $AC = BC$, т.е. точка C лежит на серединном перпендикуляре к стороне AB. Таким образом, кроме вершин A, B, C многоугольник может иметь ещё лишь две вершины.

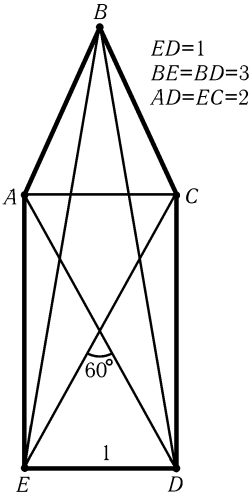


Рис. 6.19

Пример пятиугольника, обладающего требуемым свойством, приведён на рис. 6.19. Поясним, как он устроен. $ACDE$ — прямоугольник, $AC = ED = 1$ и $\angle CAD = 60^\circ$. Точка B задаётся условием $BE = BD = 3$.

Примером четырёхугольника, обладающего требуемым свойством, является прямоугольник $ACDE$ на том же рисунке.

6.95. Пример пятиугольника, удовлетворяющего условию задачи, приведён на рис. 6.20. Поясним, как он устроен. Возьмём равнобедренный прямоугольный треугольник EAB, проведём серединные перпендикуляры к сторонам EA, AB и на них построим точки C и D так, что $ED = BC = AB$ (т.е. прямые BC и ED образуют с соответствующими серединными перпендикулярами углы в 30°). Ясно, что $DE = BC = AB = EA < EB < DC$ и $DB = DA = CA = CE > EB$.

Докажем теперь, что пятая сторона и пятая диагональ не могут иметь общей точки. Предположим, что пятая сторона AB имеет общую точку A с пятой диагональю. Тогда пятая диагональ — это AC или AD. Разберём эти два случая.

В первом случае $\triangle AED = \triangle CDE$, поэтому при симметрии относительно серединного перпендикуляра к отрезку ED точка A переходит в точку C. Точка B при этой симметрии остаётся на месте, так как $BE = BD$. Поэтому отрезок AB переходит в CB, т.е. $AB = CB$. Получено противоречие.

Во втором случае $\triangle ACE = \triangle EBD$, поэтому при симметрии относительно биссектрисы угла AED отрезок AB переходит в DC, т.е. $AB = CD$. Получено противоречие.

6.96. Рассмотрим две соседние вершины A_1 и A_2. Если $\angle A_1OA_2 \geqslant 90^\circ$, то $OA_1 = OA_2$, так как к основанию равнобедренного треугольника не может прилегать прямой или тупой угол.

Пусть теперь $\angle A_1OA_2 < 90^\circ$. Проведём через точку O прямые l_1 и l_2, перпендикулярные прямым OA_1 и OA_2. Обозначим области, на которые эти

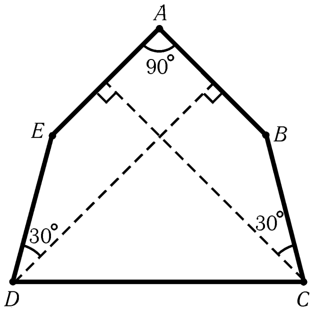


Рис. 6.20

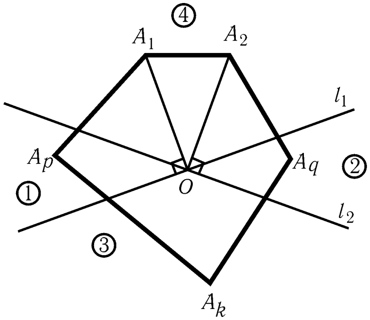


Рис. 6.21

прямые разбивают плоскость, так, как показано на рис. 6.21. Если в области (3) есть вершина A_k, то $A_1O = A_kO = A_2O$, поскольку $\angle A_1OA_k \geqslant 90^\circ$ и $\angle A_2OA_k \geqslant 90^\circ$. Если же в области (3) нет вершин многоугольника, то в области (1) есть вершина A_p и в области (2) есть вершина A_q. (Если бы в одной из областей (1), (2) не было вершин многоугольника, то точка O оказалась бы вне многоугольника.) Так как $\angle A_1OA_q \geqslant 90^\circ$, $\angle A_2OA_p \geqslant 90^\circ$ и $\angle A_pOA_q \geqslant 90^\circ$, то $A_1O = A_qO = A_pO = A_2O$.

Остаётся заметить, что если расстояния от точки O до любой пары соседних вершин многоугольника равны, то равны и все расстояния от точки O до вершин многоугольника.

6.97. Пусть прямые AB и DE пересекаются в точке G, BC и EF в точке H, CD и FA в точке K. Пусть, далее, X и Y — точки пересечения описанной окружности треугольника EBH с прямыми AB и DE. Покажем, что соответственные стороны треугольников ADK и XYH параллельны. (Из этого следует, что прямая KH проходит через точку G.)

Из равенств $\angle(YX, AB) = \angle(YX, XB) = \angle(YE, EB) = \angle(DE, EB) = \angle(DA, AB)$ следует, что $AD \parallel XY$. После этого из равенств $\angle(XY, YH) = \angle(XB, BH) = \angle(AB, BC) = \angle(AD, DC) = \angle(AD, DK)$ следует, что $DK \parallel YH$, а из равенств $\angle(YX, XH) = \angle(YE, EH) = \angle(DE, EF) = \angle(DA, AF) = \angle(DA, AK)$ следует, что $AK \parallel XH$.

Отметим, что мы нигде не пользовались тем, что шестиугольник $ABCDEF$ выпуклый; вместо шестиугольника можно взять самопересекающуюся шестизвенную ломаную с вершинами на окружности.

6.98. Пусть A_2, B_2 и C_2 — указанные точки пересечения прямых. Применяя теорему Паскаля к точкам M, A_1, A, C, B, B_1, получаем, что точки A_2, B_2 и R лежат на одной прямой. Аналогично точки A_2, C_2 и R лежат на одной прямой. Следовательно, точки A_2, B_2, C_2 и R лежат на одной прямой.

6.99. Поскольку углы APT, ART, AST и AQT прямые, то точки A, P, R, T, S, Q лежат на окружности, построенной на отрезке AT как на диаметре. Следовательно, по теореме Паскаля точки B, C и точка пересечения прямых PR и QS лежат на одной прямой.

6.100. Точки A_1 и B_1 лежат на окружности S с диаметром AB. Пусть A_4 и B_4 — точки пересечения прямых AA_2 и BB_2 с прямой A_3B_3. Согласно задаче 2.44 а) эти точки лежат на окружности S. Прямые A_1B и A_4A пересекаются в точке A_2, а прямые BB_4 и AB_1 — в точке B_2. Поэтому, применяя теорему Паскаля к точкам B_1, A_1, B, B_4, A_4, A, получаем, что точка пересечения прямых B_1A_1 и B_4A_4 (последняя прямая совпадает с A_3B_3) лежит на прямой A_2B_2.

6.101. Пусть K — точка пересечения прямых BC и MN. Применяя теорему Паскаля к точкам A, M, N, D, C, B, получаем, что точки E, K и F лежат на одной прямой, а значит, K — точка пересечения прямых MN и EF.

6.102. Пусть точки B_1 и C_1 симметричны точкам B и C относительно точки O. Тогда точка X лежит на прямых AB_1 и C_1D. Применим теорему Паскаля к шестиугольнику AB_1BDC_1C. Прямые AB_1 и DC_1 пересекаются в точке X, прямые BB_1 и CC_1 — в точке O; прямые BD и AC — диагонали четырёхугольника.

6.103. Пусть лучи PA и QA пересекают окружность в точках P_2 и Q_2, т. е. P_1P_2 и Q_1Q_2 — диаметры данной окружности. Применим теорему Паскаля к шестиугольнику $PP_2P_1QQ_2Q_1$. Прямые PP_2 и QQ_2 пересекаются в точке A, а прямые P_1P_2 и Q_1Q_2 пересекаются в точке O, поэтому точка пересечения прямых P_1Q и Q_1P лежит на прямой AO.

6.104. Пусть B_1 и C_1 — середины дуг AC и AB (имеются в виду дуги, не содержащие точек B и C соответственно). Согласно задаче 3.43 а) точки M и N лежат на отрезках KC_1 и KB_1.

Применим теорему Паскаля к шестиугольнику C_1CABB_1K. Прямые CC_1 и BB_1 — биссектрисы; прямые CA и B_1K пересекаются в точке N, прямые AB и C_1K — в точке M.

Отметим, что задача 3.47 является частным случаем этой задачи.

6.105. Пусть данные точки A, B, C, D, E лежат на одной окружности. Предположим, что мы построили точку F той же окружности. Обозначим через K, L, M точки пересечения прямых AB и DE, BC и EF, CD и FA соответственно. Тогда по теореме Паскаля точки K, L, M лежат на одной прямой.

Из этого вытекает следующее построение. Проведём через точку E произвольную прямую a и обозначим точку её пересечения с прямой BC через L. Затем построим точку K пересечения прямых AB и DE и точку M пересечения прямых KL и CD. Наконец, F — точка пересечения прямых AM и a. Докажем, что F лежит на нашей окружности. Пусть F_1 — точка пересечения окружности и прямой a. Из теоремы Паскаля следует, что F_1 лежит на прямой AM, т. е. F_1 является точкой пересечения a и AM. Поэтому $F_1 = F$.

6.106. Пусть P и Q — точки пересечения прямой A_3A_4 с A_1A_2 и A_1A_6, а R и S — точки пересечения прямой A_4A_5 с A_1A_6 и A_1A_2. Тогда $A_2K : A_3L = A_2P : A_3P$, $A_3L : A_6M = A_3Q : A_6Q$ и $A_6M : A_5N = A_6R : A_5R$. Поэтому требуемое соотношение $A_2K : A_5N = A_2S : A_5S$ перепишется в виде

$$\frac{A_2P}{A_3P} \cdot \frac{A_3Q}{A_6Q} \cdot \frac{A_6R}{A_5R} \cdot \frac{A_5S}{A_2S} = 1.$$

Пусть T — точка пересечения прямых A_2A_3 и A_5A_6; по теореме Паскаля точки S, Q и T лежат на одной прямой. Применяя теорему Менелая (см. задачу 5.69) к треугольнику PQS и точкам T, A_2 и A_3, а также к треугольнику RQS и точкам T, A_5 и A_6, получаем

$$\frac{A_2P}{A_2S} \cdot \frac{A_3Q}{A_3P} \cdot \frac{TS}{TQ} = 1 \qquad \text{и} \qquad \frac{TQ}{TS} \cdot \frac{A_5S}{A_5R} \cdot \frac{A_6R}{A_6Q} = 1.$$

Перемножая эти равенства, получаем требуемое. (Отношения отрезков следует считать ориентированными.)

ГЛАВА 7

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК

Основные сведения

1. *Геометрическое место точек* (сокращённно ГМТ), обладающих некоторым свойством, — это фигура, состоящая из всех точек, для которых выполнено это свойство.

2. Решение задачи на поиск ГМТ должно содержать доказательство того, что

а) точки, обладающие требуемым свойством, принадлежат фигуре Ф, являющейся ответом задачи;

б) все точки фигуры Ф обладают требуемым свойством.

3. ГМТ, обладающих двумя свойствами, является пересечением (т. е. общей частью) двух фигур: ГМТ, обладающих первым свойством, и ГМТ, обладающих вторым свойством.

4. Три важнейших ГМТ:

а) ГМТ, равноудалённых от точек A и B, является серединным перпендикуляром к отрезку AB;

б) ГМТ, удалённых на расстояние R от данной точки O, является окружностью радиуса R с центром O;

в) ГМТ, из которых данный отрезок AB виден под данным углом, является объединением двух дуг окружностей, симметричных относительно прямой AB (точки A и B не принадлежат ГМТ).

Вводные задачи

1. а) Найдите ГМТ, равноудалённых от двух параллельных прямых.

б) Найдите ГМТ, равноудалённых от двух пересекающихся прямых.

2. Найдите геометрическое место середин отрезков с концами на двух данных параллельных прямых.

3. Дан треугольник ABC. Найдите ГМТ X, удовлетворяющих неравенствам $AX \leqslant BX \leqslant CX$.

4. Найдите геометрическое место таких точек X, что касательные, проведённые из X к данной окружности, имеют данную длину.

5. На окружности фиксирована точка A. Найдите ГМТ X, делящих хорды с концом A в отношении $1:2$, считая от точки A.

§ 1. ГМТ — прямая или отрезок

7.1. Два колеса радиусов r_1 и r_2 катаются по прямой l. Найдите множество точек пересечения M их общих внутренних касательных.

7.2. Стороны AB и CD четырёхугольника $ABCD$ площади S не параллельны. Найдите ГМТ X, лежащих внутри четырёхугольника, для которых $S_{ABX}+S_{CDX}=S/2$.

7.3. Даны две прямые, пересекающиеся в точке O. Найдите ГМТ X, для которых сумма длин проекций отрезков OX на эти прямые постоянна.

7.4. Дан прямоугольник $ABCD$. Найдите ГМТ X, для которых $AX+BX=CX+DX$.

7.5*. Найдите геометрическое место точек M, лежащих внутри ромба $ABCD$ и обладающих тем свойством, что $\angle AMD+\angle BMC=180^\circ$.

* * *

7.6. На плоскости даны точки A и B. Найдите ГМТ M, для которых разность квадратов длин отрезков AM и BM постоянна.

7.7. Даны окружность S и точка M вне её. Через точку M проводятся всевозможные окружности S_1, пересекающие окружность S; X — точка пересечения касательной в точке M к окружности S_1 с продолжением общей хорды окружностей S и S_1. Найдите ГМТ X.

7.8. Даны две непересекающиеся окружности. Найдите геометрическое место точек центров окружностей, делящих пополам данные окружности (т. е. пересекающих их в диаметрально противоположных точках).

7.9. Внутри окружности взята точка A. Найдите геометрическое место точек пересечения касательных к окружности, проведённых через концы всевозможных хорд, содержащих точку A.

7.10*. а) Дан параллелограмм $ABCD$. Докажите, что величина $AX^2+CX^2-BX^2-DX^2$ не зависит от выбора точки X.

б) Четырёхугольник $ABCD$ не является параллелограммом. Докажите, что все точки X, удовлетворяющие соотношению $AX^2+CX^2=BX^2+DX^2$, лежат на одной прямой, перпендикулярной отрезку, соединяющему середины диагоналей.

См. также задачи 2.39, 3.45, 3.58, 6.5, 6.17, 7.28, 7.30, 8.6, 12.82, 15.16, 30.24, 30.37.

§ 2. ГМТ — окружность или дуга окружности

7.11. Отрезок постоянной длины движется по плоскости так, что его концы скользят по сторонам прямого угла ABC. По какой траектории движется середина этого отрезка?

7.12. Найдите геометрическое место середин хорд данной окружности, проходящих через данную точку.

7.13. Даны две точки A и B. Две окружности касаются прямой AB (одна — в точке A, другая — в точке B) и касаются друг друга в точке M. Найдите ГМТ M.

* * *

7.14. На плоскости даны две точки A и B. Найдите ГМТ M, для которых $AM : BM = k$ (*окружность Аполлония*).

7.15. Пусть S — окружность Аполлония для точек A и B, причём точка A лежит вне окружности S. Из точки A проведены касательные AP и AQ к окружности S. Докажите, что B — середина отрезка PQ.

7.16*. Пусть AD и AE — биссектрисы внутреннего и внешнего углов треугольника ABC и S_a — окружность с диаметром DE, окружности S_b и S_c определяются аналогично. Докажите, что:

а) окружности S_a, S_b и S_c имеют две общие точки M и N, причём прямая MN проходит через центр описанной окружности треугольника ABC;

б) проекции точки M (и точки N) на стороны треугольника ABC образуют правильный треугольник.

Точки M и N из задачи 7.16 называют *изодинамическими центрами* треугольника.

7.17*. Докажите, что изодинамические центры лежат на прямой KO, где O — центр описанной окружности, K — точка Лемуана.

7.18*. Треугольник ABC правильный, M — некоторая точка. Докажите, что если числа AM, BM и CM образуют геометрическую прогрессию, то знаменатель этой прогрессии меньше 2.

См. также задачи 2.14, 2.67 б), 5.156, 7.27, 7.29, 14.21 а), 18.15, 28.23, 28.24.

§ 3. Вписанный угол

7.19. На окружности фиксированы точки A и B, а точка C перемещается по этой окружности. Найдите множество точек пересечения: а) высот; б) биссектрис треугольников ABC.

7.20. Точка P перемещается по описанной окружности квадрата $ABCD$. Прямые AP и BD пересекаются в точке Q, а прямая, проходящая через точку Q параллельно AC, пересекает прямую BP в точке X. Найдите ГМТ X.

7.21. а) На окружности фиксированы точки A и B, а точки A_1 и B_1 движутся по той же окружности так, что величина дуги A_1B_1 остаётся постоянной; M — точка пересечения прямых AA_1 и BB_1. Найдите ГМТ M.

б) В окружность вписаны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, причём треугольник ABC неподвижен, а треугольник $A_1B_1C_1$ вращается. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке не более чем при одном положении треугольника $A_1B_1C_1$.

7.22*. На плоскости даны четыре точки. Найдите множество центров прямоугольников, образуемых четырьмя прямыми, проходящими соответственно через данные точки.

7.23*. Найдите ГМТ X, лежащих внутри правильного треугольника ABC и обладающих тем свойством, что $\angle XAB + \angle XBC + \angle XCA = 90^\circ$.

См. также задачи 2.5, 2.39.

§ 4. Вспомогательные равные или подобные треугольники

7.24. Дана полуокружность с центром O. Из каждой точки X, лежащей на продолжении диаметра полуокружности, проводится касающийся полуокружности луч и на нём откладывается отрезок XM, равный отрезку XO. Найдите ГМТ M, полученных таким образом.

7.25*. Пусть A и B — фиксированные точки плоскости. Найдите ГМТ C, обладающих следующим свойством: высота h_b треугольника ABC равна b.

7.26*. Даны окружность и точка P внутри её. Через каждую точку Q окружности проведём касательную. Перпендикуляр, опущенный из центра окружности на прямую PQ, и касательная пересекаются в точке M. Найдите ГМТ M.

§ 5. Гомотетия

7.27. На окружности фиксированы точки A и B. Точка C перемещается по этой окружности. Найдите множество точек пересечения медиан треугольников ABC.

7.28. Дан треугольник ABC. Найдите множество центров прямоугольников $PQRS$, вершины Q и P которых лежат на стороне AC, вершины R и S — на сторонах AB и BC соответственно.

7.29. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена секущая, вторично пересекающаяся с окружностями в точках P и Q. Какую линию описывает середина отрезка PQ, когда секущая вращается вокруг точки A?

7.30. Точки A, B и C лежат на одной прямой, причём B находится между A и C. Найдите ГМТ M таких, что радиусы описанных окружностей треугольников AMB и CMB равны.

См. также задачи 19.10, 19.22, 19.39.

§ 6. Метод ГМТ

7.31. Точки P и Q движутся с одинаковой постоянной скоростью v по двум прямым, пересекающимся в точке O. Докажите, что на плоскости существует неподвижная точка A, расстояния от которой до точек P и Q в любой момент времени равны.

7.32. Через середину каждой диагонали выпуклого четырёхугольника проводится прямая, параллельная другой диагонали. Эти прямые пересекаются в точке O. Докажите, что отрезки, соединяющие точку O

с серединами сторон четырёхугольника, делят его площадь на равные части.

7.33. Пусть D и E — середины сторон AB и BC остроугольного треугольника ABC, а точка M лежит на стороне AC. Докажите, что если $MD < AD$, то $ME > EC$.

7.34. Внутри выпуклого многоугольника взяты точки P и Q. Докажите, что существует вершина многоугольника, менее удалённая от Q, чем от P.

7.35. Точки A, B и C таковы, что для любой четвёртой точки M либо $MA \leqslant MB$, либо $MA \leqslant MC$. Докажите, что точка A лежит на отрезке BC.

7.36. Дан четырёхугольник $ABCD$, причём $AB < BC$ и $AD < DC$. Точка M лежит на диагонали BD. Докажите, что $AM < MC$.

§ 7. ГМТ с ненулевой площадью

7.37. Пусть O — центр прямоугольника $ABCD$. Найдите ГМТ M, для которых $AM \geqslant OM$, $BM \geqslant OM$, $CM \geqslant OM$ и $DM \geqslant OM$.

7.38. Найдите ГМТ X, из которых можно провести касательные к данной дуге AB окружности.

7.39. Пусть O — центр правильного треугольника ABC. Найдите ГМТ M, удовлетворяющих следующему условию: любая прямая, проведённая через точку M, пересекает либо отрезок AB, либо отрезок CO.

7.40. На плоскости даны два непересекающихся круга. Обязательно ли найдётся точка M, лежащая вне этих кругов, удовлетворяющая такому условию: каждая прямая, проходящая через точку M, пересекает хотя бы один из этих кругов?

Найдите ГМТ M, удовлетворяющих такому условию.

См. также задачи 18.12, 31.66—31.69.

§ 8. Теорема Карно

7.41*. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точек A_1, B_1, C_1 на стороны BC, CA, AB треугольника ABC, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $A_1B^2 + C_1A^2 + B_1C^2 = B_1A^2 + A_1C^2 + C_1B^2$ (Карно).

7.42*. Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

7.43*. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из центров вневписанных окружностей на соответственные стороны треугольника, пересекаются в одной точке.

7.44*. Точки A_1, B_1 и C_1 таковы, что $AB_1 = AC_1$, $BC_1 = BA_1$ и $CA_1 = CB_1$. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точек A_1, B_1 и C_1 на прямые BC, CA и AB, пересекаются в одной точке.

7.45*. а) Перпендикуляры, опущенные из вершин треугольника ABC на соответствующие стороны треугольника $A_1B_1C_1$, пересекаются в одной точке. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из вершин треугольника $A_1B_1C_1$ на соответствующие стороны треугольника ABC, тоже пересекаются в одной точке.

б) Прямые, проведённые через вершины треугольника ABC параллельно соответствующим сторонам треугольника $A_1B_1C_1$, пересекаются в одной точке. Докажите, что прямые, проведённые через вершины треугольника $A_1B_1C_1$ параллельно соответствующим сторонам треугольника ABC, тоже пересекаются в одной точке.

7.46*. На прямой l взяты точки A_1, B_1 и C_1, а из вершин треугольника ABC на эту прямую опущены перпендикуляры AA_2, BB_2 и CC_2. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точек A_1, B_1 и C_1 на прямые BC, CA и AB, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\overline{A_1B_1} : \overline{B_1C_1} = \overline{A_2B_2} : \overline{B_2C_2}$ (отношения отрезков ориентированные).

7.47*. Треугольник ABC правильный, P — произвольная точка. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из центров вписанных окружностей треугольников PAB, PBC и PCA на прямые AB, BC и CA, пересекаются в одной точке.

7.48*. Докажите, что если перпендикуляры, восставленные из оснований биссектрис треугольника, пересекаются в одной точке, то треугольник равнобедренный.

§ 9. Окружность Ферма—Аполлония

7.49*. Докажите, что множество точек X, обладающих тем свойством, что $k_1A_1X^2 + \ldots + k_nA_nX^2 = c$:

а) при $k_1+\ldots+k_n \neq 0$ является окружностью или пустым множеством;

б) при $k_1+\ldots+k_n = 0$ является прямой, плоскостью или пустым множеством.

7.50*. Прямая l пересекает две окружности в четырёх точках. Докажите, что касательные в этих точках к одной окружности пересекают касательные к другой окружности в четырёх точках, лежащих на окружности, причём центр этой окружности лежит на прямой, соединяющей центры данных окружностей.

7.51*. Точки M и N таковы, что $AM : BM : CM = AN : BN : CN$. Докажите, что прямая MN проходит через центр O описанной окружности треугольника ABC.

См. также задачи 7.6, 7.14, 8.63—8.67.

Задачи для самостоятельного решения

7.52. На сторонах AB и BC треугольника ABC берутся точки D и E. Найдите геометрическое место середин отрезков DE.

7.53. Две окружности касаются данной прямой в двух данных точках A и B и касаются друг друга. Пусть C и D — точки касания этих окружностей с другой внешней касательной. Найдите геометрическое место середин отрезков CD.

7.54. Докажите, что если биссектриса одного из углов треугольника имеет внутри треугольника общую точку с перпендикуляром, восставленным из середины противоположной стороны, то треугольник равнобедренный.

7.55. Дан треугольник ABC. Найдите множество всех точек M этого треугольника, для которых выполнено условие $AM \geqslant BM \geqslant CM$. Когда полученное множество есть а) пятиугольник; б) треугольник?

7.56. Дан квадрат $ABCD$. Найдите геометрическое место середин сторон квадратов, вписанных в данный квадрат.

7.57. Дан равносторонний треугольник ABC. Найдите ГМТ M таких, что треугольники AMB и BCM равнобедренные.

7.58. Найдите геометрическое место середин отрезков длины $2/\sqrt{3}$, концы которых лежат на сторонах единичного квадрата.

7.59. На сторонах AB, BC и CA данного треугольника ABC выбираются такие точки P, Q и R, что $PQ \parallel AC$ и $PR \parallel BC$. Найдите геометрическое место середин отрезков QR.

7.60. Дана полуокружность с диаметром AB. Для любой точки X этой полуокружности на луче XA строится точка Y так, что $XY = XB$. Найдите ГМТ Y.

7.61. Дан треугольник ABC. На его сторонах AB, BC и CA выбираются точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Найдите ГМТ пересечения описанных окружностей треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C.

Решения

7.1. Пусть O_1 и O_2 — центры колёс радиусов r_1 и r_2 соответственно. Если M — точка пересечения внутренних касательных, то $O_1M : O_2M = r_1 : r_2$. Из этого условия с помощью задачи 1.1 б) легко получить, что расстояние от точки M до прямой l равно $2r_1r_2/(r_1 + r_2)$. Поэтому все точки пересечения общих внутренних касательных лежат на прямой, параллельной прямой l и отстоящей от неё на расстояние $2r_1r_2/(r_1 + r_2)$.

7.2. Пусть O — точка пересечения прямых AB и CD. Отложим на лучах OA и OD отрезки OK и OL, равные AB и CD соответственно. Тогда $S_{ABX} + S_{CDX} = S_{KOX} + S_{LOX} = S_{KOL} \pm S_{KXL}$. Следовательно, площадь треугольника KXL постоянна, т. е. точка X лежит на прямой, параллельной KL.

7.3. Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — единичные векторы, параллельные данным прямым; $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OX}$. Сумма длин проекций вектора $\boldsymbol{x}$ на данные прямые равна $|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})| + |(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x})| = |(\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x})|$, причём смена знака происходит на перпендикулярах, восставленных из точки O к данным прямым. Поэтому искомое ГМТ — прямоугольник, стороны которого параллельны биссектрисам углов между данными прямыми, а вершины лежат на указанных перпендикулярах.

7.4. Пусть l — прямая, проходящая через середины сторон BC и AD. Предположим, что точка X не лежит на прямой l, например что точки A и X лежат по одну сторону от прямой l. Тогда $AX < DX$ и $BX < CX$, а значит, $AX + BX < CX + DX$. Поэтому прямая l — искомое ГМТ.

7.5. Пусть N — такая точка, что $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DA}$. Тогда $\angle NAM = \angle DMA$ и $\angle NBM = \angle BMC$, поэтому четырёхугольник $AMBN$ вписанный. Диагонали вписанного четырёхугольника $AMBN$ равны, поэтому $AM \parallel BN$ или $BM \parallel AN$. В первом случае $\angle AMD = \angle MAN = \angle AMB$, а во втором случае $\angle BMC = \angle MBN = \angle BMA$. Если $\angle AMB = \angle AMD$, то $\angle AMB + \angle BMC = 180^\circ$ и точка M лежит на диагонали AC, а если $\angle BMA = \angle BMC$, то точка M лежит на диагонали BD. Ясно также, что если точка M лежит на одной из диагоналей, то $\angle AMD + \angle BMC = 180^\circ$.

7.6. Введём систему координат, выбрав точку A в качестве начала координат и направив ось Ox по лучу AB. Пусть точка M имеет координаты (x, y). Тогда $AM^2 = x^2 + y^2$ и $BM^2 = (x - a)^2 + y^2$, где $a = AB$. Поэтому $AM^2 - BM^2 = 2ax - a^2$. Эта величина равна k для точек M с координатами $((a^2 + k)/2a, y)$; все такие точки лежат на прямой, перпендикулярной AB.

7.7. Пусть A и B — точки пересечения окружностей S и S_1. Тогда $XM^2 = XA \cdot XB = XO^2 - R^2$, где O и R — центр и радиус окружности S. Поэтому $XO^2 - XM^2 = R^2$, а значит, точки X лежат на перпендикуляре к прямой OM (см. задачу 7.6).

7.8. Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей, R_1 и R_2 — их радиусы. Окружность радиуса r с центром X пересекает первую окружность в диаметрально противоположных точках тогда и только тогда, когда $r^2 = XO_1^2 + R_1^2$, поэтому искомое ГМТ состоит из таких точек X, что $XO_1^2 + R_1^2 = XO_2^2 + R_2^2$, все такие точки X лежат на прямой, перпендикулярной O_1O_2 (задача 7.6).

7.9. Пусть O — центр окружности, R — её радиус, M — точка пересечения касательных, проведённых через концы хорды, содержащей точку A, P — середина этой хорды. Тогда $OP \cdot OM = R^2$ и $OP = OA \cos\varphi$, где $\varphi = \angle AOP$. Поэтому $AM^2 = OM^2 + OA^2 - 2OM \cdot OA \cos\varphi = OM^2 + OA^2 - 2R^2$, а значит, величина $OM^2 - AM^2 = 2R^2 - OA^2$ постоянна. Следовательно, все точки M лежат на прямой, перпендикулярной OA (см. задачу 7.6).

7.10. Пусть P и Q — середины диагоналей AC и BD. Тогда $AX^2 + CX^2 = 2PX^2 + AC^2/2$ и $BX^2 + DX^2 = 2QX^2 + BD^2/2$ (см. задачу 12.11 а), поэтому в задаче б) искомое ГМТ состоит из таких точек X, что $PX^2 - QX^2 = (BD^2 - AC^2)/4$, а в задаче а) $P = Q$, поэтому рассматриваемая величина равна $(AC^2 - BD^2)/2$.

7.11. Пусть M и N — концы данного отрезка, O — его середина. Точка B лежит на окружности с диаметром MN, поэтому $OB = MN/2$. Траекторией точки O является часть окружности радиуса $MN/2$ с центром B, заключённая внутри угла ABC.

7.12. Пусть M — данная точка, O — центр данной окружности. Если X — середина хорды AB, то $XO \perp AB$. Следовательно, искомое ГМТ является окружностью с диаметром MO.

7.13. Проведём через точку M общую касательную к окружностям. Пусть O — точка пересечения этой касательной с прямой AB. Тогда $AO = MO = BO$, т. е. O — середина отрезка AB. Точка M лежит на окружности с центром O и радиусом $AB/2$. Множеством точек M является окружность с диаметром AB (точки A и B следует исключить).

7.14. При $k = 1$ получаем серединный перпендикуляр к отрезку AB. В дальнейшем будем считать, что $k \neq 1$.

Введём систему координат на плоскости так, чтобы точки A и B имели координаты $(-a, 0)$ и $(a, 0)$ соответственно. Если точка M имеет координаты (x, y), то $\dfrac{AM^2}{BM^2} = \dfrac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}$. Уравнение $\dfrac{AM^2}{BM^2} = k^2$ приводится к виду

$$\left(x + \frac{1+k^2}{1-k^2}a\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2ka}{1-k^2}\right)^2.$$

Это уравнение является уравнением окружности с центром $\left(-\dfrac{1+k^2}{1-k^2}a,\ 0\right)$ и радиусом $\dfrac{2ka}{|1-k^2|}$.

7.15. Пусть прямая AB пересекает окружность S в точках E и F, причём точка E лежит на отрезке AB. Тогда PE — биссектриса треугольника APB, поэтому $\angle EPB = \angle EPA = \angle EFP$. А так как $\angle EPF = 90^\circ$, то $PB \perp EF$.

7.16. а) Рассматриваемые окружности являются окружностями Аполлония для пар вершин треугольника ABC, поэтому если X — общая точка окружностей S_a и S_b, то $XB : XC = AB : AC$ и $XC : XA = BC : BA$, т. е. $XB : XA = CB : CA$, а значит, точка X принадлежит окружности S_c. Ясно также, что если $AB > BC$, то точка D лежит внутри окружности S_b, а точка A — вне её. Следовательно, окружности S_a и S_b пересекаются в двух различных точках.

Для завершения доказательства остаётся воспользоваться результатом задачи 7.51.

б) Согласно задаче а) $MA = \lambda/a$, $MB = \lambda/b$ и $MC = \lambda/c$. Пусть B_1 и C_1 — проекции точки M на прямые AC и AB. Точки B_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром MA, поэтому $B_1C_1 = MA \sin B_1AC_1 = (\lambda/a)(a/2R) = \lambda/2R$, где R — радиус описанной окружности треугольника ABC. Аналогично $A_1C_1 = A_1B_1 = \lambda/(2R)$.

7.17. В задаче 7.16 а) уже доказано, что прямая MN проходит через точку O. Остаётся доказать, что она проходит через точку K. Согласно задаче 5.156 общая хорда окружности S_a и описанной окружности треугольника ABC проходит через точку K. Аналогично общая хорда окружности S_b и описанной окружности тоже проходит через точку K. Поэтому K — радикальный центр описанной окружности и окружностей S_a и S_b. Следовательно, общая хорда окружностей S_a и S_b проходит через точку K.

7.18. Пусть O_1 и O_2 — такие точки, что $\overrightarrow{BO_1} = 4\overrightarrow{BA}/3$ и $\overrightarrow{CO_2} = 4\overrightarrow{CB}/3$. Легко проверить, что если $BM > 2AM$, то точка M лежит внутри окружности S_1 радиуса $2AB/3$ с центром O_1 (см. задачу 7.14), а если $CM > 2BM$, то точка M лежит внутри окружности S_2 радиуса $2AB/3$ с центром O_2. Так как $O_1O_2 > BO_1 = 4AB/3$, а сумма радиусов окружностей S_1 и S_2 равна $4AB/3$, то эти окружности не пересекаются. Следовательно, если $BM = qAM$ и $CM = qBM$, то $q < 2$.

7.19. а) Пусть O — точка пересечения высот AA_1 и BB_1. Точки A_1 и B_1 лежат на окружности с диаметром CO. Следовательно, $\angle AOB = 180^\circ - \angle C$. Поэтому искомое ГМТ — окружность, симметричная данной относительно прямой AB (точки, проецирующиеся в точки A и B, следует исключить).

б) Если O — точка пересечения биссектрис треугольника ABC, то $\angle AOB = 90^\circ + \angle C/2$. На каждой из двух дуг AB угол C постоянен, поэтому искомым

ГМТ являются две дуги, из которых отрезок AB виден под углом $90^\circ + \angle C/2$ (точки A и B следует исключить).

7.20. Точки P и Q лежат на окружности с диаметром DX, поэтому $\angle(QD, DX) = \angle(QP, PX) = \angle(AP, PB) = 45^\circ$, т. е. точка X лежит на прямой CD.

7.21. а) Если точка A_1 пройдёт по окружности дугу величиной 2φ, то точка B_1 тоже пройдёт дугу величиной 2φ, а значит, прямые AA_1 и BB_1 повернутся на угол φ и угол между ними не изменится. Поэтому точка M перемещается по окружности, содержащей точки A и B.

б) Пусть прямые AA_1, BB_1 и CC_1 в некоторый момент пересекаются в точке P. Тогда, например, точка пересечения прямых AA_1 и BB_1 перемещается по описанной окружности треугольника ABP. Ясно также, что описанные окружности треугольников ABP, BCP и CAP имеют единственную общую точку P.

7.22. Предположим, что точки A и C лежат на противоположных сторонах прямоугольника. Пусть M и N — середины отрезков AC и BD соответственно. Проведём через точку M прямую l_1, параллельную сторонам прямоугольника, на которых лежат точки A и C, а через точку N прямую l_2, параллельную сторонам прямоугольника, на которых лежат точки B и D. Пусть O — точка пересечения прямых l_1 и l_2. Ясно, что точка O лежит на окружности S, построенной на отрезке MN как на диаметре. С другой стороны, точка O является центром прямоугольника. Ясно, что прямоугольник можно построить для любой точки O, лежащей на окружности S.

Остаётся заметить, что на противоположных сторонах прямоугольника могут лежать также точки A и B, A и D. Поэтому искомым ГМТ является объединение трёх окружностей.

7.23. Легко проверить, что точки высот треугольника ABC обладают требуемым свойством. Предположим, что требуемым свойством обладает точка X, не лежащая ни на одной из высот треугольника ABC. Тогда прямая BX пересекает высоты AA_1 и CC_1 в точках X_1 и X_2. Так как $\angle XAB + \angle XBC + \angle XCA = 90^\circ = \angle X_1AB + \angle X_1BC + \angle X_1CA$, то $\angle XAB - \angle X_1AB = \angle X_1CA - \angle XCA$, т. е. $\angle(XA, AX_1) = \angle(X_1C, CX)$. Следовательно, точка X лежит на описанной окружности треугольника AXC', где точка C' симметрична C относительно прямой BX. Аналогично доказывается, что точка X_2 лежит на этой окружности, а значит, прямая BX пересекает эту окружность в трёх различных точках. Получено противоречие.

7.24. Пусть K — точка касания прямой MX и данной полуокружности, а P — проекция точки M на диаметр. В прямоугольных треугольниках MPX и OKX равны гипотенузы и $\angle PXM = \angle OXK$, а значит, эти треугольники равны и, в частности, $MP = KO = R$, где R — радиус данной полуокружности. Следовательно, точка M лежит на прямой l, параллельной диаметру полуокружности и касающейся полуокружности. Пусть AB — отрезок прямой l, проекцией которого является диаметр полуокружности. Из точки прямой l, лежащей вне отрезка AB, нельзя провести касательную к данной полуокружности, так как касательная, проведённая к окружности, будет касаться другой полуокружности. Искомым ГМТ является отрезок AB, из которого выброшены точки A и B и его середина.

7.25. Пусть H — основание высоты h_b треугольника ABC и $h_b = b$. Обозначим через B' точку пересечения перпендикуляра к прямой AB, проведённого через точку A, и перпендикуляра к прямой AH, проведённого через точку C.

Прямоугольные треугольники $AB'C$ и BAH равны, так как $\angle AB'C = \angle BAH$ и $AC = BH$. Поэтому $AB' = AB$, т. е. точка C лежит на окружности с диаметром AB'.

Пусть S_1 и S_2 — образы окружности S с диаметром AB при поворотах на $\pm 90^\circ$ с центром A (рис. 7.1). Мы доказали, что точка $C \neq A$ принадлежит объединению окружностей S_1 и S_2. Обратно, пусть точка $C \neq A$ принадлежит окружности S_1 или S_2, AB' — диаметр соответствующей окружности. Тогда $\angle AB'C = \angle HAB$ и $A'B = AB$, поэтому $AC = HB$.

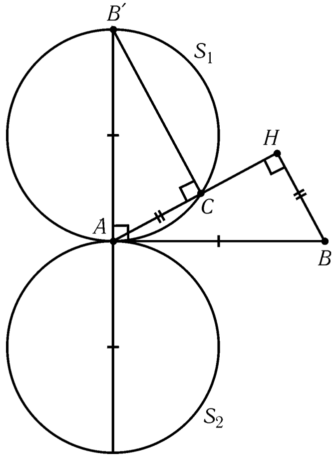


Рис. 7.1

7.26. Пусть O — центр окружности, N — точка пересечения прямых OM и QP. Опустим из точки M перпендикуляр MS на прямую OP. Из подобия треугольников ONQ и OQM, OPN и OMS получаем $ON : OQ = OQ : OM$ и $OP : ON = OM : OS$. Перемножая эти равенства, получаем $OP : OQ = OQ : OS$. Поэтому $OS = OQ^2 : OP$ является постоянной величиной. А так как точка S лежит на луче OP, её положение не зависит от выбора точки Q. Искомым ГМТ является прямая, перпендикулярная прямой OP и проходящая через точку S.

7.27. Пусть O — середина отрезка AB, M — точка пересечения медиан треугольника ABC. При гомотетии с центром O и коэффициентом $1/3$ точка C переходит в точку M. Поэтому точки пересечения медиан треугольников ABC лежат на окружности S, являющейся образом исходной окружности при гомотетии с центром O и коэффициентом $1/3$. Для получения искомого ГМТ из окружности S нужно выбросить образы точек A и B.

7.28. Пусть O — середина высоты BH, M — середина отрезка AC, D и E — середины сторон RQ и PS соответственно (рис. 7.2).

Точки D и E лежат на прямых AO и CO соответственно. Середина отрезка DE является центром прямоугольника $PQRS$. Ясно, что она лежит на отрезке OM. Искомым ГМТ является отрезок OM, за исключением его концов.

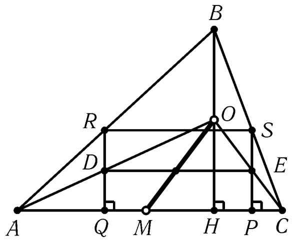


Рис. 7.2

7.29. Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей (точка P лежит на окружности с центром O_1), O — середина отрезка O_1O_2; P', Q' и O' — проекции точек O_1, O_2 и O на прямую PQ. При вращении прямой PQ точка O' пробегает окружность S с диаметром AO. Ясно, что при гомотетии с центром A и коэффициентом 2 отрезок $P'Q'$ переходит в отрезок PQ, т. е. точка O' переходит в середину отрезка PQ. Поэтому искомым ГМТ является образ окружности S при этой гомотетии.

7.30. Пусть P и Q — центры описанных окружностей треугольников AMB и CMB. Точка M принадлежит искомому ГМТ, если $BPMQ$ — ромб, т. е. точка M является образом середины отрезка PQ при гомотетии с центром B

и коэффициентом 2. А так как проекции точек P и Q на прямую AC являются серединами отрезков AB и BC, середины всех отрезков PQ лежат на одной прямой. (Точку прямой AC из полученного ГМТ следует исключить.)

7.31. Точка P проходит через точку O в момент t_1, точка Q — в момент t_2. В момент $(t_1+t_2)/2$ точки P и Q находятся от точки O на одинаковом расстоянии, равном $|t_1-t_2|v/2$. Проведём в этот момент перпендикуляры к прямым в точках P и Q. Легко проверить, что точка пересечения этих перпендикуляров является искомой.

7.32. Обозначим середины диагоналей AC и BD четырёхугольника $ABCD$ через M и N соответственно. Ясно, что $S_{AMB}=S_{BMC}$ и $S_{AMD}=S_{DMC}$, т. е. $S_{DABM}=S_{BCDM}$. Поскольку при перемещении точки M параллельно BD площади четырёхугольников $DABM$ и $BCDM$ не изменяются, то $S_{DABO}=S_{BCDO}$. Аналогичные рассуждения для точки N показывают, что $S_{ABCO}=S_{CDAO}$. Поэтому $S_{ADO}+S_{ABO}=S_{BCO}+S_{CDO}$ и $S_{ABO}+S_{BCO}=S_{CDO}+S_{ADO}$, а значит, $S_{ADO}=S_{BCO}=S_1$ и $S_{ABO}=S_{CDO}=S_2$, т. е. площадь каждой из четырёх частей, на которые отрезки, соединяющие точку O с серединами сторон четырёхугольника, разбивают его, равна $(S_1+S_2)/2$.

7.33. Опустим из точки B высоту BB_1. Тогда $AD=B_1D$ и $CE=B_1E$. Ясно, что если $MD<AD$, то точка M лежит на отрезке AB_1, т. е. вне отрезка B_1C. Следовательно, $ME>EC$.

7.34. Предположим, что все вершины многоугольника удалены от точки Q не меньше, чем точки от P. Тогда все вершины многоугольника лежат в той же полуплоскости, заданной серединным перпендикуляром к отрезку PQ, что и точка P, а точка Q лежит в другой полуплоскости. Следовательно, точка Q лежит вне многоугольника, что противоречит условию.

7.35. Найдём ГМТ M, для которых $MA>MB$ и $MA>MC$. Проведём серединные перпендикуляры l_1 и l_2 к отрезкам AB и AC. $MA>MB$ для точек, лежащих внутри полуплоскости, заданной прямой l_1 и не содержащей точку A. Поэтому искомым ГМТ является пересечение полуплоскостей (без границ), заданных прямыми l_1, l_2 и не содержащих точку A. Если точки A, B, C не лежат на одной прямой, то это ГМТ всегда непусто. Если A, B, C лежат на одной прямой, но A не лежит на отрезке BC, то это ГМТ тоже непусто. Если же A лежит на отрезке BC, то это ГМТ пусто, т. е. для любой точки M либо $MA\leqslant MB$, либо $MA\leqslant MC$.

7.36. Пусть O — середина диагонали AC. Проекции точек B и D на прямую AC лежат на отрезке AO, поэтому проекция точки M тоже лежит на отрезке AO.

7.37. Проведём серединный перпендикуляр l к отрезку AO. Ясно, что $AM\geqslant OM$ тогда и только тогда, когда точка M лежит по ту же сторону от прямой l, что и точка O (или лежит на прямой l). Поэтому искомым ГМТ является ромб, образованный серединными перпендикулярами к отрезкам OA, OB, OC и OD.

7.38. Искомое ГМТ заштриховано на рис. 7.3 (граница входит в ГМТ).

7.39. Пусть A_1 и B_1 — середины сторон CB и AC соответственно. Искомым ГМТ является внутренность четырёхугольника OA_1CB_1.

7.40. Проведём общие касательные к данным кругам (рис. 7.4). Легко проверить, что точки, принадлежащие заштрихованным областям (но не их границам), удовлетворяют требуемому условию, а точки, не лежащие в этих областях, не удовлетворяют этому условию.

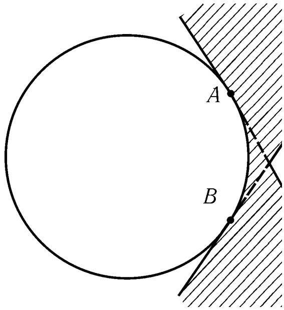


Рис. 7.3

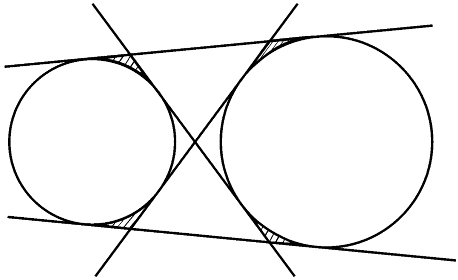


Рис. 7.4

7.41. Пусть перпендикуляры, опущенные из точек A_1, B_1, C_1 на прямые BC, CA, AB, пересекаются в точке M. Так как точки B_1 и M лежат на одном перпендикуляре к прямой AC, то $B_1A^2 - B_1C^2 = MA^2 - MC^2$ (задача 7.6). Аналогично $C_1B^2 - C_1A^2 = MB^2 - MA^2$ и $A_1C^2 - A_1B^2 = MC^2 - MB^2$. Складывая эти равенства, получаем $A_1B^2 + C_1A^2 + B_1C^2 = B_1A^2 + A_1C^2 + C_1B^2$.

Обратно, пусть $A_1B^2 + C_1A^2 + B_1C^2 = B_1A^2 + A_1C^2 + C_1B^2$. Обозначим точку пересечения перпендикуляров, опущенных из точек A_1 и B_1 на прямые BC и AC, через M. Проведём через точку M прямую l, перпендикулярную прямой AB. Если C_1' — точка на прямой l, то, согласно предыдущему, $A_1B^2 + C_1'A^2 + B_1C^2 = B_1A^2 + A_1C^2 + C_1'B^2$. Поэтому $C_1'A^2 - C_1'B^2 = C_1A^2 - C_1B^2$. Согласно задаче 7.6 ГМТ X, для которых $XA^2 - XB^2 = k$, является прямой, перпендикулярной отрезку AB. Поэтому перпендикуляр, опущенный из точки C_1 на прямую AB, проходит через точку M, что и требовалось.

7.42. Положим $A_1 = A$, $B_1 = B$ и $C_1 = C$. Из очевидного равенства $AB^2 + CA^2 + BC^2 = BA^2 + AC^2 + CB^2$ получаем, что высоты, опущенные из точек A, B и C на стороны BC, CA и AB, пересекаются в одной точке.

7.43. Пусть A_1, B_1 и C_1 — точки касания вневписанных окружностей со сторонами BC, CA и AB. Тогда $A_1B = p - c = B_1A$, $C_1A = A_1C$ и $B_1C = C_1B$. Поэтому $A_1B^2 + C_1A^2 + B_1C^2 = B_1A^2 + A_1C^2 + C_1B^2$.

7.44. Достаточно воспользоваться результатом задачи 7.41.

7.45. а) Эта задача является очевидным следствием задачи 7.41.

б) Пусть при повороте на 90° относительно некоторой точки треугольник $A_1B_1C_1$ переходит в $A_2B_2C_2$. Перпендикуляры к сторонам треугольника $A_2B_2C_2$ параллельны соответствующим сторонам треугольника $A_1B_1C_1$, поэтому перпендикуляры, опущенные из вершин треугольника ABC на стороны треугольника $A_2B_2C_2$, пересекаются в одной точке. Следовательно, в одной точке пересекаются перпендикуляры, опущенные из вершин треугольника $A_2B_2C_2$ на стороны треугольника ABC. Остаётся заметить, что при повороте на 90°, переводящем треугольник $A_2B_2C_2$ в $A_1B_1C_1$, эти перпендикуляры переходят в прямые, проходящие через вершины треугольника $A_1B_1C_1$ параллельно соответствующим сторонам треугольника ABC.

7.46. Нужно выяснить, в каком случае выполняется равенство $AB_1^2 + BC_1^2 + CA_1^2 = BA_1^2 + CB_1^2 + AC_1^2$. Вычитая из обеих частей этого равенства величину $AA_2^2 + BB_2^2 + CC_2^2$, переходим к соотношению $A_2B_1^2 + B_2C_1^2 + C_2A_1^2 = B_2A_1^2 + C_2B_1^2 + A_2C_1^2$, т. е. $(b_1 - a_2)^2 + (c_1 - b_2)^2 + (a_1 - c_2)^2 = (a_1 - b_2)^2 + (b_1 - c_2)^2 + (c_1 - a_2)^2$, где a_i, b_i и c_i — координаты точек A_i, B_i и C_i на прямой l. После сокращения получаем $a_2b_1 + b_2c_1 + c_2a_1 = a_1b_2 + b_1c_2 + c_1a_2$, а значит, $(b_2 - a_2)(c_1 - b_1) = (b_1 - a_1)(c_2 - b_2)$, т. е. $\overline{A_2B_2} : \overline{B_2C_2} = \overline{A_1B_1} : \overline{B_1C_1}$.

7.47. Можно считать, что длина стороны данного правильного треугольника равна 2. Пусть $PA = 2a$, $PB = 2b$ и $PC = 2c$; A_1, B_1 и C_1 — проекции центров вписанных окружностей треугольников PBC, PCA и PAB на прямые BC, CA и AB. Согласно задаче 3.2 $AB_1^2 + BC_1^2 + CA_1^2 = (1 + a - c)^2 + (1 + b - a)^2 + (1 + c - b)^2 = 3 + (a - c)^2 + (b - a)^2 + (c - b)^2 = BA_1^2 + CB_1^2 + AC_1^2$.

7.48. Отрезки, на которые биссектрисы делят стороны треугольника, легко вычисляются. В результате получаем, что если перпендикуляры, восставленные из оснований биссектрис, пересекаются, то

$$\left(\frac{ac}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{ab}{a+c}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a+b}\right)^2 = \left(\frac{ab}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a+c}\right)^2 + \left(\frac{ac}{a+b}\right)^2,$$

т. е.

$$0 = \frac{a^2(c-b)}{b+c} + \frac{b^2(a-c)}{a+c} + \frac{c^2(b-a)}{a+b} = -\frac{(b-a)(a-c)(c-b)(a+b+c)^2}{(a+b)(a+c)(b+c)}.$$

7.49. Пусть (a_i, b_i) — координаты точки A_i, (x, y) — координаты точки X. Тогда уравнение, которому удовлетворяет точка X, перепишется в виде $c = \sum k_i((x - a_i)^2 + (x - b_i)^2) = \left(\sum k_i\right)(x^2 + y^2) - \left(2\sum k_ia_i\right)x - \left(2\sum k_ib_i\right)y + \sum k_i(a_i^2 + b_i^2)$. Если коэффициент при $x^2 + y^2$ отличен от нуля, то это уравнение задаёт окружность или пустое множество, а если он равен нулю, то уравнение задаёт прямую, плоскость или пустое множество.

З а м е ч а н и е. Если в случае а) точки $A_1, \ldots, A_n$ лежат на одной прямой l, то эту прямую можно выбрать в качестве оси Ox. Тогда $b_i = 0$, а значит, коэффициент при y равен нулю, т. е. центр окружности лежит на прямой l.

7.50. Пусть прямая l высекает на данных окружностях дуги A_1B_1 и A_2B_2 величиной $2\alpha_1$ и $2\alpha_2$; O_1 и O_2 — центры окружностей, R_1 и R_2 — их радиусы. Пусть K — точка пересечения касательных в точках A_1 и A_2. По теореме синусов $KA_1 : KA_2 = \sin\alpha_2 : \sin\alpha_1$, т. е. $KA_1\sin\alpha_1 = KA_2\sin\alpha_2$. А так как $KO_1^2 = KA_1^2 + R_1^2$ и $KO_2^2 = KA_2^2 + R_2^2$, то $(\sin^2\alpha_1)KO_1^2 - (\sin^2\alpha_2)KO_2^2 = (R_1\sin\alpha_1)^2 - (R_2\sin\alpha_2)^2 = q$. Аналогично доказывается, что и остальные точки пересечения касательных принадлежат геометрическому месту таких точек X, что $(\sin^2\alpha_1)XO_1^2 - (\sin^2\alpha_2)XO_2^2 = q$. Это ГМТ — окружность, центр которой лежит на прямой O_1O_2 (см. замечание к задаче 7.49).

7.51. Пусть $AM : BM : CM = p : q : r$. Все точки X, удовлетворяющие соотношению $(q^2 - r^2)AX^2 + (r^2 - p^2)BX^2 + (p^2 - q^2)CX^2 = 0$, лежат на одной прямой (см. задачу 7.49), а точки M, N и O удовлетворяют этому соотношению.

ГЛАВА 8

ПОСТРОЕНИЯ

Основные сведения

1. Задачи на построение решаются по определённой стандартной схеме. Сначала проводим анализ, т. е. предполагаем, что искомая фигура построена, и, исследуя её свойства, находим, как её можно задать с помощью исходных данных. На основании этих рассуждений описываем последовательность построений. Затем нужно доказать, что указанная последовательность построений приводит к требуемому результату, а также выяснить, в каких случаях сколько имеется решений.

При написании решений я несколько отклонился от этой схемы. Дело в том, что в подавляющем большинстве случаев после анализа доказательство уже совершенно очевидно. В подобных случаях доказательство не приводится, но следует помнить, что его нужно провести самостоятельно. Если же доказательство не совсем очевидно, то указывается, как преодолеть возникающие трудности. Исследование числа решений задач на построение не приводится.

2. Некоторые задачи на построение, решения которых используют геометрические преобразования, распределены по соответствующим главам.

3. Если A и B — фиксированные точки, то ГМТ X, для которых $AX : BX = k \neq 1$, является окружностью (см. задачу 7.14). Это ГМТ иногда используется при решении задач на построение.

Вводные задачи

1. Постройте треугольник ABC по стороне a, высоте h_a и углу A.

2. Постройте прямоугольный треугольник по катету и гипотенузе.

3. Постройте окружность с данным центром, касающуюся данной окружности.

4. Постройте прямую, проходящую через данную точку и касающуюся данной окружности.

5. Даны отрезки, длины которых равны a, b и c. Постройте отрезок длиной: а) ab/c; б) $\sqrt{ab}$.

§ 1. Метод геометрических мест точек

8.1. Постройте треугольник ABC по a, h_a и радиусу описанной окружности R.

8.2. Постройте точку M внутри данного треугольника так, что $S_{ABM} : S_{BCM} : S_{ACM} = 1 : 2 : 3$.

8.3. Проведите через данную точку P, лежащую внутри данной окружности, хорду так, чтобы разность длин отрезков, на которые P делит хорду, имела данную величину a.

8.4. Даны прямая и окружность. Постройте окружность данного радиуса r, касающуюся их.

8.5. Даны точка A и окружность S. Проведите через точку A прямую так, чтобы хорда, высекаемая окружностью S на этой прямой, имела данную длину d.

8.6*. Дан четырёхугольник $ABCD$. Впишите в него параллелограмм с заданными направлениями сторон.

§ 2. Вписанный угол

8.7. Постройте треугольник по a, медиане m_c и углу A.

8.8. Даны окружность и две точки A и B внутри её. Впишите в окружность прямоугольный треугольник так, чтобы его катеты проходили через данные точки.

8.9. Продолжения сторон AB и CD прямоугольника $ABCD$ пересекают некоторую прямую в точках M и N, а продолжения сторон AD и BC пересекают ту же прямую в точках P и Q. Постройте прямоугольник $ABCD$, если даны точки M, N, P, Q и длина a стороны AB.

8.10*. Постройте треугольник по биссектрисе, медиане и высоте, проведённым из одной вершины.

8.11*. Постройте треугольник ABC по стороне a, углу A и радиусу вписанной окружности r.

§ 3. Подобные треугольники и гомотетия

8.12. Постройте треугольник по двум углам A, B и периметру P.

8.13. Постройте треугольник ABC по m_a, m_b и m_c.

8.14. Постройте треугольник ABC по h_a, h_b и h_c.

8.15. Впишите в данный остроугольный треугольник ABC квадрат $KLMN$ так, чтобы вершины K и N лежали на сторонах AB и AC, а вершины L и M — на стороне BC.

8.16*. Постройте треугольник ABC по h_a, $b - c$ и r.

См. также задачи 19.16—19.21, 19.40, 19.41.

§ 4. Построение треугольников по различным элементам

В задачах этого параграфа требуется построить треугольник по указанным в условии элементам.

8.17. c, m_a и m_b.

8.18. a, b и h_a.

8.19. h_b, h_c и m_a.

8.20. $\angle A$, h_b и h_c.
8.21. a, h_b и m_b.
8.22. h_a, m_a и h_b.
8.23. a, b и m_c.
8.24*. h_a, m_a и $\angle A$.
8.25*. a, b и l_c.
8.26*. $\angle A$, h_a и p.

См. также задачи 17.6—17.8.

§ 5. Построение треугольников по различным точкам

8.27. Постройте треугольник ABC, если дана прямая l, на которой лежит сторона AB, и точки A_1, B_1 — основания высот, опущенных на стороны BC и AC.

8.28. Постройте равнобедренный треугольник, если заданы основания его биссектрис.

8.29. а) Постройте треугольник ABC, зная три точки A', B', C', в которых биссектрисы его углов пересекают описанную окружность (оба треугольника остроугольные).

б) Постройте треугольник ABC, зная три точки A', B', C', в которых высоты треугольника пересекают описанную окружность (оба треугольника остроугольные).

8.30. Постройте треугольник ABC, зная три точки A', B', C', симметричные центру O описанной окружности этого треугольника относительно сторон BC, CA, AB.

8.31. Постройте треугольник ABC, зная три точки A', B', C', симметричные точке пересечения высот треугольника относительно сторон BC, CA, AB (оба треугольника остроугольные).

8.32. Постройте треугольник ABC, зная три точки P, Q, R, в которых высота, биссектриса и медиана, проведённые из вершины C, пересекают описанную окружность.

8.33. Постройте треугольник ABC, зная положение трёх точек A_1, B_1, C_1, являющихся центрами вневписанных окружностей треугольника ABC.

8.34*. Постройте треугольник ABC по центру описанной окружности O, точке пересечения медиан M и основанию H высоты CH.

8.35*. Постройте треугольник ABC по центрам вписанной, описанной и одной из вневписанных окружностей.

§ 6. Треугольник

8.36. Постройте точки X и Y на сторонах AB и BC треугольника ABC так, что $AX = BY$ и $XY \parallel AC$.

8.37. Постройте треугольник по сторонам a и b, если известно, что угол против одной из них в три раза больше угла против другой.

8.38. Впишите в данный треугольник ABC прямоугольник $PQRS$ (вершины R и Q лежат на сторонах AB и BC, P и S — на стороне AC) так, чтобы его диагональ имела данную длину.

8.39. Проведите через данную точку M прямую так, чтобы она отсекала от данного угла с вершиной A треугольник ABC данного периметра $2p$.

8.40. Постройте треугольник ABC по медиане m_c и биссектрисе l_c, если $\angle C = 90^\circ$.

8.41*. Дан треугольник ABC, причём $AB < BC$. Постройте на стороне AC точку D так, чтобы периметр треугольника ABD был равен длине стороны BC.

8.42*. Постройте треугольник ABC по радиусу описанной окружности и биссектрисе угла A, если известно, что разность углов B и C равна 90°.

8.43*. На стороне AB треугольника ABC дана точка P. Проведите через точку P прямую (отличную от AB), пересекающую лучи CA и CB в таких точках M и N, что $AM = BN$.

8.44*. Постройте треугольник ABC по радиусу вписанной окружности r и (ненулевым) длинам отрезков AO и AH, где O — центр вписанной окружности, H — ортоцентр.

См. также задачи 15.14 б), 17.12—17.15, 18.11, 18.33.

§ 7. Четырёхугольники

8.45. Постройте квадрат, три вершины которого лежат на трёх данных параллельных прямых.

8.46. Постройте ромб, две стороны которого лежат на двух данных параллельных прямых, а две другие проходят через две данные точки.

8.47. Постройте четырёхугольник $ABCD$ по четырём сторонам и углу между AB и CD.

8.48. Через вершину A выпуклого четырёхугольника $ABCD$ проведите прямую, делящую его на две равновеликие части.

8.49. Даны середины трёх равных сторон выпуклого четырёхугольника. Постройте этот четырёхугольник.

8.50. Даны три вершины вписанного и описанного четырёхугольника. Постройте его четвёртую вершину.

8.51*. Даны вершины A и C равнобедренной описанной трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$); известны также направления её оснований. Постройте вершины B и D.

8.52*. На доске была начерчена трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) и проведены перпендикуляр OK из точки O пересечения диагоналей на основание AD и средняя линия EF. Затем трапецию стёрли. Как восстановить чертёж по сохранившимся отрезкам OK и EF?

8.53*. Постройте выпуклый четырёхугольник, если даны длины всех его сторон и одной средней линии[1].

8.54*. Постройте вписанный четырёхугольник по четырём сторонам (Брахмагупта).

См. также задачи 15.12, 15.15, 16.17, 17.4, 17.5.

§ 8. Окружности

8.55. Внутри угла даны две точки A и B. Постройте окружность, проходящую через эти точки и высекающую на сторонах угла равные отрезки.

8.56. Даны окружность S, точка A на ней и прямая l. Постройте окружность, касающуюся данной окружности в точке A и данной прямой.

8.57. а) Даны две точки A, B и прямая l. Постройте окружность, проходящую через точки A, B и касающуюся прямой l.

б) Даны две точки A и B и окружность S. Постройте окружность, проходящую через точки A и B и касающуюся окружности S.

8.58*. Даны три точки, не лежащие на одной прямой. Через каждые две из них провести окружность так, чтобы построенные окружности были взаимно ортогональны.

8.59*. Постройте окружность, равноудалённую от четырёх данных точек.

8.60*. Даны две точки A и B и окружность. Найти на окружности точку X так, чтобы прямые AX и BX отсекли на окружности хорду CD, параллельную данной прямой MN.

8.61*. Даны три точки A, B и C. Постройте три окружности, попарно касающиеся в этих точках.

8.62*. Постройте окружность, касательные к которой, проведённые из трёх данных точек A, B и C, имели бы длины a, b и c соответственно.

См. также задачи 15.10, 15.11, 15.13, 15.14 а), 16.13, 16.14, 16.18—16.20, 18.27.

§ 9. Окружность Аполлония

8.63. Постройте треугольник по a, h_a и b/c.

8.64. Постройте треугольник ABC, если известны длина биссектрисы CD и длины отрезков AD и BD, на которые она делит сторону AB.

8.65*. На прямой даны четыре точки A, B, C, D в указанном порядке. Постройте точку M, из которой отрезки AB, BC, CD видны под равными углами.

---

[1]Средней линией четырёхугольника называют отрезок, соединяющий середины противоположных сторон.

8.66*. На плоскости даны два отрезка AB и $A'B'$. Постройте точку O так, чтобы треугольники AOB и $A'OB'$ были подобны (одинаковые буквы обозначают соответственные вершины подобных треугольников).

8.67*. Точки A и B лежат на диаметре данной окружности. Проведите через них две равные хорды с общим концом.

§ 10. Разные задачи

8.68. а) На параллельных прямых a и b даны точки A и B. Проведите через данную точку C прямую l, пересекающую прямые a и b в таких точках A_1 и B_1, что $AA_1 = BB_1$.

б) Проведите через точку C прямую, равноудалённую от данных точек A и B.

8.69. Постройте правильный десятиугольник.

8.70*. Постройте прямоугольник с данным отношением сторон, зная по одной точке на каждой из его сторон.

8.71*. Даны диаметр AB окружности и точка C на нём. Постройте на этой окружности точки X и Y, симметричные относительно прямой AB, так, чтобы прямые AX и YC были перпендикулярными.

См. также задачи 15.9, 16.15, 16.16, 16.21, 17.9—17.11, 17.28—17.30, 18.45.

§ 11. Необычные построения

8.72. С помощью циркуля и линейки разделите угол 19° на 19 равных частей.

8.73. Докажите, что угол величиной n°, где n — целое число, не делящееся на 3, можно разделить на n равных частей с помощью циркуля и линейки.

8.74*. На клочке бумаги нарисованы две прямые, образующие угол, вершина которого лежит вне этого клочка. С помощью циркуля и линейки проведите ту часть биссектрисы угла, которая лежит на клочке бумаги.

8.75*. С помощью двусторонней линейки постройте центр данной окружности, диаметр которой больше ширины линейки.

8.76*. Даны точки A и B, расстояние между которыми больше 1 м. С помощью одной лишь линейки, длина которой равна 10 см, постройте отрезок AB. (Линейкой можно только проводить прямые линии.)

8.77*. На окружности радиуса a дана точка. С помощью монеты радиуса a постройте точку, диаметрально противоположную данной.

§ 12. Построения одной линейкой

В задачах этого параграфа требуется выполнить указанные построения с помощью одной линейки без циркуля. С помощью одной линейки почти никаких построений выполнить нельзя. Например, нельзя даже построить середину отрезка (задача 30.57). Но если на плоскости проведены какие-либо вспомогательные линии, то можно выполнить многие построения. В случае, когда на плоскости нарисована вспомогательная окружность и отмечен её центр, с помощью линейки можно выполнить все построения, которые можно выполнить с помощью линейки и циркуля. При этом, правда, считается, что окружность построена, если построен её центр и одна её точка.

Замечание. Если на плоскости нарисована окружность, но не отмечен её центр, то с помощью одной линейки построить центр нельзя (задача 30.58).

8.78*. Даны две параллельные прямые. С помощью одной линейки разделите пополам отрезок, лежащий на одной из данных прямых.

8.79*. Даны две параллельные прямые и отрезок, лежащий на одной из них. Удвойте этот отрезок.

8.80*. Даны две параллельные прямые. Разделите отрезок, лежащий на одной из них, на n равных частей.

8.81*. Даны две параллельные прямые и точка P. Проведите через точку P прямую, параллельную данным прямым.

8.82*. Даны окружность, её диаметр AB и точка P. Проведите через точку P перпендикуляр к прямой AB.

8.83*. Докажите, что если на плоскости даны какая-нибудь окружность S и её центр O, то с помощью одной линейки можно:

а) из любой точки провести прямую, параллельную данной прямой, и опустить на данную прямую перпендикуляр;

б) на данной прямой от данной точки отложить отрезок, равный данному отрезку;

в) построить отрезок длиной ab/c, где a, b, c — длины данных отрезков;

г) построить точки пересечения данной прямой l с окружностью, центр которой — данная точка A, а радиус равен длине данного отрезка;

д) построить точки пересечения двух окружностей, центры которых — данные точки, а радиусы — данные отрезки.

См. также задачи 3.37, 6.105.

§ 13. Построения с помощью двусторонней линейки

В задачах этого параграфа требуется выполнить построения с помощью линейки с двумя параллельными краями (без циркуля). С помощью двусторонней линейки можно выполнить все построения, выполнимые с помощью циркуля и линейки.

Пусть a — ширина двусторонней линейки. С помощью этой линейки можно выполнять следующие элементарные построения:

1) проводить прямую через две данные точки;

2) проводить прямую, параллельную данной и удалённую от неё на расстояние a;

3) через две данные точки A и B, где $AB \geqslant a$, проводить пару параллельных прямых, расстояние между которыми равно a (таких пар прямых две).

8.84. а) Постройте биссектрису данного угла AOB.

б) Дан острый угол AOB. Постройте угол BOC, биссектрисой которого является луч OA.

8.85. Восставьте перпендикуляр к данной прямой l в данной точке A.

8.86. а) Через данную точку проведите прямую, параллельную данной прямой.

б) Постройте середину данного отрезка.

8.87. Даны угол AOB, прямая l и точка P на ней. Проведите через точку P прямые, образующие с прямой l угол, равный углу AOB.

8.88. Даны отрезок AB, непараллельная ему прямая l и точка M на ней. Постройте точки пересечения прямой l с окружностью радиуса AB с центром M.

8.89*. Даны прямая l и отрезок OA, параллельный l. Постройте точки пересечения прямой l с окружностью радиуса OA с центром O.

8.90*. Даны отрезки O_1A_1 и O_2A_2. Постройте радикальную ось окружностей радиуса O_1A_1 и O_2A_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно.

См. также задачу 8.75.

§ 14. Построения с помощью прямого угла

В задачах этого параграфа требуется выполнить указанные построения с помощью прямого угла. Прямой угол позволяет выполнить следующие элементарные построения:

а) расположить прямой угол так, чтобы одна его сторона лежала на данной прямой, а другая сторона проходила через данную точку;

б) расположить прямой угол так, чтобы его вершина лежала на данной прямой, а стороны проходили через две данные точки (если, конечно, для данной прямой и точек вообще существует такое положение прямого угла).

Расположив прямой угол одним из указанных способов, можно провести лучи, соответствующие его сторонам.

8.91. Проведите через данную точку A прямую, параллельную данной прямой l.

8.92. Дан отрезок AB. Постройте:

а) середину отрезка AB;

б) отрезок AC, серединой которого является точка B.

8.93. Дан угол AOB. Постройте:

а) угол, вдвое больший угла AOB;

б) угол, вдвое меньший угла AOB.

8.94*. Даны угол AOB и прямая l. Проведите прямую l_1 так, что угол между прямыми l и l_1 равен углу AOB.

8.95*. Даны отрезок AB, прямая l и точка O на ней. Постройте на прямой l такую точку X, что $OX = AB$.

8.96*. Дан отрезок OA, параллельный прямой l. Постройте точки, в которых окружность радиуса OA с центром O пересекает прямую l.

Задачи для самостоятельного решения

8.97. Постройте прямую, касающуюся двух данных окружностей (разберите все возможные случаи).

8.98. Постройте треугольник, если известны отрезки, на которые высота делит основание, и медиана, проведённая к боковой стороне.

8.99. Постройте параллелограмм $ABCD$ по вершине A и серединам сторон BC и CD.

8.100. Постройте трапецию, боковые стороны которой лежат на данных прямых, диагонали пересекаются в данной точке, а одно из оснований имеет данную длину.

8.101. Даны две окружности. Проведите прямую так, чтобы она касалась одной окружности, а вторая окружность высекала на ней хорду данной длины.

8.102. Проведите через вершину C треугольника ABC прямую l так, чтобы площади треугольников AA_1C и BB_1C, где A_1 и B_1 — проекции точек A и B на прямую l, были равны.

8.103. Постройте треугольник ABC по сторонам AB и AC, зная, что биссектриса AD, медиана BM и высота CH пересекаются в одной точке.

8.104. Даны точки A_1, B_1 и C_1, делящие стороны BC, CA и AB треугольника ABC в отношении $1:2$. Восстановите по ним треугольник ABC.

Решения

8.1. Построим отрезок BC длины a. Центр O описанной окружности треугольника ABC является точкой пересечения двух окружностей радиуса R с центрами в точках B и C. Выберем одну из этих точек пересечения и построим описанную окружность S треугольника ABC. Точка A является точкой пересечения окружности S и прямой, параллельной прямой BC и отстоящей от неё на расстояние h_a (таких прямых две).

8.2. Построим точки A_1 и B_1 на сторонах BC и AC соответственно так, что $BA_1 : A_1C = 1:3$ и $AB_1 : B_1C = 1:2$. Пусть точка X лежит внутри треугольника ABC. Ясно, что $S_{ABX} : S_{BCX} = 1:2$ тогда и только тогда, когда точка X лежит на отрезке BB_1, и $S_{ABX} : S_{ACX} = 1:3$ тогда и только тогда, когда точка X лежит на отрезке AA_1. Поэтому искомая точка M является точкой пересечения отрезков AA_1 и BB_1.

8.3. Пусть O — центр данной окружности, AB — хорда, проходящая через точку P, M — середина AB. Тогда $|AP - BP| = 2PM$. Так как $\angle PMO = 90^\circ$, точка M лежит на окружности S с диаметром OP. Построим хорду PM окружности S так, что $PM = a/2$ (таких хорд две). Искомая хорда задаётся прямой PM.

8.4. Пусть R — радиус данной окружности, O — её центр. Центр искомой окружности лежит на окружности S радиуса $|R \pm r|$ с центром O. С другой стороны, её центр лежит на прямой l, параллельной данной прямой и удалённой от неё на расстояние r (таких прямых две). Любая точка пересечения окружности S и прямой l может служить центром искомой окружности.

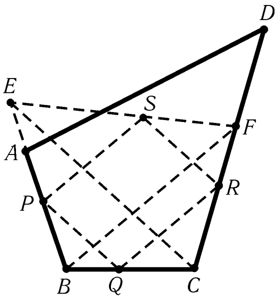


Рис. 8.1

8.5. Пусть R — радиус окружности S, O — её центр. Если окружность S высекает на прямой, проходящей через точку A, хорду PQ и M — середина PQ, то $OM^2 = OQ^2 - MQ^2 = R^2 - d^2/4$. Поэтому искомая прямая касается окружности радиуса $\sqrt{R^2 - d^2/4}$ с центром O.

8.6. Возьмём на прямых AB и CD точки E и F так, чтобы прямые BF и CE имели заданные направления. Рассмотрим всевозможные параллелограммы $PQRS$ с заданными направлениями сторон, вершины P и R которых лежат на лучах BA и CD, а вершина Q — на стороне BC (рис. 8.1). Докажем, что геометрическим местом вершин S является отрезок EF. В самом деле, $\frac{SR}{EC} = \frac{PQ}{EC} = \frac{BQ}{BC} = \frac{FR}{FC}$, т. е. точка S лежит на отрезке EF. Обратно, если точка S' лежит на отрезке EF, то проведём $S'P' \parallel BF$, $P'Q' \parallel EC$ и $Q'R' \parallel BF$ (P', Q', R' — точки на прямых AB, BC, CD). Тогда $\frac{S'P'}{BF} = \frac{P'E}{BE} = \frac{Q'C}{BC} = \frac{Q'R'}{BF}$, т. е. $S'P' = Q'R'$ и $P'Q'R'S'$ — параллелограмм.

Из этого вытекает следующее построение. Строим сначала точки E и F. Вершина S является точкой пересечения отрезков AD и EF. Дальнейшее построение очевидно.

8.7. Предположим, что треугольник ABC построен. Пусть A_1 и C_1 — середины сторон CB и AB. Так как $C_1A_1 \parallel AC$, то $\angle A_1C_1B = \angle A$. Из этого вытекает следующее построение. Построим сначала отрезок CB длиной a и его середину A_1. Точка C_1 является точкой пересечения окружности радиуса m_c с центром C и дуг окружностей, из которых отрезок A_1B виден под углом A. Построив точку C_1, отложим на луче BC_1 отрезок $BA = 2BC_1$. Тогда A — искомая вершина треугольника.

8.8. Предположим, что искомый треугольник построен и C — вершина его прямого угла. Так как $\angle ACB = 90°$, точка C лежит на окружности S с диаметром AB. Поэтому точка C является точкой пересечения окружности S и данной окружности. Построив точку C и проведя прямые CA и AB, найдём оставшиеся вершины искомого треугольника.

8.9. Предположим, что прямоугольник $ABCD$ построен. Опустим из точки P перпендикуляр PR на прямую BC. Точку R можно построить, так как она лежит на окружности с диаметром PQ и $PR = AB = a$. Построив точку R, строим прямые BC и AD и опускаем на них перпендикуляры из точек M и N.

8.10. Предположим, что треугольник ABC построен, AH — высота, AD — биссектриса, AM — медиана. Согласно задаче 2.70 точка D лежит между M и H. Точка E пересечения прямой AD и перпендикуляра, проведённого из точки M к стороне BC, лежит на описанной окружности треугольника ABC.

Поэтому центр O описанной окружности лежит на пересечении серединного перпендикуляра к отрезку AE и перпендикуляра к стороне BC, проведённого через точку M.

Последовательность построений такова: на произвольной прямой (которая в дальнейшем окажется прямой BC) строим точку H, затем последовательно строим точки A, D, M, E, O. Искомые вершины B и C треугольника ABC являются точками пересечения исходной прямой с окружностью радиуса OA с центром O.

8.11. Предположим, что треугольник ABC построен и O — центр его вписанной окружности. Тогда $\angle BOC = 90^\circ + \angle A/2$ (задача 5.3). Из точки O отрезок BC виден под углом $90^\circ + \angle A/2$, и она удалена на расстояние r от прямой BC, поэтому её можно построить. Затем строим вписанную окружность и проводим к ней касательные из точек B и C.

8.12. Построим произвольный треугольник с углами A и B и найдём его периметр P_1. Искомый треугольник подобен построенному треугольнику с коэффициентом P/P_1.

8.13. Предположим, что треугольник ABC построен. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — его медианы, M — точка их пересечения, M' — точка, симметричная M относительно точки A_1. Тогда $MM' = 2m_a/3$, $MC = 2m_c/3$ и $M'C = 2m_b/3$, поэтому треугольник $MM'C$ можно построить. Точка A симметрична M' относительно точки M, а точка B симметрична C относительно середины отрезка MM'.

8.14. Ясно, что $BC : AC : AB = \frac{S}{h_a} : \frac{S}{h_b} : \frac{S}{h_c} = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}$. Возьмём произвольный отрезок $B'C'$ и построим треугольник $A'B'C'$ так, чтобы $B'C' : A'C' = h_b : h_a$ и $B'C' : A'B' = h_c : h_a$. Пусть h'_a — высота треугольника $A'B'C'$, опущенная из вершины A'. Искомый треугольник подобен треугольнику $A'B'C'$ с коэффициентом h_a/h'_a.

8.15. Возьмём на стороне AB произвольную точку K', опустим из неё перпендикуляр $K'L'$ на сторону BC, а затем построим квадрат $K'L'M'N'$, лежащий внутри угла ABC. Пусть прямая BN' пересекает сторону AC в точке N. Ясно, что искомый квадрат является образом квадрата $K'L'M'N'$ при гомотетии с центром B и коэффициентом $BN : BN'$.

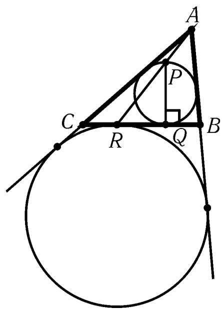


Рис. 8.2

8.16. Предположим, что искомый треугольник ABC построен. Пусть Q — точка касания вписанной окружности со стороной BC, PQ — диаметр этой окружности, R — точка касания вневписанной окружности со стороной BC. Ясно, что $BR = (a+b+c)/2 - c = (a+b-c)/2$ и $BQ = (a+c-b)/2$. Поэтому $RQ = |BR - BQ| = |b-c|$. Вписанная окружность треугольника ABC и вневписанная окружность, касающаяся стороны BC, гомотетичны с центром гомотетии A. Поэтому точка A лежит на прямой PR (рис. 8.2).

Из этого вытекает следующее построение. Строим прямоугольный треугольник PQR по известным катетам $PQ = 2r$ и $RQ = |b-c|$. Затем проводим две прямые, параллельные прямой RQ и удалённые от неё на расстояние h_a. Вершина A является точкой пересечения одной из этих прямых с лучом RP. Так как длина диаметра PQ вписанной окружности известна, её можно построить.

Точки пересечения касательных к этой окружности, проведённых из точки A, с прямой RQ являются вершинами B и C треугольника.

8.17. Предположим, что треугольник ABC построен. Пусть M — точка пересечения медиан AA_1 и BB_1. Тогда $AM = 2m_a/3$ и $BM = 2m_b/3$. Треугольник ABM можно построить по длинам сторон $AB = c$, AM и BM. Затем на лучах AM и BM откладываем отрезки $AA_1 = m_a$ и $BB_1 = m_b$. Вершина C является точкой пересечения прямых AB_1 и A_1B.

8.18. Предположим, что треугольник ABC построен. Пусть H — основание высоты, опущенной из вершины A. Прямоугольный треугольник ACH можно построить по гипотенузе $AC = b$ и катету $AH = h_a$. Затем на прямой CH строим точку B так, что $CB = a$.

8.19. Предположим, что треугольник ABC построен. Опустим из середины A_1 стороны BC перпендикуляры A_1B' и A_1C' на прямые AC и AB соответственно. Ясно, что $AA_1 = m_a$, $A_1B' = h_b/2$ и $A_1C' = h_c/2$. Из этого вытекает следующее построение. Строим отрезок AA_1 длиной m_a. Затем строим прямоугольные треугольники AA_1B' и AA_1C' по известным катетам и гипотенузе так, чтобы они лежали по разные стороны от прямой AA_1. Остаётся построить точки B и C на сторонах AC' и AB' угла $C'AB'$ так, чтобы отрезок BC делился точкой A_1 пополам. Для этого отложим на луче AA_1 отрезок $AD = 2AA_1$, а затем проведём через точку D прямые, параллельные сторонам угла $C'AB'$. Точки пересечения этих прямых со сторонами угла $C'AB'$ являются вершинами искомого треугольника (рис. 8.3).

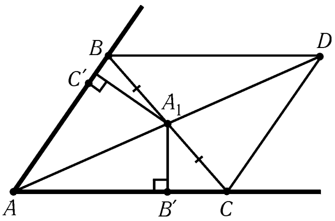


Рис. 8.3

8.20. Построим угол $B'AC'$, равный $\angle A$. Точка B строится как пересечение луча AB' и прямой, параллельной лучу AC' и удалённой от него на расстояние h_b. Аналогично строится точка C.

8.21. Предположим, что треугольник ABC построен. Опустим из точки B высоту BH и проведём медиану BB_1. В прямоугольных треугольниках CBH и B_1BH известны катет BH и гипотенузы CB и BB_1, поэтому их можно построить. Затем на луче CB_1 откладываем отрезок $CA = 2CB_1$. Задача имеет два решения, так как треугольники CBH и B_1BH можно строить либо по одну, либо по разные стороны от прямой BH.

8.22. Предположим, что треугольник ABC построен. Пусть M — середина отрезка BC. Опустим из точки A высоту AH, а из точки M — перпендикуляр MD на сторону AC. Ясно, что $MD = h_b/2$. Поэтому треугольники AMD и AMH можно построить. Вершина C является точкой пересечения прямых AD и MH. На луче CM откладываем отрезок $CB = 2CM$. Задача имеет два решения, так как треугольники AMD и AMH можно строить либо по одну, либо по разные стороны от прямой AM.

8.23. Предположим, что треугольник ABC построен. Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB соответственно. В треугольнике CC_1B_1 известны все стороны: $CC_1 = m_c$, $C_1B_1 = a/2$ и $CB_1 = b/2$, поэтому его можно построить. Точка A симметрична C относительно точки B_1, а точка B симметрична A относительно точки C_1.

8.24. Предположим, что треугольник ABC построен, AM — его медиана, AH — высота. Пусть точка A' симметрична A относительно точки M.

Построим отрезок $AA' = 2m_a$. Пусть M — его середина. Построим прямоугольный треугольник AMH с гипотенузой AM и катетом $AH = h_a$. Точка C лежит на дуге окружности, из которой отрезок AA' виден под углом $180^\circ - \angle A$, так как $\angle ACA' = 180^\circ - \angle CAB$. Поэтому точка C является точкой пересечения этой дуги и прямой MH. Точка B симметрична C относительно точки M.

8.25. Предположим, что треугольник ABC построен. Пусть CD — его биссектриса. Проведём прямую MD, параллельную стороне BC (точка M лежит на стороне AC). Треугольник CMD равнобедренный, так как $\angle MCD = \angle DCB = \angle MDC$. Поскольку $MC : AM = DB : AD = CB : AC = a : b$ и $AM + MC = b$, то $MC = ab/(a+b)$. Строим равнобедренный треугольник CMD по основанию $CD = l_c$ и боковым сторонам $MD = MC = ab/(a+b)$. Затем на луче CM откладываем отрезок $CA = b$, а на луче, симметричном лучу CM относительно прямой CD, откладываем отрезок $CB = a$.

8.26. Предположим, что треугольник ABC построен. Пусть S_1 — вневписанная окружность, касающаяся стороны BC. Обозначим точки касания окружности S_1 с продолжениями сторон AB и AC через K и L, а точку касания S_1 со стороной BC обозначим через M. Так как $AK = AL$, $AL = AC + CM$ и $AK = AB + BM$, то $AK = AL = p$. Пусть S_2 — окружность радиуса h_a с центром A. Прямая BC является общей внутренней касательной к окружностям S_1 и S_2.

Из этого вытекает следующее построение. Строим угол KAL, равный по величине углу A, так, что $KA = LA = p$. Строим окружность S_1, касающуюся сторон угла KAL в точках K и L, и окружность S_2 радиуса h_a с центром в точке A. Затем проводим общую внутреннюю касательную к окружностям S_1 и S_2. Точки пересечения этой касательной со сторонами угла KAL являются вершинами B и C искомого треугольника.

8.27. Точки A_1 к B_1 лежат на окружности S с диаметром AB. Центр O этой окружности лежит на серединном перпендикуляре к хорде A_1B_1. Из этого вытекает следующее построение. Сначала строим точку O, являющуюся точкой пересечения серединного перпендикуляра к отрезку A_1B_1 и прямой l. Затем строим окружность радиуса $OA_1 = OB_1$ с центром O. Вершины A и B являются точками пересечения окружности S с прямой l. Вершина C является точкой пересечения прямой AB_1 и прямой BA_1.

8.28. Пусть $AB = BC$ и A_1, B_1, C_1 — основания биссектрис треугольника ABC. Тогда $\angle A_1C_1C = \angle C_1CA = \angle C_1CA_1$, т. е. треугольник CA_1C_1 равнобедренный и $A_1C = A_1C_1$.

Из этого вытекает следующее построение. Через точку B_1 проводим прямую l, параллельную A_1C_1. На прямой l строим точку C так, что $CA_1 = C_1A_1$ и $\angle C_1A_1C > 90^\circ$. Точка A симметрична точке C относительно точки B_1, а вершина B является точкой пересечения прямых AC_1 и A_1C.

8.29. а) Согласно задаче 2.20 а) точки A, B и C являются точками пересечения продолжений высот треугольника $A'B'C'$ с его описанной окружностью.

б) Согласно задаче 2.20 б) точки A, B и C являются точками пересечения продолжений биссектрис углов треугольника $A'B'C'$ с его описанной окружностью.

8.30. Обозначим середины сторон BC, CA, AB треугольника через A_1, B_1, C_1 соответственно. Поскольку $BC \parallel B_1C_1 \parallel B'C'$ и $OA_1 \perp BC$, то $OA' \perp B'C'$. Аналогично $OB' \perp A'C'$ и $OC' \perp A'B'$, т. е. O — точка пересечения высот треугольника $A'B'C'$. Построив точку O, проводим серединные перпендикуляры к отрезкам OA', OB', OC'. Эти прямые образуют треугольник ABC.

8.31. Согласно задаче 5.10 наша задача совпадает с задачей 8.29 б).

8.32. Пусть O — центр описанной окружности, M — середина стороны AB, H — основание высоты, опущенной из точки C. Точка Q является серединой дуги AB, поэтому $OQ \perp AB$. Из этого вытекает следующее построение. Сначала по трём данным точкам строим описанную окружность S треугольника PQR. Точка C является точкой пересечения прямой, проведённой через точку P параллельно OQ, и окружности S. Точка M является точкой пересечения прямой OQ и прямой RC. Прямая AB проходит через точку M и перпендикулярна OQ.

8.33. Согласно задаче 5.2 точки A, B и C являются основаниями высот треугольника $A_1B_1C_1$.

8.34. Пусть H_1 — точка пересечения высот треугольника ABC. Согласно задаче 5.128 $OM : MH_1 = 1 : 2$ и точка M лежит на отрезке OH_1. Поэтому можно построить точку H_1. Затем проводим прямую H_1H и восставляем к этой прямой в точке H перпендикуляр l. Опустив из точки O перпендикуляр на прямую l, получаем точку C_1 (середину отрезка AB). На луче C_1M строим точку C так, что $CC_1 : MC_1 = 3 : 1$. Точки A и B являются точками пересечения прямой l с окружностью радиуса CO с центром O.

8.35. Пусть O и I — центры описанной и вписанной окружностей, I_c — центр вневписанной окружности, касающейся стороны AB. Описанная окружность треугольника ABC делит отрезок I_cI пополам (задача 5.132 б), а отрезок I_cI делит пополам дугу AB. Ясно также, что точки A и B лежат на окружности с диаметром I_cI. Из этого вытекает следующее построение. Строим окружность S с диаметром I_cI и окружность S_1 с центром O и радиусом OD, где D — середина отрезка I_cI. Окружности S и S_1 пересекаются в точках A и B. Теперь можно построить вписанную окружность треугольника ABC и провести к ней касательные из точек A и B.

8.36. Предположим, что мы построили точки X и Y на сторонах AB и BC треугольника ABC так, что $AX = BY$ и $XY \parallel AC$. Проведём $YY_1 \parallel AB$ и $Y_1C_1 \parallel BC$ (точки Y_1 и C_1 лежат на сторонах AC и AB). Тогда $Y_1Y = AX = BY$, т. е. BYY_1C — ромб и BY_1 — биссектриса угла B.

Из этого вытекает следующее построение. Проводим биссектрису BY_1, затем прямую Y_1Y, параллельную стороне AB (Y лежит на BC). Точка X теперь строится очевидным образом.

8.37. Пусть для определённости $a < b$. Предположим, что треугольник ABC построен. Возьмём на стороне AC точку D так, что $\angle ABD = \angle BAC$. Тогда $\angle BDC = 2\angle BAC$ и $\angle CBD = 3\angle BAC - \angle BAC = 2\angle BAC$, т. е. $CD = CB = a$. В треугольнике BCD известны все стороны: $CD = CB = a$ и $DB = AD = b - a$. Построив треугольник BCD, проводим луч BA, не пересекающий сторону CD, так, что $\angle DBA = \angle DBC/2$. Искомая вершина A является точкой пересечения прямой CD и этого луча.

8.38. Пусть точка B' лежит на прямой l, проходящей через точку B параллельно AC. Стороны треугольников ABC и $AB'C$ высекают на прямой, параллельной AC, равные отрезки. Поэтому прямоугольники $P'R'Q'S'$ и $PRQS$, вписанные в треугольники ABC и $AB'C$ соответственно, равны, если точки R, Q, R' и Q' лежат на одной прямой.

Возьмём точку B' на прямой l так, что $\angle B'AC = 90^\circ$. В треугольник $AB'C$ прямоугольник $P'R'Q'S'$ с данной диагональю $P'Q'$ вписывается очевидным образом ($P' = A$). Проведя прямую $R'Q'$, находим вершины R и Q искомого прямоугольника.

8.39. Предположим, что треугольник ABC построен. Пусть K и L — точки, в которых вневписанная окружность, касающаяся стороны BC, касается продолжений сторон AB и AC соответственно. Так как $AK = AL = p$, то эту вневписанную окружность можно построить; остаётся провести к построенной окружности касательную через данную точку M.

8.40. Пусть продолжение биссектрисы CD пересекает описанную окружность треугольника ABC (с прямым углом C) в точке P, PQ — диаметр описанной окружности, O — её центр. Тогда $PD : PO = PQ : PC$, т. е. $PD \cdot PC = 2R^2 = 2m_c^2$. Поэтому, проведя к окружности с диаметром CD касательную длиной $\sqrt{2}m_c$, легко построить отрезок длиной PC. Теперь в треугольнике OPC известны длины всех сторон.

8.41. Построим точку K на стороне AC так, что $AK = BC - AB$. Пусть точка D лежит на отрезке AC. Равенство $AD + BD + AB = BC$ эквивалентно равенству $AD + BD = AK$. Для точки D, лежащей на отрезке AK, последнее равенство перепишется в виде $AD + BD = AD + DK$, а для точки D, не лежащей на отрезке AK, — в виде $AD + BD = AD - DK$. В первом случае $BD = DK$, а второй случай невозможен. Поэтому точка D является точкой пересечения серединного перпендикуляра к отрезку BK и отрезка AC.

8.42. Предположим, что треугольник ABC построен. Проведём диаметр CD описанной окружности. Пусть O — центр описанной окружности, L — точка пересечения продолжения биссектрисы AK с описанной окружностью (рис. 8.4). Так как $\angle ABC - \angle ACB = 90^\circ$, то $\angle ABD = \angle ACB$; поэтому $\smile DA = \smile AB$. Ясно также, что $\smile BL = \smile LC$. Следовательно, $\angle AOL = 90^\circ$.

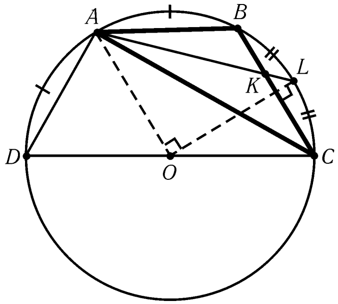


Рис. 8.4

Из этого вытекает следующее построение. Строим окружность S с центром O и данным радиусом. На окружности S выбираем произвольную точку A. Строим точку L на окружности S так, что $\angle AOL = 90^\circ$. На отрезке AL строим отрезок AK, равный данной биссектрисе. Через точку K проводим прямую l, перпендикулярную OL. Точки пересечения прямой l с окружностью S являются вершинами B и C искомого треугольника ABC.

8.43. Возьмём на сторонах BC и AC такие точки A_1 и B_1, что $PA_1 \parallel AC$ и $PB_1 \parallel BC$. Затем отложим на лучах A_1B и B_1A отрезки $A_1B_2 = AB_1$ и $B_1A_2 = BA_1$. Докажем, что прямая A_2B_2 искомая. В самом деле, пусть $k = AP/AB$. Тогда

$$\frac{B_1A_2}{B_1P} = \frac{(1-k)a}{ka} = \frac{(1-k)a + (1-k)b}{ka + kb} = \frac{CA_2}{CB_2},$$

т. е. $\triangle A_2B_1P \sim \triangle A_2CB_2$ и прямая A_2B_2 проходит через точку P. Кроме того, $AA_2 = |(1-k)a - kb| = BB_2$.

8.44. Предположим, что треугольник ABC построен. Пусть B_1 — точка касания вписанной окружности со стороной AC. В прямоугольном треугольнике AOB_1 известны катет $OB_1 = r$ и гипотенуза AO, поэтому можно построить угол OAB_1, а значит, и угол BAC. Пусть O_1 — центр описанной окружности треугольника ABC, M — середина стороны BC. В прямоугольном треугольнике BO_1M известны катет $O_1M = AH/2$ (см. решение задачи 5.128) и угол BO_1M (он равен $\angle A$ или $180^\circ - \angle A$), поэтому его можно построить. Затем можно определить длину отрезка $OO_1 = \sqrt{R(R-2r)}$ (см. задачу 5.12 а). Итак, можно построить отрезки длиной R и $OO_1 = d$.

После этого возьмём отрезок AO и построим точку O_1, для которой $AO_1 = R$ и $OO_1 = d$ (таких точек может быть две). Проведём из точки A касательные к окружности радиуса r с центром O. Искомые точки B и C лежат на этих касательных, удалены от точки O_1 на расстояние R и, разумеется, отличны от точки A.

8.45. Пусть a, b, c — данные прямые, причём прямая b лежит между a и c. Предположим, что вершины A, B, C квадрата $ABCD$ лежат на прямых a, b, c соответственно.

Первое решение. Из того, что $\angle ABC = 90^\circ$ и $AB = BC$ вытекает следующее построение. Возьмём на прямой b произвольную точку B и повернём прямую a относительно точки B на 90° (в одну или в другую сторону). Точка C — это точка пересечения прямой c и образа прямой a при указанном повороте.

Второе решение. Возьмём на прямой b произвольную точку B и опустим из неё перпендикуляр BA_1 на прямую a и перпендикуляр BC_1 на прямую c. Прямоугольные треугольники BA_1A и CC_1B имеют равные гипотенузы и равны углы, поэтому они равны. Из этого вытекает следующее построение. На прямой a строим отрезок A_1A, равный отрезку BC_1. Мы построили вершину A. Вершина C строится аналогично.

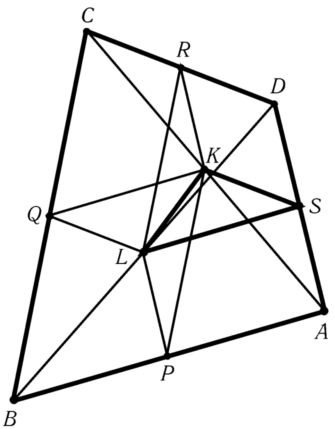


Рис. 8.5

8.46. Пусть расстояние между данными параллельными прямыми равно a. Нужно провести через точки A и B параллельные прямые так, чтобы расстояние между ними было равно a. Для этого построим окружность на отрезке AB как на диаметре и найдём точки C_1 и C_2 пересечения этой окружности с окружностью радиуса a с центром B. Сторона искомого ромба лежит на прямой AC_1 (второе решение — на прямой AC_2). Затем через точку B проводим прямую, параллельную AC_1 (соответственно AC_2).

8.47. Предположим, что четырёхугольник $ABCD$ построен. Обозначим середины сторон AB, BC, CD и DA через P, Q, R и S соответственно и середины диагоналей AC и BD через K и L. В треугольнике KSL известны $KS = CD/2$, $LS = AB/2$ и угол KSL, равный углу между сторонами AB и CD. Построив треугольник KSL, можно построить треугольник KRL, так как известны длины всех его сторон. После этого достраиваем треугольники KSL и KRL до параллелограммов $KSLQ$ и $KRLP$. Вершины A, B, C, D являются вершинами параллелограммов $PLSA$, $QKPB$, $RLQC$, $SKRD$ (рис. 8.5).

8.48. Опустим из вершин B и D перпендикуляры BB_1 и DD_1 на диагональ AC. Пусть для определённости $DD_1 > BB_1$. Построим отрезок длины $a = DD_1 - BB_1$ и проведём прямую, параллельную прямой AC, удалённую от AC на расстояние a и пересекающую сторону CD в некоторой точке E. Ясно, что $S_{AED} = (ED/CD)S_{ACD} = (BB_1/DD_1)S_{ACD} = S_{ABC}$. Поэтому медиана треугольника AEC лежит на искомой прямой.

8.49. Пусть P, Q, R — середины равных сторон AB, BC, CD четырёхугольника $ABCD$. Проведём серединные перпендикуляры l_1 и l_2 к отрезкам PQ и QR. Поскольку $AB = BC = CD$, точки B и C лежат на прямых l_1 и l_2 и $BQ = QC$.

Из этого вытекает следующее построение. Проводим серединные перпендикуляры l_1 и l_2 к отрезкам PQ и QR. Затем через точку Q проводим отрезок с концами на прямых l_1 и l_2 так, чтобы Q была его серединой (см. задачу 16.15).

8.50. Пусть даны вершины A, B и C вписанного и описанного четырёхугольника $ABCD$, причём $AB \geqslant BC$. Тогда $AD - CD = AB - BC \geqslant 0$, поэтому на стороне AD можно отложить отрезок DC_1, равный DC. В треугольнике AC_1C известны длины сторон AC и $AC_1 = AB - BC$ и $\angle AC_1C = 90^\circ + \angle D/2 = 180^\circ - \angle B/2$. Так как угол AC_1C тупой, треугольник AC_1C по этим элементам строится однозначно. Дальнейшее построение очевидно.

8.51. Пусть $ABCD$ — описанная равнобедренная трапеция с основаниями AD и BC, причём $AD > BC$; C_1 — проекция точки C на прямую AD. Докажем, что $AB = AC_1$. В самом деле, если P и Q — точки касания сторон AB и AD с вписанной окружностью, то $AB = AP + PB = AQ + BC/2 = AQ + QC_1 = AC_1$.

Из этого вытекает следующее построение. Пусть C_1 — проекция точки C на основание AD. Тогда B — точка пересечения прямой BC и окружности радиуса AC_1 с центром A. Трапеция с $AD < BC$ строится аналогично.

8.52. Обозначим середины оснований AD и BC через L и N, а середину отрезка EF через M. Точки L, O, N лежат на одной прямой (задача 19.2). Ясно, что точка M также лежит на этой прямой. Из этого вытекает следующее построение. Проведём через точку K прямую l, перпендикулярную прямой OK. Основание AD лежит на прямой l. Точка L является точкой пересечения прямой l и прямой OM. Точка N симметрична точке L относительно точки M. Через точку O проведём прямые, параллельные прямым EN и FN. Точки пересечения этих прямых с прямой l являются вершинами A и D трапеции. Вершины B и C симметричны вершинам A и D относительно точек E и F соответственно.

8.53. Предположим, что мы построили четырёхугольник $ABCD$ с данными длинами сторон и данной средней линией KP (K и P — середины сторон AB и CD). Пусть A_1 и B_1 — точки, симметричные точкам A и B относительно точки P. Треугольник A_1BC можно построить, так как в нём известны стороны BC, $CA_1 = AD$ и $BA_1 = 2KP$. Достроим треугольник A_1BC до параллелограмма A_1EBC. Теперь можно построить точку D, так как известны CD и $ED = BA$. Воспользовавшись тем, что $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{A_1C}$, построим точку A.

8.54. Используя формулы задач 6.37 и 6.38, легко выразить диагонали вписанного четырёхугольника через его стороны. Полученные формулы можно использовать для построения диагоналей (для удобства следует ввести произвольный отрезок e в качестве отрезка единичной длины и строить отрезки длиной pq, p/q и $\sqrt{p}$ как pq/e, pe/q и $\sqrt{pe}$).

8.55. Окружность высекает на сторонах угла равные отрезки тогда и только тогда, когда её центр лежит на биссектрисе угла. Поэтому центром искомой окружности является точка пересечения серединного перпендикуляра к отрезку AB и биссектрисы данного угла.

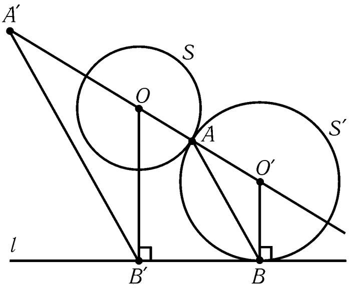


Рис. 8.6

8.56. Предположим, что мы построили окружность S', касающуюся данной окружности S в точке A и данной прямой l в некоторой точке B. Пусть O и O' — центры окружностей S и S' соответственно (рис. 8.6). Ясно, что точки O, O' и A лежат на одной прямой и $O'B = O'A$. Поэтому нужно построить точку O' на прямой OA так, чтобы $O'A = O'B$, где B — основание перпендикуляра, опущенного из точки O' на прямую l. Для этого опустим перпендикуляр OB' на прямую l. Затем отложим на прямой AO отрезок OA' длины OB'. Через точку A проведём прямую AB, параллельную $A'B'$ (точка B лежит на прямой l). Точка O' является точкой пересечения прямой OA и перпендикуляра к прямой l, проведённого через точку B.

8.57. а) Пусть l_1 — серединный перпендикуляр к отрезку AB, C — точка пересечения прямых l_1 и l, а l' — прямая, симметричная l относительно прямой l_1. Задача сводится к тому, чтобы построить окружность, проходящую через точку A и касающуюся прямых l и l' (см. задачу 19.16).

б) Можно считать, что центр окружности S не лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB (иначе построение очевидно). Возьмём произвольную точку C окружности S и построим описанную окружность треугольника ABC; она пересекает S в некоторой точке D. Пусть M — точка пересечения прямых AB и CD. Проведём к окружности S касательные MP и MQ. Тогда описанные окружности треугольников ABP и ABQ искомые, так как $MP^2 = MQ^2 = MA \cdot MB$.

8.58. Пусть A, B, C — данные точки, A', B', C' — центры требуемых окружностей (A' — центр окружности, проходящей через точки B и C и т. д.). Треугольники $BA'C$, $AB'C$, $AC'B$ равнобедренные. Пусть x, y, z — углы при их основаниях. Тогда

$$\begin{cases} y + z + \angle A = \pm 90^\circ, \\ z + x + \angle B = \pm 90^\circ, \\ x + y + \angle C = \pm 90^\circ. \end{cases}$$

Эта система уравнений легко решается. Например, чтобы найти x, нужно сложить два последних уравнения и вычесть из них первое уравнение. Если же мы знаем (ориентированные) углы x, y, z, то требуемые окружности строятся очевидным образом.

8.59. Пусть A, B, C, D — данные точки, S — искомая окружность. По одну сторону от S лежит k данных точек, по другую сторону лежит $4 - k$ данных точек. Мы будем предполагать, что данные точки не лежат на одной окружности (иначе в качестве S можно взять любую окружность с тем же центром; получается бесконечно много решений). Таким образом, $1 \leqslant k \leqslant 3$.

Мы получаем два существенно различных расположения точек по отношению к S: $2+2$ и $1+3$.

Пусть сначала точки A и B лежат по одну сторону от окружности S, а точки C и D — по другую. Центром окружности S является точка O пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AB и CD. Радиус окружности S равен среднему арифметическому длин отрезков OA и OC. Четыре точки можно разбить на пары тремя способами, поэтому мы получаем 3 решения.

Пусть теперь точки A, B и C лежат по одну сторону от окружности S, а точка D — по другую. Проведём через точки A, B и C окружность. Пусть O и R — её центр и радиус. Точка O является центром искомой окружности, а радиус искомой окружности равен среднему арифметическому R и OD. Одну точку из четырёх можно выбрать четырьмя способами, поэтому мы получаем 4 решения.

8.60. Предположим, что мы построили требуемую точку X. Пусть прямая AX пересекает данную окружность S в точке C, а прямая BX — в точке D. Проведём через точку D прямую, параллельную прямой AB; она пересекает окружность S в некоторой точке K. Пусть прямая KC пересекает прямую AB в точке P. Треугольники APC и AXB подобны, поскольку угол A у них общий и $\angle APC = \angle CKD = \angle CXD$. Из подобия этих треугольников следует, что $AP \cdot AB = AC \cdot AX$.

Из этого вытекает следующее построение. Проведём через точку A прямую, пересекающую окружность S в некоторых точках C' и X'. Тогда $AP \cdot AB = AC \cdot AX = AC' \cdot AX'$, поэтому мы можем построить точку P. Далее, нам известен угол CDK (он равен углу между прямыми AB и MN). Поэтому мы знаем длину хорды KC, а значит, мы можем построить окружность S', которая имеет тот же самый центр, что и окружность S, и касается хорды KC. Проведя из точки P касательную к окружности S', находим точку C.

8.61. Предположим, что мы построили окружности S_1, S_2 и S_3, попарно касающиеся в данных точках: S_1 и S_2 касаются в точке C; S_1 и S_3 — в точке B; S_2 и S_3 — в точке A. Пусть O_1, O_2 и O_3 — центры окружностей S_1, S_2 и S_3. Тогда точки A, B и C лежат на сторонах треугольника $O_1O_2O_3$, причём $O_1B = O_1C$, $O_2C = O_2A$ и $O_3A = O_3B$. Поэтому точки A, B и C являются точками касания вписанной или вневписанной окружности треугольника $O_1O_2O_3$ со сторонами.

Из этого вытекает следующее построение. Строим описанную окружность треугольника ABC и проводим к ней касательные в точках A, B и C. Точки пересечения этих касательных являются центрами искомых окружностей.

8.62. Предположим, что мы построили окружность S, касательные AA_1, BB_1 и CC_1 к которой имеют длины a, b и c соответственно (A_1, B_1 и C_1 — точки касания). Построим окружности S_a, S_b и S_c с центрами A, B и C и радиусами a, b и c соответственно (рис. 8.7). Если O — центр окружности S, то отрезки OA_1, OB_1 и OC_1 являются как радиусами окружности S, так и касательными к окружностям S_a, S_b и S_c. Поэтому точка O является радикальным центром окружностей S_a, S_b и S_c.

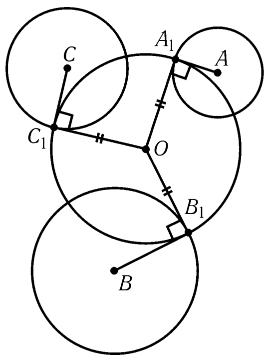


Рис. 8.7

Из этого вытекает следующее построение. Сначала строим окружности S_a, S_b и S_c. Затем строим их радикальный центр O. Искомая окружность является окружностью с центром O и радиусом, равным по длине касательной, проведённой из точки O к окружности S_a.

8.63. Построим сначала отрезок BC длиной a. Затем построим ГМТ X, для которых $CX : BX = b : c$ (см. задачу 7.14). В качестве вершины A можно взять любую из точек пересечения этого ГМТ с прямой, удалённой от прямой BC на расстояние h_a.

8.64. По длинам отрезков AD и BD можно построить отрезок AB и точку D на этом отрезке. Точка C является точкой пересечения окружности радиуса CD с центром D и ГМТ X, для которых $AX : BX = AD : BD$.

8.65. Пусть X — точка, не лежащая на прямой AB. Ясно, что $\angle AXB = \angle BCX$ тогда и только тогда, когда $AX : CX = AB : CB$. Поэтому точка M является точкой пересечения ГМТ X, для которых $AX : CX = AB : CB$, и ГМТ Y, для которых $BY : DY = BC : DC$ (эти ГМТ могут не пересекаться).

8.66. Нужно построить точку O, для которой $AO : A'O = AB : A'B'$ и $BO : B'O = AB : A'B'$. Точка O является точкой пересечения ГМТ X, для которых $AX : A'X = AB : A'B'$, и ГМТ Y, для которых $BY : B'Y = AB : A'B'$.

8.67. Пусть O — центр данной окружности. Хорды XP и XQ, проходящие через точки A и B, равны тогда и только тогда, когда XO — биссектриса угла PXQ, т. е. $AX : BX = AO : BO$. Искомая точка X является точкой пересечения соответствующей окружности Аполлония с данной окружностью.

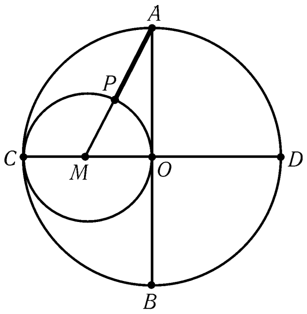


Рис. 8.8

8.68. а) Если прямая l не пересекает отрезок AB, то ABB_1A_1 — параллелограмм и $l \parallel AB$. Если прямая l пересекает отрезок AB, то AA_1BB_1 — параллелограмм и l проходит через середину отрезка AB.

б) Одна из искомых прямых параллельна прямой AB, а другая проходит через середину AB.

8.69. Построим окружность радиуса 1 и проведём в ней два перпендикулярных диаметра AB и CD. Пусть O — центр окружности, M — середина отрезка OC, P — точка пересечения прямой AM и окружности с диаметром OC (рис. 8.8). Тогда $AM^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, а значит, $AP = AM - PM = (\sqrt{5} - 1)/2 = 2\sin 18^\circ$ (см. задачу 5.52), т. е. AP — длина стороны правильного десятиугольника, вписанного в данную окружность.

8.70. Предположим, что мы построили прямоугольник $PQRS$ так, что данные точки A, B, C, D лежат на сторонах PQ, QR, RS, SP соответственно и $PQ : QR = a$, где a — данное отношение сторон. Пусть F — точка пересечения прямой, проведённой через точку D перпендикулярно к прямой AC, и прямой QR. Тогда $DF : AC = a$.

Из этого вытекает следующее построение. Из точки D проводим луч, пересекающий отрезок AC под прямым углом, и на этом луче строим точку F так, что $DF = a \cdot AC$. Сторона QR лежит на прямой BF. Дальнейшее построение очевидно.

8.71. Предположим, что точки X и Y, обладающие требуемыми свойствами, построены. Обозначим точку пересечения прямых AX и YC через M, а точку пересечения прямых AB и XY через K. Прямоугольные треугольники AXK и YXM имеют общий острый угол X, поэтому $\angle XAK = \angle XYM$. Углы XAB и XYB опираются на одну дугу, поэтому $\angle XAB = \angle XYB$. Следовательно, $\angle XYM = \angle XYB$. Так как $XY \perp AB$, то A — середина отрезка CB.

Обратно, если K — середина отрезка CB, то $\angle MYX = \angle BYX = \angle XAB$. Треугольники AXK и YXM имеют общий угол X и $\angle XAK = \angle XYM$, поэтому $\angle YMX = \angle AKX = 90^\circ$.

Из этого вытекает следующее построение. Через середину K отрезка CB проводим прямую l, перпендикулярную прямой AB. Точки X и Y являются точками пересечения прямой l с данной окружностью.

8.72. Если есть угол величиной α, то можно построить углы величиной 2α, 3α и т. д. Так как $19 \cdot 19^\circ = 361^\circ$, то можно построить угол 361°, совпадающий с углом 1°.

8.73. Построим сначала угол 36° (см. задачу 8.69). Затем можно построить угол $(36^\circ - 30^\circ)/2 = 3^\circ$. Если n не делится на 3, то, имея углы n° и 3°, можно построить угол 1°. В самом деле, если $n = 3k + 1$, то $1^\circ = n^\circ - k \cdot 3^\circ$, а если $n = 3k + 2$, то $1^\circ = 2n^\circ - (2k + 1) \cdot 3^\circ$.

8.74. Последовательность построений такова. Выберем на клочке бумаги произвольную точку O и произведём гомотетию с центром O и достаточно малым коэффициентом k так, чтобы образ точки пересечения данных прямых при этой гомотетии оказался на клочке бумаги. Тогда можно построить биссектрису угла между образами прямых. Затем произведём гомотетию с прежним центром и коэффициентом $1/k$ и получим искомый отрезок биссектрисы.

8.75. Построим с помощью двусторонней линейки две параллельные хорды AB и CD. Пусть P и Q — точки пересечения прямых AC и BD, AD и BC. Тогда прямая PQ проходит через центр данной окружности. Построив аналогично ещё одну такую прямую, найдём центр окружности.

8.76. Проведём через точку A два луча p и q, образующие угол маленькой величины, содержащий точку B (лучи можно построить, переставляя линейку). Через точку B проведём отрезки PQ_1 и P_1Q (рис. 8.9). Если $PQ < 10$ см

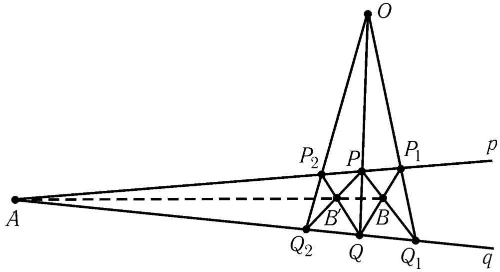


Рис. 8.9

и $P_1Q_1 < 10$ см, то можно построить точку O, в которой пересекаются прямые PQ и P_1Q_1. Проведём через точку O прямую P_2Q_2. Если $PQ_2 < 10$ см и $P_2Q < 10$ см, то можно построить точку B', в которой пересекаются прямые PQ_2 и P_2Q. Если $BB' < 10$ см, то можно построить прямую BB', а эта прямая проходит через точку A (см. задачу 5.81).

8.77. Построение будет основано на том факте, что если A и B — точки пересечения равных окружностей с центрами P и Q, то $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{BQ}$. Пусть S_1 — исходная окружность, A_1 — данная точка. Через точку A_1 проведём окружность S_2, через точку A_2 пересечения окружностей S_1 и S_2 — окружность S_3, через точку A_3 пересечения окружностей S_2 и S_3 — окружность S_4, наконец, через точки B_1 и A_4 пересечения окружностей S_1 и S_3 с окружностью S_4 — окружность S_5. Докажем, что точка B_2 пересечения окружностей S_5 и S_1 искомая. Пусть O_i — центр окружности S_i. Тогда $\overrightarrow{A_1O_1} = \overrightarrow{O_2A_2} = \overrightarrow{A_3O_3} = \overrightarrow{O_4A_4} = \overrightarrow{B_1O_5} = \overrightarrow{O_1B_2}$.

Замечание. Точек пересечения окружностей S_1 и S_4 две; в качестве точки B_1 можно выбирать любую из них.

8.78. Пусть AB — данный отрезок, P — произвольная точка, не лежащая на данных прямых. Построим точки C и D пересечения второй из данных прямых с прямыми PA и PB соответственно и точку Q пересечения прямых AD и BC. Согласно задаче 19.2 прямая PQ проходит через середину отрезка AB.

8.79. Пусть AB — данный отрезок, а C и D — произвольные точки на второй данной прямой. Согласно предыдущей задаче можно построить точку M — середину отрезка CD. Пусть P — точка пересечения прямых AM и BD, E — точка пересечения прямых PC и AB. Докажем, что EB — искомый отрезок. Поскольку $\triangle PMC \sim \triangle PAE$ и $\triangle PMD \sim \triangle PAB$, то

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AP} : \frac{AE}{AP} = \frac{MD}{MP} : \frac{MC}{MP} = \frac{MD}{MC} = 1.$$

8.80. Пусть AB — данный отрезок, а C и D — произвольные точки на второй данной прямой. Согласно предыдущей задаче можно построить такие точки $D_1 = D, D_2, \ldots, D_n$, что все отрезки D_iD_{i+1} равны отрезку CD. Пусть P — точка пересечения прямых AC и BD_n, а $B_1, \ldots, B_{n-1}$ — точки пересечения прямой AB с прямыми $PD_1, \ldots, PD_{n-1}$ соответственно. Ясно, что точки $B_1, \ldots, B_{n-1}$ делят отрезок AB на n равных частей.

8.81. Возьмём на одной из данных прямых отрезок AB и построим его середину M (см. задачу 8.78). Пусть A_1 и M_1 — точки пересечения прямых PA и PM со второй данной прямой, Q — точка пересечения прямых BM_1 и MA_1. Легко проверить, что прямая PQ параллельна данным прямым.

8.82. В случае, когда точка P не лежит на прямой AB, можно воспользоваться решением задачи 3.37. Если же точка P лежит на прямой AB, то мы можем сначала опустить перпендикуляры l_1 и l_2 из каких-нибудь других точек, а затем согласно задаче 8.81 провести через точку P прямую, параллельную прямым l_1 и l_2.

8.83. а) Пусть A — данная точка, l — данная прямая. Рассмотрим сначала случай, когда точка O не лежит на прямой l. Проведём через точку O две произвольные прямые, пересекающие прямую l в точках B и C. Согласно задаче 8.82 в треугольнике OBC можно опустить высоты на стороны OB и OC. Пусть H — точка их пересечения. Тогда можно провести прямую OH, которая перпендикулярна l. Согласно задаче 8.82 можно опустить перпендикуляр из точки A на OH. Это и есть искомая прямая, проходящая через A и параллельная l. Чтобы из A опустить перпендикуляр на l, нужно восставить из O перпендикуляр l' к OH, а затем из A опустить перпендикуляр на l'. В случае, когда точка O лежит на прямой l, согласно задаче 8.82 можно сразу опустить из точки A перпендикуляр l' на прямую l, а затем из той же точки A восставить перпендикуляр к прямой l'.

б) Пусть l — данная прямая, A — лежащая на ней данная точка и BC — данный отрезок. Проведём через точку O прямые OD и OE, параллельные прямым l и BC соответственно (D и E — точки пересечения этих прямых с окружностью S). Через точку C проведём прямую, параллельную OB, до пересечения с прямой OE в точке F, через F — прямую, параллельную ED, до пересечения с OD в точке G и, наконец, через G — прямую, параллельную OA, до пересечения с l в точке H. Тогда $AH = OG = OF = BC$, т. е. AH — требуемый отрезок.

в) Возьмём две произвольные прямые, пересекающиеся в точке P. Отложим на одной из них отрезок $PA = a$, а на другой — отрезки $PB = b$ и $PC = c$. Пусть D — точка пересечения прямой PA с прямой, проходящей через B и параллельной AC. Ясно, что $PD = ab/c$.

г) Пусть H — гомотетия (или параллельный перенос), переводящая окружность с центром A и радиусом r в окружность S (т. е. в заданную окружность с отмеченным центром O). Так как радиусы обеих окружностей известны, можно построить образ любой точки X при отображении H. Для этого нужно через точку O провести прямую, параллельную прямой AX, и отложить на ней отрезок, равный $r_S \cdot AX/r$, где r_S — радиус окружности S. Аналогично строится образ любой точки при отображении H^{-1}. Поэтому можно построить прямую $l' = H(l)$ и найти точки её пересечения с окружностью S, а затем построить образы этих точек при отображении H^{-1}.

д) Пусть A и B — центры данных окружностей, C — одна из точек, которые нужно построить, CH — высота треугольника ABC. Записав теорему Пифагора для треугольников ACH и BCH, получим, что $AH = (b^2 + c^2 - a^2)/2c$. Величины a, b и c известны, поэтому можно построить точку H и точки пересечения прямой CH с одной из данных окружностей.

8.84. а) Проведём прямые, параллельные прямым OA и OB, удалённые от последних на расстояние a и пересекающие стороны угла. Точка пересечения этих прямых лежит на искомой биссектрисе.

б) Проведём прямую, параллельную OB, удалённую от последней на расстояние a и пересекающую луч OA в некоторой точке M. Через точки O и M проведём другую пару параллельных прямых, расстояние между которыми равно a; прямая, проходящая через точку O, содержит искомую сторону угла.

8.85. Проведём через точку A произвольную прямую, а затем проведём прямые l_1 и l_2, параллельные ей и удалённые от неё на расстояние a; эти прямые пересекают прямую l в точках M_1 и M_2. Через точки A и M_1 проведём ещё одну пару параллельных прямых l_a и l_m, расстояние между которыми равно a. Точка пересечения прямых l_2 и l_m лежит на искомом перпендикуляре.

8.86. Проведём прямую, параллельную данной и удалённую от неё на расстояние a. Теперь можно воспользоваться результатами задач 8.81 и 8.78.

8.87. Проведём через точку P прямые $PA_1 \parallel OA$ и $PB_1 \parallel OB$. Пусть прямая PM делит пополам угол между прямыми l и PA_1. При симметрии относительно прямой PM прямая PA_1 переходит в прямую l, поэтому прямая PB_1 при этой симметрии переходит в одну из искомых прямых.

8.88. Достроим треугольник ABM до параллелограмма $ABMN$. Проведём через точку N прямые, параллельные биссектрисам углов между прямыми l и MN. Точки пересечения этих прямых с прямой l искомые.

8.89. Проведём прямую l_1, параллельную прямой OA и удалённую от неё на расстояние a. Возьмём на прямой l произвольную точку B. Пусть B_1 — точка пересечения прямых OB и l_1. Проведём через точку B_1 прямую, параллельную AB; эта прямая пересекает прямую OA в точке A_1. Проведём теперь через точки O и A_1 пару параллельных прямых, расстояние между которыми равно a (таких пар прямых может быть две); пусть X и X_1 — точки пересечения прямой, проходящей через точку O, с прямыми l и l_1. Так как $OA_1 = OX_1$ и $\triangle OA_1X_1 \sim \triangle OAX$, точка X искомая.

8.90. Восставим в точках O_1 и O_2 перпендикуляры к прямой O_1O_2 и отложим на них отрезки $O_1B_1 = O_2A_2$ и $O_2B_2 = O_1A_1$. Построим середину M отрезка B_1B_2 и в точке M восставим перпендикуляр к B_1B_2. Этот перпендикуляр пересечёт прямую O_1O_2 в точке N. Тогда $O_1N^2 + O_1B_1^2 = O_2N^2 + O_2B_2^2$, а значит, $O_1N^2 - O_1A_1^2 = O_2N^2 - O_2A_2^2$, т. е. точка N лежит на радикальной оси. Остаётся восставить перпендикуляр к O_1O_2 в точке N.

8.91. Построим сначала произвольную прямую l_1, перпендикулярную прямой l, а затем через точку A проведём прямую, перпендикулярную прямой l_1.

8.92. а) Проведём через точки A и B прямые AP и BQ, перпендикулярные прямой AB, а затем проведём произвольный перпендикуляр к прямой AP. В результате получим прямоугольник. Остаётся опустить из точки пересечения его диагоналей перпендикуляр на прямую AB.

б) Восставим из точки B перпендикуляр l к прямой AB и проведём через точку A две перпендикулярные прямые; они пересекают прямую l в точках M и N. Достроим прямоугольный треугольник MAN до прямоугольника $MANR$. Основание перпендикуляра, опущенного из точки R на прямую AB, является искомой точкой C.

8.93. а) Опустим из точки A перпендикуляр AP на прямую OB и построим отрезок AC, серединой которого является точка P. Тогда угол AOC искомый.

б) Возьмём на прямой OB такие точки B и B_1, что $OB = OB_1$. Расположим прямой угол так, чтобы его стороны проходили через точки B и B_1, а вершина лежала на луче OA. Если A — вершина прямого угла, то угол AB_1B искомый.

8.94. Проведём через точку O прямую l', параллельную прямой l. Из точки B опустим перпендикуляры BP и BQ на прямые l' и OA, а затем из точки O опустим перпендикуляр OX на прямую PQ. Тогда прямая XO искомая (см. задачу 2.3); если точка Y симметрична точке X относительно прямой l', то прямая YO тоже искомая.

8.95. Достроим треугольник OAB до параллелограмма $OABC$, а затем построим отрезок CC_1, серединой которого является точка O. Расположим прямой угол так, чтобы его стороны проходили через точки C и C_1, а вершина лежала на прямой l. Вершина прямого угла совпадает тогда с искомой точкой X.

8.96. Построим отрезок AB, серединой которого является точка O, и расположим прямой угол так, чтобы его стороны проходили через точки A и B, а вершина лежала на прямой l. Тогда вершина прямого угла совпадёт с искомой точкой.

ГЛАВА 9

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Основные сведения

1. Для элементов треугольника используются следующие обозначения:
a, b, c — длины сторон BC, CA, AB;
α, β, γ — величины углов при вершинах A, B, C;
m_a, m_b, m_c — длины медиан, проведённых из вершин A, B, C;
h_a, h_b, h_c — длины высот, опущенных из вершин A, B, C;
l_a, l_b, l_c — длины биссектрис, проведённых из вершин A, B, C;
r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей.

2. Если A, B, C — произвольные точки, то $AB \leqslant AC + CB$, причём равенство достигается, только если точка C лежит на отрезке AB (неравенство треугольника).

3. Медиана треугольника меньше полусуммы заключающих её сторон: $m_a < (b + c)/2$ (задача 9.1).

4. Если один выпуклый многоугольник лежит внутри другого, то периметр внешнего многоугольника больше периметра внутреннего (задача 9.29 б).

5. Сумма длин диагоналей выпуклого четырёхугольника больше суммы длин любой пары его противоположных сторон (задача 9.15).

6. Против большей стороны треугольника лежит больший угол (задача 10.62).

7. Длина отрезка, лежащего внутри выпуклого многоугольника, не превосходит либо наибольшей стороны, либо наибольшей диагонали (задача 10.67).

8. При решении некоторых задач этой главы нужно знать разные алгебраические неравенства. Сведения об этих неравенствах и их доказательства приведены в приложении к настоящей главе (см. с. 230); с ними следует познакомиться, но нужно учесть, что они требуются только для решения достаточно сложных задач, а для решения простых задач понадобятся лишь неравенство $\sqrt{ab} \leqslant (a + b)/2$ и следствия из него.

Вводные задачи

1. Докажите, что $S_{ABC} \leqslant AB \cdot BC/2$.

2. Докажите, что $S_{ABCD} \leqslant (AB \cdot BC + AD \cdot DC)/2$.

3. Докажите, что $\angle ABC > 90^\circ$ тогда и только тогда, когда точка B лежит внутри окружности с диаметром AC.

4. Радиусы двух окружностей равны R и r, а расстояние между их центрами равно d. Докажите, что эти окружности пересекаются тогда и только тогда, когда $|R - r| < d < R + r$.

5. Докажите, что любая диагональ четырёхугольника меньше половины его периметра.

§ 1. Медиана треугольника

9.1. Докажите, что $(a+b-c)/2 < m_c < (a+b)/2$.

9.2. Докажите, что в любом треугольнике сумма медиан больше 3/4 периметра, но меньше периметра.

9.3. Даны n точек $A_1, \ldots, A_n$ и окружность радиуса 1. Докажите, что на окружности можно выбрать точку M так, что $MA_1 + \ldots + MA_n \geqslant n$.

9.4. Точки $A_1, \ldots, A_n$ не лежат на одной прямой. Пусть две разные точки P и Q обладают тем свойством, что $A_1P + \ldots + A_nP = A_1Q + \ldots + A_nQ = s$. Докажите, что тогда $A_1K + \ldots + A_nK < s$ для некоторой точки K.

9.5*. На столе лежит 50 правильно идущих часов. Докажите, что в некоторый момент сумма расстояний от центра стола до концов минутных стрелок окажется больше суммы расстояний от центра стола до центров часов.

§ 2. Алгебраические задачи на неравенство треугольника

В задачах этого параграфа a, b и c — длины сторон произвольного треугольника.

9.6. Докажите, что $a = y + z$, $b = x + z$ и $c = x + y$, где x, y и z — положительные числа.

9.7. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$.

9.8. При любом натуральном n из чисел a^n, b^n и c^n можно составить треугольник. Докажите, что среди чисел a, b и c есть два равных.

9.9. Докажите, что

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 4abc > a^3 + b^3 + c^3.$$

9.10. Докажите, что

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geqslant 3.$$

9.11. Пусть $p = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ и $q = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$. Докажите, что $|p - q| < 1$.

9.12*. Пять отрезков таковы, что из любых трёх из них можно составить треугольник. Докажите, что хотя бы один из этих треугольников остроугольный.

9.13*. Докажите, что $(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) \leqslant abc$.

9.14*. Докажите, что $a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geqslant 0$.

§ 3. Сумма длин диагоналей четырёхугольника

9.15. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник. Докажите, что $AB + CD < AC + BD$.

9.16. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник, причём $AB + BD \leqslant AC + CD$. Докажите, что $AB < AC$.

9.17*. Внутри выпуклого четырёхугольника с суммой длин диагоналей d расположен выпуклый четырёхугольник с суммой длин диагоналей d'. Докажите, что $d' < 2d$.

9.18*. Дана замкнутая ломаная, причём любая другая замкнутая ломаная с теми же вершинами имеет бóльшую длину. Докажите, что эта ломаная несамопересекающаяся.

9.19*. Сколько сторон может иметь выпуклый многоугольник, все диагонали которого имеют одинаковую длину?

9.20*. На плоскости даны n красных и n синих точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести n отрезков с разноцветными концами, не имеющих общих точек.

9.21*. Докажите, что среднее арифметическое длин сторон произвольного выпуклого многоугольника меньше среднего арифметического длин всех его диагоналей.

9.22*. Дан выпуклый $(2n + 1)$-угольник $A_1A_3A_5 \ldots A_{2n+1}A_2 \ldots A_{2n}$. Докажите, что среди всех замкнутых ломаных с вершинами в его вершинах наибольшую длину имеет ломаная $A_1A_2A_3 \ldots A_{2n+1}A_1$.

См. также задачу 6.93.

§ 4. Разные задачи на неравенство треугольника

9.23. В треугольнике длины двух сторон равны 3,14 и 0,67. Найдите длину третьей стороны, если известно, что она является целым числом.

9.24. Докажите, что сумма длин диагоналей выпуклого пятиугольника $ABCDE$ больше периметра, но меньше удвоенного периметра.

9.25. Докажите, что если длины сторон треугольника связаны неравенством $a^2 + b^2 > 5c^2$, то c — длина наименьшей стороны.

9.26. Две высоты треугольника равны 12 и 20. Докажите, что третья высота меньше 30.

9.27. Дан треугольник ABC и точка D внутри его, причём $AC - DA > 1$ и $BC - BD > 1$. Пусть E — произвольная точка внутри отрезка AB. Докажите, что $EC - ED > 1$.

9.28*. Точки C_1, A_1, B_1 взяты на сторонах AB, BC, CA треугольника ABC так, что $BA_1 = \lambda \cdot BC$, $CB_1 = \lambda \cdot CA$, $AC_1 = \lambda \cdot AB$, причём $1/2 < \lambda < 1$. Докажите, что периметр P треугольника ABC и периметр P_1 треугольника $A_1B_1C_1$ связаны неравенствами $(2\lambda - 1)P < P_1 < \lambda P$.

* * *

9.29*. а) Докажите, что при переходе от невыпуклого многоугольника к его выпуклой оболочке периметр уменьшается. (Выпуклой оболочкой многоугольника называют наименьший выпуклый многоугольник, его содержащий.)

б) Внутри выпуклого многоугольника лежит другой выпуклый многоугольник. Докажите, что периметр внешнего многоугольника больше, чем периметр внутреннего.

9.30*. Внутри треугольника ABC периметра P взята точка O. Докажите, что $P/2 < AO + BO + CO < P$.

9.31*. На основании AD трапеции $ABCD$ нашлась точка E, обладающая тем свойством, что периметры треугольников ABE, BCE и CDE равны. Докажите, что тогда $BC = AD/2$.

См. также задачи 13.43, 20.12.

§ 5. Площадь треугольника не превосходит половины произведения двух сторон

9.32. Дан треугольник площади 1 со сторонами $a \leqslant b \leqslant c$. Докажите, что $b \geqslant \sqrt{2}$.

9.33. Пусть E, F, G и H — середины сторон AB, BC, CD и DA четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что

$$S_{ABCD} \leqslant EG \cdot HF \leqslant (AB + CD)(AD + BC)/4.$$

9.34. Периметр выпуклого четырёхугольника равен 4. Докажите, что его площадь не превосходит 1.

9.35. Внутри треугольника ABC взята точка M. Докажите, что $4S \leqslant AM \cdot BC + BM \cdot AC + CM \cdot AB$, где S — площадь треугольника ABC.

9.36*. В окружность радиуса R вписан многоугольник площади S, содержащий центр окружности, и на его сторонах выбрано по точке. Докажите, что периметр выпуклого многоугольника с вершинами в выбранных точках не меньше $2S/R$.

9.37*. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ площади S взята точка O, причём $AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 = 2S$. Докажите, что тогда $ABCD$ — квадрат и O — его центр.

§ 6. Неравенства для площадей

9.38. Точки M и N лежат на сторонах AB и AC треугольника ABC, причём $AM = CN$ и $AN = BM$. Докажите, что площадь четырёхугольника $BMNC$ по крайней мере в три раза больше площади треугольника AMN.

9.39. Площади треугольников ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ равны S, S_1, S_2 соответственно, причём $AB = A_1B_1 + A_2B_2$, $AC = A_1C_1 + A_2C_2$, $BC = B_1C_1 + B_2C_2$. Докажите, что $S \leqslant 4\sqrt{S_1S_2}$.

9.40. $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник площади S. Угол между прямыми AB и CD равен α, угол между AD и BC равен β. Докажите, что

$$AB \cdot CD \sin\alpha + AD \cdot BC \sin\beta \leqslant 2S \leqslant AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

9.41. Через точку, лежащую внутри треугольника, проведены три прямые, параллельные его сторонам. Обозначим площади частей, на которые эти прямые разбивают треугольник, так, как показано на рис. 9.1. Докажите, что $a/\alpha + b/\beta + c/\gamma \geqslant 3/2$.

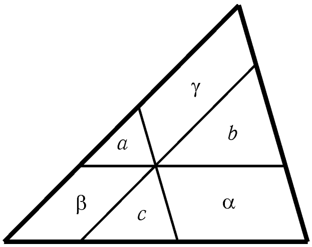


Рис. 9.1

9.42. Площади треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны S и S_1, причём треугольник ABC не тупоугольный. Наибольшее из отношений a_1/a, b_1/b и c_1/c равно k. Докажите, что $S_1 \leqslant k^2S$.

9.43. а) Точки B, C и D делят (меньшую) дугу AE окружности на четыре равные части. Докажите, что $S_{ACE} < 8S_{BCD}$.

б) Из точки A проведены касательные AB и AC к окружности. Через середину D (меньшей) дуги BC проведена касательная, пересекающая отрезки AB и AC в точках M и N. Докажите, что $S_{BCD} < 2S_{MAN}$.

9.44*. Все стороны выпуклого многоугольника отодвигаются во внешнюю сторону на расстояние h. Докажите, что его площадь при этом увеличится больше чем на $Ph + \pi h^2$, где P — периметр.

9.45*. Квадрат разрезан на прямоугольники. Докажите, что сумма площадей кругов, описанных около всех этих прямоугольников, не меньше площади круга, описанного около исходного квадрата.

9.46*. Докажите, что сумма площадей пяти треугольников, образованных парами соседних сторон и соответствующими диагоналями выпуклого пятиугольника, больше площади всего пятиугольника.

9.47*. а) Докажите, что в любом выпуклом шестиугольнике площади S найдётся диагональ, отсекающая от него треугольник площади не больше $S/6$.

б) Докажите, что в любом выпуклом восьмиугольнике площади S найдётся диагональ, отсекающая от него треугольник площади не больше $S/8$.

9.48*. Проекции многоугольника на ось OX, биссектрису 1-го и 3-го координатных углов, ось OY и биссектрису 2-го и 4-го координатных углов равны соответственно 4, $3\sqrt{2}$, 5, $4\sqrt{2}$. Площадь многоугольника равна S. Докажите, что $S \leqslant 17{,}5$.

См. также задачу 17.19.

§ 7. Площадь. Одна фигура лежит внутри другой

9.49. Выпуклый многоугольник, площадь которого больше 0,5, помещён в квадрат со стороной 1. Докажите, что внутри многоугольника можно поместить отрезок длины 0,5, параллельный стороне квадрата.

9.50*. Внутри квадрата со стороной 1 даны n точек. Докажите, что:

а) площадь одного из треугольников с вершинами в этих точках или вершинах квадрата не превосходит $\frac{1}{2(n+1)}$;

б) площадь одного из треугольников с вершинами в этих точках не превосходит $1/(n-2)$.

9.51*. а) В круг площади S вписан правильный n-угольник площади S_1, а около этого круга описан правильный n-угольник площади S_2. Докажите, что $S^2 > S_1S_2$.

б) В окружность, длина которой равна L, вписан правильный n-угольник периметра P_1, а около этой окружности описан правильный n-угольник периметра P_2. Докажите, что $L^2 < P_1P_2$.

9.52*. Многоугольник площади B вписан в окружность площади A и описан вокруг окружности площади C. Докажите, что $2B \leqslant A + C$.

9.53*. В круг радиуса 1 помещено два треугольника, площадь каждого из которых больше 1. Докажите, что эти треугольники пересекаются.

9.54*. а) Докажите, что в выпуклый многоугольник площади S и периметра P можно поместить круг радиуса S/P.

б) Внутри выпуклого многоугольника площади S_1 и периметра P_1 расположен выпуклый многоугольник площади S_2 и периметра P_2. Докажите, что $2S_1/P_1 > S_2/P_2$.

9.55*. Докажите, что площадь параллелограмма, лежащего внутри треугольника, не превосходит половины площади треугольника.

9.56*. Докажите, что площадь треугольника, вершины которого лежат на сторонах параллелограмма, не превосходит половины площади параллелограмма.

* * *

9.57*. Докажите, что любой остроугольный треугольник площади 1 можно поместить в прямоугольный треугольник площади $\sqrt{3}$.

9.58*. а) Докажите, что выпуклый многоугольник площади S можно поместить в некоторый прямоугольник площади не более $2S$.

б) Докажите, что в выпуклый многоугольник площади S можно вписать параллелограмм площади не менее $S/2$.

9.59*. Докажите, что в любой выпуклый многоугольник площади 1 можно поместить треугольник, площадь которого не меньше: а) $1/4$; б) $3/8$.

9.60*. Выпуклый n-угольник помещён в квадрат со стороной 1. Докажите, что найдутся три такие вершины A, B и C этого n-угольника, что площадь треугольника ABC не превосходит: а) $8/n^2$; б) $16\pi/n^3$.

См. также задачу 15.8.

§ 8. Ломаные внутри квадрата

9.61*. Внутри квадрата со стороной 1 расположена несамопересекающаяся ломаная длины 1000. Докажите, что найдётся прямая, параллельная одной из сторон квадрата, пересекающая эту ломаную по крайней мере в 500 точках.

9.62*. В квадрате со стороной 1 расположена ломаная длиной L. Известно, что каждая точка квадрата удалена от некоторой точки этой ломаной меньше чем на ε. Докажите, что тогда $L \geqslant \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{\pi\varepsilon}{2}$.

9.63*. Внутри квадрата со стороной 1 расположено n^2 точек. Докажите, что существует ломаная, содержащая все эти точки, длина которой не превосходит $2n$.

9.64*. Внутри квадрата со стороной 100 расположена ломаная L, обладающая тем свойством, что любая точка квадрата удалена от L не больше чем на 0,5. Докажите, что на L есть две точки, расстояние между которыми не больше 1, а расстояние по L между ними не меньше 198.

§ 9. Четырёхугольник

9.65. В четырёхугольнике $ABCD$ углы A и B равны, а $\angle D > \angle C$. Докажите, что тогда $AD < BC$.

9.66. В трапеции $ABCD$ углы при основании AD удовлетворяют неравенствам $\angle A < \angle D < 90°$. Докажите, что тогда $AC > BD$.

9.67. Докажите, что если два противоположных угла четырёхугольника тупые, то диагональ, соединяющая вершины этих углов, короче другой диагонали.

9.68. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки до трёх вершин равнобедренной трапеции больше расстояния от этой точки до четвёртой вершины.

9.69. Угол A четырёхугольника $ABCD$ тупой; F — середина стороны BC. Докажите, что $2FA < BD + CD$.

9.70. Дан четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что $AC \cdot BD \leqslant AB \cdot CD + BC \cdot AD$ (*неравенство Птолемея*).

9.71. Пусть M и N — середины сторон BC и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что $S_{ABCD} < 4S_{AMN}$.

9.72. Точка P лежит внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что сумма расстояний от точки P до вершин четырёхугольника меньше суммы попарных расстояний между вершинами четырёхугольника.

9.73. Диагонали делят выпуклый четырёхугольник $ABCD$ на четыре треугольника. Пусть P — периметр четырёхугольника $ABCD$, Q — периметр четырёхугольника, образованного центрами вписанных окружностей полученных треугольников. Докажите, что $PQ > 4S_{ABCD}$.

9.74. Докажите, что расстояние от одной из вершин выпуклого четырёхугольника до противоположной диагонали не превосходит половины этой диагонали.

9.75*. Отрезок KL проходит через точку пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$, а концы его лежат на сторонах AB и CD. Докажите, что длина отрезка KL не превосходит длины одной из диагоналей.

9.76*. В параллелограмм P_1 вписан параллелограмм P_2, а в параллелограмм P_2 вписан параллелограмм P_3, стороны которого параллельны сторонам P_1. Докажите, что длина хотя бы одной из сторон P_1 не превосходит удвоенной длины параллельной ей стороны P_3.

См. также задачи 13.21, 15.3 а).

§ 10. Многоугольники

9.77. Докажите, что если углы выпуклого пятиугольника образуют арифметическую прогрессию, то каждый из них больше 36°.

9.78*. Пусть $ABCDE$ — выпуклый пятиугольник, вписанный в окружность радиуса 1, причём $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DE = d$, $AE = 2$. Докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + abc + bcd < 4.$$

9.79*. Внутри правильного шестиугольника со стороной 1 взята точка P. Докажите, что расстояния от точки P до некоторых трёх вершин шестиугольника не меньше 1.

9.80*. Докажите, что если стороны выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ равны 1, то радиус описанной окружности одного из треугольников ACE и BDF не превосходит 1.

9.81*. Длины сторон выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ меньше 1. Докажите, что длина одной из диагоналей AD, BE, CF меньше 2.

9.82*. Семиугольник $A_1 \ldots A_7$ вписан в окружность. Докажите, что если центр этой окружности лежит внутри его, то сумма углов при вершинах A_1, A_3, A_5 меньше 450°.

* * *

9.83. а) Докажите, что если длины проекций отрезка на две взаимно перпендикулярные прямые равны a и b, то его длина не меньше $(a + b)/\sqrt{2}$.

б) Длины проекций многоугольника на координатные оси равны a и b. Докажите, что его периметр не меньше $\sqrt{2}(a + b)$.

9.84*. Докажите, что из сторон выпуклого многоугольника периметра P можно составить два отрезка, длины которых отличаются не более чем на $P/3$.

9.85*. Многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ составлен из n твёрдых стержней, соединённых шарнирами. Докажите, что если $n>4$, то его можно деформировать в треугольник.

9.86*. Внутри выпуклого многоугольника $A_1\ldots A_n$ взята точка O. Пусть α_k — величина угла при вершине A_k, $x_k=OA_k$, d_k — расстояние от точки O до прямой A_kA_{k+1}. Докажите, что $\sum x_k\sin(\alpha_k/2)\geqslant\sum d_k$ и $\sum x_k\cos(\alpha_k/2)\geqslant p$, где p — полупериметр многоугольника.

9.87*. Правильный $2n$-угольник M_1 со стороной a лежит внутри правильного $2n$-угольника M_2 со стороной $2a$. Докажите, что многоугольник M_1 содержит центр многоугольника M_2.

9.88*. Внутри правильного многоугольника $A_1\ldots A_n$ взята точка O. Докажите, что по крайней мере один из углов A_iOA_j удовлетворяет неравенствам $\pi(1-1/n)\leqslant\angle A_iOA_j\leqslant\pi$.

9.89*. Докажите, что при $n\geqslant 7$ внутри выпуклого n-угольника найдётся точка, сумма расстояний от которой до вершин больше периметра.

9.90*. а) Выпуклые многоугольники $A_1\ldots A_n$ и $B_1\ldots B_n$ таковы, что все их соответственные стороны, кроме A_1A_n и B_1B_n, равны и $\angle A_2\geqslant\angle B_2$, $\ldots$, $\angle A_{n-1}\geqslant\angle B_{n-1}$, причём хотя бы одно из неравенств строгое. Докажите, что $A_1A_n>B_1B_n$.

б) Соответственные стороны неравных многоугольников $A_1\ldots A_n$ и $B_1\ldots B_n$ равны. Запишем возле каждой вершины многоугольника $A_1\ldots A_n$ знак разности $\angle A_i-\angle B_i$. Докажите, что при $n\geqslant 4$ соседних вершин с разными знаками будет по крайней мере четыре пары. (Вершины с нулевой разностью выбрасываются из рассмотрения: две вершины, между которыми стоят только вершины с нулевой разностью, считаются соседними.)

См. также задачи 4.38, 4.54, 13.45.

§ 11. Разные задачи

9.91. На отрезке длиной 1 дано n точек. Докажите, что сумма расстояний от некоторой точки отрезка до этих точек не меньше $n/2$.

9.92*. В лесу растут деревья цилиндрической формы. Связисту нужно протянуть провод из точки A в точку B, расстояние между которыми равно l. Докажите, что для этой цели ему достаточно куска провода длиной $1{,}6l$.

9.93*. В некотором лесу расстояние между любыми двумя деревьями не превосходит разности их высот. Все деревья имеют высоту меньше 100 м. Докажите, что этот лес можно огородить забором длиной 200 м.

9.94*. Многоугольник (не обязательно выпуклый), вырезанный из бумаги, перегибается по некоторой прямой и обе половинки склеиваются. Может ли периметр полученного многоугольника быть больше, чем периметр исходного?

9.95*. В треугольник вписана окружность. Около неё описан квадрат. Докажите, что вне треугольника лежит не больше половины периметра квадрата.

* * *

9.96. Докажите, что замкнутую ломаную длины 1 можно поместить в круг радиуса 0,25.

9.97*. Остроугольный треугольник расположен внутри окружности. Докажите, что её радиус не меньше радиуса описанной окружности треугольника.

Верно ли это утверждение для тупоугольного треугольника?

9.98*. Докажите, что периметр остроугольного треугольника не меньше $4R$.

См. также задачи 14.25, 20.4.

Задачи для самостоятельного решения

9.99. Два отрезка делят прямоугольник $ABCD$ на четыре прямоугольника. Докажите, что площадь одного из прямоугольников, прилегающих к вершинам A и C, не превосходит четверти площади $ABCD$.

9.100. Докажите, что если $AB+BD=AC+CD$, то серединный перпендикуляр к стороне BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекает отрезок AD.

9.101. Докажите, что если диагональ BD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ делит пополам диагональ AC и $AB>BC$, то $AD<DC$.

9.102. Основания описанной трапеции равны 2 и 11. Докажите, что продолжения её боковых сторон пересекаются под острым углом.

9.103. Основания трапеции равны a и b, а высота равна h. Докажите, что длина одной из её диагоналей не меньше $\sqrt{h^2+(b+a)^2/4}$.

9.104. Вершины n-угольника M_1 являются серединами сторон выпуклого n-угольника M. Докажите, что при $n\geqslant 3$ периметр M_1 не меньше половины периметра M, а при $n\geqslant 4$ площадь M_1 не меньше половины площади M.

9.105. В окружность радиуса 1 вписан многоугольник, длины сторон которого заключены между 1 и $\sqrt{2}$. Найдите число его сторон.

Приложение. Некоторые неравенства

1. Наиболее часто используется *неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим для двух чисел*: $\sqrt{ab}\leqslant(a+b)/2$, где a и b — положительные числа. Это неравенство следует из того, что $a - 2\sqrt{ab} + b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0$; равенство достигается, только если $a = b$.

Из этого неравенства следует несколько полезных неравенств, например

$$x(a-x) \leqslant ((x+a-x)/2)^2 = a^2/4;$$
$$a + \frac{1}{a} \geqslant 2\sqrt{a(1/a)} = 2 \quad \text{при} \quad a > 0.$$

2. При решении некоторых задач используется *неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим для n положительных чисел*: $(a_1a_2\ldots a_n)^{1/n} \leqslant (a_1 + \ldots + a_n)/n$, причём равенство достигается, только если $a_1 = \ldots = a_n$.

Докажем сначала это неравенство для чисел вида $n = 2^m$ индукцией по m. Для $m = 1$ неравенство было доказано выше. Предположим, что оно доказано для m, и докажем его для $m+1$. Ясно, что $a_ka_{k+2^m} \leqslant ((a_k + a_{k+2^m})/2)^2$. Поэтому

$$(a_1a_2\ldots a_{2^{m+1}})^{1/2^{m+1}} \leqslant (b_1b_2\ldots b_{2^m})^{1/2^m},$$

где $b_k = (a_k + a_{k+2^m})/2$, а по предположению индукции

$$(b_1\ldots b_{2^m})^{1/2^m} \leqslant \frac{1}{2^m}(b_1 + \ldots + b_{2^m}) = \frac{1}{2^{m+1}}(a_1 + \ldots + a_{2^{m+1}}).$$

Пусть теперь n любое. Тогда $n < 2^m$ для некоторого m. Положим $a_{n+1} = \ldots = a_{2^m} = (a_1 + \ldots + a_n)/n = A$. Ясно, что $(a_1 + \ldots + a_n) + (a_{n+1} + \ldots + a_{2^m}) = nA + (2^m - n)A = 2^mA$ и $a_1\ldots a_{2^m} = a_1\ldots a_n \cdot A^{2^m-n}$. Поэтому $a_1\ldots a_n \cdot A^{2^m-n} \leqslant (2^mA/2^m)^{2^m} = A^{2^m}$, т. е. $a_1\ldots a_n \leqslant A^n$; равенство достигается, только если $a_1 = \ldots = a_n$.

3. Для произвольных чисел $a_1, \ldots, a_n$ справедливо неравенство $(a_1 + \ldots + a_n)^2 \leqslant n(a_1^2 + \ldots + a_n^2)$. В самом деле,

$$(a_1 + \ldots + a_n)^2 = \sum a_i^2 + 2\sum_{i<j} a_ia_j \leqslant \sum a_i^2 + \sum_{i<j}(a_i^2 + a_j^2) = n\sum a_i^2.$$

4. Так как $\int\limits_0^\alpha \cos t\,dt = \sin\alpha$ и $\int\limits_0^\alpha \sin t\,dt = 1 - \cos\alpha$, то, исходя из неравенства $\cos t \leqslant 1$, получим $\sin\alpha \leqslant \alpha$, затем $1 - \cos\alpha \leqslant \alpha^2/2$ (т. е. $\cos\alpha \geqslant 1 - \frac{\alpha^2}{2}$), $\sin\alpha \geqslant \alpha - \frac{\alpha^3}{6}$, $\cos\alpha \leqslant 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24}$ и т. д. (неравенства справедливы при всех $\alpha \geqslant 0$).

5. Докажем, что $\operatorname{tg}\alpha \geqslant \alpha$ при $0 \leqslant \alpha < \pi/2$. Пусть AB — касательная к окружности радиуса 1 с центром O, причём B — точка касания; C — точка пересечения луча OA с окружностью, S — площадь сектора BOC, $\alpha = \angle AOB$. Тогда $\alpha = 2S < 2S_{AOB} = \operatorname{tg}\alpha$.

6. На участке от 0 до $\pi/2$ функция $f(x) = x/\sin x$ монотонно возрастает, так как $f'(x) = \dfrac{\cos x(\operatorname{tg} x - x)}{\sin^2 x} > 0$. В частности, $f(\alpha) \leqslant f(\pi/2)$, т. е. $\alpha/\sin\alpha \leqslant \pi/2$ при $0 < \alpha < \pi/2$.

7. Если $f(x) = a\cos x + b\sin x$, то $f(x) \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$. В самом деле, существует такой угол φ, что $\cos\varphi = a/\sqrt{a^2+b^2}$ и $\sin\varphi = b/\sqrt{a^2+b^2}$, поэтому $f(x) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\varphi - x) \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$. Равенство достигается, только если $\varphi = x + 2k\pi$, т. е. $\cos x = a/\sqrt{a^2+b^2}$ и $\sin x = b/\sqrt{a^2+b^2}$.

Решения

9.1. Пусть C_1 — середина стороны AB. Тогда $CC_1 + C_1A > CA$ и $BC_1 + C_1C > BC$. Поэтому $2CC_1 + BA > CA + BC$, т. е. $m_c > (a+b-c)/2$.

Пусть точка C' симметрична C относительно точки C_1. Тогда $CC_1 = C_1C'$ и $BC' = CA$. Поэтому $2m_c = CC' < CB + BC' = CB + CA$, т. е. $m_c < (a+b)/2$.

9.2. Из предыдущей задачи следует $m_a < (b+c)/2$, $m_b < (a+c)/2$ и $m_c < (a+b)/2$, поэтому сумма длин медиан меньше периметра.

Пусть O — точка пересечения медиан треугольника ABC. Тогда $BO + OA > BA$, $AO + OC > AC$ и $CO + OB > CB$. Складывая эти неравенства и учитывая, что $AO = 2m_a/3$, $BO = 2m_b/3$, $CO = 2m_c/3$, получаем $m_a + m_b + m_c > 3(a+b+c)/4$.

9.3. Пусть M_1 и M_2 — диаметрально противоположные точки окружности. Тогда $M_1A_k + M_2A_k \geqslant M_1M_2 = 2$. Складывая эти неравенства для $k = 1, \ldots, n$, получаем $(M_1A_1 + \ldots + M_1A_n) + (M_2A_1 + \ldots + M_2A_n) \geqslant 2n$. Поэтому либо $M_1A_1 + \ldots + M_1A_n \geqslant n$, и тогда положим $M = M_1$, либо $M_2A_1 + \ldots + M_2A_n \geqslant n$, и тогда положим $M = M_2$.

9.4. В качестве K можно взять середину отрезка PQ. В самом деле, тогда $A_iK \leqslant (A_iP + A_iQ)/2$ (см. задачу 9.1), причём хотя бы одно неравенство строгое, так как точки A_i не могут все лежать на прямой PQ.

9.5. Пусть A_i и B_i — положения конца минутных стрелок часов с номером i в моменты t и $t + 30$ мин, O_i — центр i-х часов, а O — центр стола. Тогда $OO_i \leqslant (OA_i + OB_i)/2$ для любого i (см. задачу 9.1). Ясно, что в некоторый момент точки A_i и B_i не лежат на прямой O_iO, т. е. по крайней мере одно из n неравенств становится строгим. Тогда либо $OO_1 + \ldots + OO_n < OA_1 + \ldots + OA_n$, либо $OO_1 + \ldots + OO_n < OB_1 + \ldots + OB_n$.

9.6. Решая систему уравнений $x + y = c$, $x + z = b$, $y + z = a$, получаем $x = (-a+b+c)/2$, $y = (a-b+c)/2$, $z = (a+b-c)/2$. Положительность чисел x, y и z следует из неравенства треугольника.

9.7. По неравенству треугольника $a^2 > (b-c)^2 = b^2 - 2bc + c^2$, $b^2 > a^2 - 2ac + c^2$ и $c^2 > a^2 - 2ab + b^2$. Складывая эти неравенства, получаем требуемое.

9.8. Можно считать, что $a \geqslant b \geqslant c$. Докажем, что $a = b$. В самом деле, если $b < a$, то $b \leqslant \lambda a$ и $c \leqslant \lambda a$, где $\lambda < 1$. Поэтому $b^n + c^n \leqslant 2\lambda^n a^n$. При достаточно большом n имеем $2\lambda^n < 1$ и получаем противоречие с неравенством треугольника.

9.9. Так как $c(a-b)^2 + 4abc = c(a+b)^2$, то $a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 4abc - a^3 - b^3 - c^3 = a((b-c)^2 - a^2) + b((c-a)^2 - b^2) + c((a+b)^2 - c^2) = (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$. (Последнее равенство проверяется простым вычислением.) Все три сомножителя положительны в силу неравенства треугольника.

9.10. Пусть $x = b + c - a$, $y = c + a - b$, $z = a + b - c$. Согласно неравенству треугольника эти числа положительны. Ясно, что $a = \frac{y+z}{2}$, $b = \frac{x+z}{2}$, $c = \frac{x+y}{2}$. Поэтому требуемое неравенство переписывается в виде

$$\frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} \geqslant 3.$$

Остаётся заметить, что $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2$ и т. д.

9.11. Легко проверить, что $abc|p - q| = |(b - c)(c - a)(a - b)|$. А так как $|b - c| < a$, $|c - a| < b$ и $|a - b| < c$, то $|(b - c)(c - a)(a - b)| < abc$.

9.12. Пусть длины отрезков равны $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4 \leqslant a_5$. Если все треугольники, которые можно составить из этих отрезков, не остроугольные, то $a_3^2 \geqslant a_1^2 + a_2^2$, $a_4^2 \geqslant a_2^2 + a_3^2$ и $a_5^2 \geqslant a_3^2 + a_4^2$. Поэтому $a_5^2 \geqslant a_3^2 + a_4^2 \geqslant (a_1^2 + a_2^2) + (a_2^2 + a_3^2) \geqslant 2a_1^2 + 3a_2^2$. Так как $a_1^2 + a_2^2 \geqslant 2a_1a_2$, то $2a_1^2 + 3a_2^2 > a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2 = (a_1 + a_2)^2$. Приходим к неравенству $a_5^2 > (a_1 + a_2)^2$, противоречащему неравенству треугольника.

9.13. Первое решение. Введём новые переменные $x = -a + b + c$, $y = a - b + c$, $z = a + b - c$. Тогда $a = (y + z)/2$, $b = (x + z)/2$, $c = (x + y)/2$, т. е. нужно доказать неравенство $xyz \leqslant (x + y)(y + z)(x + z)/8$ или $6xyz \leqslant x(y^2 + z^2) + y(x^2 + z^2) + z(x^2 + y^2)$. Последнее неравенство следует из того, что $2xyz \leqslant x(y^2 + z^2)$, $2xyz \leqslant y(x^2 + z^2)$, $2xyz \leqslant z(x^2 + y^2)$, так как x, y, z — положительные числа.

Второе решение. Так как $2S = ab\sin\gamma$ и $\sin\gamma = c/2R$, то $abc = 4SR$. По формуле Герона $(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) = 8S^2/p$. Поэтому нужно доказать, что $8S^2/p \leqslant 4SR$, т. е. $2S \leqslant pR$. Так как $S = pr$, приходим к неравенству $2r \leqslant R$ (см. задачу 10.28 или 19.7).

9.14. Введём новые переменные $x = (-a + b + c)/2$, $y = (a - b + c)/2$ и $z = (a + b - c)/2$. Тогда числа x, y, z положительны и $a = y + z$, $b = x + z$, $c = x + y$. Несложные, но несколько громоздкие вычисления показывают, что $a^2b(a - b) + b^2c(b - c) + c^2a(c - a) = 2(x^3z + y^3x + z^3y - xyz(x + y + z)) = 2xyz\left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} - x - y - z\right)$. Так как $2 \leqslant \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, то $2x \leqslant x\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = \frac{x^2}{y} + y$. Аналогично $2y \leqslant y\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) = \frac{y^2}{z} + z$ и $2z \leqslant z\left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) = \frac{z^2}{x} + x$. Складывая эти неравенства, получаем $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geqslant x + y + z$.

9.15. Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Тогда $AC + BD = (AO + OC) + (BO + OD) = (AO + OB) + (OC + OD) > AB + CD$.

9.16. Согласно предыдущей задаче $AB + CD < AC + BD$. Складывая это неравенство с неравенством $AB + BD \leqslant AC + CD$, получаем $2AB < 2AC$.

9.17. Докажем сначала, что если P — периметр выпуклого четырёхугольника $ABCD$, а d_1 и d_2 — длины его диагоналей, то $P > d_1 + d_2 > P/2$. Ясно, что $AC < AB + BC$ и $AC < AD + DC$, поэтому $AC < (AB + BC + CD + AD)/2 = P/2$. Аналогично $BD < P/2$. Следовательно, $AC + BD < P$. С другой стороны, складывая неравенства $AB + CD < AC + BD$ и $BC + AD < AC + BD$ (см. задачу 9.15), получаем $P < 2(AC + BD)$.

Пусть P — периметр внешнего четырёхугольника, P' — периметр внутреннего. Тогда $d > P/2$, а так как $P' < P$ (задача 9.29 б), то $d' < P' < P < 2d$.

9.18. Пусть ломаная наименьшей длины самопересекающаяся. Рассмотрим два пересекающихся звена. Вершины этих звеньев могут соединяться одним из трёх способов (рис. 9.2). Рассмотрим новую ломаную, у которой два пересекающихся звена заменены на штриховые звенья (см. рис. 9.2).

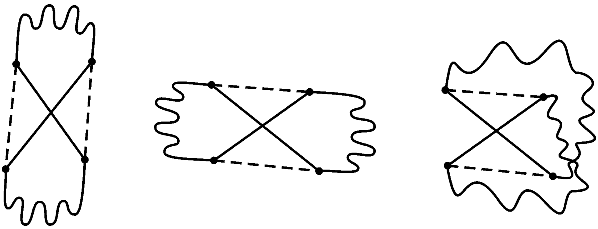


Рис. 9.2

При этом снова получается замкнутая ломаная, но её длина меньше, чем у исходной, так как сумма длин противоположных сторон выпуклого четырёхугольника меньше суммы длин диагоналей. Получено противоречие, поэтому замкнутая ломаная наименьшей длины не может иметь пересекающихся звеньев.

9.19. Докажем, что число сторон у такого многоугольника не больше 5. Предположим, что все диагонали многоугольника $A_1 \dots A_n$ имеют одинаковую длину и $n \geqslant 6$. Тогда отрезки A_1A_4, A_1A_5, A_2A_4 и A_2A_5 имеют одинаковую длину, так как они являются диагоналями этого многоугольника. Но в выпуклом четырёхугольнике $A_1A_2A_4A_5$ отрезки A_1A_5 и A_2A_4 являются противоположными сторонами, а A_1A_4 и A_2A_5 — диагоналями. Поэтому $A_1A_5 + A_2A_4 < A_1A_4 + A_2A_5$. Получено противоречие.

Ясно также, что правильный пятиугольник и квадрат удовлетворяют требуемому условию.

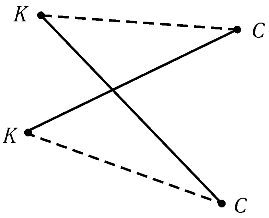


Рис. 9.3

9.20. Рассмотрим все разбиения данных точек на пары разноцветных точек. Этих разбиений конечное число, поэтому найдётся разбиение, для которого сумма длин отрезков, заданных парами точек разбиения, наименьшая. Покажем, что тогда эти отрезки не будут пересекаться. В самом деле, если бы два отрезка пересекались, то мы смогли бы выбрать разбиение с меньшей суммой длин отрезков, заменив диагонали выпуклого четырёхугольника на его противоположные стороны (рис. 9.3).

9.21. Пусть A_pA_{p+1} и A_qA_{q+1} — несмежные стороны n-угольника $A_1 \dots A_n$ (т. е. $|p-q| \geqslant 2$). Тогда $A_pA_{p+1} + A_qA_{q+1} < A_pA_q + A_{p+1}A_{q+1}$. Запишем все такие неравенства и сложим их. Для каждой стороны найдётся ровно $n-3$ несмежных с ней сторон, поэтому любая сторона входит в $n-3$ неравенства, т. е. в левой части полученной суммы стоит $(n-3)P$, где P — сумма длин сторон n-угольника. Диагональ A_mA_n входит в два неравенства: для $p=n$, $q=m$ и для $p=n-1$, $q=m-1$, поэтому в правой части стоит $2d$, где d — сумма длин диагоналей. Итак, $(n-3)P < 2d$. Следовательно, $P/n < d/(n(n-3)/2)$, что и требовалось.

9.22. Рассмотрим произвольную замкнутую ломаную с вершинами в вершинах данного многоугольника. Если у неё есть два непересекающихся звена, то, заменив эти звенья на диагонали заданного ими четырёхугольника, мы увеличим сумму длин звеньев; при этом, однако, одна замкнутая ломаная может распасться на две. Докажем, что в случае нечётного числа звеньев после всех таких операций в конце концов получится замкнутая ломаная (так как сумма длин звеньев каждый раз увеличивается, таких операций возможно лишь конечное число). Одна из получившихся замкнутых ломаных должна иметь нечётное число звеньев, но тогда любое из оставшихся звеньев не пересекается хотя бы с одним из звеньев этой ломаной (см. задачу 23.1 а), значит, в конце концов, получится лишь одна замкнутая ломаная.

Будем теперь последовательно строить ломаную с попарно пересекающимися звеньями (рис. 9.4). Например, вершина 10 должна лежать внутри заштрихованного треугольника, поэтому расположение вершин именно такое, как на рис. 9.4. Значит, выпуклому многоугольнику $A_1A_3A_5\ldots A_{2n+1}A_2\ldots A_{2n}$ соответствует ломаная $A_1A_2A_3\ldots A_{2n+1}A_1$.

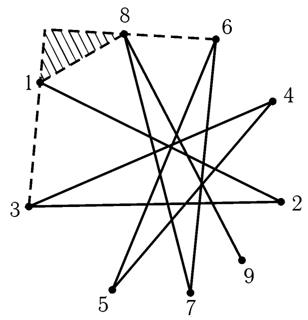


Рис. 9.4

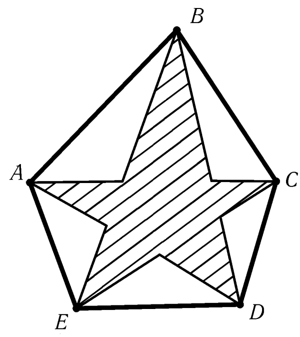


Рис. 9.5

9.23. Пусть длина третьей стороны равна n. По неравенству треугольника $3{,}14 - 0{,}67 < n < 3{,}14 + 0{,}67$. Так как n — целое число, то $n = 3$.

9.24. Ясно, что $AB + BC > AC$, $BC + CD > BD$, $CD + DE > CE$, $DE + EA > DA$, $EA + AB > EB$. Складывая все эти неравенства, получаем, что сумма длин диагоналей пятиугольника меньше удвоенного периметра.

Сумма длин диагоналей больше суммы длин сторон «лучей звезды», а она, в свою очередь, больше периметра пятиугольника (рис. 9.5).

9.25. Предположим, что c — не наименьшая сторона, например, $a \leqslant c$. Тогда $a^2 \leqslant c^2$ и $b^2 < (a+c)^2 \leqslant 4c^2$. Поэтому $a^2 + b^2 < 5c^2$. Получено противоречие.

9.26. Так как $c > |b - a|$ и $a = 2S/h_a$, $b = 2S/h_b$, $c = 2S/h_c$, то $\dfrac{1}{h_c} > \left|\dfrac{1}{h_a} - \dfrac{1}{h_b}\right|$. Значит, в нашем случае $h_c < 20 \cdot 12/8 = 30$.

9.27. Отрезок CE пересекает отрезок AD или отрезок BD; пусть для определённости он пересекает отрезок AD в точке P. Тогда $AP + PC > AC$ и $EP + PD > ED$, поэтому $DA + EC > AC + ED$. Следовательно, $EC - ED > AC - DA > 1$.

9.28. Возьмём на сторонах AB, BC, CA точки C_2, A_2, B_2 так, что $A_1B_2 \parallel AB$, $B_1C_2 \parallel BC$, $C_1A_2 \parallel CA$ (рис. 9.6). Тогда $A_1B_1 < A_1B_2 + B_2B_1 = (1-\lambda)AB + (2\lambda-1)CA$. Аналогично $B_1C_1 < (1-\lambda)BC + (2\lambda-1)AB$ и $C_1A_1 < (1-\lambda)CA + (2\lambda-1)BC$. Складывая эти неравенства, получаем $P_1 < \lambda P$.

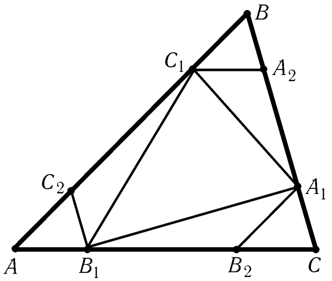


Рис. 9.6

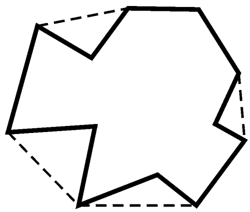


Рис. 9.7

Ясно, что $A_1B_1 + A_1C > B_1C$, т. е. $A_1B_1 + (1-\lambda)BC > \lambda \cdot CA$. Аналогично $B_1C_1 + (1-\lambda)CA > \lambda \cdot AB$ и $C_1A_1 + (1-\lambda)AB > \lambda \cdot BC$. Складывая эти неравенства, получаем $P_1 > (2\lambda-1)P$.

9.29. а) При переходе от невыпуклого многоугольника к его выпуклой оболочке некоторые ломаные, образованные сторонами, заменяются прямолинейными отрезками (рис. 9.7). Остаётся заметить, что длина ломаной больше длины отрезка с теми же концами.

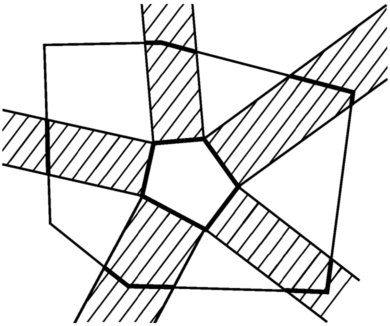


Рис. 9.8

б) Построим на сторонах внутреннего многоугольника полуполосы, обращённые наружу; параллельные края полуполос перпендикулярны соответствующей стороне многоугольника (рис. 9.8). Обозначим через P ту часть периметра внешнего многоугольника, которая находится внутри этих полуполос. Тогда периметр внутреннего многоугольника не превосходит P, а внешнего больше P.

9.30. Так как $AO + BO > AB$, $BO + OC > BC$ и $CO + OA > AC$, то $AO + BO + CO > (AB + BC + CA)/2$. Поскольку треугольник ABC содержит треугольник ABO, то $AB + BO + OA < AB + BC + CA$ (см. задачу 9.29 б), т. е. $BO + OA < BC + CA$. Аналогично $AO + OC < AB + BC$ и $CO + OB < CA + AB$. Складывая эти неравенства, получаем $AO + BO + CO < AB + BC + CA$.

9.31. Достаточно доказать, что $ABCE$ и $BCDE$ — параллелограммы. Достроим треугольник ABE до параллелограмма ABC_1E. Тогда периметры треугольников BC_1E и ABE равны, поэтому равны периметры треугольников BC_1E и BCE. Следовательно, $C_1 = C$, так как иначе один из треугольников BC_1E и BCE лежит внутри другого и их периметры не могут быть равны.

Поэтому $ABCE$ — параллелограмм. Аналогично доказывается, что $BCDE$ — параллелограмм.

9.32. Ясно, что $2 = 2S = ab\sin\gamma \leqslant ab \leqslant b^2$, т. е. $b \geqslant \sqrt{2}$.

9.33. Так как EH — средняя линия треугольника ABD, то $S_{AEH} = S_{ABD}/4$. Аналогично $S_{CFG} = S_{CBD}/4$. Поэтому $S_{AEH} + S_{CFG} = S_{ABCD}/4$. Аналогично $S_{BFE} + S_{DGH} = S_{ABCD}/4$. Следовательно, $S_{ABCD} = 2S_{EFGH} = EG\cdot HF\sin\alpha$, где α — угол между прямыми EG и HF. Так как $\sin\alpha \leqslant 1$, то $S_{ABCD} \leqslant EG\cdot HF$.

Складывая равенства $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$ и $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG}$, получаем $2\overrightarrow{EG} = (\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EA}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{CG}) = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$. Поэтому $EG \leqslant (BC + AD)/2$. Аналогично $HF \leqslant (AB + CD)/2$. Следовательно,

$$S_{ABCD} \leqslant EG\cdot HF \leqslant (AB + CD)(BC + AD)/4.$$

9.34. Согласно задаче 9.33 $S_{ABCD} \leqslant (AB + CD)(BC + AD)/4$. Так как $ab \leqslant (a + b)^2/4$, то $S_{ABCD} \leqslant (AB + CD + AD + BC)^2/16 = 1$.

9.35. Опустим из точек B и C перпендикуляры BB_1 и CC_1 на прямую AM. Тогда $2S_{AMB} + 2S_{AMC} = AM\cdot BB_1 + AM\cdot CC_1 \leqslant AM\cdot BC$, так как $BB_1 + CC_1 \leqslant BC$. Аналогично $2S_{BMC} + 2S_{BMA} \leqslant BM\cdot AC$ и $2S_{CMA} + 2S_{CMB} \leqslant CM\cdot AB$. Складывая эти неравенства, получаем требуемое.

9.36. Пусть на сторонах $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ выбраны точки $B_1, \ldots, B_n$; O — центр окружности. Пусть, далее, $S_k = S_{OB_kA_{k+1}B_{k+1}} = (OA_{k+1}\cdot B_kB_{k+1}\sin\varphi)/2$, где φ — угол между OA_{k+1} и B_kB_{k+1}. Так как $OA_{k+1} = R$ и $\sin\varphi \leqslant 1$, то $S_k \leqslant (R\cdot B_kB_{k+1})/2$. Поэтому $S = S_1 + \ldots + S_n \leqslant R(B_1B_2 + \ldots + B_nB_1)/2$, т. е. периметр многоугольника $B_1B_2\ldots B_n$ не меньше $2S/R$.

9.37. Ясно, что $2S_{AOB} \leqslant AO\cdot OB \leqslant (AO^2 + BO^2)/2$, причём равенство возможно, только если $\angle AOB = 90^\circ$ и $AO = BO$. Аналогично $2S_{BOC} \leqslant (BO^2 + CO^2)/2$, $2S_{COD} \leqslant (CO^2 + DO^2)/2$ и $2S_{DOA} \leqslant (DO^2 + AO^2)/2$. Складывая эти неравенства, получаем $2S = 2(S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA}) \leqslant AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2$, причём равенство возможно, только если $AO = BO = CO = DO$ и $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOA = 90^\circ$, т. е. $ABCD$ — квадрат и точка O — его центр.

9.38. Нужно доказать, что $S_{ABC}/S_{AMN} \geqslant 4$. Так как $AB = AM + MB = AM + AN = AN + NC = AC$, то

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMN}} = \frac{AB\cdot AC}{AM\cdot AN} = \frac{(AM + AN)^2}{AM\cdot AN} \geqslant 4.$$

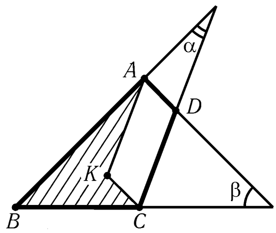


Рис. 9.9

9.39. Воспользуемся формулой Герона: $S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c)$. Так как $p - a = (p_1 - a_1) + (p_2 - a_2)$, а $(x + y)^2 \geqslant 4xy$, то $(p - a)^2 \geqslant 4(p_1 - a_1)\times(p_2 - a_2)$. Аналогично $(p - b)^2 \geqslant 4(p_1 - b_1)(p_2 - b_2)$, $(p - c)^2 \geqslant 4(p_1 - c_1)(p_2 - c_2)$ и $p^2 \geqslant 4p_1p_2$. Перемножая эти неравенства, получаем требуемое.

9.40. Для определённости можно считать, что пересекаются лучи BA и CD, BC и AD (рис. 9.9). Тогда, если достроить треугольник ADC до параллелограмма $ADCK$, точка K окажется внутри четырёхугольника $ABCD$. Поэтому $2S \geqslant 2S_{ABK} + 2S_{BCK} = AB\cdot AK\sin\alpha + BC\cdot CK\sin\beta = AB\cdot CD\sin\alpha + BC\cdot AD\sin\beta$. Равенство достигается, если точка D лежит на отрезке AC.

Пусть точка D' симметрична точке D относительно серединного перпендикуляра к отрезку AC. Тогда $2S = 2S_{ABCD'} = 2S_{ABD'} + 2S_{BCD'} \leqslant AB\cdot AD' + BC\cdot CD' = AB\cdot CD + BC\cdot AD$.

9.41. Согласно неравенству между средним геометрическим и средним арифметическим $\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}\geqslant 3\sqrt[3]{abc/(\alpha\beta\gamma)}=3/2$, так как $\alpha=2\sqrt{bc}$, $\beta=2\sqrt{ca}$ и $\gamma=2\sqrt{ab}$ (см. задачу 1.34).

9.42. Неравенства $\alpha<\alpha_1$, $\beta<\beta_1$ и $\gamma<\gamma_1$ не могут выполняться одновременно. Поэтому, например, $\alpha_1\leqslant\alpha\leqslant 90^\circ$, а значит, $\sin\alpha_1\leqslant\sin\alpha$. Следовательно, $2S_1=a_1b_1\sin\alpha_1\leqslant k^2ab\sin\alpha=2k^2S$.

9.43. а) Пусть хорды AE и BD пересекают диаметр CM в точках K и L. Тогда $AC^2=CK\cdot CM$ и $BC^2=CL\cdot CM$. Значит, $CK/CL=AC^2/BC^2<4$. Кроме того, $AE/BD=AE/AC<2$. Следовательно, $S_{ACE}/S_{BCD}=AE\cdot CK/(BD\cdot CL)<8$.

б) Пусть H — середина отрезка BC. Так как $\angle CBD=\angle BCD=\angle ABD$, то D — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Поэтому $AD/DH=$ $=AB/BH>1$. Следовательно, $S_{MAN}>S_{ABC}/4$ и $S_{BCD}=BC\cdot DH/2<BC\cdot AH/4=$ $=S_{ABC}/2$.

9.44. Отрежем от полученного многоугольника прямоугольники со стороной h, построенные внешним образом на сторонах исходного многоугольника (рис. 9.10). При этом кроме исходного многоугольника останутся ещё некото-

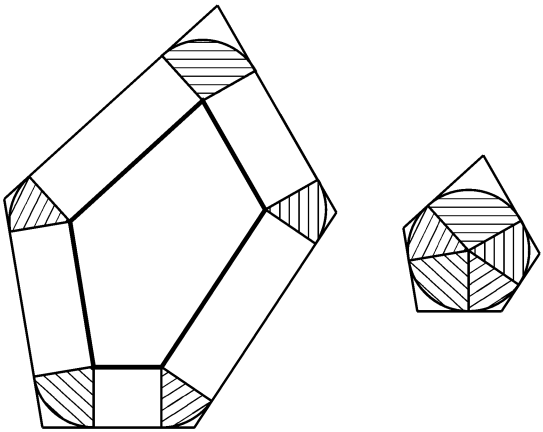


Рис. 9.10

рые четырёхугольники, из которых можно составить многоугольник, описанный около окружности радиуса h. Сумма площадей этих четырёхугольников больше площади окружности радиуса h, т. е. больше πh^2. Ясно также, что сумма площадей отрезанных прямоугольников равна Ph.

9.45. Пусть s, s_1, …, s_n — площади квадрата и составляющих его прямоугольников, S, S_1, …, S_n — площади описанных около них кругов. Докажем, что $s_k\leqslant 2S_k/\pi$. В самом деле, если стороны прямоугольника равны a и b, то $s_k=ab$ и $S_k=\pi R^2$, где $R^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}$. Поэтому $s_k=ab\leqslant(a^2+b^2)/2=2\pi R^2/\pi=$ $=2S_k/\pi$. Следовательно, $2S/\pi=s=s_1+\ldots+s_n\leqslant 2(S_1+\ldots+S_n)/\pi$.

9.46. Пусть для определённости ABC — треугольник наименьшей площади. Обозначим точку пересечения диагоналей AD и EC через F. Тогда

$S_{ABCDE} < S_{AED} + S_{EDC} + S_{ABCF}$. Так как точка F лежит на отрезке EC и $S_{EAB} \geqslant S_{CAB}$, то $S_{EAB} \geqslant S_{FAB}$. Аналогично $S_{DCB} \geqslant S_{FCB}$. Поэтому $S_{ABCF} = S_{FAB} + S_{FCB} \leqslant S_{EAB} + S_{DCB}$. Следовательно, $S_{ABCDE} < S_{AED} + S_{EDC} + S_{EAB} + S_{DCB}$; это даже более сильное неравенство, чем требовалось.

9.47. а) Обозначим точки пересечения диагоналей AD и CF, CF и BE, BE и AD через P, Q, R соответственно (рис. 9.11). Четырёхугольники $ABCP$ и $CDEQ$ не имеют общих внутренних точек, так как стороны CP и QC лежат на прямой CF, а отрезки AB и DE — по разные стороны от неё. Аналогично четырёхугольники $ABCP$, $CDEQ$ и $EFAR$ не имеют попарно общих внутренних точек. Поэтому сумма их площадей не превосходит S. Следовательно, сумма площадей треугольников ABP, BCP, CDQ, DEQ, EFR, FAR не превосходит S, т. е. площадь одного из них, например ABP, не превосходит $S/6$. Точка P лежит на отрезке CF, поэтому либо точка C, либо точка F удалена от прямой AB не больше, чем точка P. Следовательно, либо $S_{ABC} \leqslant S_{ABP} \leqslant S/6$, либо $S_{ABF} \leqslant S_{ABP} \leqslant S/6$.

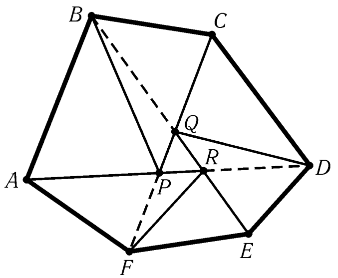


Рис. 9.11

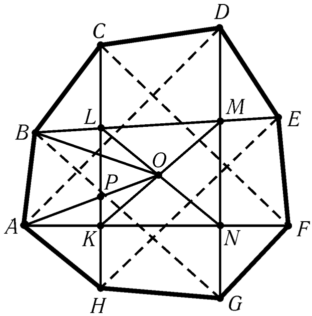


Рис. 9.12

б) Пусть $ABCDEFGH$ — выпуклый восьмиугольник (рис. 9.12). Докажем сначала, что четырёхугольники $ABEF$, $BCFG$, $CDGH$ и $DEHA$ имеют общую точку. Ясно, что пересечением $ABEF$ и $CDGH$ является некоторый выпуклый четырёхугольник $KLMN$. Отрезки AF и HC лежат внутри углов DAH и AHE соответственно, поэтому точка K лежит внутри четырёхугольника $DEHA$. Аналогично доказывается, что точка M лежит внутри четырёхугольника $DEHA$, т. е. весь отрезок KM лежит внутри его. Аналогично отрезок LN лежит внутри четырёхугольника $BCFG$. Точка пересечения диагоналей KM и LN принадлежит всем нашим четырёхугольникам; обозначим её O. Разобьём восьмиугольник на треугольники, соединив точку O с вершинами. Площадь одного из этих треугольников, например ABO, не превосходит $S/8$. Отрезок AO пересекает сторону KL в некоторой точке P, поэтому $S_{ABP} \leqslant S_{ABO} \leqslant S/8$. Так как точка P лежит на диагонали CH, то либо $S_{ABC} \leqslant S_{ABP} \leqslant S/8$, либо $S_{ABH} \leqslant S_{ABP} \leqslant S/8$.

9.48. Для каждой из четырёх данных проекций многоугольника рассмотрим полосу, состоящую из точек, которые проецируются на данную проекцию. Каждая граница такой полосы пересекает все остальные полосы, поскольку иначе проекция многоугольника была бы меньше, чем нужно. Поэтому данный многоугольник лежит внутри фигуры, которая получается при отрезании от прямоугольника размером 4×5 треугольников со сторонами a, $3 - a$,

b и $1-b$ (рис. 9.13). Сумма площадей отрезанных треугольников равна

$$\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}(3-a)^2+\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}(1-b)^2=\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\geqslant\frac{10}{4}=2{,}5.$$

Поэтому площадь фигуры не превосходит $20-2{,}5=17{,}5$.

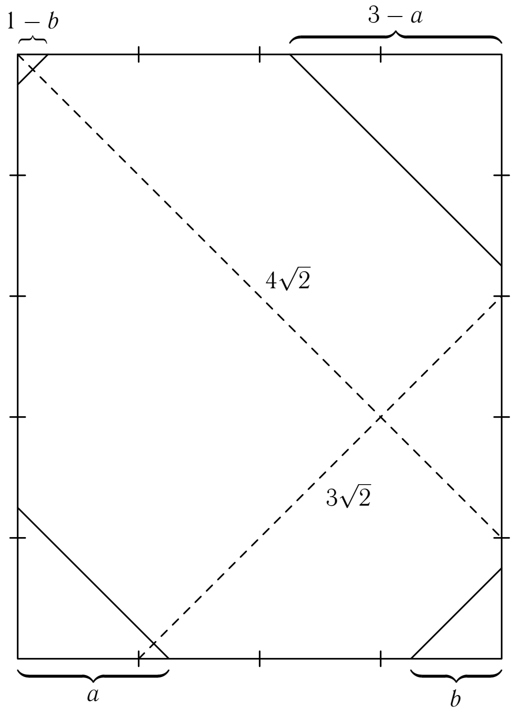


Рис. 9.13

9.49. Проведём через все вершины многоугольника прямые, параллельные одной паре сторон квадрата, и разобьём тем самым квадрат на полоски. Каждая такая полоска отрезает от многоугольника трапецию или треугольник. Достаточно доказать, что длина одного из оснований этих трапеций больше 0,5. Предположим, что длины оснований всех трапеций не превосходят 0,5. Тогда площадь каждой трапеции не превосходит половины высоты полоски, её заключающей. Поэтому площадь многоугольника, равная сумме площадей трапеций и треугольников, на которые он разрезан, не превосходит половины суммы высот полосок, т. е. не превосходит 0,5. Получено противоречие.

9.50. а) Пусть $P_1, \ldots, P_n$ — данные точки. Соединим точку P_1 с вершинами квадрата. При этом получится четыре треугольника. Затем для $k=2, \ldots, n$ проделаем следующую операцию. Если точка P_k лежит строго внутри одного из полученных ранее треугольников, то соединим её с вершинами этого треугольника. Если точка P_k лежит на общей стороне двух треугольников, то соединим её с вершинами этих треугольников, противолежащими общей стороне. После каждой такой операции в обоих случаях число треугольников увеличивается на два. В результате получится $2(n+1)$ треугольников. Сумма площадей этих треугольников равна 1, поэтому площадь одного из них не превосходит $1/(2(n+1))$.

б) Рассмотрим наименьший выпуклый многоугольник, содержащий данные точки. Пусть он имеет k вершин. Если $k = n$, то этот k-угольник можно разбить на $n-2$ треугольников диагоналями, выходящими из одной вершины. Если же $k < n$, то внутри k-угольника лежит $n-k$ точек и его можно разбить на треугольники способом, указанным в предыдущей задаче. При этом получится $k + 2(n-k-1) = 2n-k-2$ треугольников. Так как $k < n$, то $2n-k-2 > n-2$.

Сумма площадей треугольников разбиения меньше 1, а их количество не меньше $n-2$, поэтому площадь хотя бы одного из них не превосходит $1/(n-2)$.

9.51. а) Можно считать, что описанный n-угольник $A_1 \ldots A_n$ и вписанный n-угольник $B_1 \ldots B_n$ расположены так, что прямые A_iB_i пересекаются в центре O данного круга. Пусть C_i и D_i — середины сторон A_iA_{i+1} и B_iB_{i+1}. Тогда $S_{OB_iC_i} = p \cdot OB_i \cdot OC_i$, $S_{OB_iD_i} = p \cdot OB_i \cdot OD_i$ и $S_{OA_iC_i} = p \cdot OA_i \cdot OC_i$, где $p = (\sin A_iOC_i)/2$. Так как $OA_i : OC_i = OB_i : OD_i$, то $S^2_{OB_iC_i} = S_{OB_iD_i}S_{OA_iC_i}$. Остаётся заметить, что площадь части круга, заключённой внутри угла A_iOC_i, больше $S_{OB_iC_i}$, а площади частей вписанного и описанного n-угольников, заключённых внутри этого угла, равны $S_{OB_iD_i}$ и $S_{OA_iC_i}$.

б) Пусть радиус окружности равен R. Тогда $P_1 = 2nR\sin(\pi/n)$, $P_2 = 2nR\operatorname{tg}(\pi/n)$ и $L = 2\pi R$. Нужно доказать, что $\sin x \operatorname{tg} x > x^2$ при $0 < x \leqslant \pi/3$. Так как $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \geqslant \left(1 - \frac{x^2}{6}\right)^2 = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{36}$ и $0 < \cos x \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ (см. приложение в конце главы), остаётся проверить, что $1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{36} \geqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$, т. е. $12x^2 > x^4$. При $x \leqslant \pi/3$ это неравенство выполняется.

9.52. Пусть O — центр гомотетии, переводящей вписанную окружность в описанную. Разобьём плоскость лучами, выходящими из точки O и проходящими через вершины многоугольника и точки касания его сторон с вписанной окружностью (рис. 9.14). Достаточно доказать требуемое неравенство для частей кругов и многоугольника, заключённых внутри каждого из образованных этими лучами углов. Пусть стороны угла пересекают вписанную и описанную окружности в точках P, Q и R, S соответственно, причём P — точка касания, а S — вершина многоугольника. Площади частей кругов больше площадей треугольников OPQ и ORS, поэтому достаточно доказать, что $2S_{OPS} \leqslant S_{OPQ} + S_{ORS}$. Так как $2S_{OPS} = 2S_{OPQ} + 2S_{PQS}$ и $S_{ORS} = S_{OPQ} + S_{PQS} + S_{PRS}$, остаётся доказать, что $S_{PQS} \leqslant S_{PRS}$. Это неравенство очевидно, так как

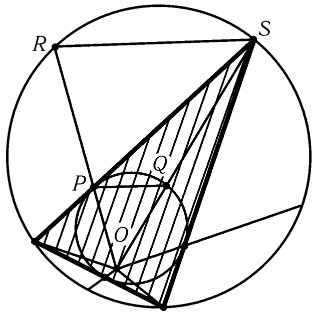


Рис. 9.14

высоты треугольников PQS и PRS, опущенные на основания PQ и RS, равны, а $PQ < RS$.

9.53. Достаточно доказать, что оба треугольника содержат центр O круга. Докажем, что если треугольник ABC, помещённый в круг радиуса 1, не содержит центра круга, то его площадь меньше 1. В самом деле, для любой точки, лежащей вне треугольника, найдётся прямая, проходящая через две вершины и отделяющая эту точку от третьей вершины. Пусть для определённости прямая AB разделяет точки C и O. Тогда $h_c < 1$ и $AB < 2$, поэтому $S = h_c \cdot AB/2 < 1$.

9.54. а) Построим на сторонах многоугольника внутренним образом прямоугольники со второй стороной $R = S/P$. Они покроют не весь многоугольник (эти прямоугольники перекрываются и могут вылезать за его пределы, а сумма их площадей равна площади многоугольника). Непокрытая точка удалена ото всех сторон многоугольника больше, чем на R, поэтому круг радиуса R с центром в этой точке целиком лежит внутри многоугольника.

б) Из задачи а) следует, что во внутренний многоугольник можно поместить круг радиуса S_2/P_2. Ясно, что этот круг лежит внутри внешнего многоугольника. Остаётся доказать, что если внутри многоугольника лежит круг радиуса R, то $R \leqslant 2S/P$. Для этого соединим центр O круга с вершинами. Тогда многоугольник разобьётся на треугольники с площадями $h_i a_i/2$, где h_i — расстояние от точки O до i-й стороны, а a_i — длина i-й стороны. Так как $h_i \geqslant R$, то $2S = \sum h_i a_i \geqslant \sum R a_i = RP$.

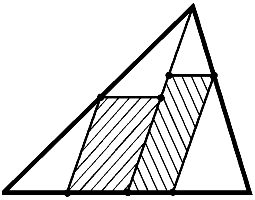


Рис. 9.15

9.55. Рассмотрим сначала случай, когда две стороны параллелограмма лежат на прямых AB и AC, а вершина X лежит на стороне BC. Если $BX : CX = x : (1 - x)$, то отношение площади параллелограмма к площади треугольника равно $2x(1 - x) \leqslant 1/2$.

В общем случае проведём параллельные прямые, содержащие пару сторон данного параллелограмма (рис. 9.15). Площадь данного параллелограмма не превосходит суммы площадей заштрихованных параллелограммов, а они относятся к разобранному выше случаю. Если прямые, содержащие пару сторон данного параллелограмма, пересекают лишь две стороны треугольника, то можно ограничиться одним заштрихованным параллелограммом.

9.56. Рассмотрим сначала такой случай: две вершины A и B треугольника ABC лежат на одной стороне PQ параллелограмма. Тогда $AB \leqslant PQ$ и высота, опущенная на сторону AB, не больше высоты параллелограмма. Поэтому площадь треугольника ABC не больше половины площади параллелограмма.

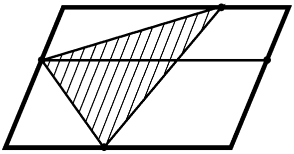


Рис. 9.16

Если же вершины треугольника лежат на разных сторонах параллелограмма, то две из них лежат на противоположных сторонах. Проведём через третью вершину треугольника прямую, параллельную этим сторонам (рис. 9.16). Она разрезает параллелограмм на два параллелограмма, а треугольник — на два треугольника, причём у обоих треугольников две вершины лежат на сторонах параллелограмма. Приходим к рассмотренному случаю.

9.57. Пусть M — середина наибольшей стороны BC данного остроугольного треугольника ABC. Окружность радиуса MA с центром M пересекает лучи MB и MC в точках B_1 и C_1. Так как $\angle BAC < 90^\circ$, то $MB < MB_1$. Пусть для определённости $\angle AMB \leqslant \angle AMC$, т. е. $\angle AMB \leqslant 90^\circ$. Тогда $AM^2 + MB^2 \leqslant AB^2 \leqslant \leqslant BC^2 = 4MB^2$, т. е. $AM \leqslant \sqrt{3}BM$. Если AH — высота треугольника ABC, то $AH \cdot BC = 2$, а значит, $S_{AB_1C_1} = B_1C_1 \cdot AH/2 = AM \cdot AH \leqslant \sqrt{3}BM \cdot AH = \sqrt{3}$.

9.58. а) Пусть AB — наибольшая диагональ или сторона данного многоугольника M. Многоугольник M заключён внутри полосы, образованной перпендикулярами к отрезку AB, проходящими через точки A и B. Проведём к многоугольнику M две опорные прямые, параллельные AB; пусть они пересекают многоугольник M в точках C и D. В результате многоугольник M заключён в прямоугольник, площадь которого равна $2S_{ABC} + 2S_{ABD} \leqslant 2S$.

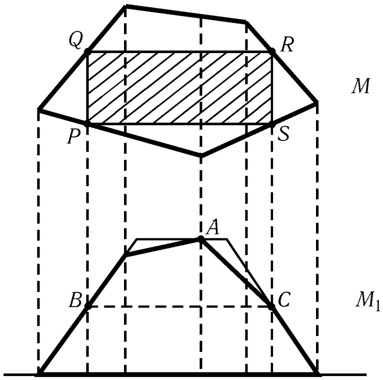


Рис. 9.17

б) Пусть M — исходный многоугольник, l — произвольная прямая. Рассмотрим многоугольник M_1, одна из сторон которого — проекция M на l, а длины сечений многоугольников M и M_1 любой прямой, перпендикулярной l, равны (рис. 9.17). Легко проверить, что многоугольник M_1 тоже выпуклый, причём его площадь равна S. Пусть A — наиболее удалённая от l точка многоугольника M_1. Прямая, равноудалённая от точки A и прямой l, пересекает стороны многоугольника M_1 в точках B и C. Проведём через точки B и C опорные прямые. В результате вокруг многоугольника M_1 будет описана трапеция (через точку A тоже можно провести опорную прямую); площадь этой трапеции не меньше S. Если высота трапеции (т. е. расстояние от точки A до прямой l) равна h, то её площадь равна $h \cdot BC$, а значит, $h \cdot BC \geqslant S$. Рассмотрим сечения PQ и RS многоугольника M прямыми, перпендикулярными l и проходящими через B и C. Длины этих сечений равны $h/2$, поэтому $PQRS$ — параллелограмм, причём его площадь равна $BC \cdot h/2 \geqslant S/2$.

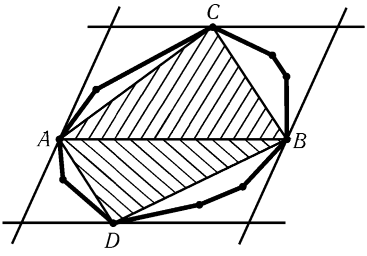


Рис. 9.18

9.59. а) Заключим многоугольник в полосу, образованную параллельными прямыми. Будем сдвигать эти прямые параллельно до тех пор, пока на каждую из них не попадут некоторые вершины A и B многоугольника. Затем проделаем то же самое для полосы, образованной прямыми, параллельными AB. На эти прямые попадут некоторые вершины C и D (рис. 9.18). Исходный многоугольник заключён в параллелограмм, поэтому площадь этого параллелограмма не меньше 1. С другой стороны, сумма площадей треугольников ACB и ADB равна половине площади параллелограмма, поэтому площадь одного из этих треугольников не меньше $1/4$.

б) Как и в задаче а), заключим многоугольник в полосу, образованную параллельными прямыми, так, чтобы вершины A и B лежали на этих прямых (рис. 9.19). Пусть ширина этой полосы равна d. Проведём три прямые, делящие эту полосу на равные полосы шириной $d/4$. Пусть первая и третья прямые пересекают стороны многоугольника в точках K, L и M, N соответственно.

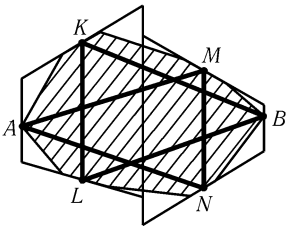


Рис. 9.19

Продолжим стороны, на которых лежат точки K, L, M и N, до пересечения со сторонами исходной полосы и с прямой, делящей её пополам. При этом образуются две трапеции со средними линиями KL и MN, высоты которых равны $d/2$. Так как эти трапеции покрывают весь многоугольник, сумма их площадей не меньше его площади, т. е. $(d \cdot KL + d \cdot MN)/2 \geqslant 1$. Сумма площадей треугольников AMN и BKL, содержащихся в исходном многоугольнике, равна $(3d \cdot MN + 3d \cdot KL)/8 \geqslant 3/4$. Поэтому площадь одного из этих треугольников не меньше $3/8$.

9.60. Докажем, что найдутся даже три последовательные вершины, удовлетворяющие требуемому условию. Пусть α_i — угол между i-й и $(i+1)$-й сторонами, $\beta_i = \pi - \alpha_i$, а a_i — длина i-й стороны.

а) Площадь треугольника, образованного i-й и $(i+1)$-й сторонами, равна $S_i = (a_i a_{i+1} \sin\alpha_i)/2$. Пусть S — наименьшая из этих площадей. Тогда $2S \leqslant a_i a_{i+1} \sin\alpha_i$, поэтому $(2S)^n \leqslant (a_1^2 \ldots a_n^2)(\sin\alpha_1 \ldots \sin\alpha_n) \leqslant a_1^2 \ldots a_n^2$. Согласно неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим $(a_1 \ldots a_n)^{1/n} \leqslant (a_1 + \ldots + a_n)/n$, поэтому $2S \leqslant (a_1 \ldots a_n)^{2/n} \leqslant (a_1 + \ldots + a_n)^2/n^2$. Так как $a_i \leqslant p_i + q_i$, где p_i и q_i — проекции i-й стороны на вертикальную и горизонтальную стороны квадрата, то $a_1 + \ldots + a_n \leqslant (p_1 + \ldots + p_n) + (q_1 + \ldots + q_n) \leqslant 4$. Поэтому $2S \leqslant 16n^2$, т. е. $S \leqslant 8/n^2$.

б) Воспользуемся доказанным выше неравенством

$$2S \leqslant (a_1 \ldots a_n)^{2/n} (\sin\alpha_1 \ldots \sin\alpha_n)^{1/n} \leqslant \frac{16}{n^2} (\sin\alpha_1 \ldots \sin\alpha_n)^{1/n}.$$

Так как $\sin\alpha_i = \sin\beta_i$ и $\beta_1 + \ldots + \beta_n = 2\pi$, то

$$(\sin\alpha_1 \ldots \sin\alpha_n)^{1/n} = (\sin\beta_1 \ldots \sin\beta_n)^{1/n} \leqslant \frac{\beta_1 + \ldots + \beta_n}{n} = \frac{2\pi}{n}.$$

Поэтому $2S \leqslant 32\pi/n^3$, т. е. $S \leqslant 16\pi/n^3$.

9.61. Пусть l_i — длина i-го звена ломаной, a_i и b_i — длины его проекций на стороны квадрата. Тогда $l_i \leqslant a_i + b_i$. Следовательно, $1000 = l_1 + \ldots + l_n \leqslant (a_1 + \ldots + a_n) + (b_1 + \ldots + b_n)$, т. е. либо $a_1 + \ldots + a_n \geqslant 500$, либо $b_1 + \ldots + b_n \geqslant 500$. Если сумма длин проекций звеньев на сторону длиной 1 не меньше 500, то на одну из точек стороны проецируется не менее 500 различных звеньев ломаной, т. е. перпендикуляр к стороне, проходящий через эту точку, пересекает ломаную по крайней мере в 500 точках.

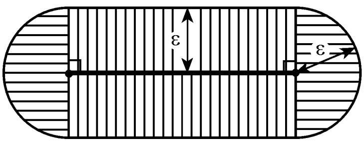


Рис. 9.20

9.62. Геометрическое место точек, удалённых от данного отрезка не более чем на ε, изображено на рис. 9.20. Площадь этой фигуры равна $\pi\varepsilon^2 + 2\varepsilon l$, где l — длина отрезка. Построим такие фигуры для всех N звеньев данной ломаной. Так как соседние фигуры имеют $N-1$ общих кругов радиуса ε с центрами в неконцевых вершинах ломаной, то покрытая этими фигурами площадь не превосходит $N\pi\varepsilon^2 + 2\varepsilon(l_1 + \ldots + l_n) - (N-1)\pi\varepsilon^2 = 2\varepsilon L + \pi\varepsilon^2$. Эти фигуры покрывают весь квадрат, так как любая точка квадрата удалена от некоторой точки ломаной меньше чем на ε. Поэтому $1 \leqslant 2\varepsilon L + \pi\varepsilon^2$, т. е. $L \geqslant \dfrac{1}{2\varepsilon} - \dfrac{\pi\varepsilon}{2}$.

9.63. Разобьём квадрат на n вертикальных полосок, содержащих по n точек каждая. Точки внутри каждой полосы соединим сверху вниз и получим n ломаных. Эти ломаные можно соединить в одну ломаную двумя способами (рис. 9.21, *а* и *б*). Рассмотрим отрезки, соединяющие разные полосы.

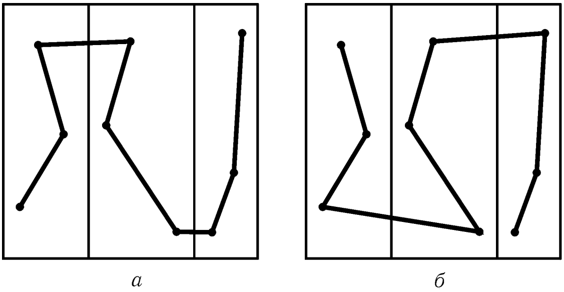


Рис. 9.21

Объединение всех таких отрезков, полученных обоими способами, представляет собой пару ломаных, причём сумма длин горизонтальных проекций звеньев каждой из них не превосходит 1. Поэтому сумма длин горизонтальных проекций соединяющих отрезков для одного из способов не превосходит 1. Рассмотрим именно это соединение. Сумма длин горизонтальных проекций для соединяющих звеньев не превосходит 1, а для всех остальных звеньев не превосходит $(n-1)(h_1 + \ldots + h_n)$, где h_i — ширина i-й полосы. Ясно, что $h_1 + \ldots + h_n = 1$. Сумма вертикальных проекций всех звеньев ломаной не превосходит n. В итоге получаем, что сумма вертикальных и горизонтальных проекций всех звеньев не превосходит $1 + (n-1) + n = 2n$, поэтому и длина ломаной не превосходит $2n$.

9.64. Пусть M и N — концы ломаной. Будем идти по ломаной из M в N. Пусть A_1 — первая из встретившихся нам точек ломаной, удалённых от какой-либо вершины квадрата на расстояние 0,5. Рассмотрим вершины квадрата, соседние с этой вершиной. Пусть B_1 — первая после A_1 точка ломаной, удалённая от одной из этих вершин на расстояние 0,5. Вершины квадрата, ближайшие к точкам A_1 и B_1, обозначим A и B соответственно (рис. 9.22). Часть ломаной от M до A_1

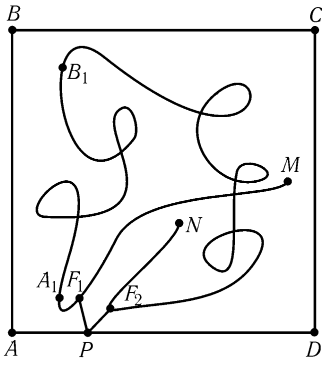


Рис. 9.22

обозначим через L_1, от A_1 до N — через L_2. Пусть X и Y — множества точек, лежащих на AD и удалённых не более чем на 0,5 от L_1 и L_2 соответственно. По условию X и Y покрывают всю сторону AD. Ясно, что A принадлежит X, а D не принадлежит X, поэтому D принадлежит Y, т. е. оба множества X и Y не пусты. Но каждое из них состоит из нескольких отрезков, поэтому они должны иметь общую точку P. Следовательно, на L_1 и L_2 существуют точки F_1 и F_2, для которых $PF_1 \leqslant 0{,}5$ и $PF_2 \leqslant 0{,}5$.

Докажем, что F_1 и F_2 — искомые точки. В самом деле, $F_1F_2 \leqslant F_1P + PF_2 \leqslant 1$. С другой стороны, идя в F_2 из F_1, мы должны пройти через точку B, а $F_1B_1 \geqslant 99$ и $F_2B_1 \geqslant 99$, так как точка B_1 удалена от стороны BC не больше чем на 0,5, а F_1 и F_2 удалены от стороны AD не больше чем на 0,5.

9.65. Пусть $\angle A = \angle B$. Достаточно доказать, что если $AD < BC$, то $\angle D > \angle C$. Возьмём на стороне BC точку D_1 так, что $BD_1 = AD$. Тогда ABD_1D — равнобедренная трапеция. Поэтому $\angle D > \angle D_1DA = \angle DD_1B > \angle C$.

9.66. Пусть B_1 и C_1 — проекции точек B и C на основание AD. Так как $\angle BAB_1 < \angle CDC_1$ и $BB_1 = CC_1$, то $AB_1 > DC_1$ и поэтому $B_1D < AC_1$. Следовательно, $BD^2 = B_1D^2 + B_1B^2 < AC_1^2 + CC_1^2 = AC^2$.

9.67. Пусть углы B и D четырёхугольника $ABCD$ тупые. Тогда точки B и D лежат внутри окружности с диаметром AC. Так как расстояние между любыми двумя точками, лежащими внутри окружности, меньше её диаметра, то $BD < AC$.

9.68. В равнобедренной трапеции $ABCD$ диагонали AC и BD равны. Поэтому $BM + (AM + CM) \geqslant BM + AC = BM + BD \geqslant DM$.

9.69. Пусть O — середина отрезка BD. Точка A лежит внутри окружности с диаметром BD, поэтому $OA < BD/2$. Кроме того, $FO = CD/2$. Следовательно, $2FA \leqslant 2FO + 2OA < CD + BD$.

9.70. Отложим на лучах AB, AC и AD отрезки AB', AC' и AD' длиной $1/AB$, $1/AC$ и $1/AD$. Тогда $AB : AC = AC' : AB'$, т. е. $\triangle ABC \sim \triangle AC'B'$. Коэффициент подобия этих треугольников равен $1/(AB \cdot AC)$, поэтому $B'C' = BC/(AB \cdot AC)$. Аналогично $C'D' = CD/(AC \cdot AD)$ и $B'D' = BD/(AB \cdot AD)$. Подставив эти выражения в неравенство $B'D' \leqslant B'C' + C'D'$ и домножив обе части на $AB \cdot AC \cdot AD$, получим требуемое.

9.71. Ясно, что $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = 2S_{AMC} + 2S_{ANC} = 2(S_{AMN} + S_{CMN})$. Если отрезок AM пересекает диагональ BD в точке A_1, то $S_{CMN} = S_{A_1MN} < S_{AMN}$. Значит, $S_{ABCD} < 4S_{AMN}$.

9.72. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Пусть для определённости точка P лежит внутри треугольника AOB. Тогда $AP + BP \leqslant AO + BO < AC + BD$ (см. решение задачи 9.30) и $CP + DP < CB + BA + AD$.

9.73. Пусть r_i, S_i и p_i — радиусы вписанных окружностей, площади и полупериметры полученных треугольников. Тогда $Q \geqslant 2\sum r_i = 2\sum (S_i/p_i) > 4\sum (S_i/P) = 4S/P$.

9.74. Пусть $AC \leqslant BD$. Опустим из вершин A и C перпендикуляры AA_1 и CC_1 на диагональ BD. Тогда $AA_1 + CC_1 \leqslant AC \leqslant BD$, а значит, $AA_1 \leqslant BD/2$ или $CC_1 \leqslant BD/2$.

9.75. Проведём через концы отрезка KL прямые, ему перпендикулярные, и рассмотрим проекции на них вершин четырёхугольника, а также точки пересечения с ними прямых AC и BD (рис. 9.23). Пусть для определённости точка A лежит внутри полосы, заданной этими прямыми, а точка B — вне её. Тогда можно считать, что D лежит внутри полосы, так как иначе $BD > KL$,

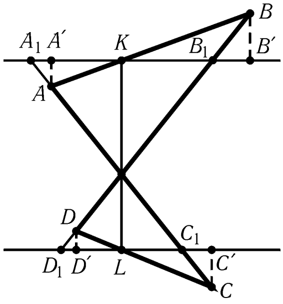


Рис. 9.23

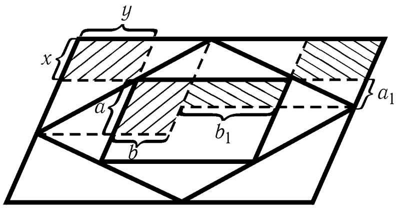


Рис. 9.24

и доказательство завершено. Так как

$$\frac{AA'}{BB'} \leqslant \frac{A_1K}{B_1K} = \frac{C_1L}{D_1L} \leqslant \frac{CC'}{DD'},$$

то либо $AA' \leqslant CC'$ (и тогда $AC > KL$), либо $BB' \geqslant DD'$ (и тогда $BD > KL$).

9.76. Введём такие обозначения, как на рис. 9.24. Все рассматриваемые параллелограммы имеют общий центр (задача 1.7). Длины сторон параллелограмма P_3 равны $a + a_1$ и $b + b_1$, а длины сторон параллелограмма P_1 равны $a + a_1 + 2x$ и $b + b_1 + 2y$, поэтому нужно проверить, что $a + a_1 + 2x \leqslant 2(a + a_1)$ или $b + b_1 + 2y \leqslant 2(b + b_1)$, т.е. $2x \leqslant a + a_1$ или $2y \leqslant b + b_1$. Предположим, что $a + a_1 < 2x$ и $b + b_1 < 2y$. Тогда $\sqrt{aa_1} \leqslant (a + a_1)/2 < x$ и $\sqrt{bb_1} < y$. С другой стороны, равенство площадей заштрихованных параллелограммов (см. задачу 4.19) показывает, что $ab = xy = a_1b_1$, а значит, $\sqrt{aa_1}\sqrt{bb_1} = xy$. Получено противоречие.

9.77. Пусть углы пятиугольника равны α, $\alpha + \gamma$, $\alpha + 2\gamma$, $\alpha + 3\gamma$, $\alpha + 4\gamma$, где α, $\gamma \geqslant 0$. Так как сумма углов пятиугольника равна 3π, то $5\alpha + 10\gamma = 3\pi$. Из выпуклости пятиугольника следует, что все его углы меньше π, т.е. $\alpha + 4\gamma < \pi$, или $-5\alpha/2 - 10\gamma > -5\pi/2$. Складывая последнее неравенство с равенством $5\alpha + 10\gamma = 3\pi$, получаем $5\alpha/2 > \pi/2$, т.е. $\alpha > \pi/5 = 36^\circ$.

9.78. Ясно, что

$$4 = AE^2 = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}|^2 = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|^2 + 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}) + |\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}|^2.$$

Так как $\angle ACE = 90^\circ$, то $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CE}) = 0$. Поэтому $4 = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}|^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DE^2 + 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + 2(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE})$, т.е. достаточно доказать, что $abc < 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ и $bcd < 2(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE})$. Поскольку $2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 2ab\cos(180^\circ - \angle ABC) = 2ab\cos AEC = ab \cdot CE$ и $c < CE$, то $abc < 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$. Второе неравенство доказывается аналогично, так как можно ввести новые обозначения $A_1 = E$, $B_1 = D$, $C_1 = C$, $a_1 = d$, $b_1 = c$, $c_1 = b$, и неравенство $bcd < 2(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE})$ перепишется в виде $a_1b_1c_1 < 2(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{B_1C_1})$.

9.79. Пусть B — середина стороны A_1A_2 данного шестиугольника $A_1 \dots A_6$, O — его центр. Можно считать, что точка P лежит внутри треугольника A_1OB. Тогда $PA_3 \geqslant 1$, так как расстояние от точки A_3 до прямой BO равно 1; $PA_4 \geqslant 1$ и $PA_5 \geqslant 1$, так как расстояния от точек A_4 и A_5 до прямой A_3A_6 равны 1.

9.80. Предположим, что радиусы описанных окружностей треугольников ACE и BDF больше 1. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ACE. Тогда $\angle ABC > \angle AOC$, $\angle CDE > \angle COE$ и $\angle EFA > \angle EOA$, а значит, $\angle B + \angle D + \angle F > 2\pi$. Аналогично $\angle A + \angle C + \angle E > 2\pi$, т. е. сумма углов шестиугольника $ABCDEF$ больше 4π. Получено противоречие.

Замечание. Аналогично можно доказать, что радиус описанной окружности одного из треугольников ACE и BDF не меньше 1.

9.81. Можно считать, что $AE \leqslant AC \leqslant CE$. Согласно задаче 9.70 $AD \cdot CE \leqslant$ $\leqslant AE \cdot CD + AC \cdot DE < AE + AC \leqslant 2CE$, т. е. $AD < 2$.

9.82. Так как $\angle A_1 = 180^\circ - \smile A_2A_7/2$, $\angle A_3 = 180^\circ - \smile A_4A_2/2$ и $\angle A_5 = 180^\circ -$ $- \smile A_6A_4/2$, то $\angle A_1 + \angle A_3 + \angle A_5 = 2 \cdot 180^\circ + (360^\circ - \smile A_2A_7 - \smile A_4A_2 - \smile A_6A_4)/2 =$ $= 2 \cdot 180^\circ + \smile A_7A_6/2$. Поскольку центр окружности лежит внутри семиугольника, то $\smile A_7A_6 < 180^\circ$, поэтому $\angle A_1 + \angle A_3 + \angle A_5 < 360^\circ + 90^\circ = 450^\circ$.

9.83. а) Нужно доказать, что если c — гипотенуза прямоугольного треугольника, а a и b — его катеты, то $c \geqslant (a+b)/\sqrt{2}$, т. е. $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$. Ясно, что $(a+b)^2 = (a^2+b^2) + 2ab \leqslant (a^2+b^2) + (a^2+b^2) = 2(a^2+b^2)$.

б) Пусть d_i — длина i-й стороны многоугольника, а x_i и y_i — длины её проекций на координатные оси. Тогда $x_1 + \ldots + x_n \geqslant 2a$, $y_1 + \ldots + y_n \geqslant 2b$. Согласно задаче а) $d_i \geqslant (x_i + y_i)/\sqrt{2}$. Поэтому $d_1 + \ldots + d_n \geqslant (x_1 + \ldots + x_n + y_1 + \ldots + y_n)/\sqrt{2} \geqslant$ $\geqslant \sqrt{2}(a+b)$.

9.84. Возьмём отрезок длиной P и расположим на нём стороны многоугольника следующим образом: на одном конце отрезка поместим наибольшую сторону, на другом — следующую за ней по величине, а все остальные стороны поместим между ними. Так как любая сторона многоугольника меньше $P/2$, середина O отрезка не может находиться на этих двух наибольших сторонах. Длина стороны, на которой находится точка O, не превосходит $P/3$ (иначе первые две стороны тоже были бы больше $P/3$ и сумма трёх сторон была бы больше P), поэтому одна из её вершин удалена от O не более чем на $P/6$. Эта вершина разбивает отрезок на два искомых отрезка, так как разность их длин не превосходит $2 \cdot P/6 = P/3$.

9.85. Пусть a — наибольшая сторона данного многоугольника (если наибольших сторон несколько, то мы выбираем любую из них). Рассмотрим часть многоугольника, которая остаётся после выбрасывания стороны a, и возьмём точку, которая делит пополам периметр этой части. Если эта точка является вершиной многоугольника, то мы очевидным образом деформируем этот многоугольник в равнобедренный треугольник. Предположим теперь, что эта точка лежит на стороне b, а периметры частей многоугольника, заключённых между сторонами a и b, равны x и y. Тогда $x + b \geqslant y$ и $y + b \geqslant x$. Если, например, $x = 0$, то мы можем составить треугольник из отрезков a, b, y. Поэтому будем считать, что $x, y \neq 0$. Предположим, что треугольник нельзя составить ни из отрезков a, x, $y+b$, ни из отрезков a, y, $x+b$. Отрезок короче соединяющей его концы ломаной, поэтому $a < x + y + b$. Кроме того, есть неравенства $x + b \geqslant y$ и $y + b \geqslant x$. Значит, должны выполняться неравенство $a + x \leqslant y + b$ и $a + y \leqslant x + b$. Поэтому $x = y$ и $a \leqslant b$. Но по предположению $a \geqslant b$, значит, $a = b$. По условию число сторон многоугольника больше 4. Поэтому одна из ломаных длины x состоит из двух частей периметра x_1 и x_2. Легко проверить, что из отрезков длины x, $a + x_1$, $a + x_2$, где $x_1 + x_2 = x$, можно составить треугольник.

9.86. Пусть $\beta_k = \angle OA_kA_{k+1}$. Тогда $x_k \sin\beta_k = d_k = x_{k+1}\sin(\alpha_{k+1} - \beta_{k+1})$. Поэтому $2\sum d_k = \sum x_k(\sin(\alpha_k - \beta_k) + \sin\beta_k) = 2\sum x_k \sin(\alpha_k/2)\cos(\alpha_k/2 - \beta_k) \leqslant \leqslant 2\sum x_k \sin(\alpha_k/2)$.

Ясно также, что $A_kA_{k+1} = x_k\cos\beta_k + x_{k+1}\cos(\alpha_{k+1} - \beta_{k+1})$. Поэтому $2p = = \sum A_kA_{k+1} = \sum x_k(\cos(\alpha_k - \beta_k) + \cos\beta_k) = 2\sum x_k\cos(\alpha_k/2)\cos(\alpha_k/2 - \beta_k) \leqslant \leqslant 2\sum x_k\cos(\alpha_k/2)$.

В обоих случаях равенство достигается, только если $\alpha_k = 2\beta_k$, т. е. O — центр вписанной окружности.

9.87. Предположим, что центр O многоугольника M_2 лежит вне многоугольника M_1. Тогда существует такая сторона AB многоугольника M_1, что многоугольник M_1 и точка O лежат по разные стороны от прямой AB. Пусть CD — сторона многоугольника M_1, параллельная AB. Расстояние между прямыми AB и CD равно радиусу вписанной окружности S многоугольника M_2, поэтому прямая CD лежит вне окружности S. С другой стороны, отрезок CD лежит внутри многоугольника M_2. Следовательно, длина отрезка CD меньше половины длины стороны многоугольника M_2 (см. задачу 10.69). Получено противоречие.

9.88. Пусть A_1 — ближайшая к O вершина многоугольника. Разобьём многоугольник на треугольники диагоналями, проходящими через вершину A_1. Точка O окажется в одном из этих треугольников, например в треугольнике $A_1A_kA_{k+1}$. Если точка O попадёт на сторону A_1A_k, то $\angle A_1OA_k = \pi$, и задача решена. Поэтому будем считать, что точка O лежит строго внутри треугольника $A_1A_kA_{k+1}$. Так как $A_1O \leqslant A_kO$ и $A_1O \leqslant A_{k+1}O$, то $\angle A_1A_kO \leqslant A_kA_1O$ и $\angle A_1A_{k+1}O \leqslant \leqslant \angle A_{k+1}A_1O$. Следовательно $\angle A_kOA_1 + \angle A_{k+1}OA_1 = (\pi - \angle OA_1A_k - \angle OA_kA_1) + + (\pi - \angle OA_1A_{k+1} - \angle OA_{k+1}A_1) \geqslant 2\pi - 2\angle OA_1A_k - 2\angle OA_1A_{k+1} = 2\pi - 2\angle A_kA_1A_{k+1} = = 2\pi - \dfrac{2\pi}{n}$, т. е. один из углов A_kOA_1 и $A_{k+1}OA_1$ не меньше $\pi\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$.

9.89. Пусть d — длина наибольшей диагонали (или стороны) AB данного n-угольника. Тогда его периметр P не превосходит πd (задача 13.45). Пусть A_i' — проекция вершины A_i на отрезок AB. Тогда $\sum AA_i' \geqslant nd/2$ или $\sum BA_i' \geqslant nd/2$ (задача 9.91); пусть для определённости выполняется первое неравенство. Тогда $\sum AA_i > \sum AA_i' \geqslant nd/2 > \pi d \geqslant P$, так как $n/2 \geqslant 3{,}5 > \pi$. Любая точка n-угольника, достаточно близкая к вершине A, обладает требуемым свойством.

9.90. а) Предположим сначала, что $\angle A_i > \angle B_i$, а для всех остальных рассматриваемых пар углов имеет место равенство. Расположим многоугольники так, чтобы вершины $A_1, \ldots, A_i$ совпали с $B_1, \ldots, B_i$. В треугольниках $A_1A_iA_n$ и $A_1A_iB_n$ стороны A_iA_n и A_iB_n равны и $\angle A_1A_iA_n > \angle A_1A_iB_n$, поэтому $A_1A_n > A_1B_n$.

Если же не равны несколько углов, то многоугольники $A_1\ldots A_n$ и $B_1\ldots B_n$ можно включить в цепочку многоугольников, последовательные члены которой такие, как в разобранном выше случае.

б) При полном обходе многоугольника знак минус меняется на знак плюс столько же раз, сколько происходит обратная смена знака. Поэтому число пар соседних вершин с разными знаками чётно. Остаётся проверить, что число изменений знака не может быть равно двум (число изменений знака не равно нулю, так как сумма углов обоих многоугольников одна и та же).

Предположим, что число изменений знака равно двум. Пусть P и Q, P' и Q' — середины сторон многоугольников $A_1\ldots A_n$ и $B_1\ldots B_n$, на которых происходит смена знака. К парам многоугольников M_1 и M_1', M_2 и M_2' (рис. 9.25) можно применить утверждение задачи а); в одном случае получим $PQ > P'Q'$, а в другом $PQ < P'Q'$, чего не может быть.

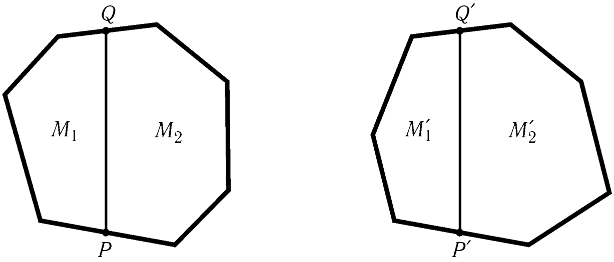


Рис. 9.25

9.91. Пусть A и B — концы отрезка; $X_1, \ldots, X_n$ — данные точки. Так как $AX_i + BX_i = 1$, то $\sum AX_i + \sum BX_i = n$. Следовательно, $\sum AX_i \geqslant n/2$ или $\sum BX_i \geqslant n/2$.

9.92. Будем тянуть провод по отрезку AB, огибая при этом встречающиеся деревья по кратчайшей дуге (рис. 9.26). Достаточно доказать, что путь по

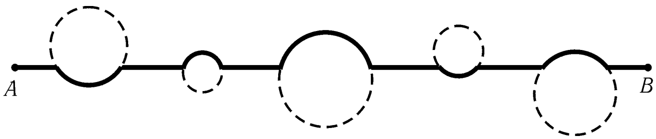


Рис. 9.26

дуге окружности не более чем в 1,6 раза длиннее пути по прямой. Отношение длины дуги угловой величины 2φ к хорде, её стягивающей, равно $\varphi / \sin\varphi$. Так как $0 < \varphi \leqslant \pi/2$, то $\varphi / \sin\varphi \leqslant \pi/2 < 1{,}6$ (см. приложение).

9.93. Пусть деревья высотой $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$ растут в точках $A_1, \ldots, A_n$. Тогда по условию $A_1A_2 \leqslant |a_1 - a_2| = a_1 - a_2, \ldots, A_{n-1}A_n \leqslant a_{n-1} - a_n$. Следовательно, длина ломаной $A_1A_2 \ldots A_n$ не превосходит $(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots \ldots + (a_{n-1} - a_n) = a_1 - a_n < 100$ м. Эту ломаную можно огородить забором, длина которого не превосходит 200 м (рис. 9.27).

9.94. Выделим в полученном многоугольнике части, по которым произошла склейка (на рис. 9.28 эти части заштрихованы). Все стороны, не принадлежащие заштрихованным многоугольникам, входят в периметр исходного и полученного многоугольников. Что же касается заштрихованных многоугольников, то их стороны, лежащие на прямой сгиба, входят в периметр полученного многоугольника, а все остальные стороны — в периметр исходного многоугольника. Так как у любого многоугольника сумма его сторон, лежащих на некоторой прямой, меньше суммы остальных сторон, то периметр исходного многоугольника всегда больше, чем периметр полученного.

9.95. Треугольник касается вписанной окружности в трёх точках, а квадрат касается её в четырёх точках. Поэтому между некоторыми двумя точками

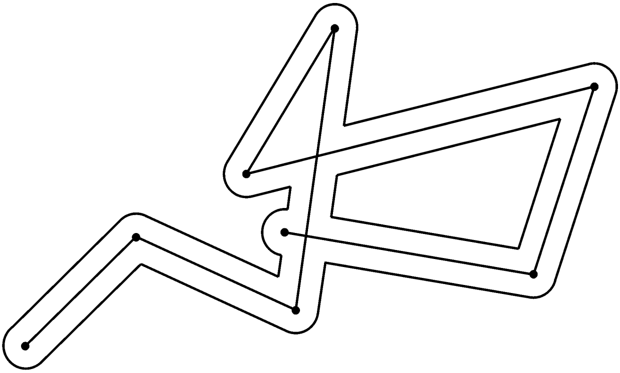


Рис. 9.27

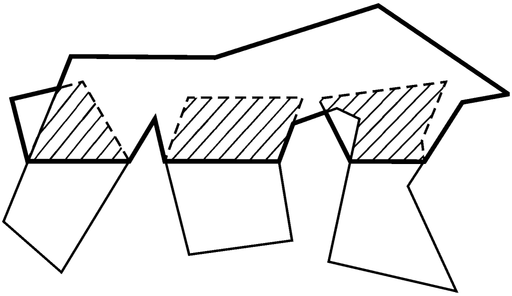


Рис. 9.28

касания треугольника с окружностью лежат две точки касания квадрата с окружностью. Следовательно, внутри треугольника лежит по крайней мере один «уголок» квадрата (т. е. вершина квадрата вместе с половинами выходящих из неё сторон квадрата). Если таких уголков будет два, то мы сразу получаем, что внутри треугольника лежит по крайней мере половина периметра квадрата. Предположим, что такой уголок только один, т. е. три остальных уголка хотя бы частично лежат вне треугольника (тогда соответствующие вершины квадрата тоже лежат вне треугольника). Покажем, что не менее трети периметра каждого из этих трёх уголков лежит внутри треугольника. Вне треугольника лежит часть уголка, представляющая собой прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c. Внутри треугольника лежат отрезки $1-a$ и $1-b$ (мы предполагаем, что длина стороны квадрата равна 2). Ясно, что $(1-a)+(1-b)=c$, $a \leqslant c$ и $b \leqslant c$. Поэтому $a+b \leqslant 2c = 4-2(a+b)$, т. е. $a+b \leqslant 4/3$. Это означает, что вне треугольника лежит не более $2/3$ периметра уголка. Итак, внутри треугольника лежит фигура, имеющая по крайней мере следующий периметр: $2+3\cdot\dfrac{2}{3}=4$, а периметр всего квадрата равен 8.

9.96. Возьмём на ломаной две точки A и B, делящие её периметр пополам. Тогда $AB \leqslant 1/2$. Докажем, что все точки ломаной лежат внутри круга радиуса $1/4$ с центром в середине O отрезка AB. Пусть M — произвольная точка ломаной, а точка M_1 симметрична ей относительно точки O. Тогда $MO = M_1M/2 \leqslant (M_1A + AM)/2 = (BM + AM)/2 \leqslant 1/4$, так как $BM + AM$ не превосходит половины длины ломаной.

9.97. Пусть остроугольный треугольник ABC расположен внутри окружности S. Построим описанную окружность S_1 треугольника ABC. Так как треугольник ABC остроугольный, то угловая величина дуги окружности S_1, лежащей внутри S, больше 180°. Поэтому на этой дуге можно выбрать диаметрально противоположные точки, т. е. внутри окружности S содержится диаметр окружности S_1. Следовательно, радиус окружности S не меньше радиуса окружности S_1.

Аналогичное утверждение для тупоугольного треугольника не верно. Тупоугольный треугольник лежит внутри окружности, построенной на наибольшей стороне a как на диаметре. Радиус этой окружности равен $a/2$, а радиус описанной окружности треугольника равен $a/(2\sin\alpha)$. Ясно, что $a/2 < a/(2\sin\alpha)$.

9.98. Первое решение. Любой треугольник периметра P можно поместить в круг радиуса $P/4$ (задача 9.96), а если остроугольный треугольник помещён в круг радиуса R_1, то $R_1 \geqslant R$ (задача 9.97). Поэтому $P/4 = R_1 \geqslant R$.

Второе решение. Если $0 < x < \pi/2$, то $\sin x > 2x/\pi$ (см. приложение). Поэтому $a + b + c = 2R(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) > 2R(2\alpha + 2\beta + 2\gamma)/\pi = 4R$.

ГЛАВА 10

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ЭЛЕМЕНТОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

Эта глава тесно связана с предыдущей. Основные сведения см. в предыдущей главе.

§ 1. Медианы

10.1. Докажите, что если $a > b$, то $m_a < m_b$.

10.2. Медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Докажите, что если четырёхугольник A_1MB_1C описанный, то $AC = BC$.

10.3. Периметры треугольников ABM, BCM и ACM, где M — точка пересечения медиан треугольника ABC, равны. Докажите, что треугольник ABC правильный.

10.4. а) Докажите, что если a, b, c — длины сторон произвольного треугольника, то $a^2 + b^2 \geqslant c^2/2$.

б) Докажите, что $m_a^2 + m_b^2 \geqslant 9c^2/8$.

10.5*. а) Докажите, что $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \leqslant 27R^2/4$.

б) Докажите, что $m_a + m_b + m_c \leqslant 9R/2$.

10.6*. Докажите, что $|a^2 - b^2|/(2c) < m_c \leqslant (a^2 + b^2)/(2c)$.

10.7*. Пусть $x = ab + bc + ca$, $x_1 = m_am_b + m_bm_c + m_cm_a$. Докажите, что $9/20 < x_1/x < 5/4$.

См. также задачи 9.1, 10.77, 10.79, 17.17.

§ 2. Высоты

10.8. Докажите, что в любом треугольнике сумма длин высот меньше периметра.

10.9. Две высоты треугольника больше 1. Докажите, что его площадь больше 1/2.

10.10. В треугольнике ABC высота AM не меньше BC, а высота BH не меньше AC. Найдите углы треугольника ABC.

10.11. Докажите, что $\dfrac{1}{2r} < \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} < \dfrac{1}{r}$.

10.12. Докажите, что $h_a + h_b + h_c \geqslant 9r$.

10.13. Пусть $a < b$. Докажите, что $a + h_a \leqslant b + h_b$.

10.14*. Докажите, что $h_a \leqslant \sqrt{r_br_c}$.

10.15*. Докажите, что $h_a \leqslant (a/2)\operatorname{ctg}(\alpha/2)$.

10.16*. Пусть $a \leqslant b \leqslant c$. Докажите, что тогда $h_a + h_b + h_c \leqslant 3b(a^2 + ac + c^2)/(4pR)$.

См. также задачи 10.30, 10.57, 10.77, 10.83.

§ 3. Биссектрисы

10.17. Докажите, что $l_a \leqslant \sqrt{p(p-a)}$.

10.18*. Докажите, что $h_a/l_a \geqslant \sqrt{2r/R}$.

10.19*. Докажите, что: а) $l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \leqslant p^2$; б) $l_a + l_b + l_c \leqslant \sqrt{3}p$.

10.20*. Докажите, что $l_a l_b l_c \leqslant rp^2$.

10.21*. Докажите, что $l_a^2 l_b^2 + l_b^2 l_c^2 + l_a^2 l_c^2 \leqslant rp^2(4R + r)$.

10.22*. Докажите, что $l_a + l_b + m_c \leqslant \sqrt{3}p$.

См. также задачи 6.42, 10.78, 10.98.

§ 4. Длины сторон

10.23. Докажите, что $\dfrac{9r}{2S} \leqslant \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \leqslant \dfrac{9R}{4S}$.

10.24*. Докажите, что $2bc\cos\alpha/(b+c) < b + c - a < 2bc/a$.

10.25*. Докажите, что если a, b, c — длины сторон треугольника периметра 2, то $a^2 + b^2 + c^2 < 2(1 - abc)$.

10.26*. Докажите, что $20Rr - 4r^2 \leqslant ab + bc + ca \leqslant 4(R + r)^2$.

§ 5. Радиусы описанной, вписанной и вневписанных окружностей

10.27. Докажите, что $rr_c \leqslant c^2/4$.

10.28*. Докажите, что $r/R \leqslant 2\sin(\alpha/2)(1 - \sin(\alpha/2))$.

10.29*. Докажите, что $6r \leqslant a + b$.

10.30*. Докажите, что $\dfrac{r_a}{h_a} + \dfrac{r_b}{h_b} + \dfrac{r_c}{h_c} \geqslant 3$.

10.31*. Докажите, что $27Rr \leqslant 2p^2 \leqslant 27R^2/2$.

10.32*. Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC, причём $OA \geqslant OB \geqslant OC$. Докажите, что $OA \geqslant 2r$ и $OB \geqslant r\sqrt{2}$.

10.33*. Докажите, что сумма расстояний от любой точки внутри треугольника до его вершин не меньше $6r$.

10.34*. Докажите, что $3\left(\dfrac{a}{r_a} + \dfrac{b}{r_b} + \dfrac{c}{r_c}\right) \geqslant 4\left(\dfrac{r_a}{a} + \dfrac{r_b}{b} + \dfrac{r_c}{c}\right)$.

10.35*. Докажите, что

а) $5R - r \geqslant \sqrt{3}p$;

б) $4R - r_a \geqslant (p - a)[\sqrt{3} + (a^2 + (b - c)^2)/(2S)]$.

10.36*. Докажите, что $16Rr - 5r^2 \leqslant p^2 \leqslant 4R^2 + 4Rr + 3r^2$.

10.37*. Докажите, что $r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 \geqslant 27R^2/4$.

См. также задачи 10.11, 10.12, 10.14, 10.18, 10.26, 10.57, 10.83, 10.86, 19.7.

§ 6. Симметричные неравенства для углов треугольника

Пусть α, β и γ — углы треугольника ABC. В задачах этого параграфа требуется доказать указанные в условиях неравенства.

Замечание. Если α, β и γ — углы некоторого треугольника, то существует треугольник с углами $(\pi-\alpha)/2$, $(\pi-\beta)/2$ и $(\pi-\gamma)/2$.

В самом деле, эти числа положительны и их сумма равна π. Следовательно, если некоторое симметричное неравенство справедливо для синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов углов любого треугольника, то справедливо и аналогичное неравенство, в котором $\sin x$ заменён на $\cos(x/2)$, $\cos x$ — на $\sin(x/2)$, $\operatorname{tg} x$ — на $\operatorname{ctg}(x/2)$ и $\operatorname{ctg} x$ — на $\operatorname{tg}(x/2)$. Обратный переход от неравенств с половинными углами к неравенствам с целыми углами возможен лишь для остроугольных треугольников. В самом деле, если $\alpha'=(\pi-\alpha)/2$, то $\alpha=\pi-2\alpha'$. Поэтому для остроугольного треугольника с углами α', β', γ' существует треугольник с углами $\pi-2\alpha'$, $\pi-2\beta'$, $\pi-2\gamma'$. При такой замене $\sin(x/2)$ переходит в $\cos x$ и т. д., но полученное неравенство может оказаться справедливым лишь для остроугольных треугольников.

10.38*. а) $1<\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leqslant 3/2$;
б) $1<\sin(\alpha/2)+\sin(\beta/2)+\sin(\gamma/2)\leqslant 3/2$.
10.39*. а) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\leqslant 3\sqrt{3}/2$;
б) $\cos(\alpha/2)+\cos(\beta/2)+\cos(\gamma/2)\leqslant 3\sqrt{3}/2$.
10.40*. а) $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma\geqslant\sqrt{3}$;
б) $\operatorname{tg}(\alpha/2)+\operatorname{tg}(\beta/2)+\operatorname{tg}(\gamma/2)\geqslant\sqrt{3}$.
10.41*. а) $\operatorname{ctg}(\alpha/2)+\operatorname{ctg}(\beta/2)+\operatorname{ctg}(\gamma/2)\geqslant 3\sqrt{3}$.
б) Для остроугольного треугольника $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma\geqslant 3\sqrt{3}$.
10.42*. а) $\sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)\sin(\gamma/2)\leqslant 1/8$;
б) $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\leqslant 1/8$.
10.43*. а) $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\leqslant 3\sqrt{3}/8$;
б) $\cos(\alpha/2)\cos(\beta/2)\cos(\gamma/2)\leqslant 3\sqrt{3}/8$.
10.44*. а) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\geqslant 3/4$.
б) Для тупоугольного треугольника $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma>1$.
10.45*. $\cos\alpha\cos\beta+\cos\beta\cos\gamma+\cos\gamma\cos\alpha\leqslant 3/4$.
10.46*. $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma\leqslant\sin(\alpha+\beta)+\sin(\beta+\gamma)+\sin(\gamma+\alpha)$.

§ 7. Неравенства для углов треугольника

10.47. Докажите, что $1-\sin(\alpha/2)\geqslant 2\sin(\beta/2)\sin(\gamma/2)$.
10.48. Докажите, что $\sin(\gamma/2)\leqslant c/(a+b)$.
10.49*. Докажите, что если $a+b<3c$, то $\operatorname{tg}(\alpha/2)\operatorname{tg}(\beta/2)<1/2$.
10.50*. Пусть α, β, γ — углы остроугольного треугольника. Докажите, что если $\alpha<\beta<\gamma$, то $\sin 2\alpha>\sin 2\beta>\sin 2\gamma$.
10.51*. Докажите, что $\cos 2\alpha+\cos 2\beta-\cos 2\gamma\leqslant 3/2$.
10.52*. На медиане BM треугольника ABC взята точка X. Докажите, что если $AB<BC$, то $\angle XAB>\angle XCB$.

10.53. Вписанная окружность касается сторон треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ остроугольный.

10.54*. Из медиан треугольника с углами α, β и γ составлен треугольник с углами α_m, β_m и γ_m (угол α_m лежит против медианы AA_1 и т. д.). Докажите, что если $\alpha > \beta > \gamma$, то $\alpha > \alpha_m$, $\alpha > \beta_m$, $\gamma_m > \beta > \alpha_m$, $\beta_m > \gamma$ и $\gamma_m > \gamma$.

См. также задачи 10.94, 10.95, 10.97.

§ 8. Неравенства для площади треугольника

10.55. Докажите, что:

а) $3\sqrt{3}r^2 \leqslant S \leqslant p^2/3\sqrt{3}$;

б) $S \leqslant (a^2+b^2+c^2)/4\sqrt{3}$.

10.56*. Докажите, что $a^2+b^2+c^2-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2 \geqslant 4\sqrt{3}S$.

10.57*. Докажите, что

а) $S^3 \leqslant (\sqrt{3}/4)^3(abc)^2$;

б) $\sqrt[3]{h_ah_bh_c} \leqslant \sqrt[4]{3}\sqrt{S} \leqslant \sqrt[3]{r_ar_br_c}$.

10.58*. Пусть a, b, c и a', b', c' — длины сторон треугольников ABC и $A'B'C'$, S и S' — их площади. Докажите, что

$$a^2(-a'^2+b'^2+c'^2+b^2(a'^2-b'^2+c'^2)+c^2(a'^2+b'^2-c'^2) \geqslant 16SS',$$

причём равенство достигается тогда и только тогда, когда эти треугольники подобны (Пидо).

* * *

10.59*. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1, причём AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Докажите, что $S_{A_1B_1C_1}/S_{ABC} \leqslant 1/4$.

10.60*. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты произвольные точки A_1, B_1 и C_1. Пусть $a = S_{AB_1C_1}$, $b = S_{A_1BC_1}$, $c = S_{A_1B_1C}$ и $u = S_{A_1B_1C_1}$. Докажите, что $u^3 + (a+b+c)u^2 \geqslant 4abc$.

10.61*. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1. Докажите, что площадь одного из треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C не превосходит:

а) $S_{ABC}/4$;

б) $S_{A_1B_1C_1}$.

См. также задачи 9.35, 9.39, 9.42, 10.9, 20.1, 20.7.

§ 9. Против большей стороны лежит больший угол

10.62. Докажите, что $\angle ABC < \angle BAC$ тогда и только тогда, когда $AC < BC$, т. е. против большего угла треугольника лежит бóльшая сторона, а против большей стороны лежит больший угол.

10.63. Докажите, что в треугольнике угол A острый тогда и только тогда, когда $m_a > a/2$.

10.64*. Пусть $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — два выпуклых четырёхугольника с соответственно равными сторонами. Докажите, что если $\angle A > \angle A_1$, то $\angle B < \angle B_1$, $\angle C > \angle C_1$, $\angle D < \angle D_1$.

10.65*. В остроугольном треугольнике ABC наибольшая из высот AH равна медиане BM. Докажите, что $\angle B \leqslant 60^\circ$.

10.66*. Докажите, что выпуклый пятиугольник $ABCDE$ с равными сторонами, углы которого удовлетворяют неравенствам $\angle A \geqslant \angle B \geqslant \angle C \geqslant \geqslant \angle D \geqslant \angle E$, является правильным.

§ 10. Отрезок внутри треугольника меньше наибольшей стороны

10.67. а) Внутри треугольника ABC расположен отрезок MN. Докажите, что длина MN не превосходит наибольшей стороны треугольника.

б) Внутри выпуклого многоугольника расположен отрезок MN. Докажите, что длина MN не превосходит наибольшей стороны или наибольшей диагонали этого многоугольника.

10.68*. Внутри сектора AOB круга радиуса $R = AO = BO$ лежит отрезок MN. Докажите, что $MN \leqslant R$ или $MN \leqslant AB$. (Предполагается, что $\angle AOB < 180^\circ$.)

10.69*. В угол с вершиной A вписана окружность, касающаяся сторон угла в точках B и C. В области, ограниченной отрезками AB, AC и меньшей дугой BC, расположен отрезок. Докажите, что его длина не превышает AB.

10.70*. Внутри окружности расположен выпуклый пятиугольник. Докажите, что хотя бы одна из его сторон не больше стороны правильного пятиугольника, вписанного в эту окружность.

10.71*. Даны треугольник ABC со сторонами $a > b > c$ и произвольная точка O внутри его. Пусть прямые AO, BO, CO пересекают стороны треугольника в точках P, Q, R. Докажите, что $OP + OQ + OR < a$.

§ 11. Неравенства для прямоугольных треугольников

Во всех задачах этого параграфа ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом C.

10.72. Докажите, что $c^n > a^n + b^n$ при $n > 2$.

10.73. Докажите, что $a + b < c + h_c$.

10.74*. Докажите, что $0{,}4 < r/h < 0{,}5$, где h — высота, опущенная из вершины прямого угла.

10.75*. Докажите, что $c/r \geqslant 2(1 + \sqrt{2})$.

10.76*. Докажите, что $m_a^2 + m_b^2 > 29r^2$.

§ 12. Неравенства для остроугольных треугольников

10.77. Докажите, что для остроугольного треугольника

$$\frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} \leqslant 1 + \frac{R}{r}.$$

10.78. Докажите, что для остроугольного треугольника

$$\frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} \leqslant \sqrt{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

10.79. Докажите, что если треугольник не тупоугольный, то $m_a + m_b + m_c \geqslant 4R$.

10.80*. Докажите, что если в остроугольном треугольнике $h_a = l_b = m_c$, то этот треугольник равносторонний.

10.81*. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Докажите, что периметр треугольника $A_1B_1C_1$ не превосходит половины периметра треугольника ABC.

10.82*. Пусть $\angle A < \angle B < \angle C < 90^\circ$. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника ABC лежит внутри треугольника BOH, где O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот.

10.83*. Пусть h — наибольшая высота нетупоугольного треугольника. Докажите, что $r + R \leqslant h$.

10.84*. На сторонах BC, CA и AB остроугольного треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1. Докажите, что

$$2(B_1C_1 \cos\alpha + C_1A_1 \cos\beta + A_1B_1 \cos\gamma) \geqslant a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma.$$

* * *

10.85*. Докажите, что треугольник со сторонами a, b и c остроугольный тогда и только тогда, когда $a^2 + b^2 + c^2 > 8R^2$.

10.86*. Докажите, что треугольник остроугольный тогда и только тогда, когда $p > 2R + r$.

10.87*. Докажите, что треугольник ABC остроугольный тогда и только тогда, когда на его сторонах BC, CA и AB можно выбрать такие внутренние точки A_1, B_1 и C_1, что $AA_1 = BB_1 = CC_1$.

10.88*. Докажите, что треугольник ABC остроугольный тогда и только тогда, когда длины его проекций на три различных направления равны.

См. также задачи 9.98, 10.41, 10.46, 10.50, 10.65.

§ 13. Неравенства в треугольниках

10.89. Через точку O пересечения медиан треугольника ABC проведена прямая, пересекающая его стороны в точках M и N. Докажите, что $NO \leqslant 2MO$.

10.90. Докажите, что если треугольник ABC лежит внутри треугольника $A'B'C'$, то $r_{ABC} < r_{A'B'C'}$.

10.91. В треугольнике ABC сторона c наибольшая, а a наименьшая. Докажите, что $l_c \leqslant h_a$.

10.92. Медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC перпендикулярны. Докажите, что $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B \geqslant 2/3$.

10.93. Через вершину A равнобедренного треугольника ABC с основанием AC проведена окружность, касающаяся стороны BC в точке M и пересекающая сторону AB в точке N. Докажите, что $AN > CM$.

10.94*. В остроугольном треугольнике ABC биссектриса AD, медиана BM и высота CH пересекаются в одной точке. В каких пределах может изменяться величина угла A?

10.95*. В треугольнике ABC стороны равны a, b, c; соответственные углы (в радианах) равны α, β, γ. Докажите, что

$$\frac{\pi}{3} \leqslant \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a+b+c} < \frac{\pi}{2}.$$

10.96*. Внутри треугольника ABC взята точка O. Докажите, что $AO \sin BOC + BO \sin AOC + CO \sin AOB \leqslant p$.

10.97*. На продолжении наибольшей стороны AC треугольника ABC за точку C взята точка D так, что $CD = CB$. Докажите, что угол ABD не острый.

10.98*. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AK и CM. Докажите, что если $AB > BC$, то $AM > MK > KC$.

10.99*. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC взяты точки X, Y, Z так, что прямые AX, BY, CZ пересекаются в одной точке O. Докажите, что из отношений $OA : OX$, $OB : OY$, $OC : OZ$ по крайней мере одно не больше 2 и одно не меньше 2.

10.100*. Окружность S_1 касается сторон AC и AB треугольника ABC, окружность S_2 касается сторон BC и AB, кроме того, S_1 и S_2 касаются друг друга внешним образом. Докажите, что сумма радиусов этих окружностей больше радиуса вписанной окружности S.

См. также задачи 14.26, 17.16, 17.18.

Задачи для самостоятельного решения

10.101. Пусть a, b и c — длины сторон треугольника, $P = a + b + c$, $Q = ab + bc + ca$. Докажите, что $3Q \leqslant P^2 < 4Q$.

10.102. Докажите, что произведение любых двух сторон треугольника больше $4Rr$.

10.103. В треугольнике ABC проведена биссектриса AA_1. Докажите, что $A_1C < AC$.

10.104. Докажите, что если $a > b$ и $a + h_a \leqslant b + h_b$, то $\angle C = 90°$.

10.105. Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $ab + bc + ca \geqslant (AO + BO + CO)^2$.

10.106. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены равносторонние треугольники с центрами D, E и F. Докажите, что $S_{DEF} \geqslant S_{ABC}$.

10.107. На плоскости даны треугольники ABC и MNK, причём прямая MN проходит через середины сторон AB и AC, а в пересечении этих треугольников образуется шестиугольник площади S с попарно параллельными противоположными сторонами. Докажите, что $3S < S_{ABC} + S_{MNK}$.

Решения

10.1. Пусть медианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке M. Так как $BC > AC$, то точки A и C лежат по одну сторону от серединного перпендикуляра к отрезку AB, а значит, по ту же сторону лежат медиана CC_1 и её точка M. Следовательно, $AM < BM$, т. е. $m_a < m_b$.

10.2. Предположим, например, что $a > b$. Тогда $m_a < m_b$ (задача 10.1). А так как четырёхугольник A_1MB_1C описанный, то $\frac{a}{2} + \frac{m_b}{3} = \frac{b}{2} + \frac{m_a}{3}$, т. е. $(a-b)/2 = (m_a - m_b)/3$. Получено противоречие.

10.3. Пусть, например, $BC > AC$. Тогда $MA < MB$ (см. задачу 10.1), поэтому $BC + MB + MC > AC + MA + MC$.

10.4. а) Так как $c \leqslant a + b$, то $c^2 \leqslant (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leqslant 2(a^2 + b^2)$.

б) Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Согласно задаче а) $MA^2 + MB^2 \geqslant \frac{AB^2}{2}$, т. е. $\frac{4m_a^2}{9} + \frac{4m_b^2}{9} \geqslant \frac{c^2}{2}$.

10.5. а) Пусть M — точка пересечения медиан, O — центр описанной окружности треугольника ABC. Тогда $AO^2 + BO^2 + CO^2 = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MO})^2 + (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MO})^2 + (\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MO})^2 = AM^2 + BM^2 + CM^2 + 2(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{MO}) + 3MO^2$. Так как $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$ (задача 13.1 а), то $AO^2 + BO^2 + CO^2 = AM^2 + BM^2 + CM^2 + 3MO^2 \geqslant AM^2 + BM^2 + CM^2$, т. е. $3R^2 \geqslant 4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)/9$.

б) Достаточно заметить, что $(m_a + m_b + m_c)^2 \leqslant 3(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)$ (см. приложение к гл. 9).

10.6. Формулу Герона можно переписать в виде $16S^2 = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$. А так как $m_c^2 = (2a^2 + 2b^2 - c^2)/4$ (задача 12.11 а), то неравенства $m_c^2 \leqslant ((a^2 + b^2)/2c)^2$ и $m_c^2 > ((a^2 - b^2)/2c)^2$ эквивалентны неравенствам $16S^2 \leqslant 4a^2b^2$ и $16S^2 > 0$ соответственно.

10.7. Пусть $y = a^2 + b^2 + c^2$ и $y_1 = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$. Тогда $3y = 4y_1$ (задача 12.11 б), $y < 2x$ (задача 9.7) и $2x_1 + y_1 < 2x + y$, так как $(m_a + m_b + m_c)^2 < (a + b + c)^2$ (см. задачу 9.2). Сложив неравенство $8x_1 + 4y_1 < 8x + 4y$ с равенством $3y = 4y_1$, получим $8x_1 < y + 8x < 10x$, т. е. $x_1/x < 5/4$.

Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Достроим треугольник AMB до параллелограмма $AMBN$. Применив к треугольнику AMN доказанное утверждение, получим $(x/4)/(4x_1/9) < 5/4$, т. е. $x/x_1 < 20/9$.

10.8. Ясно, что $h_a \leqslant b$, $h_b \leqslant c$, $h_c \leqslant a$, причём по крайней мере одно их этих неравенств строгое. Поэтому $h_a + h_b + h_c < a + b + c$.

10.9. Пусть $h_a > 1$ и $h_b > 1$. Тогда $a \geqslant h_b > 1$. Поэтому $S = ah_a/2 > 1/2$.

10.10. По условию $BH \geqslant AC$, а так как перпендикуляр короче наклонной, то $BH \geqslant AC \geqslant AM$. Аналогично $AM \geqslant BC \geqslant BH$. Поэтому $BH = AM = AC = BC$.

Поскольку $AC = AM$, то отрезки AC и AM совпадают, т. е. $\angle C = 90^\circ$, а так как $AC = BC$, то углы треугольника ABC равны 45, 45, 90°.

10.11. Ясно, что $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} = \dfrac{a+b}{2S} = \dfrac{a+b}{(a+b+c)r}$ и $a + b + c < 2(a + b) < 2(a + b + c)$.

10.12. Так как $ah_a = 2S = r(a + b + c)$, то $h_a = r\left(1 + \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{a}\right)$. Сложив такие равенства для h_a, h_b и h_c и воспользовавшись неравенством $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geqslant 2$, получим требуемое.

10.13. Так как $h_a - h_b = 2S(1/a - 1/b) = 2S(b - a)/ab$ и $2S \leqslant ab$, то $h_a - h_b \leqslant \leqslant b - a$.

10.14. Согласно задаче 12.22 $\dfrac{2}{h_a} = \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c}$. Кроме того, $\dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c} \geqslant 2/\sqrt{r_b r_c}$.

10.15. Так как $2\sin\beta\sin\gamma = \cos(\beta - \gamma) - \cos(\beta + \gamma) \leqslant 1 + \cos\alpha$, то

$$\frac{h_a}{a} = \frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha} \leqslant \frac{1 + \cos\alpha}{2\sin\alpha} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

10.16. Так как $b/2R = \sin\beta$, то после домножения на $2p$ переходим к неравенству $(a + b + c)(h_a + h_b + h_c) \leqslant 3\sin\beta(a^2 + ac + c^2)$. Вычитая из обеих частей $6S$, получаем $a(h_b + h_c) + b(h_a + h_c) + c(h_a + h_b) \leqslant 3\sin\beta(a^2 + c^2)$. Так как, например, $ah_b = a^2\sin\gamma = a^2c/2R$, переходим к неравенству $a(b^2 + c^2) - 2b(a^2 + c^2) + + c(a^2 + b^2) \leqslant 0$. Для доказательства последнего неравенства рассмотрим квадратный трёхчлен $f(x) = x^2(a + c) - 2x(a^2 + c^2) + ac(a + c)$. Легко проверить, что $f(a) = -a(a - c)^2 \leqslant 0$ и $f(c) = -c(a - c)^2 \leqslant 0$. А так как коэффициент при x положителен и $a \leqslant b \leqslant c$, то $f(b) \leqslant 0$.

10.17. Согласно задаче 12.37 а) $l_a^2 = 4bcp(p - a)/(b + c)^2$. Кроме того, $4bc \leqslant \leqslant (b + c)^2$.

10.18. Ясно, что $h_a/l_a = \cos((\beta - \gamma)/2)$. Согласно задаче 12.38 а)

$$\frac{2r}{R} = 8\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = 4\sin\frac{\alpha}{2}\left[\cos\frac{\beta - \gamma}{2} - \cos\frac{\beta + \gamma}{2}\right] =$$
$$= 4x(q - x), \qquad \text{где} \quad x = \sin\frac{\alpha}{2} \quad \text{и} \quad q = \cos\frac{\beta - \gamma}{2}.$$

Остаётся заметить, что $4x(q - x) \leqslant q^2$.

10.19. а) Согласно задаче 10.17 $l_a^2 \leqslant p(p - a)$. Складывая три аналогичных неравенства, получаем требуемое.

б) Для любых чисел l_a, l_b и l_c справедливо неравенство $(l_a + l_b + l_c)^2 \leqslant \leqslant 3(l_a^2 + l_b^2 + l_c^2)$.

10.20. Согласно задаче 10.17

$$l_a l_b l_c \leqslant \sqrt{p^3(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

Далее, согласно формуле Герона $\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} = S = rp$.

10.21. Согласно задаче 10.17

$$l_a^2 l_b^2 + l_b^2 l_c^2 + l_a^2 l_c^2 \leqslant p^2\Big((p - a)(p - b) + (p - b)(p - c) + (p - a)(p - c)\Big) =$$
$$= p^2(3p^2 - 4p^2 + ab + bc + ac) = p^2(4Rr + r^2),$$

поскольку $ab + bc + ac = p^2 + 4Rr + r^2$ согласно задаче 12.32.

10.22. Достаточно доказать, что $\sqrt{p(p-a)}+\sqrt{p(p-b)}+m_c \leqslant \sqrt{3}p$. Можно считать, что $p=1$; пусть $x=1-a$ и $y=1-b$. Тогда $m_c^2=(2a^2+2b^2-c^2)/4=$ $=1-(x+y)+(x-y)^2/4=m(x, y)$. Рассмотрим функцию $f(x, y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+$ $+\sqrt{m(x, y)}$. Нужно доказать, что $f(x, y)\leqslant\sqrt{3}$ при $x, y\geqslant 0$ и $x+y\leqslant 1$. Пусть $g(x)=f(x, x)=2\sqrt{x}+\sqrt{1-2x}$. Так как $g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$, то при возрастании x от 0 до $1/3$ $g(x)$ возрастает от 1 до $\sqrt{3}$, а при возрастании x от $1/3$ до $1/2$ $g(x)$ убывает от $\sqrt{3}$ до $\sqrt{2}$. Введём новые переменные $d=x-y$ и $q=\sqrt{x}+\sqrt{y}$. Легко проверить, что $(x-y)^2-2q^2(x+y)+q^4=0$, т. е. $x+y=$ $=(d^2+q^4)/2q^2$. Поэтому

$$f(x, y)=q+\sqrt{1-\frac{q^2}{2}-\frac{d^2(2-q^2)}{4q^2}}.$$

Заметим теперь, что $q^2=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2\leqslant 2(x+y)\leqslant 2$, т. е. $d^2(2-q^2)/4q^2\geqslant 0$. Следовательно, при фиксированном q значение функции $f(x, y)$ максимально, если $d=0$, т. е. $x=y$; случай $x=y$ разобран выше.

10.23. Ясно, что $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=(h_a+h_b+h_c)/2S$. Кроме того, $9r\leqslant h_a+h_b+h_c$ (задача 10.12) и $h_a+h_b+h_c\leqslant m_a+m_b+m_c\leqslant 9R/2$ (задача 10.5 б).

10.24. Докажем сначала, что $b+c-a<2bc/a$. Пусть $2x=b+c-a$, $2y=a+c-b$ и $2z=a+b-c$. Требуется доказать, что $2x<2(x+y)(x+z)/(y+z)$, т. е. $xy+xz<xy+xz+x^2+yz$. Последнее неравенство очевидно.

Так как $2bc\cos\alpha=b^2+c^2-a^2=(b+c-a)(b+c+a)-2bc$, то

$$\frac{2bc\cos\alpha}{b+c}=b+c-a+\left[\frac{(b+c-a)a}{b+c}-\frac{2bc}{b+c}\right].$$

Выражение в квадратных скобках отрицательно, так как $b+c-a<2bc/a$.

10.25. Согласно задаче 12.32 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac)=$ $=4p^2-2r^2-2p^2-8rR=2p^2-2r^2-8Rr$ и $abc=4prR$. Таким образом, нужно доказать неравенство $2p^2-2r^2-8rR<2(1-4prR)$, где $p=1$. Это неравенство очевидно.

10.26. Согласно задаче 12.32 $ab+bc+ca=r^2+p^2+4Rr$. Кроме того, $16Rr-5r^2\leqslant p^2\leqslant 4R^2+4Rr+3r^2$ (задача 10.36).

10.27. Пусть $\varphi=\alpha/2$, $\psi=\beta/2$. Так как $r(\operatorname{ctg}\varphi+\operatorname{ctg}\psi)=c=r_c(\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}\psi)$, то

$$c^2=rr_c\left(2+\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\psi}+\frac{\operatorname{tg}\psi}{\operatorname{tg}\varphi}\right)\geqslant 4rr_c.$$

10.28. Достаточно воспользоваться результатами задач 12.38 а) и 10.47. Заметим также, что $x(1-x)\leqslant 1/4$, поэтому $r/R\leqslant 1/2$.

10.29. Так как $h_c\leqslant a$ и $h_c\leqslant b$, то $4S=2ch_c\leqslant c(a+b)$. Поэтому $6r(a+b+c)=$ $=12S\leqslant 4ab+4S\leqslant(a+b)^2+c(a+b)=(a+b)(a+b+c)$.

10.30. Так как $\dfrac{2}{h_a}=\dfrac{1}{r_b}+\dfrac{1}{r_c}$ (задача 12.22), то $\dfrac{r_a}{h_a}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{r_a}{r_b}+\dfrac{r_a}{r_c}\right)$. Запишем аналогичные равенства для r_b/h_b и r_c/h_c и сложим их. Учитывая, что $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\geqslant 2$, получаем требуемое.

10.31. Так как $Rr=RS/p=abc/4p$ (см. задачу 12.1), то неравенство $27Rr\leqslant 2p^2$ следует из неравенства $27abc\leqslant 8p^3=(a+b+c)^3$.

Так как $(a+b+c)^2 \leqslant 3(a^2+b^2+c^2)$ для любых чисел a, b и c, то $p^2 \leqslant \leqslant 3(a^2+b^2+c^2)/4 = m_a^2+m_b^2+m_c^2$ (см. задачу 12.11 б). Остаётся заметить, что $m_a^2+m_b^2+m_c^2 \leqslant 27R^2/4$ (задача 10.5 а).

10.32. Так как $OA = r/\sin(A/2)$, $OB = r/\sin(B/2)$ и $OC = r/\sin(C/2)$, а углы $\angle A/2$, $\angle B/2$ и $\angle C/2$ острые, то $\angle A \leqslant \angle B \leqslant \angle C$. Следовательно, $\angle A \leqslant 60^\circ$ и $\angle B \leqslant 90^\circ$, а значит, $\sin(A/2) \leqslant 1/2$ и $\sin(B/2) \leqslant 1/\sqrt{2}$.

10.33. Если $\angle C \geqslant 120^\circ$, то сумма расстояний от любой точки внутри треугольника до его вершин не меньше $a+b$ (задача 11.21); кроме того, $a+b \geqslant 6r$ (задача 10.29).

Если все углы треугольника меньше 120°, то в точке минимума суммы расстояний до вершин треугольника квадрат этой суммы равен $(a^2+b^2+c^2)/2 + 2\sqrt{3}S$ (задача 18.22). Далее, $(a^2+b^2+c^2)/2 \geqslant 2\sqrt{3}S$ (задача 10.55 б) и $4\sqrt{3}S \geqslant 36r^2$ (задача 10.55 а).

10.34. Пусть $\alpha = \cos(A/2)$, $\beta = \cos(B/2)$ и $\gamma = \cos(C/2)$. Согласно задаче 12.18 б) $a/r_a = \alpha/\beta\gamma$, $b/r_b = \beta/\gamma\alpha$ и $c/r_c = \gamma/\alpha\beta$. Поэтому после домножения на $\alpha\beta\gamma$ требуемое неравенство перепишется в виде $3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \geqslant \geqslant 4(\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2)$. Так как $\alpha^2 = (1+\cos A)/2$, $\beta^2 = (1+\cos B)/2$ и $\gamma^2 = (1+\cos C)/2$, то переходим к неравенству $\cos A + \cos B + \cos C + 2(\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A) \leqslant 3$. Остаётся воспользоваться результатами задач 10.38 и 10.45.

10.35. а) Сложив равенство $4R+r = r_a+r_b+r_c$ (задача 12.25) с неравенством $R-2r \geqslant 0$ (задача 10.28) и воспользовавшись соотношением $r_a(p-a) = pr$, получим

$$5R - r \geqslant r_a + r_b + r_c = pr\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}\right). \qquad (1)$$

Учитывая, что

$$\frac{r}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{S}{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{S},$$

выражение в правой части формулы (1) можно заменить на

$$p(ab+bc+ca-p^2)/S = p(2(ab+bc+ca) - a^2 - b^2 - c^2)/4S.$$

Остаётся заметить, что $2(ab+bc+ac) - a^2 - b^2 - c^2 \geqslant 4\sqrt{3}S$ (задача 10.56).

б) Легко проверить, что $4R - r_a = r_b + r_c - r = pr/(p-b) + pr/(p-c) - pr/p = (p-a)(p^2-bc)/S$. Остаётся заметить, что $4(p^2-bc) = a^2+b^2+c^2+2(ab-bc+ca) = 2(ab+bc+ac) - a^2 - b^2 - c^2 + 2(a^2+b^2+c^2-2bc) \geqslant 4\sqrt{3}S + 2(a^2+(b-c)^2)$.

10.36. Пусть a, b и c — длины сторон треугольника, $F = (a-b)(b-c)(c-a) = A - B$, где $A = ab^2+bc^2+ca^2$ и $B = a^2b+b^2c+c^2a$. Докажем, что требуемые неравенства можно получить, преобразовав очевидное неравенство $F^2 \geqslant 0$. Пусть $\varsigma_1 = a+b+c = 2p$, $\varsigma_2 = ab+bc+ca = r^2+p^2+4rR$ и $\varsigma_3 = abc = 4prR$ (см. задачу 12.32). Можно проверить, что $F^2 = \varsigma_1^2\varsigma_2^2 - 4\varsigma_2^3 - 4\varsigma_1^3\varsigma_3 + 18\varsigma_1\varsigma_2\varsigma_3 - 27\varsigma_3^2$. В самом деле, $(\varsigma_1\varsigma_2)^2 - F^2 = (A+B+3abc)^2 - (A-B)^2 = 4AB + 6(A+B)\varsigma_3 + 9\varsigma_3^2 = 4(a^3b^3+\ldots) + 4(a^4bc+\ldots) + 6(A+B)\varsigma_3 + 21\varsigma_3^2$. Ясно также, что $4\varsigma_2^3 = 4(a^3b^3+\ldots) + 12(A+B)\varsigma_3 + 24\varsigma_3^2$, $4\varsigma_1^3\varsigma_3 = 4(a^4bc+\ldots) + 12(A+B)\varsigma_3 + 24\varsigma_3^2$ и $18\varsigma_1\varsigma_2\varsigma_3 = 18(A+B)\varsigma_3 + 54\varsigma_3^2$.

Выразив ς_1, ς_2 и ς_3 через p, r и R, получим

$$F^2 = -4r^2[(p^2 - 2R^2 - 10Rr + r^2)^2 - 4R(R-2r)^3] \geqslant 0.$$

Следовательно, получаем

$$p^2 \geqslant 2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)} = \\ = \left[(R-2r) - \sqrt{R(R-2r)}\right]^2 + 16Rr - 5r^2 \geqslant 16Rr - 5r^2$$

и

$$p^2 \leqslant 2R^2 + 10Rr + r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)} = \\ = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - \left[(R-2r) - \sqrt{R(R-2r)}\right]^2 \leqslant 4R^2 + 4Rr + 3r^2.$$

10.37. Так как $r_a + r_b + r_c = 4R + r$ и $r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = p^2$ (задачи 12.25 и 12.26), то $r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = (4R+r)^2 - 2p^2$. Согласно задаче 10.36 $p^2 \leqslant 4R^2 + 4Rr + 3r^2$, поэтому $r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 \geqslant 8R^2 - 5r^2$. Остаётся заметить, что $r \leqslant R/2$ (задача 10.28).

10.38. а) Согласно задаче 12.40 $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = (R+r)/R$. Кроме того, $r \leqslant R/2$ (задача 10.28).

б) Следует из а) (см. замечание).

10.39. а) Ясно, что $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = p/R$. Кроме того, $p \leqslant 3\sqrt{3}R/2$ (задача 10.31).

б) Следует из а) (см. замечание).

10.40. а) Согласно задаче 12.46 а) $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = (a^2 + b^2 + c^2)/4S$. Кроме того, $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}S$ (задача 10.55 б).

б) Следует из а) (см. замечание).

10.41. а) Согласно задаче 12.47 а) $\operatorname{ctg}(\alpha/2) + \operatorname{ctg}(\beta/2) + \operatorname{ctg}(\gamma/2) = p/r$. Кроме того, $p \geqslant 3\sqrt{3}r$ (задача 10.55 а).

б) Следует из а) (см. замечание). Для тупоугольного треугольника $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma < 0$; см., например, задачу 12.48.

10.42. а) Согласно задаче 12.38 а) $\sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)\sin(\gamma/2) = r/4R$. Кроме того, $r \leqslant R/2$ (задача 10.28).

б) Для остроугольного треугольника следует из а) (см. замечание). Для тупоугольного треугольника $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma < 0$.

10.43. а) Так как $\sin x = 2\sin(x/2)\cos(x/2)$, то, используя результаты задач 12.38 а) и в), получаем $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = pr/2R^2$. Кроме того, $p \leqslant 3\sqrt{3}R/2$ (задача 10.31) и $r \leqslant R/2$ (задача 10.28).

б) Следует из а) (см. замечание).

10.44. Согласно задаче 12.41 б) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$. Остаётся заметить, что $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leqslant 1/8$ (задача 10.42 б), а для тупоугольного треугольника $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma < 0$.

10.45. Ясно, что $2(\cos\alpha\cos\beta + \cos\beta\cos\gamma + \cos\gamma\cos\alpha) = (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)^2 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma$. Остаётся заметить, что $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant 3/2$ (задача 10.38 а) и $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \geqslant 3/4$ (задача 10.44 а).

10.46. Согласно задаче 12.42

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \frac{2S}{R^2} = \frac{2pr}{R^2}.$$

Ясно также, что

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\beta+\gamma) + \sin(\gamma+\alpha) = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \frac{p}{R}.$$

Таким образом, требуемое неравенство эквивалентно неравенству $\frac{2pr}{R^2} \leqslant \frac{p}{R}$, т. е. $2r \leqslant R$. Это неравенство доказано в решении задачи 10.28.

10.47. Ясно, что $2\sin(\beta/2)\sin(\gamma/2) = \cos((\beta-\gamma)/2) - \cos((\beta+\gamma)/2) \leqslant 1 - \sin(\alpha/2)$.

10.48. Опустим из вершин A и B перпендикуляры AA_1 и BB_1 на биссектрису угла ACB. Тогда $AB \geqslant AA_1 + BB_1 = b\sin(\gamma/2) + a\sin(\gamma/2)$.

10.49. Согласно задаче 12.34 $\operatorname{tg}(\alpha/2)\operatorname{tg}(\beta/2) = (a+b-c)/(a+b+c)$. А так как $a+b<3c$, то $a+b-c<(a+b+c)/2$.

10.50. Так как $\pi-2\alpha>0$, $\pi-2\beta>0$, $\pi-2\gamma>0$ и $(\pi-2\alpha)+(\pi-2\beta)+(\pi-2\gamma) = \pi$, существует треугольник с углами $\pi-2\alpha$, $\pi-2\beta$, $\pi-2\gamma$. Длины сторон, противолежащих углам $\pi-2\alpha$, $\pi-2\beta$, $\pi-2\gamma$, пропорциональны числам $\sin(\pi-2\alpha) = \sin 2\alpha$, $\sin 2\beta$, $\sin 2\gamma$. Поскольку $\pi-2\alpha > \pi-2\beta > \pi-2\gamma$ и против большего угла лежит бóльшая сторона, то $\sin 2\alpha > \sin 2\beta > \sin 2\gamma$.

10.51. Заметим сначала, что $\cos 2\gamma - \cos 2(\pi-\alpha-\beta) = \cos 2\alpha\cos 2\beta - \sin 2\alpha\sin 2\beta$. Поэтому $\cos 2\alpha + \cos 2\beta - \cos 2\gamma = \cos 2\alpha + \cos 2\beta - \cos 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\alpha\sin 2\beta$. Так как $a\cos\varphi + b\sin\varphi \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$ (см. приложение к гл. 9), то $(1-\cos 2\beta)\cos 2\alpha + \sin 2\beta\sin 2\alpha + \cos 2\beta \leqslant \sqrt{(1-\cos 2\beta)^2 + \sin^2 2\beta} + \cos 2\beta = 2|\sin\beta| + 1 - 2\sin^2\beta$. Остаётся заметить, что наибольшее значение квадратного трёхчлена $2t+1-2t^2$ достигается в точке $t=1/2$ и равно $3/2$. Максимальное значение соответствует углам $\alpha=\beta=30^\circ$, $\gamma=120^\circ$.

10.52. Так как $AB<CB$, $AX<CX$ и $S_{ABX} = S_{BCX}$, то $\sin XAB > \sin XCB$. Учитывая, что угол XCB острый, получаем требуемое.

10.53. Если углы треугольника ABC равны α, β и γ, то углы треугольника $A_1B_1C_1$ равны $(\beta+\gamma)/2$, $(\gamma+\alpha)/2$ и $(\alpha+\beta)/2$.

10.54. Пусть M — точка пересечения медиан AA_1, BB_1 и CC_1. Достроив треугольник AMB до параллелограмма $AMBN$, получим $\angle BMC_1 = \alpha_m$ и $\angle AMC_1 = \beta_m$. Легко проверить, что $\angle C_1CB < \gamma/2$ и $\angle B_1BC < \beta/2$. Следовательно, $\alpha_m = \angle C_1CB + \angle B_1BC < (\beta+\gamma)/2 < \beta$. Аналогично $\gamma_m = \angle A_1AB + \angle B_1BA > (\alpha+\beta)/2 > \beta$.

Предположим сначала, что треугольник ABC остроугольный. Тогда точка H пересечения высот лежит внутри треугольника AMC_1. Следовательно, $\angle AMB < \angle AHB$, т. е. $\pi-\gamma_m < \pi-\gamma$, и $\angle CMB > \angle CHB$, т. е. $\pi-\alpha_m < \pi-\alpha$. Предположим теперь, что угол α тупой. Тогда угол CC_1B тоже тупой, а значит, угол α_m острый, т. е. $\alpha_m < \alpha$. Опустим из точки M перпендикуляр MX на BC. Тогда $\gamma_m > \angle XMB > 180^\circ - \angle HAB > \gamma$.

Так как $\alpha > \alpha_m$, то $\alpha + (\pi-\alpha_m) > \pi$, т. е. точка M лежит внутри описанной окружности треугольника AB_1C_1. Следовательно, $\gamma = \angle AB_1C_1 < \angle AMC_1 = \beta_m$. Аналогично $\alpha = \angle CB_1A_1 > \angle CMA_1 = \beta_m$, так как $\gamma + (\pi-\gamma_m) < \pi$.

10.55. а) Ясно, что $S^2/p = (p-a)(p-b)(p-c) \leqslant ((p-a+p-b+p-c)/3)^3 = p^3/27$. Поэтому $pr = S \leqslant p^2/3\sqrt{3}$, т. е. $r \leqslant p/3\sqrt{3}$. Домножив последнее неравенство на r, получим требуемое.

б) Так как $(a+b+c)^2 \leqslant 3(a^2+b^2+c^2)$, то $S \leqslant p^2/3\sqrt{3} = (a+b+c)^2/12\sqrt{3} \leqslant (a^2+b^2+c^2)/4\sqrt{3}$.

10.56. Пусть $x=p-a$, $y=p-b$, $z=p-c$. Тогда $(a^2-(b-c)^2)+(b^2-(a-c)^2)+(c^2-(a-b)^2) = 4(p-b)(p-c)+4(p-a)(p-c)+4(p-a)(p-b) = 4(yz+zx+xy)$ и

$$4\sqrt{3}S = 4\sqrt{3p(p-a)(p-b)(p-c)} = 4\sqrt{3(x+y+z)xyz}.$$

Итак, нужно доказать неравенство $xy+yz+zx \geqslant \sqrt{3(x+y+z)xyz}$. После возведения в квадрат и сокращения получаем

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \geqslant x^2yz+y^2xz+z^2xy.$$

Складывая неравенства $x^2yz \leqslant x^2(y^2+z^2)/2$, $y^2xz \leqslant y^2(x^2+z^2)/2$ и $z^2xy \leqslant \leqslant z^2(x^2+y^2)/2$, получаем требуемое.

10.57. а) Перемножив три равенства вида $S=(ab\sin\gamma)/2$, получим $S^3=((abc)^2\sin\gamma\sin\beta\sin\alpha)/8$. Остаётся воспользоваться результатом задачи 10.43.

б) Так как $(h_ah_bh_c)^2=(2S)^6/(abc)^2$ и $(abc)^2 \geqslant (4/\sqrt{3})^3S^3$, то $(h_ah_bh_c)^2 \leqslant \leqslant (2S)^6(\sqrt{3}/4)^3/S^3=(\sqrt{3}S)^3$.

Так как $(r_ar_br_c)^2=S^4/r^2$ (задача 12.19 в) и $r^2(\sqrt{3})^3 \leqslant S$ (задача 10.55 а), то $(r_ar_br_c)^2 \geqslant (\sqrt{3}S)^3$.

10.58. Построим на стороне BC треугольника ABC внутренним образом треугольник $A''BC$, подобный треугольнику $A'B'C'$. При этом $A''A=0$ тогда и только тогда, когда треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны. По теореме косинусов

$$\begin{aligned}A''A^2&=AC^2+A''C^2-2AC\cdot A''C\cos(C-C')=\\&=b^2+\left(\frac{b'a}{a'}\right)^2-2\frac{bb'a}{a'}\cos(C-C').\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}{a'}^2A''A^2&=b^2{a'}^2+a^2{b'}^2-2aa'bb'\cos C\cos C'-2aa'bb'\sin C\sin C'=\\&=b^2{a'}^2+a^2{b'}^2-2aa'bb'\cos C\cos C'-8SS'.\end{aligned}$$

Следовательно, $b^2{a'}^2+a^2{b'}^2-2aa'bb'\cos C\cos C' \geqslant 8SS'$, т. е.

$$b^2{a'}^2+a^2{b'}^2-\frac{(b^2+a^2-c^2)({b'}^2+{a'}^2-{c'}^2)}{2} \geqslant 8SS'.$$

Это неравенство легко приводится к требуемому виду.

10.59. Пусть $p=BA_1/BC$, $q=CB_1/CA$ и $r=AC_1/AC$. Тогда $S_{A_1B_1C_1}/S_{ABC}= =1-p(1-r)-q(1-p)-r(1-q)=1-(p+q+r)+(pq+qr+rp)$. По теореме Чевы (задача 5.85) $pqr=(1-p)(1-q)(1-r)$, т. е. $2pqr=1-(p+q+r)+ +(pq+qr+rp)$; кроме того, $(pqr)^2=p(1-p)q(1-q)r(1-r) \leqslant (1/4)^3$. Следовательно, $\dfrac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}}=2pqr \leqslant \dfrac{1}{4}$.

10.60. Можно считать, что площадь треугольника ABC равна 1. Тогда $a+b+c=1-u$, поэтому данное неравенство перепишется в виде $u^2 \geqslant 4abc$. Пусть $x=BA_1/BC$, $y=CB_1/CA$ и $z=AC_1/AB$. Тогда $u=1-(x+y+z)+xy+yz+zx$ и $abc=xyz(1-x)(1-y)(1-z)=v(u-v)$, где $v=xyz$. Поэтому мы переходим к неравенству $u^2 \geqslant 4v(u-v)$, т. е. $(u-2v)^2 \geqslant 0$. Последнее неравенство очевидно.

10.61. а) Пусть $x=BA_1/BC$, $y=CB_1/CA$ и $z=AC_1/AB$. Можно считать, что площадь треугольника ABC равна 1. Тогда $S_{AB_1C_1}=z(1-y)$, $S_{A_1BC_1}=x(1-z)$ и $S_{A_1B_1C}=y(1-x)$. Так как $x(1-x) \leqslant 1/4$, $y(1-y) \leqslant 1/4$ и $z(1-z) \leqslant 1/4$, то произведение чисел $S_{AB_1C_1}$, $S_{A_1BC_1}$ и $S_{A_1B_1C}$ не превосходит $(1/4)^3$, а значит, одно из них не превосходит $1/4$.

б) Пусть для определённости $x \geqslant 1/2$. Если $y \leqslant 1/2$, то при гомотетии с центром C и коэффициентом 2 точки A_1 и B_1 переходят во внутренние точки сторон BC и AC, а значит, $S_{A_1B_1C} \leqslant S_{A_1B_1C_1}$. Поэтому можно считать, что $y \geqslant 1/2$ и аналогично $z \geqslant 1/2$. Пусть $x = (1+\alpha)/2$, $y = (1+\beta)/2$ и $z = (1+\gamma)/2$. Тогда $S_{AB_1C_1} = (1+\gamma-\beta-\beta\gamma)/4$, $S_{A_1BC_1} = (1+\alpha-\gamma-\alpha\gamma)/4$ и $S_{A_1B_1C} = (1+\beta-\alpha-\alpha\beta)/4$, а значит, $S_{A_1B_1C_1} = (1+\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)/4 \geqslant 1/4$ и $S_{AB_1C_1} + S_{A_1BC_1} + S_{A_1B_1C} \leqslant 3/4$.

10.62. Достаточно доказать, что если $AC < BC$, то $\angle ABC < \angle BAC$. Так как $AC < BC$, то на стороне BC можно выбрать точку A_1 так, что $A_1C = AC$. Тогда $\angle BAC > \angle A_1AC = \angle AA_1C > \angle ABC$.

10.63. Пусть A_1 — середина стороны BC. Если $AA_1 < BC/2 = BA_1 = A_1C$, то $\angle BAA_1 > \angle ABA_1$ и $\angle CAA_1 > \angle ACA_1$, поэтому $\angle A = \angle BAA_1 + \angle CAA_1 > \angle B + \angle C$, т. е. $\angle A > 90^\circ$. Аналогично, если $AA_1 > BC/2$, то $\angle A < 90^\circ$.

10.64. Если мы фиксируем две стороны треугольника, то чем больше будет угол между ними, тем больше будет третья сторона. Поэтому из неравенства $\angle A > \angle A_1$ следует, что $BD > B_1D_1$, т. е. $\angle C > \angle C_1$. Предположим теперь, что $\angle B \geqslant \angle B_1$. Тогда $AC \geqslant A_1C_1$, т. е. $\angle D > \angle D_1$. Поэтому $360^\circ = \angle A + \angle B + \angle C + \angle D > \angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1 + \angle D_1 = 360^\circ$. Получено противоречие; следовательно, $\angle B < \angle B_1$ и $\angle D < \angle D_1$.

10.65. Пусть точка B_1 симметрична B относительно точки M. Так как высота, опущенная из точки M на сторону BC, равна половине AH, т. е. половине BM, то $\angle MBC = 30^\circ$. Поскольку AH — наибольшая из высот, BC — наименьшая из сторон. Поэтому $AB_1 = BC \leqslant AB$, т. е. $\angle ABB_1 \leqslant \angle AB_1B = \angle MBC = 30^\circ$. Следовательно, $\angle ABC = \angle ABB_1 + \angle MBC \leqslant 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$.

10.66. Предположим сначала, что $\angle A > \angle D$. Тогда $BE > EC$ и $\angle EBA < \angle ECD$. Так как в треугольнике EBC сторона BE больше стороны EC, то $\angle EBC < \angle ECB$. Поэтому $\angle B = \angle ABE + \angle EBC < \angle ECD + \angle ECB = \angle C$, что противоречит условию задачи. Значит, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$. Аналогично предположение $\angle B > \angle E$ приводит к неравенству $\angle C < \angle D$. Поэтому $\angle B = \angle C = \angle D = \angle E$.

10.67. Будем проводить доказательство сразу для общего случая. Пусть прямая MN пересекает стороны многоугольника в точках M_1 и N_1. Ясно, что $MN \leqslant M_1N_1$. Пусть точка M_1 лежит на стороне AB, а точка N_1 — на PQ. Так как $\angle AM_1N_1 + \angle BM_1N_1 = 180^\circ$, то один из этих углов не меньше 90°. Пусть для определённости $\angle AM_1N_1 \geqslant 90^\circ$. Тогда $AN_1 \geqslant M_1N_1$, так как против большего угла лежит бóльшая сторона. Аналогично доказывается, что либо $AN_1 \leqslant AP$, либо $AN_1 \leqslant AQ$. Следовательно, длина отрезка MN не превосходит длины отрезка с концами в вершинах многоугольника.

10.68. Отрезок можно продолжить до пересечения с границей сектора, так как при этом его длина только увеличится. Поэтому можно считать, что точки M и N лежат на границе сектора. Возможны три случая.

1. Точки M и N лежат на дуге окружности. Тогда $MN = 2R\sin(MON/2) \leqslant 2R\sin(AOB/2) = AB$, так как $\angle MON/2 \leqslant \angle AOB/2 \leqslant 90^\circ$.

2. Точки M и N лежат на отрезках AO и BO. Тогда MN не превосходит наибольшей стороны треугольника AOB.

3. Одна из точек M и N лежит на дуге окружности, а другая — на отрезке AO или BO. Пусть для определённости M лежит на AO, а N — на дуге окружности. Тогда MN не превосходит наибольшей стороны треугольника ANO. Остаётся заметить, что $AO = NO = R$ и $AN \leqslant AB$.

10.69. Если данный отрезок не имеет общих точек с окружностью, то с помощью гомотетии с центром A (и коэффициентом больше 1) его можно перевести в отрезок, имеющий общую точку X с дугой BC и лежащий в нашей области. Проведём через точку X касательную DE к окружности (точки D и E лежат на отрезках AB и AC). Тогда отрезки AD и AE меньше AB и $DE < (DE + AD + AE)/2 = AB$, т. е. все стороны треугольника ADE меньше AB. Так как наш отрезок лежит внутри треугольника ADE (или на его стороне DE), его длина не превосходит AB.

10.70. Предположим сначала, что центр O окружности лежит внутри данного пятиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5$. Рассмотрим углы A_1OA_2, A_2OA_3, ..., A_5OA_1. В сумме эти пять углов дают 2π, поэтому один из них, например A_1OA_2, не превосходит $2\pi/5$. Тогда отрезок A_1A_2 можно поместить в сектор OBC, где $\angle BOC = 2\pi/5$ и точки B и C расположены на окружности. В треугольнике OBC наибольшей стороной является BC, поэтому $A_1A_2 \leqslant BC$.

Если точка O не принадлежит данному пятиугольнику, то углы A_1OA_2, ..., A_5OA_1 дают в объединении угол меньше π, причём каждая точка этого угла покрыта ими дважды. Поэтому в сумме эти пять углов дают меньше 2π, т. е. один из них меньше $2\pi/5$. Дальнейшее доказательство аналогично предыдущему случаю.

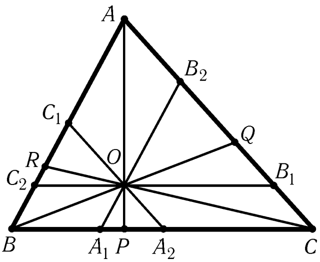


Рис. 10.1

Если точка O лежит на стороне пятиугольника, то один из рассматриваемых углов не больше $\pi/4$, а если она является его вершиной, то один из них не больше $\pi/3$. Ясно, что $\pi/4 < \pi/3 < 2\pi/5$.

10.71. Возьмём на сторонах BC, CA, AB точки A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2 так, что $B_1C_2 \parallel BC$, $C_1A_2 \parallel CA$, $A_1B_2 \parallel AB$ (рис. 10.1). В треугольниках A_1A_2O, B_1B_2O, C_1C_2O наибольшими сторонами являются A_1A_2, B_1O, C_2O соответственно. Поэтому $OP < A_1A_2$, $OQ < B_1O$, $OR < C_2O$, т. е. $OP + OQ + OR < A_1A_2 + B_1O + C_2O = A_1A_2 + CA_2 + BA_1 = BC$.

10.72. Так как $c^2 = a^2 + b^2$, то $c^n = (a^2 + b^2)c^{n-2} = a^2c^{n-2} + b^2c^{n-2} > a^n + b^n$.

10.73. Высота любого треугольника больше $2r$. Кроме того, в прямоугольном треугольнике $2r = a + b - c$ (задача 5.18).

10.74. Так как $ch = 2S = r(a + b + c)$ и $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, то $\dfrac{r}{h} = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{1}{x+1}$, где $x = \dfrac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{1 + \dfrac{2ab}{a^2+b^2}}$. Так как $0 < 2ab/(a^2+b^2) \leqslant 1$, то $1 < x \leqslant \sqrt{2}$. Следовательно, $2/5 < 1/(1+\sqrt{2}) \leqslant r/h < 1/2$.

10.75. Ясно, что $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$ и $c^2 = a^2 + b^2 \geqslant 2ab$. Поэтому

$$\frac{c^2}{r^2} = \frac{(a+b+c)^2c^2}{a^2b^2} \geqslant \frac{(2\sqrt{ab} + \sqrt{2ab})^2 \cdot 2ab}{a^2b^2} = 4(1+\sqrt{2})^2.$$

10.76. Согласно задаче 12.11 а) $m_a^2 + m_b^2 = (4c^2 + a^2 + b^2)/4 = 5c^2/4$. Кроме того, $5c^2/4 \geqslant 5(1+\sqrt{2})^2r^2 = (15 + 10\sqrt{2})r^2 > 29r^2$ (см. задачу 10.75).

10.77. Пусть O — центр описанной окружности, A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, CA, AB соответственно. Тогда $m_a = AA_1 \leqslant AO + OA_1 = R + OA_1$. Аналогично $m_b \leqslant R + OB_1$ и $m_c \leqslant R + OC_1$. Следовательно,

$$\frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} \leqslant R\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) + \frac{OA_1}{h_a} + \frac{OB_1}{h_b} + \frac{OC_1}{h_c}.$$

Остаётся воспользоваться результатом задачи 12.23 и решением задачи 4.47.

10.78. Согласно задаче 4.48 $\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{2\cos(\alpha/2)}{l_a} \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{l_a}$. Складывая три аналогичных неравенства, получаем требуемое.

10.79. Обозначим точку пересечения медиан через M, а центр описанной окружности через O. Если треугольник ABC не тупоугольный, то точка O лежит внутри его (или на его стороне); для определённости будем считать, что она лежит внутри треугольника AMB. Тогда $AO + BO \leqslant AM + BM$, т. е. $2R \leqslant 2m_a/3 + 2m_b/3$ или $m_a + m_b \geqslant 3R$. Остаётся заметить, что так как угол COC_1 (C_1 — середина AB) тупой, то $CC_1 \geqslant CO$, т. е. $m_c \geqslant R$.

Равенство достигается только для вырожденного треугольника.

10.80. В любом треугольнике $h_b \leqslant l_b \leqslant m_b$ (см. задачу 2.70), поэтому $h_a = l_b \geqslant h_b$ и $m_c = l_b \leqslant m_b$. Следовательно, $a \leqslant b$ и $b \leqslant c$ (см. задачу 10.1), т. е. c — наибольшая сторона, а γ — наибольший угол.

Из равенства $h_a = m_c$ следует, что $\gamma \leqslant 60^\circ$ (см. задачу 10.65). Так как наибольший угол γ треугольника ABC не превосходит 60°, все углы треугольника равны 60°.

10.81. Согласно задаче 1.60 отношение периметров треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC равно r/R. Кроме того, $r \leqslant R/2$ (задача 10.28).

З а м е ч а н и е. Используя результаты задач 12.74 и 2.20, легко проверить, что $S_{A_1B_1C_1}/S_{ABC} = r_1/2R_1 \leqslant 1/4$.

10.82. Пусть AA_1 и BB_1 — биссектрисы треугольников OAH и OBH. Согласно задаче 2.1 они являются биссектрисами углов A и B, т. е. центр вписанной окружности — точка пересечения прямых AA_1 и BB_1. Из неравенства $AC > BC$ следует, что $AH > BH$. Поэтому

$$A_1H/A_1O = AH/AO > BH/BO = B_1H/B_1O,$$

т. е. точки на прямой OH расположены в таком порядке: O, A_1, B_1, H. Точка O лежит внутри треугольника ABH, поэтому точка пересечения прямых AA_1 и BB_1 лежит внутри треугольника BOH.

10.83. Пусть $90^\circ \geqslant \alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$. Тогда CH — наибольшая высота. Центры вписанной и описанной окружностей обозначим через I и O, точки касания вписанной окружности со сторонами BC, CA, AB — через K, L, M соответственно (рис. 10.2).

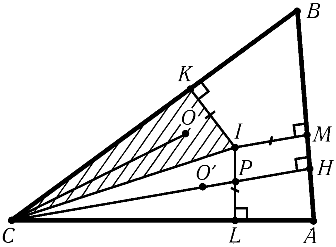


Рис. 10.2

Докажем сначала, что точка O лежит внутри треугольника KCI. Для этого достаточно доказать, что $CK \geqslant KB$ и $\angle BCO \leqslant BCI$. Ясно, что $CK = r\operatorname{ctg}(\gamma/2) \geqslant r\operatorname{ctg}(\beta/2) = KB$ и $2\angle BCO = 180^\circ - \angle BOC = 180^\circ - 2\alpha \leqslant 180^\circ - \alpha - \beta = \gamma = 2\angle BCI$. Так как $\angle BCO = 90^\circ - \alpha = \angle ACH$, при симметрии относительно CI прямая CO переходит в прямую CH. Пусть O' — образ точки O при этой симметрии, P — точка пересечения

CH и IL. Тогда $CP \geqslant CO' = CO = R$. Остаётся доказать, что $PH \geqslant IM = r$. Это следует из того, что $\angle MIL = 180^\circ - \alpha \geqslant 90^\circ$.

10.84. Пусть B_2C_2 — проекция отрезка B_1C_1 на сторону BC. Тогда $B_1C_1 \geqslant B_2C_2 = BC - BC_1\cos\beta - CB_1\cos\gamma$. Аналогично $A_1C_1 \geqslant AC - AC_1\cos\alpha - CA_1\cos\gamma$ и $A_1B_1 \geqslant AB - AB_1\cos\alpha - BA_1\cos\beta$. Домножим эти неравенства на $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ соответственно и сложим их. Получим $B_1C_1\cos\alpha + C_1A_1\cos\beta + A_1B_1\cos\gamma \geqslant a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma - (a\cos\beta\cos\gamma + b\cos\alpha\cos\gamma + c\cos\alpha\cos\beta)$. Так как $c = a\cos\beta + b\cos\alpha$, то $c\cos\gamma = a\cos\beta\cos\gamma + b\cos\alpha\cos\gamma$. Записав три аналогичных равенства и сложив их, получим $a\cos\beta\cos\gamma + b\cos\alpha\cos\gamma + c\cos\alpha\cos\beta = (a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma)/2$.

10.85. Так как $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1$ (задача 12.41 б), то треугольник ABC остроугольный тогда и только тогда, когда $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma < 1$, т. е. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma > 2$. Домножая обе части последнего неравенства на $4R^2$, получаем требуемое.

10.86. Достаточно заметить, что $p^2 - (2R + r)^2 = 4R^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ (см. задачу 12.43 б).

10.87. Пусть $\angle A \leqslant \angle B \leqslant \angle C$. Если треугольник ABC не остроугольный, то $CC_1 < AC < AA_1$ для любых точек A_1 и C_1 на сторонах BC и AB. Докажем теперь, что для остроугольного треугольника можно выбрать точки A_1, B_1 и C_1, обладающие требуемым свойством. Для этого достаточно проверить, что существует число x, удовлетворяющее следующим неравенствам: $h_a \leqslant x < \max(b, c) = c$, $h_b \leqslant x < \max(a, c) = c$ и $h_c \leqslant x < \max(a, b) = b$. Остаётся заметить, что $\max(h_a, h_b, h_c) = h_a$, $\min(b, c) = b$ и $h_a < b$.

10.88. Пусть $\angle A \leqslant \angle B \leqslant \angle C$. Предположим сначала, что треугольник ABC остроугольный. При повороте прямой l, в исходном положении параллельной AB, длина проекции треугольника на l будет сначала монотонно изменяться от c до h_b, затем от h_b до a, от a до h_c, от h_c до b, от b до h_a и, наконец, от h_a до c. Так как $h_b < a$, то существует такое число x, что $h_b < x < a$. Легко проверить, что отрезок длиной x встречается на любом из первых четырёх интервалов монотонности.

Предположим теперь, что треугольник ABC не остроугольный. При повороте прямой l, в исходном положении параллельной AB, длина проекции треугольника на l монотонно убывает сначала от c до h_b, затем от h_b до h_c; после этого она монотонно возрастает сначала от h_c до h_a, а затем от h_a до c. Всего получается два интервала монотонности.

10.89. Пусть точки M и N лежат на сторонах AB и AC соответственно. Проведём через вершину C прямую, параллельную стороне AB. Пусть N_1 — точка пересечения этой прямой и прямой MN. Тогда $N_1O : MO = 2$, но $NO \leqslant N_1O$, поэтому $NO : MO \leqslant 2$.

10.90. Окружность S, вписанная в треугольник ABC, лежит внутри треугольника $A'B'C'$. Проведя к этой окружности касательные, параллельные сторонам треугольника $A'B'C'$, можно получить треугольник $A''B''C''$, подобный треугольнику $A'B'C'$, для которого S является вписанной окружностью. Поэтому $r_{ABC} = r_{A''B''C''} < r_{A'B'C'}$.

10.91. Биссектриса l_c разбивает треугольник ABC на два треугольника, удвоенные площади которых равны $al_c\sin(\gamma/2)$ и $bl_c\sin(\gamma/2)$. Поэтому $ah_a = 2S = l_c(a + b)\sin(\gamma/2)$. Из условия задачи следует, что $a/(a + b) \leqslant 1/2 \leqslant \sin(\gamma/2)$.

10.92. Ясно, что $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B = c/h_c \geqslant c/m_c$. Пусть M — точка пересечения медиан, N — середина отрезка AB. Так как треугольник AMB прямоугольный, $MN = AB/2$. Следовательно, $c = 2MN = 2m_c/3$.

10.93. Так как $BN \cdot BA = BM^2$ и $BM < BA$, то $BN < BM$, а значит, $AN > CN$.

10.94. Проведём через точку B перпендикуляр к стороне AB. Пусть F — точка пересечения этого перпендикуляра с продолжением стороны AC (рис. 10.3). Докажем, что биссектриса AD, медиана BM и высота CH пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $AB = CF$. В самом деле, пусть L — точка пересечения BM и CH. Биссектриса AD проходит через точку L тогда и только тогда, когда $BA : AM = BL : LM$, но $BL : LM = FC : CM = FC : AM$.

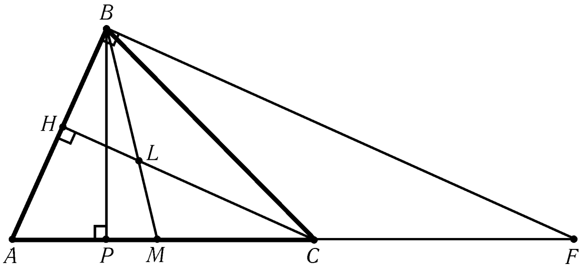


Рис. 10.3

Если на стороне AF некоторого прямоугольного треугольника ABF ($\angle ABF = 90^\circ$) отложить отрезок $CF = AB$, то углы BAC и ABC будут острыми. Остаётся выяснить, в каких случаях угол ACB будет острым. Опустим из точки B перпендикуляр BP на сторону AF. Угол ACB острый, если $FP > FC = AB$, т. е. $BF \sin A > BF \operatorname{ctg} A$. Следовательно, $1 - \cos^2 A = \sin^2 A > \cos A$, т. е. $\cos A < (\sqrt{5} - 1)/2$. В итоге получаем, что

$$90^\circ > \angle A > \arccos((\sqrt{5} - 1)/2) \approx 51^\circ 50'.$$

10.95. Так как против большей стороны лежит больший угол, то $(a - b)(\alpha - \beta) \geqslant 0$, $(b - c)(\beta - \gamma) \geqslant 0$ и $(a - c)(\alpha - \gamma) \geqslant 0$. Складывая эти неравенства, получаем

$$2(a\alpha + b\beta + c\gamma) \geqslant a(\beta + \gamma) + b(\alpha + \gamma) + c(\alpha + \beta) = (a + b + c)\pi - a\alpha - b\beta - c\gamma,$$

т. е. $\pi/3 \leqslant (a\alpha + b\beta + c\gamma)/(a + b + c)$.

Из неравенства треугольника следует, что

$$\alpha(b + c - a) + \beta(a + c - b) + \gamma(a + b - c) > 0,$$

т. е. $a(\beta + \gamma - \alpha) + b(\alpha + \gamma - \beta) + c(\alpha + \beta - \gamma) > 0$. Так как $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то $a(\pi - 2\alpha) + b(\pi - 2\beta) + c(\pi - 2\gamma) > 0$, т. е. $(a\alpha + b\beta + c\gamma)/(a + b + c) < \pi/2$.

10.96. Возьмём на лучах OB и OC такие точки C_1 и B_1, что $OC_1 = OC$ и $OB_1 = OB$. Пусть B_2 и C_2 — проекции точек B_1 и C_1 на прямую, перпендикулярную AO. Тогда $BO \sin AOC + CO \sin AOB = B_2C_2 \leqslant BC$. Сложив три аналогичных неравенства, получим требуемое. Легко проверить также, что условие $B_1C_1 \perp AO$, $C_1A_1 \perp BO$ и $A_1B_1 \perp CO$ эквивалентно тому, что O — точка пересечения биссектрис.

10.97. Так как $\angle CBD = \angle C/2$ и $\angle B \geqslant \angle A$, то $\angle ABD = \angle B + \angle CBD \geqslant$ $\geqslant (\angle A + \angle B + \angle C)/2 = 90^\circ$.

10.98. По свойству биссектрисы $BM : MA = BC : CA$ и $BK : KC = BA : AC$. Поэтому $BM : MA < BK : KC$, т. е.

$$\frac{AB}{AM} = 1 + \frac{BM}{MA} < 1 + \frac{BK}{KC} = \frac{CB}{CK}.$$

Следовательно, точка M более удалена от прямой AC, чем точка K, т. е. $\angle AKM > \angle KAC = \angle KAM$ и $\angle KMC < \angle MCA = \angle MCK$. Поэтому $AM > MK$ и $MK > KC$ (см. задачу 10.62).

10.99. Предположим, что все данные отношения меньше 2. Тогда $S_{ABO} +$ $+ S_{AOC} < 2S_{XBO} + 2S_{XOC} = 2S_{OBC}$, $S_{ABO} + S_{OBC} < 2S_{AOC}$ и $S_{AOC} + S_{OBC} < 2S_{ABO}$. Сложив эти неравенства, приходим к противоречию. Аналогично доказывается, что одно из данных соотношений не больше 2.

10.100. Обозначим радиусы окружностей S, S_1 и S_2 через r, r_1 и r_2. Пусть треугольники AB_1C_1 и A_2BC_2 подобны треугольнику ABC, причём коэффициенты подобия равны r_1/r и r_2/r соответственно. Окружности S_1 и S_2 являются вписанными для треугольников AB_1C_1 и A_2BC_2. Следовательно, эти треугольники пересекаются, так как иначе окружности S_1 и S_2 не имели бы общих точек. Поэтому $AB_1 + A_2B > AB$, т. е. $r_1 + r_2 > r$.

ГЛАВА 11

ЗАДАЧИ НА МАКСИМУМ И МИНИМУМ

Основные сведения

1. Геометрические задачи на максимум и минимум тесно связаны с геометрическими неравенствами, так как для решения этих задач всегда нужно доказать соответствующее геометрическое неравенство и, кроме того, доказать, что это неравенство при определённых условиях обращается в равенство. Поэтому, прежде чем решать задачи на максимум и минимум, следует ещё раз посмотреть приложение к гл. 9, обращая особое внимание на условия, при которых нестрогие неравенства становятся равенствами.

2. Для элементов треугольника используются те же обозначения, что и в гл. 9.

3. Задачи на максимум и минимум иногда называются *экстремальными* задачами (от лат. *extremum* — «крайний»).

Вводные задачи

1. Среди всех треугольников с данными сторонами AB и AC найдите тот, у которого наибольшая площадь.

2. В треугольнике ABC найдите точку, из которой сторона AB видна под наименьшим углом.

3. Докажите, что среди всех треугольников с данными стороной a и высотой h_a наибольшую величину угла α имеет равнобедренный треугольник.

4. Среди всех треугольников с данными сторонами AB и AC ($AB < AC$) найдите тот, у которого радиус описанной окружности максимален.

5. Диагонали выпуклого четырёхугольника равны d_1 и d_2. Какое наибольшее значение может иметь его площадь?

§ 1. Треугольник

11.1. Докажите, что среди всех треугольников с фиксированным углом α и площадью S наименьшую длину стороны BC имеет равнобедренный треугольник с основанием BC.

11.2. Докажите, что среди всех треугольников ABC с фиксированным углом α и полупериметром p наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник с основанием BC.

11.3. Докажите, что среди всех треугольников с фиксированным полупериметром p наибольшую площадь имеет правильный треугольник.

11.4. Рассмотрим все остроугольные треугольники с заданными стороной a и углом α. Чему равен максимум суммы квадратов длин сторон b и c?

11.5. Среди всех треугольников, вписанных в данную окружность, найдите тот, у которого максимальна сумма квадратов длин сторон.

11.6*. Периметр треугольника ABC равен $2p$. На сторонах AB и AC взяты точки M и N так, что $MN \parallel BC$ и MN касается вписанной окружности треугольника ABC. Найдите наибольшее значение длины отрезка MN.

11.7*. В данный треугольник поместите центрально симметричный многоугольник наибольшей площади.

11.8*. Площадь треугольника ABC равна 1. Пусть A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, CA, AB соответственно. На отрезках AB_1, CA_1, BC_1 взяты точки K, L, M соответственно. Чему равна минимальная площадь общей части треугольников KLM и $A_1B_1C_1$?

11.9*. Какую наименьшую ширину должна иметь бесконечная полоса бумаги, чтобы из неё можно было вырезать любой треугольник площадью 1?

* * *

11.10. Докажите, что треугольники с длинами сторон a, b, c и a_1, b_1, c_1 подобны тогда и только тогда, когда

$$\sqrt{aa_1} + \sqrt{bb_1} + \sqrt{cc_1} = \sqrt{(a+b+c)(a_1+b_1+c_1)}.$$

11.11*. Докажите, что если α, β, γ и α_1, β_1, γ_1 — углы двух треугольников, то

$$\frac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha} + \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta} + \frac{\cos\gamma_1}{\sin\gamma} \leqslant \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma.$$

11.12*. Пусть a, b и c — длины сторон треугольника площади S; α_1, β_1 и γ_1 — углы некоторого другого треугольника. Докажите, что $a^2\operatorname{ctg}\alpha_1 + b^2\operatorname{ctg}\beta_1 + c^2\operatorname{ctg}\gamma_1 \geqslant 4S$, причём равенство достигается, только если рассматриваемые треугольники подобны.

11.13*. Дан треугольник со сторонами a, b и c, причём $a \geqslant b \geqslant c$; x, y и z — углы некоторого другого треугольника. Докажите, что

$$bc + ca - ab < bc\cos x + ca\cos y + ab\cos z \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

См. также задачу 17.21.

§ 2. Экстремальные точки треугольника

11.14. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взята точка X; M и N — её проекции на катеты AC и BC.

а) При каком положении точки X длина отрезка MN будет наименьшей?

б) При каком положении точки X площадь четырёхугольника $CMXN$ будет наибольшей?

11.15. Из точки M, лежащей на стороне AB остроугольного треугольника ABC, опущены перпендикуляры MP и MQ на стороны BC и AC. При каком положении точки M длина отрезка PQ минимальна?

11.16. Дан треугольник ABC. Найдите на прямой AB точку M, для которой сумма радиусов описанных окружностей треугольников ACM и BCM была бы наименьшей.

11.17. Из точки M описанной окружности треугольника ABC опущены перпендикуляры MP и MQ на прямые AB и AC. При каком положении точки M длина отрезка PQ максимальна?

11.18*. Внутри треугольника ABC взята точка O. Пусть d_a, d_b, d_c — расстояния от неё до прямых BC, CA, AB. При каком положении точки O произведение $d_a d_b d_c$ будет наибольшим?

11.19*. Точки A_1, B_1 и C_1 взяты на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC, причём отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке M. При каком положении точки M величина $\frac{MA_1}{AA_1} \cdot \frac{MB_1}{BB_1} \cdot \frac{MC_1}{CC_1}$ максимальна?

11.20*. Из точки M, лежащей внутри данного треугольника ABC, опущены перпендикуляры MA_1, MB_1, MC_1 на прямые BC, CA, AB. Для каких точек M внутри данного треугольника ABC величина $a/MA_1 + b/MB_1 + c/MC_1$ принимает наименьшее значение?

11.21*. Дан треугольник ABC. Найдите внутри его точку O, для которой сумма длин отрезков OA, OB, OC минимальна. (Обратите внимание на тот случай, когда один из углов треугольника больше 120°.)

11.22*. Найдите внутри треугольника ABC точку O, для которой сумма квадратов расстояний от неё до сторон треугольника минимальна.

См. также задачу 18.22 а).

§ 3. Угол

11.23. На одной стороне острого угла даны точки A и B. Постройте на другой его стороне точку C, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом.

11.24. Дан угол XAY и точка O внутри его. Проведите через точку O прямую, отсекающую от данного угла треугольник наименьшей площади.

11.25. Проведите через данную точку P, лежащую внутри угла AOB, прямую MN так, чтобы величина $OM + ON$ была минимальной (точки M и N лежат на сторонах OA и OB).

11.26. Даны угол XAY и окружность внутри его. Постройте точку окружности, сумма расстояний от которой до прямых AX и AY минимальна.

11.27*. Внутри острого угла BAC дана точка M. Постройте на сторонах BA и AC точки X и Y так, чтобы периметр треугольника XYM был минимальным.

11.28*. Дан угол XAY. Концы B и C отрезков BO и CO длиной 1 перемещаются по лучам AX и AY. Постройте четырёхугольник $ABOC$ наибольшей площади.

§ 4. Четырёхугольники

11.29. Внутри выпуклого четырёхугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин была бы наименьшей.

11.30. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Какую наименьшую площадь может иметь этот четырёхугольник, если площадь треугольника AOB равна 4, а площадь треугольника COD равна 9?

11.31. Трапеция $ABCD$ с основанием AD разрезана диагональю AC на два треугольника. Прямая l, параллельная основанию, разрезает эти треугольники на два треугольника и два четырёхугольника. При каком положении прямой l сумма площадей полученных треугольников минимальна?

11.32. Площадь трапеции равна 1. Какую наименьшую величину может иметь наибольшая диагональ этой трапеции?

11.33*. На основании AD трапеции $ABCD$ дана точка K. Найдите на основании BC точку M, для которой площадь общей части треугольников AMD и BKC максимальна.

11.34*. Докажите, что среди всех четырёхугольников с фиксированными длинами сторон наибольшую площадь имеет вписанный четырёхугольник.

См. также задачи 9.37, 15.3 б).

§ 5. Многоугольники

11.35. Многоугольник имеет центр симметрии O. Докажите, что сумма расстояний до вершин минимальна для точки O.

11.36. Среди всех многоугольников, вписанных в данную окружность, найдите тот, у которого максимальна сумма квадратов длин сторон.

11.37*. Дан выпуклый многоугольник $A_1 \ldots A_n$. Докажите, что точка многоугольника, для которой максимальна сумма расстояний от неё до всех вершин, является вершиной.

См. также задачу 6.74.

§ 6. Разные задачи

11.38. Внутри окружности с центром O дана точка A. Найдите точку M окружности, для которой угол OMA максимален.

11.39. На плоскости даны прямая l и точки A и B, лежащие по разные стороны от неё. Постройте окружность, проходящую через точки A и B так, чтобы прямая l высекала на ней хорду наименьшей длины.

11.40. Даны прямая l и точки P и Q, лежащие по одну сторону от неё. На прямой l берём точку M и в треугольнике PQM проводим высоты PP' и QQ'. При каком положении точки M длина отрезка $P'Q'$ минимальна?

11.41. Точки A, B и O не лежат на одной прямой. Проведите через точку O прямую l так, чтобы сумма расстояний от неё до точек A и B была: а) наибольшей; б) наименьшей.

* * *

11.42. Если на плоскости заданы пять точек, то, рассматривая всевозможные тройки этих точек, можно образовать 30 углов. Обозначим наименьший из этих углов α. Найдите наибольшее значение α.

11.43*. В городе 10 улиц, параллельных друг другу, и 10 улиц, пересекающих их под прямым углом. Какое наименьшее число поворотов может иметь замкнутый автобусный маршрут, проходящий через все перекрёстки?

11.44*. Чему равно наибольшее число клеток шахматной доски размером 8×8, которые можно разрезать одной прямой?

11.45*. Какое наибольшее число точек можно поместить на отрезке длиной 1 так, чтобы на любом отрезке длиной d, содержащемся в этом отрезке, лежало не больше $1 + 1000d^2$ точек?

См. также задачи 15.1, 17.20.

§ 7. Экстремальные свойства правильных многоугольников

11.46*. а) Докажите, что среди всех n-угольников, описанных около данной окружности, наименьшую площадь имеет правильный n-угольник.

б) Докажите, что среди всех n-угольников, описанных около данной окружности, наименьший периметр имеет правильный n-угольник.

11.47*. Треугольники ABC_1 и ABC_2 имеют общее основание AB и $\angle AC_1B = \angle AC_2B$. Докажите, что если $|AC_1 - C_1B| < |AC_2 - C_2B|$, то:

а) площадь треугольника ABC_1 больше площади треугольника ABC_2;

б) периметр треугольника ABC_1 больше периметра треугольника ABC_2.

11.48*. а) Докажите, что среди всех n-угольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет правильный n-угольник.

б) Докажите, что среди всех n-угольников, вписанных в данную окружность, наибольший периметр имеет правильный n-угольник.

Задачи для самостоятельного решения

11.49. На стороне острого угла с вершиной A дана точка B. Постройте на другой его стороне такую точку X, что радиус описанной окружности треугольника ABX наименьший.

11.50. Через данную точку внутри окружности проведите хорду наименьшей длины.

11.51. Среди всех треугольников с заданной суммой длин биссектрис найдите треугольник с наибольшей суммой длин высот.

11.52. Внутри выпуклого четырёхугольника найдите точку, сумма квадратов расстояний от которой до вершин наименьшая.

11.53. Среди всех треугольников, вписанных в данную окружность, найдите тот, для которого величина $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ наименьшая.

11.54. На шахматной доске с обычной раскраской проведите окружность наибольшего радиуса так, чтобы она не пересекла ни одного белого поля.

11.55. Внутри квадрата дана точка O. Любая прямая, проходящая через O, разрезает квадрат на две части. Проведите через точку O прямую так, чтобы разность площадей этих частей была наибольшей.

11.56. Какую наибольшую длину может иметь наименьшая сторона треугольника, вписанного в данный квадрат?

11.57. Какую наибольшую площадь может иметь правильный треугольник, вписанный в данный квадрат?

Решения

11.1. По теореме косинусов $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha=(b-c)^2+2bc(1-\cos\alpha)=$ $=(b-c)^2+4S(1-\cos\alpha)/\sin\alpha$. Так как второе слагаемое постоянно, то a минимально, если $b=c$.

11.2. Пусть вневписанная окружность касается продолжений сторон AB и AC в точках K и L. Так как $AK=AL=p$, то вневписанная окружность S_a фиксирована. Радиус r вписанной окружности максимален, когда она касается окружности S_a, т. е. треугольник ABC равнобедренный. Ясно также, что $S=pr$.

11.3. Согласно задаче 10.55 а) $S\leqslant p^2/3\sqrt{3}$, причём равенство достигается только для правильного треугольника.

11.4. По теореме косинусов $b^2+c^2=a^2+2bc\cos\alpha$. Так как $2bc\leqslant b^2+c^2$ и $\cos\alpha>0$, то $b^2+c^2\leqslant a^2+(b^2+c^2)\cos\alpha$, т. е. $b^2+c^2\leqslant a^2/(1-\cos\alpha)$. Равенство достигается, если $b=c$.

11.5. Пусть O — центр окружности радиуса R; A, B и C — вершины треугольника; $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$, $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$. Тогда $AB^2+BC^2+CA^2=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|^2+|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}|^2=2(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2)-2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})-2(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})-2(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})$. Так как $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+2(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+2(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})$, то $AB^2+BC^2+CA^2=3(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2)-|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|^2\leqslant 3(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2)=9R^2$, причём равенство достигается, только если $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$. Это равенство означает, что треугольник ABC правильный.

11.6. Обозначим длину высоты, опущенной на сторону BC, через h. Так как $\triangle AMN\sim\triangle ABC$, то $\dfrac{MN}{BC}=\dfrac{h-2r}{h}$, т. е. $MN=a\left(1-\dfrac{2r}{h}\right)$. Поскольку $r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{ah}{2p}$, то $MN=a(1-a/p)$. Максимум выражения $a(1-a/p)=a(p-a)/p$ достигается при $a=p/2$; он равен $p/4$. Остаётся заметить, что существует треугольник периметра $2p$ со стороной $a=p/2$ (положим $b=c=3p/4$).

11.7. Пусть O — центр симметрии многоугольника M, расположенного внутри треугольника T, $S(T)$ — образ треугольника T при симметрии относительно точки O. Тогда M лежит и в T, и в $S(T)$. Поэтому среди всех центрально симметричных многоугольников с данным центром симметрии, лежащих в T, наибольшую площадь имеет пересечение T и $S(T)$. Точка O лежит внутри треугольника T, так как пересечением T и $S(T)$ является выпуклый многоугольник, а выпуклый многоугольник всегда содержит свой центр симметрии.

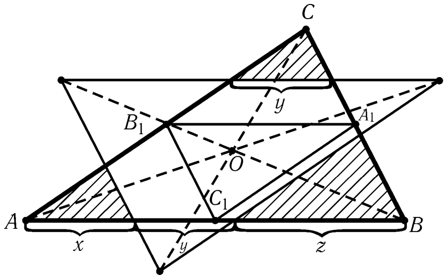


Рис. 11.1

Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB треугольника $T=ABC$. Предположим сначала, что точка O лежит внутри треугольника $A_1B_1C_1$. Тогда пересечением T и $S(T)$ является шестиугольник (рис. 11.1). Пусть сторона AB делится сторонами треугольника $S(T)$ в отношении $x:y:z$, где $x+y+z=1$. Тогда отношение суммы площадей заштрихованных треугольников к площади треугольника ABC равно $x^2+y^2+z^2$; нужно минимизировать это выражение. Так как $1=(x+y+z)^2=3(x^2+y^2+z^2)-(x-y)^2-(y-z)^2-(z-x)^2$, то $x^2+y^2+z^2\geqslant 1/3$, причём равенство достигается только при $x=y=z$; последнее равенство означает, что O — точка пересечения медиан треугольника ABC.

Рассмотрим теперь другой случай: точка O лежит внутри одного из треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C, например внутри $\triangle AB_1C_1$. В этом случае пересечением T и $S(T)$ является параллелограмм, причём если мы заменим точку O точкой пересечения прямых AO и B_1C_1, то площадь этого параллелограмма может только увеличиться. Если же точка O лежит на стороне B_1C_1, то этот случай уже фактически был нами рассмотрен (нужно положить $x=0$).

Искомым многоугольником является шестиугольник с вершинами в точках, делящих стороны треугольника на три равные части. Его площадь равна $2/3$ площади треугольника.

11.8. Обозначим точку пересечения прямых KM и BC через T, а точки пересечения сторон треугольников $A_1B_1C_1$ и KLM так, как показано на

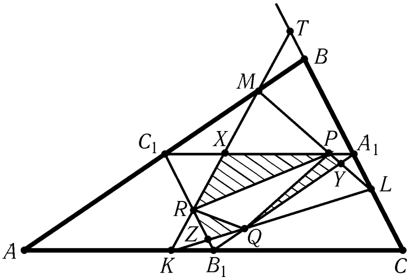


Рис. 11.2

рис. 11.2. Тогда $TL:RZ=KL:KZ=LC:ZB_1$. Так как $TL\geqslant BA_1=A_1C\geqslant LC$, то $RZ\geqslant ZB_1$, т. е. $S_{RZQ}\geqslant S_{ZB_1Q}$. Аналогично $S_{QYP}\geqslant S_{YA_1P}$ и $S_{PXR}\geqslant S_{XC_1R}$. Складывая все эти неравенства и неравенство $S_{PQR}\geqslant 0$, получаем, что площадь шестиугольника $PXRZQY$ не меньше площади оставшейся части треугольника $A_1B_1C_1$, т. е. его площадь не меньше $S_{A_1B_1C_1}/2=1/8$. Равенство достигается, например, если точка K совпадает с B_1, а точка M — с B.

11.9. Так как площадь правильного треугольника со стороной a равна $a^2\sqrt{3}/4$, сторона правильного треугольника площадью 1 равна $2/\sqrt[4]{3}$, а его высота равна $\sqrt[4]{3}$. Докажем, что из полосы шириной меньше $\sqrt[4]{3}$ нельзя вырезать правильный треугольник площадью 1. Пусть правильный треугольник ABC лежит внутри полосы шириной меньше $\sqrt[4]{3}$. Пусть для определённости проекция вершины B на границу полосы лежит между проекциями вершин A и C. Тогда прямая, проведённая через точку B перпендикулярно границе полосы, пересекает отрезок AC в некоторой точке M. Высота треугольника ABC не превосходит BM, а BM не больше ширины полосы, поэтому высота треугольника ABC меньше $\sqrt[4]{3}$, т. е. его площадь меньше 1.

Остаётся доказать, что из полосы шириной $\sqrt[4]{3}$ можно вырезать любой треугольник площадью 1. Докажем, что у любого треугольника площадью 1 есть высота, не превосходящая $\sqrt[4]{3}$. Для этого достаточно доказать, что у него есть сторона не меньше $2/\sqrt[4]{3}$. Предположим, что все стороны треугольника ABC меньше $2/\sqrt[4]{3}$. Пусть α — наименьший угол этого треугольника. Тогда $\alpha\leqslant 60^\circ$ и $S_{ABC}=(AB\cdot AC\sin\alpha)/2<(2/\sqrt[4]{3})^2(\sqrt{3}/4)=1$. Получено противоречие. Треугольник, у которого есть высота, не превосходящая $\sqrt[4]{3}$, можно поместить в полосу шириной $\sqrt[4]{3}$, положив сторону, на которую опущена эта высота, на сторону полосы.

11.10. Возведя обе части данного равенства в квадрат, его легко привести к виду

$$(\sqrt{ab_1}-\sqrt{a_1b})^2+(\sqrt{ca_1}-\sqrt{c_1a})^2+(\sqrt{bc_1}-\sqrt{cb_1})^2=0,$$

т. е. $a/a_1=b/b_1=c/c_1$.

11.11. Фиксируем углы α, β и γ. Пусть $A_1B_1C_1$ — треугольник с углами α_1, β_1 и γ_1. Рассмотрим векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, сонаправленные с векторами $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{C_1A_1}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ и имеющие длины $\sin\alpha$, $\sin\beta$ и $\sin\gamma$. Тогда $\dfrac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha}+\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta}+\dfrac{\cos\gamma_1}{\sin\gamma}=-[(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})]/(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)$. А так как $2[(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})]=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|^2-|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{c}|^2$, то величина $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})$ минимальна, когда $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$, т. е. $\alpha_1=\alpha$, $\beta_1=\beta$, $\gamma_1=\gamma$.

11.12. Пусть $x=\operatorname{ctg}\alpha_1$ и $y=\operatorname{ctg}\beta_1$. Тогда $x+y>0$ (так как $\alpha_1+\beta_1<\pi$) и $\operatorname{ctg}\gamma_1=(1-xy)/(x+y)=(x^2+1)/(x+y)-x$. Поэтому $a^2\operatorname{ctg}\alpha_1+b^2\operatorname{ctg}\beta_1+c^2\operatorname{ctg}\gamma_1=(a^2-b^2-c^2)x+b^2(x+y)+c^2(x^2+1)/(x+y)$. При фиксированном x это выражение минимально при таком y, что $b^2(x+y)=c^2(x^2+1)/(x+y)$, т. е. $c/b=(x+y)/\sqrt{1+x^2}=\sin\alpha_1(\operatorname{ctg}\alpha_1+\operatorname{ctg}\beta_1)=\sin\gamma_1/\sin\beta_1$. Аналогичные рассуждения показывают, что если $a:b:c=\sin\alpha_1:\sin\beta_1:\sin\gamma_1$, то рассматриваемое выражение минимально. В этом случае треугольники подобны и $a^2 \operatorname{ctg}\alpha + b^2 \operatorname{ctg}\beta + c^2 \operatorname{ctg}\gamma = 4S$ (см. задачу 12.46 б).

11.13. Пусть $f = bc\cos x + ca\cos y + ab\cos z$. Так как $\cos x = -\cos y\cos z + \sin y\sin z$, то $f = c(a - b\cos z)\cos y + bc\sin y\sin z + ab\cos z$. Рассмотрим треугольник, длины двух сторон которого равны a и b, а угол между ними равен z; пусть ξ и η — углы, лежащие против сторон a и b, t — длина стороны, лежащей против угла z. Тогда $\cos z = (a^2 + b^2 - t^2)/2ab$ и $\cos\eta = (t^2 + a^2 - b^2)/2at$, поэтому $(a - b\cos z)/t = \cos\eta$. Кроме того, $b/t = \sin\eta/\sin z$. Следовательно, $f = ct\cos(\eta - y) + (a^2 + b^2 - t^2)/2$.

Так как $\cos(\eta - y) \leqslant 1$, то $f \leqslant \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - \dfrac{(c-t)^2}{2} \leqslant \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$.

Так как $a \geqslant b$, то $\xi \geqslant \eta$, а значит, $-\xi \leqslant -\eta < y - \eta < \pi - z - \eta = \xi$, т. е. $\cos(y - \eta) > \cos\xi$. Поэтому

$$f > ct\cos\xi + \frac{a^2 + b^2 - t^2}{2} = \frac{c-b}{2b}t^2 + \frac{c(b^2 - a^2)}{2b} + \frac{a^2 + b^2}{2} = g(t).$$

Коэффициент при t^2 отрицателен или равен нулю; кроме того, $t < a + b$. Следовательно, $g(t) \geqslant g(a + b) = bc + ca - ab$.

11.14. а) Так как $CMXN$ — прямоугольник, то $MN = CX$. Поэтому длина отрезка MN будет наименьшей, если CX — высота.

б) Пусть $S_{ABC} = S$. Тогда $S_{AMX} = AX^2 \cdot S/AB^2$ и $S_{BNX} = BX^2 \cdot S/AB^2$. Поскольку $AX^2 + BX^2 \geqslant AB^2/2$ (причём равенство достигается, только если X — середина отрезка AB), то $S_{CMXN} = S - S_{AMX} - S_{BNX} \leqslant S/2$. Площадь четырёхугольника $CMXN$ будет наибольшей, если X — середина стороны AB.

11.15. Точки P и Q лежат на окружности, построенной на отрезке CM как на диаметре. В этой окружности постоянный угол C опирается на хорду PQ, поэтому длина хорды PQ будет минимальна, если минимален диаметр CM окружности, т. е. CM — высота треугольника ABC.

11.16. По теореме синусов радиусы описанных окружностей треугольников ACM и BCM равны $AC/(2\sin AMC)$ и $BC/(2\sin BMC)$ соответственно. Легко проверить, что $\sin AMC = \sin BMC$. Поэтому $AC/(2\sin AMC) + BC/(2\sin BMC) = (AC + BC)/(2\sin BMC)$. Последнее выражение будет наименьшим, если $\sin BMC = 1$, т. е. $CM \perp AB$.

11.17. Точки P и Q лежат на окружности с диаметром AM, поэтому $PQ = AM\sin PAQ = AM\sin A$. Значит, длина отрезка PQ максимальна, когда AM — диаметр описанной окружности.

11.18. Ясно, что $2S_{ABC} = ad_a + bd_b + cd_c$. Поэтому произведение $(ad_a)(bd_b)(cd_c)$ будет наибольшим, если $ad_a = bd_b = cd_c$ (см. с. 231). Так как величина abc постоянна, произведение $(ad_a)(bd_b)(cd_c)$ будет наибольшим тогда и только тогда, когда будет наибольшим произведение $d_a d_b d_c$.

Покажем, что равенство $ad_a = bd_b = cd_c$ означает, что O — точка пересечения медиан треугольника ABC. Обозначим точку пересечения прямых AO и BC через A_1. Тогда $BA_1 : A_1C = S_{ABA_1} : S_{ACA_1} = S_{ABO} : S_{ACO} = (cd_c) : (bd_b) = 1$, т. е. AA_1 — медиана. Аналогично доказывается, что точка O лежит на медианах BB_1 и CC_1.

11.19. Пусть $\alpha = MA_1/AA_1$, $\beta = MB_1/BB_1$ и $\gamma = MC_1/CC_1$. Так как $\alpha + \beta + \gamma = 1$ (см. задачу 4.49 а), то $\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} \leqslant (\alpha + \beta + \gamma)/3 = 1/3$, причём равенство достигается, когда $\alpha = \beta = \gamma = 1/3$, т. е. M — точка пересечения медиан.

11.20. Пусть $x = MA_1$, $y = MB_1$ и $z = MC_1$. Тогда $ax + by + cz = 2S_{BMC} + 2S_{AMC} + 2S_{AMB} = 2S_{ABC}$. Поэтому $\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)\cdot 2S_{ABC} = \left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)(ax+by+cz) = a^2+b^2+c^2+ab\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+bc\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+ac\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right) \geqslant a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$, причём равенство достигается, только если $x = y = z$, т. е. M — центр вписанной окружности треугольника ABC.

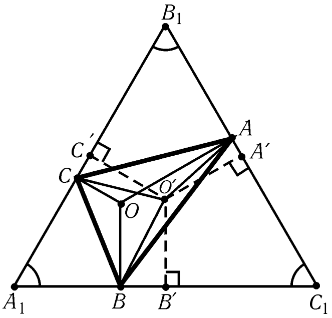


Рис. 11.3

11.21. Предположим сначала, что все углы треугольника ABC меньше 120°. Тогда внутри его существует точка O, из которой все стороны видны под углом 120°. Проведём через вершины A, B и C прямые, перпендикулярные отрезкам OA, OB и OC. Эти прямые образуют правильный треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 11.3). Пусть O' — любая точка, лежащая внутри треугольника ABC и отличная от точки O. Докажем, что тогда $O'A + O'B + O'C > OA + OB + OC$, т. е. O — искомая точка. Пусть A', B' и C' — основания перпендикуляров, опущенных из точки O' на стороны B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1, a — длина стороны правильного треугольника $A_1B_1C_1$. Тогда $O'A' + O'B' + O'C' = 2(S_{O'B_1C_1} + S_{O'A_1B_1} + S_{O'A_1C_1})/a = 2S_{A_1B_1C_1}/a = OA + OB + OC$. Так как наклонная длиннее перпендикуляра, то $O'A + O'B + O'C > O'A' + O'B' + O'C' = OA + OB + OC$.

Пусть теперь один из углов треугольника ABC, например угол C, больше или равен 120°. Проведём через точки A и B перпендикуляры B_1C_1 и C_1A_1 к отрезкам CA и CB, а через точку C — прямую A_1B_1, перпендикулярную биссектрисе угла ACB (рис. 11.4). Так как $\angle AC_1B = 180^\circ - \angle ACB < 60^\circ$, то $B_1C_1 > A_1B_1$. Пусть O' — любая точка, лежащая внутри треугольника $A_1B_1C_1$. Поскольку $B_1C_1 \cdot O'A' + C_1A_1 \cdot O'B' + A_1B_1 \cdot O'C' = 2S_{A_1B_1C_1}$, то $(O'A' + O'B' + O'C') \cdot B_1C_1 = 2S_{A_1B_1C_1} + (B_1C_1 - A_1B_1) \cdot O'C'$. Так как $B_1C_1 > A_1B_1$, то сумма $O'A' + O'B' + O'C'$ минимальна для точек, лежащих на стороне B_1A_1. Ясно также, что $O'A + O'B + O'C \geqslant O'A' + O'B' + O'C'$. Следовательно, искомой точкой является вершина C.

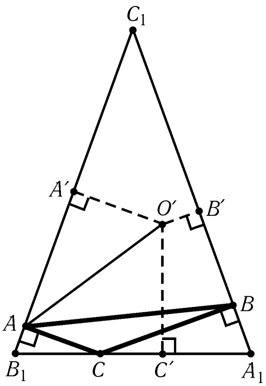


Рис. 11.4

11.22. Пусть расстояния от точки O до сторон BC, CA и AB равны x, y и z соответственно. Тогда $ax + by + cz = 2(S_{BOC} + S_{COA} + S_{AOB}) = 2S_{ABC}$. Ясно также, что $x : y : z = (S_{BOC}/a) : (S_{COA}/b) : (S_{AOB}/c)$.

Уравнение $ax + by + cz = 2S$ задаёт плоскость в трёхмерном пространстве с координатами x, y, z, причём вектор (a, b, c) перпендикулярен этой плоскости, так как если $ax_1 + by_1 + cz_1 = 2S$ и $ax_2 + by_2 + cz_2 = 2S$, то $a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) + c(z_1 - z_2) = 0$. Нам нужно найти точку (x_0, y_0, z_0) этой плоскости, для которой достигается минимум выражения $x^2 + y^2 + z^2$, и проверить, что этой точке соответствует некоторая внутренняя точка треугольника.

Так как $x^2+y^2+z^2$ — это квадрат расстояния от начала координат до точки (x, y, z), то искомой точкой является основание перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость, т. е. $x:y:z=a:b:c$. Остаётся проверить, что внутри треугольника существует точка O, для которой $x:y:z=a:b:c$. Это равенство эквивалентно условию

$$\frac{S_{BOC}}{a}:\frac{S_{COA}}{b}:\frac{S_{AOB}}{c}=a:b:c,$$

т. е. $S_{BOC}:S_{COA}:S_{AOB}=a^2:b^2:c^2$. А так как равенство $S_{BOC}:S_{AOB}=a^2:c^2$ следует из равенств $S_{BOC}:S_{COA}=a^2:b^2$ и $S_{COA}:S_{AOB}=b^2:c^2$, то искомая точка — это точка пересечения прямых CC_1 и AA_1, делящих стороны AB и BC в отношениях $BC_1:C_1A=a^2:b^2$ и $CA_1:A_1B=b^2:c^2$ соответственно (точка Лемуана).

11.23. Пусть O — вершина данного угла. Точка C является точкой касания стороны угла с окружностью, проходящей через точки A и B, т. е. $OC^2=OA\cdot OB$. Для нахождения длины отрезка OC достаточно провести касательную к любой окружности, проходящей через точки A и B.

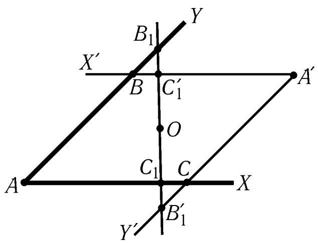


Рис. 11.5

11.24. Рассмотрим угол $X'A'Y'$, симметричный углу XAY относительно точки O. Пусть B и C — точки пересечения сторон этих углов. Обозначим точки пересечения прямой, проходящей через точку O, со сторонами углов XAY и $X'A'Y'$ через B_1, C_1 и B_1', C_1' соответственно (рис. 11.5). Так как $S_{AB_1C_1}=S_{A'B_1'C_1'}$, то $S_{AB_1C_1}=(S_{ABA'C}+S_{BB_1C_1'}+S_{CC_1B_1'})/2$. Площадь треугольника AB_1C_1 минимальна, если $B_1=B$ и $C_1=C$, т. е. искомой прямой является BC.

11.25. Возьмём на сторонах OA и OB точки K и L так, что $KP\parallel OB$ и $LP\parallel OA$. Тогда $KM:KP=PL:LN$, а значит, $KM+LN\geqslant 2\sqrt{KM\cdot LN}=2\sqrt{KP\cdot PL}=2\sqrt{OK\cdot OL}$, причём равенство достигается, когда $KM=LN=\sqrt{OK\cdot OL}$. Ясно также, что $OM+ON=(OK+OL)+(KM+LN)$.

11.26. Отложим на лучах AX и AY равные отрезки AB и AC. Если точка M лежит на отрезке BC, то сумма расстояний от неё до прямых AB и AC равна $2(S_{ABM}+S_{ACM})/AB=2S_{ABC}/AB$. Поэтому сумма расстояний от точки до прямых AX и AY тем меньше, чем меньше расстояние от её проекции на биссектрису угла XAY до точки A.

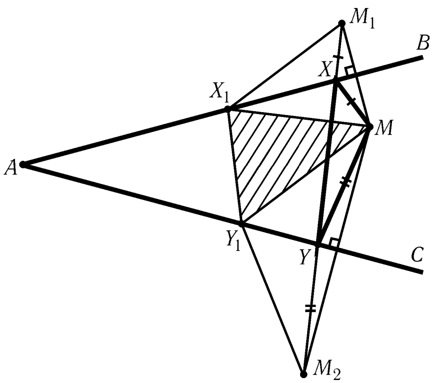


Рис. 11.6

11.27. Пусть точки M_1 и M_2 симметричны M относительно прямых AB и AC. Так как $\angle BAM_1=\angle BAM$ и $\angle CAM_2=\angle CAM$, то $\angle M_1AM_2=2\angle BAC<180^\circ$. Поэтому отрезок M_1M_2 пересекает лучи AB и AC в некоторых точках X и Y (рис. 11.6). Докажем, что

X и Y — искомые точки. В самом деле, если точки X_1 и Y_1 лежат на лучах AB и AC, то $MX_1 = M_1X_1$ и $MY_1 = M_2Y_1$, т. е. периметр треугольника MX_1Y_1 равен длине ломаной $M_1X_1Y_1M_2$. Из всех ломаных с концами в точках M_1 и M_2 наименьшую длину имеет отрезок M_1M_2.

11.28. Четырёхугольник $ABOC$ наибольшей площади выпуклый. Среди всех треугольников ABC с фиксированными углом A и стороной BC наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник с основанием BC (задача 11.1). Значит, среди всех рассматриваемых четырёхугольников $ABOC$ с фиксированной диагональю BC наибольшую площадь имеет четырёхугольник, для которого $AB = AC$, т. е. точка O лежит на биссектрисе угла A. Рассмотрим, далее, треугольник ABO, в котором фиксированы угол BAO, равный $\angle A/2$, и сторона BO. Площадь этого треугольника максимальна, когда $AB = AO$.

11.29. Пусть O — точка пересечения диагоналей выпуклого четырёхугольника $ABCD$, а O_1 — любая другая точка. Тогда $AO_1 + CO_1 \geqslant AC = AO + CO$ и $BO_1 + DO_1 \geqslant BD = BO + DO$, причём хотя бы одно из неравенств строгое. Следовательно, O — искомая точка.

11.30. Так как $S_{AOB} : S_{BOC} = AO : OC = S_{AOD} : S_{DOC}$, то $S_{BOC} \cdot S_{AOD} = S_{AOB} \cdot S_{DOC} = 36$. Следовательно, $S_{BOC} + S_{AOD} \geqslant 2\sqrt{S_{BOC} \cdot S_{AOD}} = 12$, причём равенство достигается, если $S_{BOC} = S_{AOD}$, т. е. $S_{ABC} = S_{ABD}$, откуда $AB \parallel CD$. При этом площадь четырёхугольника равна $4 + 9 + 12 = 25$.

11.31. Пусть S_0 и S — рассматриваемые суммы площадей треугольников для прямой l_0, проходящей через точку пересечения диагоналей трапеции, и для некоторой другой прямой l. Легко проверить, что $S = S_0 + s$, где s — площадь треугольника, образованного диагоналями AC и BD и прямой l. Поэтому l_0 — искомая прямая.

11.32. Длины диагоналей трапеции обозначим через d_1 и d_2, длины их проекций на основание — через p_1 и p_2, длины оснований — через a и b, высоту — через h. Пусть для определённости $d_1 \geqslant d_2$. Тогда $p_1 \geqslant p_2$. Ясно, что $p_1 + p_2 \geqslant a + b$. Поэтому $p_1 \geqslant (a + b)/2 = S/h = 1/h$. Следовательно, $d_1^2 = p_1^2 + h^2 \geqslant \dfrac{1}{h^2} + h^2 \geqslant 2$, причём равенство достигается, только если $p_1 = p_2 = h = 1$. При этом $d_1 = \sqrt{2}$.

11.33. Докажем, что искомой точкой является точка M, делящая сторону BC в отношении $BM : MC = AK : KD$. Обозначим точки пересечения отрезков AM и BK, DM и CK через P, Q соответственно. Тогда $KQ : QC = KD : MC = KA : MB = KP : PB$, т. е. прямая PQ параллельна основаниям трапеции.

Пусть M_1 — любая другая точка на стороне BC. Для определённости можно считать, что M_1 лежит на отрезке BM. Обозначим точки пересечения AM_1 и BK, DM_1 и CK, AM_1 и PQ, DM_1 и PQ, AM и DM_1 через P_1, Q_1, P_2, Q_2, O соответственно (рис. 11.7). Нужно доказать, что $S_{MPKQ} > S_{M_1P_1KQ_1}$, т. е. $S_{MOQ_1Q} > S_{M_1OPP_1}$. Ясно, что $S_{MOQ_1Q} > S_{MOQ_2Q} = S_{M_1OPP_2} > S_{M_1OPP_1}$.

11.34. Согласно задаче 4.46 а)

$$S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2((B+D)/2).$$

Эта величина максимальна, когда $\cos((B+D)/2) = 0$, т. е. $\angle B + \angle D = 180^\circ$.

11.35. Если A и A' — симметричные относительно точки O вершины многоугольника, то сумма расстояний до точек A и A' одна и та же для всех точек отрезка AA', а для всех других точек она больше. Точка O принадлежит всем таким отрезкам.

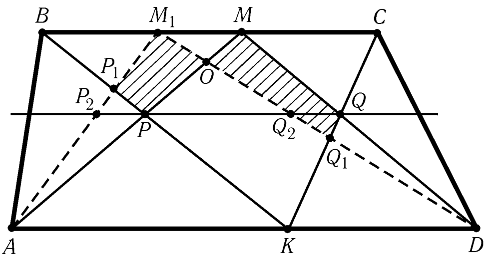


Рис. 11.7

11.36. Если в треугольнике ABC угол B тупой или прямой, то по теореме косинусов $AC^2 \geqslant AB^2 + BC^2$. Поэтому, если в многоугольнике угол при вершине B не острый, то, выбросив вершину B, получим многоугольник с не меньшей суммой квадратов длин сторон. Так как у любого n-угольника при $n \geqslant 3$ есть неострый угол, с помощью такой операции мы приходим к треугольнику. Среди всех треугольников, вписанных в данную окружность, наибольшую сумму квадратов длин сторон имеет правильный треугольник (см. задачу 11.5).

11.37. Если точка X делит некоторый отрезок PQ в отношении $\lambda : (1-\lambda)$, то $\overrightarrow{A_iX} = (1-\lambda)\overrightarrow{A_iP} + \lambda\overrightarrow{A_iQ}$, а значит $A_iX \leqslant (1-\lambda)A_iP + \lambda A_iQ$. Следовательно, $f(X) = \sum A_iX \leqslant (1-\lambda)\sum A_iP + \lambda \sum A_iQ = (1-\lambda)f(P) + \lambda f(Q)$. Пусть, например, $f(P) \leqslant f(Q)$; тогда $f(X) \leqslant f(Q)$. Поэтому функция f на отрезке PQ принимает максимальное значение в одном из его концов; точнее говоря, внутри отрезка не может быть точки строгого максимума функции f. Следовательно, если X — любая точка многоугольника, то $f(X) \leqslant f(Y)$, где Y — некоторая точка стороны многоугольника, а $f(Y) \leqslant f(Z)$, где Z — некоторая вершина.

11.38. Геометрическое место точек X, для которых угол OXA постоянен, состоит их двух симметричных относительно прямой OA дуг окружностей S_1 и S_2. Рассмотрим тот случай, когда диаметр окружностей S_1 и S_2 равен радиусу исходной окружности, т. е. эти окружности касаются исходной окружности в точках M_1 и M_2, для которых $\angle OAM_1 = \angle OAM_2 = 90^\circ$. Точки M_1 и M_2 являются искомыми, так как если $\angle OXA > \angle OM_1A = \angle OM_2A$, то точка X лежит строго внутри фигуры, образованной окружностями S_1 и S_2, и не может лежать на исходной окружности.

11.39. Обозначим точку пересечения прямой l и отрезка AB через O. Рассмотрим произвольную окружность S, проходящую через точки A и B. Она пересекает l в некоторых точках M и N. Поскольку $MO \cdot NO = AO \cdot BO$ — постоянная величина, то

$$MN = MO + NO \geqslant 2\sqrt{MO \cdot NO} = 2\sqrt{AO \cdot BO},$$

причём равенство достигается, только если $MO = NO$. В этом случае центр окружности S является точкой пересечения серединного перпендикуляра к отрезку AB и перпендикуляра к прямой l, проходящего через точку O.

11.40. Построим окружность с диаметром PQ. Если эта окружность пересекается с прямой l, то любая из точек пересечения является искомой, поскольку в этом случае $P' = Q'$. Если же окружность не пересекается с прямой l, то для любой точки M на прямой l угол PMQ острый и $\angle P'PQ' = 90^\circ \pm \angle PMQ$.

Теперь легко убедиться, что длина хорды $P'Q'$ минимальна, если угол PMQ максимален. Для нахождения точки M остаётся провести через точки P и Q окружности, касающиеся прямой l (см. задачу 8.57 а), и из точек касания выбрать нужную.

11.41. Пусть сумма расстояний от точек A и B до прямой l равна $2h$. Если прямая l пересекает отрезок AB в точке X, то $S_{AOB} = h \cdot OX$, поэтому величина h экстремальна, когда экстремальна величина OX, т. е. прямая OX соответствует стороне или высоте треугольника AOB. Если прямая l не пересекает отрезок AB, то величина h равна средней линии трапеции, ограниченной перпендикулярами, опущенными из точек A и B на прямую l. Эта величина экстремальна, когда прямая l перпендикулярна медиане OM треугольника AOB или соответствует стороне треугольника AOB. Остаётся выбрать две из полученных четырёх прямых.

11.42. Предположим сначала, что точки являются вершинами выпуклого пятиугольника. Сумма углов пятиугольника равна 540°, поэтому один из его углов не превосходит $540^\circ/5 = 108^\circ$. Диагонали делят этот угол на три угла, поэтому один из них не превосходит $108^\circ/3 = 36^\circ$. В этом случае $\alpha \leqslant 36^\circ$.

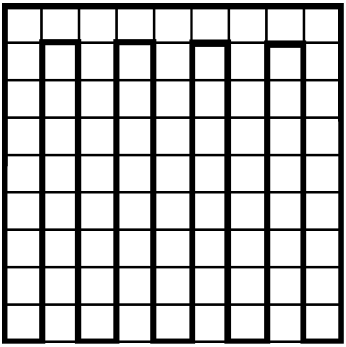


Рис. 11.8

Если точки не являются вершинами выпуклого пятиугольника, то одна из них лежит внутри треугольника, образованного тремя другими. Один из углов этого треугольника не превосходит 60°. Отрезок, соединяющий соответствующую вершину с внутренней точкой, делит этот угол на два угла, поэтому один из них не превосходит 30°. В этом случае $\alpha \leqslant 30^\circ$. Во всех случаях $\alpha \leqslant 36^\circ$. Ясно, что для правильного пятиугольника $\alpha = 36^\circ$.

11.43. Замкнутый маршрут, проходящий через все перекрёстки, может иметь 20 поворотов (рис. 11.8). Остаётся доказать, что меньше 20 поворотов такой маршрут иметь не может. После каждого поворота происходит переход с горизонтальной улицы на вертикальную или с вертикальной на горизонтальную. Поэтому число горизонтальных звеньев замкнутого маршрута равно числу вертикальных звеньев и равно половине числа поворотов. Предположим, что замкнутый маршрут имеет меньше 20 поворотов. Тогда найдутся улицы обоих направлений, по которым маршрут не проходит. Поэтому маршрут не проходит через перекрёсток этих улиц.

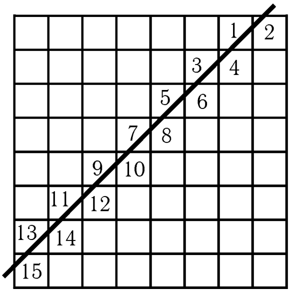


Рис. 11.9

11.44. Прямая может пересекать 15 клеток (рис. 11.9). Докажем теперь, что прямая не может пересекать более 15 клеток. Число клеток, которые пересекает прямая, на 1 меньше числа точек пересечения её с отрезками, задающими стороны клеток. Внутри квадрата имеется 14 таких отрезков. Поэтому внутри квадрата не более 14 точек пересечения прямой со сторонами клеток. Никакая прямая не может пересекать границу доски более чем в двух точках, поэтому число точек пересечения её с отрезками не превышает 16. Следовательно, наибольшее число клеток шахматной доски размером 8×8, которые можно пересечь одной прямой, равно 15.

11.45. Докажем сначала, что 33 точки разместить таким образом нельзя. Действительно, если на отрезке длиной 1 находятся 33 точки, то расстояние между какими-нибудь двумя из них не превосходит $1/32$. Отрезок с концами в этих точках содержит две точки, а он должен содержать не более $1 + 1000/32^2$ точек, т. е. менее двух точек.

Докажем теперь, что 32 точки разместить можно. Возьмём 32 точки, делящие отрезок на равные части (концы данного отрезка входят в число этих 32 точек). Тогда отрезок длиной d содержит либо $[31d]$, либо $[31d]+1$ точек. Нужно доказать, что $[31d] \leqslant 1000d^2$. Если $31d < 1$, то $[31d] = 0 < 1000d^2$. Если $31d \geqslant 1$, то $[31d] \leqslant 31d \leqslant$ $\leqslant (31d)^2 = 961d^2 < 1000d^2$.

Примечание. $[x]$ — целая часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x.

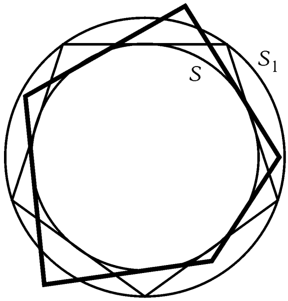


Рис. 11.10

11.46. а) Пусть неправильный n-угольник описан около окружности S. Опишем около этой окружности правильный n-угольник, а около него опишем окружность S_1 (рис. 11.10). Докажем, что площадь части неправильного n-угольника, заключённой внутри S_1, больше площади правильного n-угольника. Все касательные к S отсекают от S_1 равные сегменты. Поэтому сумма площадей сегментов, отсекаемых от S_1 сторонами правильного n-угольника, равна сумме площадей сегментов, отсекаемых от S_1 сторонами неправильного n-угольника или их продолжениями. Но для правильного n-угольника эти сегменты не пересекаются (точнее говоря, не имеют общих внутренних точек), а для неправильного n-угольника некоторые из них обязательно перекрываются, поэтому площадь объединения этих сегментов для правильного n-угольника больше, чем для неправильного. Следовательно, площадь части неправильного n-угольника, заключённой внутри окружности S_1, больше площади правильного n-угольника, а площадь всего неправильного n-угольника и подавно больше площади правильного.

б) Эта задача следует из а), так как периметр многоугольника, описанного около окружности радиуса R, равен $2S/R$, где S — площадь многоугольника.

11.47. Стороны треугольника ABC пропорциональны $\sin\alpha$, $\sin\beta$ и $\sin\gamma$. Если угол γ фиксирован, то величина $|\sin\alpha - \sin\beta| = 2|\sin((\alpha-\beta)/2)\sin(\gamma/2)|$ тем больше, чем больше величина $\varphi = |\alpha - \beta|$. Остаётся заметить, что величины $S = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = R^2 \sin\gamma(\cos(\alpha-\beta) + \cos\gamma) = R^2 \sin\gamma(\cos\varphi + \cos\gamma)$ и $\sin\alpha + \sin\beta = 2\cos(\gamma/2)\cos(\varphi/2)$ монотонно убывают при возрастании φ.

11.48. а) Обозначим длину стороны правильного n-угольника, вписанного в данную окружность, через a_n. Рассмотрим произвольный неправильный n-угольник, вписанный в эту окружность. У него обязательно найдётся сторона длиной меньше a_n. А вот стороны длиной больше a_n у него может и не быть, но тогда этот многоугольник можно заключить в сегмент, отсекаемый стороной правильного n-угольника. Так как при симметрии относительно стороны правильного n-угольника сегмент, отсекаемый этой стороной, попадает

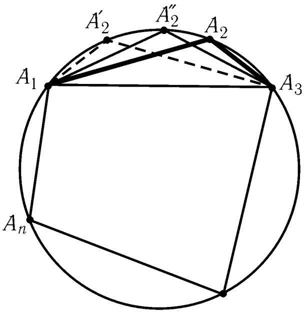


Рис. 11.11

внутрь n-угольника, площадь n-угольника больше площади сегмента. Поэтому можно считать, что у рассматриваемого n-угольника есть сторона длиной меньше a_n и сторона длиной больше a_n.

Мы можем поменять местами соседние стороны n-угольника, т. е. вместо многоугольника $A_1A_2A_3\ldots A_n$ взять многоугольник $A_1A_2'A_3\ldots A_n$, где точка A_2' симметрична точке A_2 относительно серединного перпендикуляра к отрезку A_1A_3 (рис. 11.11). При этом оба многоугольника вписаны в одну и ту же окружность и их площади равны. Ясно, что с помощью этой операции можно сделать соседними любые две стороны многоугольника. Поэтому будем считать, что у рассматриваемого n-угольника $A_1A_2 > a_n$ и $A_2A_3 < a_n$. Пусть A_2' — точка, симметричная точке A_2 относительно серединного перпендикуляра к отрезку A_1A_3. Если точка A_2'' лежит на дуге A_2A_2', то разность углов при основании A_1A_3 у треугольника $A_1A_2''A_3$ меньше, чем у треугольника $A_1A_2A_3$, так как величины углов $A_1A_3A_2''$ и $A_3A_1A_2''$ заключены между величинами углов $A_1A_3A_2$ и $A_3A_1A_2$. Поскольку $A_1A_2' < a_n$ и $A_1A_2 > a_n$, то на дуге A_2A_2' существует точка A_2'', для которой $A_1A_2'' = a_n$. Площадь треугольника $A_1A_2''A_3$ больше площади треугольника $A_1A_2A_3$ (см. задачу 11.47 а). Площадь многоугольника $A_1A_2''A_3\ldots A_n$ больше площади исходного многоугольника, и у него по крайней мере на 1 больше число сторон, равных a_n. За конечное число шагов мы придём к правильному n-угольнику, причём каждый раз площадь увеличивается. Следовательно, площадь любого неправильного n-угольника, вписанного в окружность, меньше площади правильного n-угольника, вписанного в ту же окружность.

б) Доказательство аналогично предыдущему, нужно только воспользоваться результатом задачи 11.47 б), а не задачи 11.47 а).

ГЛАВА 12

ВЫЧИСЛЕНИЯ И МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

Вводные задачи

1. Докажите теорему косинусов:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A.$$

2. Докажите теорему синусов: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$.

3. Стороны параллелограмма равны a и b, а диагонали равны d и e. Докажите, что $2(a^2 + b^2) = d^2 + e^2$.

4. Докажите, что площадь выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равна $(1/2)AC \cdot BD \sin\varphi$, где φ — угол между диагоналями.

§ 1. Теорема синусов

12.1. Докажите, что площадь S треугольника равна $abc/4R$.

12.2. Точка D лежит на основании AC равнобедренного треугольника ABC. Докажите, что радиусы описанных окружностей треугольников ABD и CBD равны.

12.3. Выразите площадь треугольника ABC через длину стороны BC и величины углов B и C.

12.4. Докажите, что

$$\frac{a+b}{c} = \cos\frac{\alpha-\beta}{2} \Big/ \sin\frac{\gamma}{2} \qquad \text{и} \qquad \frac{a-b}{c} = \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \Big/ \cos\frac{\gamma}{2}.$$

12.5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Точки A_2 и C_2 симметричны A_1 и C_1 относительно середин сторон BC и AB. Докажите, что прямая, соединяющая вершину B с центром O описанной окружности, делит отрезок A_2C_2 пополам.

12.6*. Через точку S проведены прямые a, b, c и d; прямая l пересекает их в точках A, B, C и D. Докажите, что величина $AC \cdot BD/(BC \cdot AD)$ не зависит от выбора прямой l.

12.7*. Даны прямые a и b, пересекающиеся в точке O, и произвольная точка P. Прямая l, проходящая через точку P, пересекает прямые a и b в точках A и B. Докажите, что величина $(AO/OB)/(PA/PB)$ не зависит от выбора прямой l.

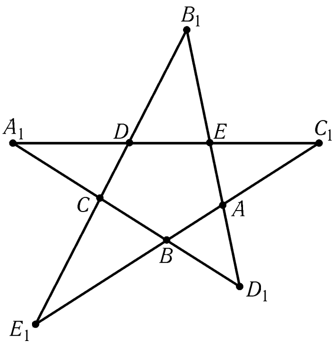


Рис. 12.1

12.8*. Обозначим вершины и точки звеньев (неправильной) пятиконечной звезды так, как показано на рис. 12.1. Докажите, что

$$A_1C\cdot B_1D\cdot C_1E\cdot D_1A\cdot E_1B = A_1D\cdot B_1E\cdot C_1A\cdot D_1B\cdot E_1C.$$

12.9. Два подобных равнобедренных треугольника имеют общую вершину. Докажите, что проекции их оснований на прямую, соединяющую середины оснований, равны.

12.10*. На окружности с диаметром AB взяты точки C и D. Прямая CD и касательная к окружности в точке B пересекаются в точке X. Выразите BX через радиус окружности R и углы $\varphi=\angle BAC$ и $\psi=\angle BAD$.

См. также задачи 2.87 в), 3.32 б), 4.44, 5.27, 5.59, 5.74 а), 5.94, 5.98, 5.120.

§ 2. Теорема косинусов

12.11. Докажите, что:

а) $m_a^2=(2b^2+2c^2-a^2)/4$;

б) $m_a^2+m_b^2+m_c^2=3(a^2+b^2+c^2)/4$.

12.12. Докажите, что $4S=(a^2-(b-c)^2)\operatorname{ctg}(\alpha/2)$.

12.13. Докажите, что $\sin^2(\alpha/2)=(p-b)(p-c)/bc$ и $\cos^2(\alpha/2)=p(p-a)/bc$.

12.14. Длины сторон параллелограмма равны a и b, длины диагоналей — m и n. Докажите, что $a^4+b^4=m^2n^2$ тогда и только тогда, когда острый угол параллелограмма равен 45°.

12.15. Докажите, что медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC перпендикулярны тогда и только тогда, когда $a^2+b^2=5c^2$.

12.16*. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, M — точка пересечения медиан, причём точки O и M не совпадают. Докажите, что прямая OM перпендикулярна медиане CC_1 тогда и только тогда, когда $a^2+b^2=2c^2$.

12.17*. Окружности радиусов t_a, t_b, t_c касаются внутренним образом описанной окружности треугольника ABC в его вершинах A, B, C и касаются друг друга внешним образом. Докажите, что

$$t_a=\frac{Rh_a}{a+h_a},\qquad t_b=\frac{Rh_b}{b+h_b},\qquad t_c=\frac{Rh_c}{c+h_c}.$$

См. также задачи 4.45, 4.46, 5.9, 5.60, 6.21, 7.9, 7.10, 11.1, 11.4.

§ 3. Вписанная, описанная и вневписанная окружности; их радиусы

12.18. Докажите, что:
а) $a = r(\operatorname{ctg}(\beta/2) + \operatorname{ctg}(\gamma/2)) = r\cos(\alpha/2)/(\sin(\beta/2)\sin(\gamma/2))$;
б) $a = r_a(\operatorname{tg}(\beta/2) + \operatorname{tg}(\gamma/2)) = r_a\cos(\alpha/2)/(\cos(\beta/2)\cos(\gamma/2))$;
в) $p - b = r\operatorname{ctg}(\beta/2) = r_a\operatorname{tg}(\gamma/2)$;
г) $p = r_a\operatorname{ctg}(\alpha/2)$.

12.19. Докажите, что:
а) $rp = r_a(p-a)$, $rr_a = (p-b)(p-c)$ и $r_br_c = p(p-a)$;
б) $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ (*формула Герона*);
в) $S^2 = rr_ar_br_c$.

12.20. Докажите, что $S = r_c^2\operatorname{tg}(\alpha/2)\operatorname{tg}(\beta/2)\operatorname{ctg}(\gamma/2)$.

12.21. Докажите, что $S = cr_ar_b/(r_a + r_b)$.

12.22. Докажите, что $\dfrac{2}{h_a} = \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c}$.

12.23. Докажите, что $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c} = \dfrac{1}{r}$.

12.24. Докажите, что

$$\frac{1}{(p-a)(p-b)} + \frac{1}{(p-b)(p-c)} + \frac{1}{(p-c)(p-a)} = \frac{1}{r^2}.$$

12.25. Докажите, что $r_a + r_b + r_c = 4R + r$.

12.26. Докажите, что $r_ar_b + r_br_c + r_cr_a = p^2$.

12.27. Докажите, что $\dfrac{1}{r^3} - \dfrac{1}{r_a^3} - \dfrac{1}{r_b^3} - \dfrac{1}{r_c^3} = \dfrac{12R}{S^2}$.

12.28*. Докажите, что $a(b+c) = (r + r_a)(4R + r - r_a)$ и $a(b-c) = (r_b - r_c)(4R - r_b - r_c)$.

12.29*. Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $\dfrac{OA^2}{bc} + \dfrac{OB^2}{ac} + \dfrac{OC^2}{ab} = 1$.

12.30*. а) Докажите, что если для некоторого треугольника $p = 2R + r$, то этот треугольник прямоугольный.

б) Докажите, что если $p = 2R\sin\varphi + r\operatorname{ctg}(\varphi/2)$, то φ — один из углов треугольника (предполагается, что $0 < \varphi < \pi$).

12.31*. Докажите, что если

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \sqrt{3}(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma),$$

то один из углов треугольника ABC равен $60°$.

§ 4. Длины сторон, высоты, биссектрисы

12.32. Докажите, что $abc = 4prR$ и $ab + bc + ca = r^2 + p^2 + 4rR$.

12.33. Докажите, что $\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca} = \dfrac{1}{2Rr}$.

12.34. Докажите, что $\dfrac{a+b-c}{a+b+c} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\beta}{2}\right)$.

12.35. Докажите, что $h_a = bc/2R$.

12.36. Докажите, что

$$h_a = 2(p-a)\cos(\beta/2)\cos(\gamma/2)/\cos(\alpha/2) = \\ = 2(p-b)\sin(\beta/2)\cos(\gamma/2)/\sin(\alpha/2).$$

12.37. Докажите, что длину биссектрисы l_a можно вычислить по следующим формулам:

а) $l_a = \sqrt{4p(p-a)bc/(b+c)^2}$;

б) $l_a = 2bc\cos(\alpha/2)/(b+c)$;

в) $l_a = 2R\sin\beta\sin\gamma/\cos((\beta-\gamma)/2)$;

г) $l_a = 4p\sin(\beta/2)\sin(\gamma/2)/(\sin\beta+\sin\gamma)$.

§ 5. Синусы и косинусы углов треугольника

Пусть α, β и γ — углы треугольника ABC. В задачах этого параграфа требуется доказать соотношения, указанные в формулировках.

12.38. а) $\sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)\sin(\gamma/2) = r/4R$.

б) $\operatorname{tg}(\alpha/2)\operatorname{tg}(\beta/2)\operatorname{tg}(\gamma/2) = r/p$.

в) $\cos(\alpha/2)\cos(\beta/2)\cos(\gamma/2) = p/4R$.

12.39. а) $\cos(\alpha/2)\sin(\beta/2)\sin(\gamma/2) = (p-a)/4R$.

б) $\sin(\alpha/2)\cos(\beta/2)\cos(\gamma/2) = r_a/4R$.

12.40. $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma = (R+r)/R$.

12.41. а) $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma+4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+1=0$.

б) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=1$.

в) $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma = \dfrac{OH^2}{2R^2}-\dfrac{3}{2}$, где O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот.

12.42. $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

12.43. а) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma = \dfrac{p^2-r^2-4rR}{2R^2}$.

б) $4R^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = p^2-(2R+r)^2$.

в) $\cos\alpha\cos\beta+\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cos\gamma = \dfrac{p^2+r^2-4R^2}{4R^2}$.

12.44. $ab\cos\gamma+bc\cos\alpha+ca\cos\beta = (a^2+b^2+c^2)/2$.

12.45. $\dfrac{\cos^2(\alpha/2)}{a}+\dfrac{\cos^2(\beta/2)}{b}+\dfrac{\cos^2(\gamma/2)}{c} = \dfrac{p}{4Rr}$.

§ 6. Тангенсы и котангенсы углов треугольника

Пусть α, β и γ — углы треугольника ABC. В задачах этого параграфа требуется доказать соотношения, указанные в формулировках.

12.46. а) $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma = (a^2+b^2+c^2)/4S$.

б) $a^2\operatorname{ctg}\alpha+b^2\operatorname{ctg}\beta+c^2\operatorname{ctg}\gamma = 4S$.

12.47. а) $\operatorname{ctg}(\alpha/2)+\operatorname{ctg}(\beta/2)+\operatorname{ctg}(\gamma/2)=p/r$.

б) $\operatorname{tg}(\alpha/2)+\operatorname{tg}(\beta/2)+\operatorname{tg}(\gamma/2)=\left(\dfrac{a}{r_a}+\dfrac{b}{r_b}+\dfrac{c}{r_c}\right)/2$.

12.48. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$.

12.49. $\operatorname{tg}(\alpha/2)\operatorname{tg}(\beta/2)+\operatorname{tg}(\beta/2)\operatorname{tg}(\gamma/2)+\operatorname{tg}(\gamma/2)\operatorname{tg}(\alpha/2)=1$.

12.50. а) $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma=1$.

б) $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma-\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma=1/(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)$.

12.51. Для непрямоугольного треугольника $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=$ $=4S/(a^2+b^2+c^2-8R^2)$.

§ 7. Вычисление углов

12.52. Даны две пересекающиеся окружности радиуса R, причём расстояние между их центрами больше R. Докажите, что $\beta=3\alpha$ (рис. 12.2).

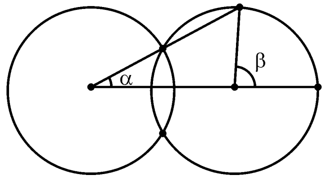


Рис. 12.2

12.53. Докажите, что если $\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{l_a}$, то $\angle A=120^\circ$.

12.54. В треугольнике ABC высота AH равна медиане BM. Найдите угол MBC.

12.55. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE. Найдите величину угла C, если известно, что $AD\cdot BC=BE\cdot AC$ и $AC\neq BC$.

12.56. Найдите угол B треугольника ABC, если длина высоты CH равна половине длины стороны AB, а $\angle BAC=75^\circ$.

12.57*. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом A на высоте AD как на диаметре построена окружность, пересекающая сторону AB в точке K и сторону AC в точке M. Отрезки AD и KM пересекаются в точке L. Найдите острые углы треугольника ABC, если известно, что $AK:AL=AL:AM$.

12.58*. В треугольнике ABC угол C вдвое больше угла A и $b=2a$. Найдите углы этого треугольника.

12.59*. В треугольнике ABC проведена биссектриса BE и на стороне BC взята точка K так, что $\angle AKB=2\angle AEB$. Найдите величину угла AKE, если $\angle AEB=\alpha$.

* * *

12.60*. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC угол при вершине A равен 80°. Внутри треугольника ABC взята точка M так, что $\angle MBC=30^\circ$ и $\angle MCB=10^\circ$. Найдите величину угла AMC.

12.61*. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC угол при вершине B равен 20°.На сторонах BC и AB взяты точки

D и E соответственно так, что $\angle DAC = 60^\circ$ и $\angle ECA = 50^\circ$. Найдите угол ADE.

12.62*. В остроугольном треугольнике ABC отрезки BO и CO, где O — центр описанной окружности, продолжены до пересечения в точках D и E со сторонами AC и AB. Оказалось, что $\angle BDE = 50^\circ$ и $\angle CED = 30^\circ$. Найдите величины углов треугольника ABC.

См. также задачу 1.33.

§ 8. Окружности

12.63. Окружность S с центром O на основании BC равнобедренного треугольника ABC касается равных сторон AB и AC. На сторонах AB и AC взяты точки P и Q так, что отрезок PQ касается окружности S. Докажите, что тогда $4PB \cdot CQ = BC^2$.

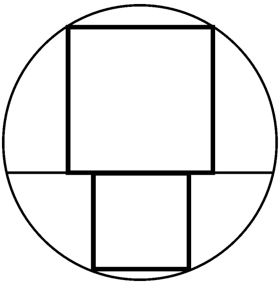


Рис. 12.3

12.64*. Пусть E — середина стороны AB квадрата $ABCD$, а точки F и G выбраны на сторонах BC и CD так, что $AG \parallel EF$. Докажите, что отрезок FG касается окружности, вписанной в квадрат $ABCD$.

12.65*. Хорда окружности удалена от центра на расстояние h. В каждый из сегментов, стягиваемых хордой, вписан квадрат так, что две соседние вершины квадрата лежат на дуге, а две другие — на хорде или её продолжении (рис. 12.3). Чему равна разность длин сторон этих квадратов?

12.66*. Найдите отношение сторон треугольника, одна из медиан которого делится вписанной окружностью на три равные части.

* * *

12.67*. В окружность вписан квадрат, а в сегмент, отсечённый от круга одной из сторон этого квадрата, вписан другой квадрат. Найдите отношение длин сторон этих квадратов.

12.68*. На отрезке AB взята точка C и на отрезках AC, BC и AB как на диаметрах построены полуокружности, лежащие по одну сторону от прямой AB. Через точку C проведена прямая, перпендикулярная AB, и в образовавшиеся криволинейные треугольники ACD и BCD вписаны окружности S_1 и S_2 (рис. 12.4). Докажите, что радиусы этих окружностей равны.

12.69*. Центры окружностей с радиусами 1, 3 и 4 расположены на сторонах AD и BC прямоугольника $ABCD$. Эти окружности касаются друг друга и прямых AB и CD так, как показано на рис. 12.5. Докажите, что существует окружность, касающаяся всех этих окружностей и прямой AB.

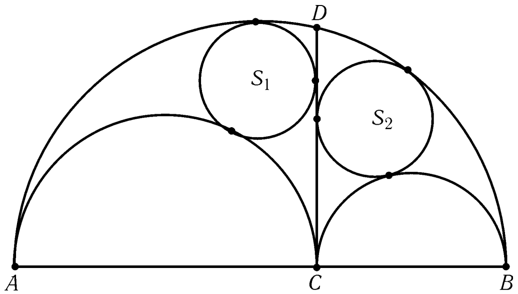


Рис. 12.4

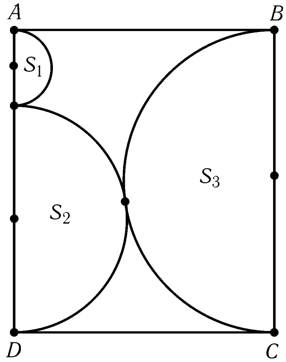


Рис. 12.5

§ 9. Разные задачи

12.70. Найдите все треугольники, у которых углы образуют арифметическую прогрессию, а стороны: а) арифметическую прогрессию; б) геометрическую прогрессию.

12.71. Найдите высоту h трапеции, у которой основания AB и CD равны a и b ($a < b$), угол между диагоналями равен 90°, а угол между продолжениями боковых сторон равен 45°.

12.72. Вписанная окружность касается стороны BC треугольника ABC в точке K. Докажите, что площадь треугольника равна $BK \cdot KC \operatorname{ctg}(\alpha/2)$.

12.73. Докажите, что если $\operatorname{ctg}(\alpha/2) = (b + c)/a$, то треугольник прямоугольный.

12.74. Продолжения биссектрис треугольника ABC пересекают описанную окружность в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что $S_{ABC}/S_{A_1B_1C_1} = 2r/R$, где r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника ABC.

12.75. Докажите, что сумма котангенсов углов треугольника ABC равна сумме котангенсов углов треугольника, составленного из медиан треугольника ABC.

12.76*. Пусть A_4 — ортоцентр треугольника $A_1A_2A_3$. Докажите, что существуют такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$, что $A_iA_j^2 = \lambda_i + \lambda_j$, причём, если треугольник не прямоугольный, то $\sum(1/\lambda_i) = 0$.

§ 10. Метод координат

12.77. Докажите, что расстояние от точки (x_0, y_0) до прямой $ax + by + c = 0$ равно $\dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

12.78. а) Докажите, что площадь треугольника с вершинами в точках $(0, 0)$, (x_1, y_1) и (x_2, y_2) равна $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$.

б) Докажите, что площадь треугольника с вершинами в точках (x_1, y_1), (x_2, y_2) и (x_3, y_3) равна

$$\frac{1}{2}|x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_2|.$$

12.79. Координаты вершин треугольника рациональны. Докажите, что координаты центра его описанной окружности также рациональны.

12.80. Диаметры AB и CD окружности S перпендикулярны. Хорда EA пересекает диаметр CD в точке K, хорда EC пересекает диаметр AB в точке L. Докажите, что если $CK : KD = 2 : 1$, то $AL : LB = 3 : 1$.

12.81. В треугольнике ABC угол C прямой. Докажите, что при гомотетии с центром C и коэффициентом 2 вписанная окружность переходит в окружность, касающуюся описанной окружности.

12.82*. Квадрат $ABCD$ вращается вокруг своего неподвижного центра. Найдите геометрическое место середин отрезков PQ, где P — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на неподвижную прямую l, а Q — середина стороны AB.

12.83*. Дан треугольник $A_1A_2A_3$ и прямая l вне его, образующая с продолжениями сторон A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 углы α_3, α_1, α_2. Через точки A_1, A_2, A_3 проводятся прямые, образующие с l соответственно углы $\pi - \alpha_1$, $\pi - \alpha_2$, $\pi - \alpha_3$. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке. (Все углы отсчитываются от прямой l в одном направлении.)

См. также задачи 3.58, 3.75, 7.6, 7.14, 7.49, 18.26, 22.36, 30.29.

Задачи для самостоятельного решения

12.84. Каждая из двух окружностей касается обеих сторон данного прямого угла. Найдите отношение радиусов окружностей, если известно, что одна из них проходит через центр другой.

12.85. Пусть продолжения сторон AB и CD, BC и AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точках K и M соответственно. Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ACM, BDK, ACK, BDM, связаны соотношением $R_{ACM} \cdot R_{BDK} = R_{ACK} \cdot R_{BDM}$.

12.86. Три окружности радиусов 1, 2, 3 касаются друг друга внешним образом. Найдите радиус окружности, проходящей через точки касания этих окружностей.

12.87. Пусть точка K лежит на стороне BC треугольника ABC. Докажите, что

$$AC^2 \cdot BK + AB^2 \cdot CK = BC(AK^2 + BK \cdot KC).$$

12.88. Докажите, что длина биссектрисы внешнего угла A треугольника ABC равна $\dfrac{2bc\sin(\alpha/2)}{|b-c|}$.

12.89. Две окружности радиусов R и r расположены так, что их общие внутренние касательные перпендикулярны. Найдите площадь треугольника, образованного этими касательными и общей внешней касательной.

12.90. Докажите, что сумма углов при лучах любой (неправильной) пятиконечной звезды равна 180°.

12.91. Докажите, что в любом треугольнике

$$S=(p-a)^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$$

12.92. Пусть $a<b<c$ — длины сторон треугольника; l_a, l_b, l_c и l'_a, l'_b, l'_c — длины его биссектрис и биссектрис внешних углов. Докажите, что $\dfrac{1}{al_al'_a}+\dfrac{1}{cl_cl'_c}=\dfrac{1}{bl_bl'_b}$.

12.93. В каждый угол треугольника вписана окружность, касающаяся вписанной окружности треугольника. Найдите радиус вписанной окружности, если известны радиусы этих окружностей.

12.94. Вписанная окружность касается сторон AB, BC, CA в точках K, L, M соответственно. Докажите, что:

а) $S=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{MK^2}{\sin\alpha}+\dfrac{KL^2}{\sin\beta}+\dfrac{LM^2}{\sin\gamma}\right)$;

б) $S^2=\dfrac{1}{4}(bcMK^2+caKL^2+abLM^2)$;

в) $\dfrac{MK^2}{h_bh_c}+\dfrac{KL^2}{h_ch_a}+\dfrac{LM^2}{h_ah_b}=1$.

Решения

12.1. По теореме синусов $\sin\gamma=c/2R$, поэтому $S=(ab\sin\gamma)/2=abc/4R$.

12.2. Радиусы описанных окружностей треугольников ABD и CBD равны $AB/(2\sin ADB)$ и $BC/(2\sin BDC)$. Остаётся заметить, что $AB=BC$ и $\sin ADB=\sin BDC$.

12.3. По теореме синусов $b=a\sin\beta/\sin\alpha=a\sin\beta/\sin(\beta+\gamma)$, поэтому $S=(ab\sin\gamma)/2=(a^2\sin\beta\sin\gamma)/2\sin(\beta+\gamma)$.

12.4. По теореме синусов $(a+b)/c=(\sin\alpha+\sin\beta)/\sin\gamma$. Кроме того, $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin((\alpha+\beta)/2)\cos((\alpha-\beta)/2)=2\cos(\gamma/2)\cos((\alpha-\beta)/2)$ и $\sin\gamma=2\sin(\gamma/2)\cos(\gamma/2)$. Второе равенство доказывается аналогично.

12.5. В треугольнике A_2BC_2 длины сторон A_2B и BC_2 равны $b\cos\gamma$ и $b\cos\alpha$; прямая BO делит угол A_2BC_2 на углы $90^\circ-\gamma$ и $90^\circ-\alpha$. Пусть прямая BO пересекает отрезок A_2C_2 в точке M. По теореме синусов $A_2M=A_2B\sin A_2BM/\sin A_2MB=b\cos\gamma\cos\alpha/\sin C_2MB=C_2M$.

12.6. Пусть $\alpha=\angle(a, c)$, $\beta=\angle(c, d)$ и $\gamma=\angle(d, b)$. Тогда

$$(AC/AS)/(BC/BS)=\sin\alpha/\sin(\beta+\gamma),\qquad (BD/BS)/(AD/AS)=\sin\gamma/\sin(\alpha+\beta).$$

Поэтому $(AC\cdot BD)/(BC\cdot AD)=\sin\alpha\sin\gamma/(\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma))$.

12.7. Так как $OA/PA = \sin OPA/\sin POA$ и $OB/PB = \sin OPB/\sin POB$, то $(OA/OB)/(PA/PB) = \sin POB/\sin POA$.

12.8. Достаточно перемножить пять равенств вида $D_1A/D_1B = \sin B/\sin A$.

12.9. Пусть O — общая вершина данных треугольников, M и N — середины оснований, k — отношение длин оснований к высотам. Проекции оснований данных треугольников на прямую MN равны $k \cdot OM \sin OMN$ и $k \cdot ON \sin ONM$. Остаётся заметить, что $OM/\sin ONM = ON/\sin OMN$.

12.10. По теореме синусов $BX/\sin BDX = BD/\sin BXD = 2R\sin\psi/\sin BXD$. Кроме того, $\sin BDX = \sin BDC = \sin\varphi$; величина угла BXD легко вычисляется: если точки C и D лежат по одну сторону от AB, то $\angle BXD = \pi - \varphi - \psi$, а если по разные, то $\angle BXD = |\varphi - \psi|$. Значит, $BX = 2R\sin\varphi\sin\psi/\sin|\varphi \pm \psi|$.

12.11. а) Пусть A_1 — середина отрезка BC. Складывая равенства $AB^2 = AA_1^2 + A_1B^2 - 2AA_1 \cdot BA_1 \cos BA_1A$ и $AC^2 = AA_1^2 + A_1C^2 - 2AA_1 \cdot A_1C \cos CA_1A$ и учитывая, что $\cos BA_1A = -\cos CA_1A$, получаем требуемое.

б) Очевидным образом следует из задачи а).

12.12. По теореме косинусов $a^2 - (b-c)^2 = 2bc(1-\cos\alpha) = 4S(1-\cos\alpha)/\sin\alpha = 4S\,\mathrm{tg}(\alpha/2)$.

12.13. По теореме косинусов $\cos\alpha = (b^2 + c^2 - a^2)/2bc$. Остаётся воспользоваться формулами $\sin^2(\alpha/2) = (1-\cos\alpha)/2$ и $\cos^2(\alpha/2) = (1+\cos\alpha)/2$.

12.14. Пусть α — угол при вершине параллелограмма. По теореме косинусов $m^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$ и $n^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$. Поэтому $m^2n^2 = (a^2+b^2)^2 - (2ab\cos\alpha)^2 = a^4 + b^4 + 2a^2b^2(1 - 2\cos^2\alpha)$. Значит, $m^2n^2 = a^4 + b^4$ тогда и только тогда, когда $\cos^2\alpha = 1/2$.

12.15. Пусть M — точка пересечения медиан AA_1 и BB_1. Угол AMB прямой тогда и только тогда, когда $AM^2 + BM^2 = AB^2$, т. е. $4(m_a^2 + m_b^2)/9 = c^2$. Согласно задаче 12.11 а) $m_a^2 + m_b^2 = (4c^2 + a^2 + b^2)/4$.

12.16. Если $m = C_1M$ и $\varphi = \angle C_1MO$, то $OC_1^2 = C_1M^2 + OM^2 - 2OM \cdot C_1M\cos\varphi$ и $BO^2 = CO^2 = OM^2 + MC^2 + 2OM \cdot CM\cos\varphi = OM^2 + 4C_1M^2 + 4OM \cdot C_1M\cos\varphi$. Поэтому $BC_1^2 = BO^2 - OC_1^2 = 3C_1M^2 + 6OM \cdot C_1M\cos\varphi$, т. е. $c^2 = 4BC_1^2 = 12m^2 + 24OM \cdot C_1M\cos\varphi$. Ясно также, что $18m^2 = 2m_c^2 = a^2 + b^2 - c^2/2$ (см. задачу 12.11 а). Поэтому равенство $a^2 + b^2 = 2c^2$ эквивалентно тому, что $18m^2 = 3c^2/2$, т. е. $c^2 = 12m^2$. Так как $c^2 = 12m^2 + 24OM \cdot C_1M\cos\varphi$, равенство $a^2 + b^2 = 2c^2$ эквивалентно тому, что $\angle C_1MO = \varphi = 90^\circ$, т. е. $CC_1 \perp OM$.

12.17. Пусть O — центр описанной окружности. Применив теорему косинусов к треугольнику AOB, получим $\cos 2\gamma = 1 - \dfrac{c^2}{2R^2}$. Если окружности радиусов t_a и t_b касаются внутренним образом описанной окружности в вершинах A и B и касаются друг друга внешним образом, то по теореме косинусов

$$(R - t_a)^2 + (R - t_b)^2 - 2(R - t_a)(R - t_b)\left(1 - \frac{c^2}{2R^2}\right) = (t_a + t_b)^2,$$

поэтому

$$\frac{c^2}{2R^2} = 1 - \frac{(R - t_a)^2 + (R - t_b)^2 - (t_a + t_b)^2}{2(R - t_a)(R - t_b)} = \frac{4t_at_b}{2(R - t_a)(R - t_b)},$$

т. е. $c^2 = \dfrac{4t_at_bR^2}{(R - t_a)(R - t_b)}$. Аналогично $a^2 = \dfrac{4t_bt_cR^2}{(R - t_b)(R - t_c)}$ и $b^2 = \dfrac{4t_at_cR^2}{(R - t_a)(R - t_c)}$.

Следовательно, $\dfrac{b^2c^2}{a^2} = \dfrac{4t_a^2R^2}{(R-t_a)^2}$. Поэтому $\dfrac{t_a}{R-t_a} = \dfrac{bc}{2Ra}$, а значит,

$$t_a = \frac{Rbc}{2Ra+bc} = \frac{Rabc}{2Ra^2+abc} = \frac{4R^2S}{2Ra^2+4RS} = \frac{2RS}{a^2+2S} = \frac{Rah_a}{a^2+ah_a} = \frac{Rh_a}{a+h_a}.$$

12.18. а) и б) Пусть вписанная окружность касается стороны BC в точке K, а вневписанная — в точке L. Тогда $BC = BK + KC = r\,\mathrm{ctg}(\beta/2) + r\,\mathrm{ctg}(\gamma/2)$ и $BC = BL + LC = r_a\,\mathrm{ctg}\,LBO_a + r_a\,\mathrm{ctg}\,LCO_a = r_a\,\mathrm{tg}(\beta/2) + r_a\,\mathrm{tg}(\gamma/2)$. Кроме того, $\cos(\alpha/2) = \sin\left(\dfrac{\beta}{2}+\dfrac{\gamma}{2}\right)$.

в) Согласно задаче 3.2 $p-b = BK = r\,\mathrm{ctg}(\beta/2)$ и $p-b = CL = r_a\,\mathrm{tg}(\gamma/2)$.

г) Если вписанная окружность касается продолжений сторон AB и AC в точках P и Q, то $p = AP = AQ = r_a\,\mathrm{ctg}(\alpha/2)$.

12.19. а) Согласно задаче 12.18 $p=r_a\,\mathrm{ctg}(\alpha/2)$ и $r\,\mathrm{ctg}(\alpha/2)=p-a$; $r\,\mathrm{ctg}(\beta/2)= =p-b$ и $r_a\,\mathrm{tg}(\beta/2) = p-c$; $r_c\,\mathrm{tg}(\beta/2) = p-a$ и $r_b\,\mathrm{ctg}(\beta/2) = p$. Перемножая эти пары равенств, получаем требуемое.

б) Перемножая равенства $rp = r_a(p-a)$ и $rr_a = (p-b)(p-c)$, получаем $r^2p = (p-a)(p-b)(p-c)$. Ясно также, что $S^2 = p(r^2p)$.

в) Достаточно перемножить равенства $rr_a = (p-b)(p-c)$ и $r_br_c = p(p-a)$ и воспользоваться формулой Герона.

12.20. Согласно задаче 12.18 $r = r_c\,\mathrm{tg}(\alpha/2)\,\mathrm{tg}(\beta/2)$ и $p = r_c\,\mathrm{ctg}(\gamma/2)$.

12.21. Согласно задаче 12.19 а) $r_a = rp/(p-a)$ и $r_b = rp/(p-b)$. Поэтому $cr_ar_b = cr^2p^2/((p-a)(p-b))$ и $r_a + r_b = rpc/((p-a)(p-b))$, а значит, $cr_ar_b/(r_a+r_b) = rp = S$.

12.22. Согласно задаче 12.19 а) $1/r_b = (p-b)/pr$ и $1/r_c = (p-c)/pr$. Поэтому $\dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c} = a/pr = a/S = 2/h_a$.

12.23. Легко проверить, что $1/h_a = a/2pr$ и $1/r_a = (p-a)/pr$. Складывая аналогичные равенства, получаем требуемое.

12.24. Согласно задаче 12.19 а) $1/((p-b)(p-c)) = 1/rr_a$. Остаётся сложить аналогичные равенства и воспользоваться результатом задачи 12.23.

12.25. Согласно задаче 12.1 $4SR = abc$. Ясно также, что

$$abc = p(p-b)(p-c) + p(p-c)(p-a) + p(p-a)(p-b) - \\ - (p-a)(p-b)(p-c) = \frac{S^2}{(p-a)} + \frac{S^2}{(p-b)} + \frac{S^2}{(p-c)} - \frac{S^2}{p} = S(r_a + r_b + r_c - r).$$

12.26. Согласно задаче 12.19 а) $r_ar_b = p(p-c)$, $r_br_c = p(p-a)$ и $r_cr_a = p(p-b)$. Складывая эти равенства, получаем требуемое.

12.27. Так как $S = rp = r_a(p-a) = r_b(p-b) = r_c(p-c)$, то выражение в левой части равно $(p^3 - (p-a)^3 - (p-b)^3 - (p-c)^3)/S^3 = 3abc/S^3$. Остаётся заметить, что $abc/S = 4R$ (задача 12.1).

12.28. Пусть углы треугольника ABC равны 2α, 2β и 2γ. Согласно задачам 12.38 а) и 12.39 б) $r = 4R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ и $r_a = 4R\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma$. Поэтому

$$(r + r_a)(4R + r - r_a) = \\ = 16R^2\sin\alpha(\sin\beta\sin\gamma + \cos\beta\cos\gamma)(1 + \sin\alpha(\sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma)) = \\ = 16R^2\sin\alpha\cos(\beta-\gamma)(1 - \sin\alpha\cos(\beta+\gamma)) = 16R^2\sin\alpha\cos(\beta-\gamma)\cos^2\alpha.$$

Остаётся заметить, что $4R\sin\alpha\cos\alpha = a$ и
$$4R\sin(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma) = 2R(\sin 2\beta + \sin 2\gamma) = b + c.$$
Второе равенство доказывается аналогично.

12.29. Так как $OA = r/\sin(\alpha/2)$ и $bc = 2S/\sin\alpha$, то $OA^2/bc = r^2\operatorname{ctg}(\alpha/2)/S = r(p-a)/S$ (см. задачу 12.18 в). Остаётся заметить, что $r(p-a+p-b+p-c) = rp = S$.

12.30. Решим сразу задачу б), частным случаем которой является задача а). Так как $\operatorname{ctg}(\varphi/2) = \sin\varphi/(1-\cos\varphi)$, то данное соотношение можно записать в виде $p^2(1-x)^2 = (1-x^2)(2R(1-x)+r)^2$, где $x = \cos\varphi$. Корень $x_0 = 1$ этого уравнения нас не интересует, так как в этом случае $\operatorname{ctg}(\varphi/2)$ был бы не определён; поэтому, сократив обе части уравнения на $1-x$, придём к кубическому уравнению. Использовав результаты задач 12.40, 12.43 б) и в), можно проверить, что это уравнение совпадает с уравнением $(x-\cos\alpha)(x-\cos\beta)(x-\cos\gamma) = 0$, где α, β и γ — углы треугольника. Значит, косинус угла φ равен косинусу одного из углов треугольника; кроме того, косинус монотонен на интервале от 0 до π.

12.31. Согласно теореме синусов $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = p/r$. Согласно задаче 12.40 $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \dfrac{R+r}{r}$. Поэтому приведённое в условии задачи соотношение можно переписать следующим образом: $p = (R+r)\sqrt{3}$. Для $\varphi = 60^\circ$ имеем $(R+r)\sqrt{3} = 2R\sin\varphi + r\operatorname{ctg}(\varphi/2)$. Остаётся воспользоваться результатом задачи 12.30 б).

12.32. Ясно, что $2pr = 2S = ab\sin\gamma = abc/2R$, т. е. $4prR = abc$. Для доказательства второго равенства воспользуемся формулой Герона: $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$, т. е. $pr^2 = (p-a)(p-b)(p-c) = p^3 - p^2(a+b+c) + p(ab+bc+ca) - abc = -p^3 + p(ab+bc+ca) - 4prR$. Сокращая на p, получаем требуемое.

12.33. Так как $abc = 4RS$ (задача 12.1), то выражение в левой части равно $(c+a+b)/4RS = 2p/4Rpr = 1/2Rr$.

12.34. Достаточно заметить, что $(p-c)/p = r/r_c$ (задача 12.19 а), $r = c\sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)/\cos(\gamma/2)$ и $r_c = c\cos(\alpha/2)\cos(\beta/2)/\cos(\gamma/2)$ (задача 12.18).

12.35. Согласно задаче 12.1 $S = abc/4R$. С другой стороны, $S = ah_a/2$. Поэтому $h_a = bc/2R$.

12.36. Так как $ah_a = 2S = 2(p-a)r_a$ и $r_a/a = \cos(\beta/2)\cos(\gamma/2)/\cos(\alpha/2)$ (задача 12.18 б), то $h_a = 2(p-a)\cos(\beta/2)\cos(\gamma/2)/\cos(\alpha/2)$. Учитывая, что $(p-a)\operatorname{ctg}(\beta/2) = r_c = (p-b)\operatorname{ctg}(\alpha/2)$ (задача 12.18 в), получаем $h_a = 2(p-b)\sin(\beta/2)\cos(\gamma/2)/\sin(\alpha/2)$.

12.37. а) Пусть продолжение биссектрисы AD пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке M. Тогда $AD\cdot DM = BD\cdot DC$ и, так как $\triangle ABD \sim \triangle AMC$, $AB\cdot AC = AD\cdot AM = AD(AD+DM) = AD^2 + BD\cdot DC$. Кроме того, $BD = ac/(b+c)$ и $DC = ab/(b+c)$. Значит, $AD^2 = bc - bca^2/(b+c)^2 = 4p(p-a)bc/(b+c)^2$.

б) См. решение задачи 4.48.

в) Пусть AD — биссектриса, AH — высота треугольника ABC. Тогда $AH = c\sin\beta = 2R\sin\beta\sin\gamma$. С другой стороны, $AH = AD\sin ADH = l_a\sin(\beta + (\alpha/2)) = l_a\sin((\pi+\beta-\gamma)/2) = l_a\cos((\beta-\gamma)/2)$.

г) Учитывая, что $p = 4R\cos(\alpha/2)\cos(\beta/2)\cos(\gamma/2)$ (задача 12.38 в) и $\sin\beta + \sin\gamma = 2\sin((\beta+\gamma)/2)\cos((\beta-\gamma)/2) = 2\cos(\alpha/2)\cos((\beta-\gamma)/2)$, приходим к формуле задачи в).

12.38. а) Пусть O — центр вписанной окружности, K — точка касания вписанной окружности со стороной AB. Тогда

$$2R\sin\gamma = AB = AK + KB = r(\operatorname{ctg}(\alpha/2) + \operatorname{ctg}(\beta/2)) = \\ = r\sin((\alpha+\beta)/2)\,(\sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)).$$

Учитывая, что $\sin\gamma = 2\sin(\gamma/2)\cos(\gamma/2)$ и $\sin((\alpha+\beta)/2) = \cos(\gamma/2)$, получаем требуемое.

б) Согласно задаче 3.2 $p - a = AK = r\operatorname{ctg}(\alpha/2)$. Аналогично $p - b = r\operatorname{ctg}(\beta/2)$ и $p - c = r\operatorname{ctg}(\gamma/2)$. Перемножая эти равенства и учитывая, что $p(p-a)(p-b)(p-c) = S^2 = (pr)^2$, получаем требуемое.

в) Очевидным образом следует из задач а) и б).

12.39. а) Перемножая равенства

$$r\cos(\alpha/2)/\sin(\alpha/2) = p - a, \quad \sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)\sin(\gamma/2) = r/4R$$

(см. задачи 12.18 в) и 12.38 а), получаем требуемое.

б) Согласно задаче 12.18 в) $r_a\operatorname{tg}(\gamma/2) = r\operatorname{ctg}(\beta/2)$. Умножая это равенство на равенство $r/4R = \sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)\sin(\gamma/2)$, получаем требуемое.

12.40. Складывая равенства $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos((\alpha+\beta)/2)\cos((\alpha-\beta)/2)$ и $\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta) = -2\cos^2((\alpha+\beta)/2) + 1$ и учитывая, что $\cos((\alpha-\beta)/2) - \cos((\alpha+\beta)/2) = 2\sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)$, получаем

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4\sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)\sin(\gamma/2) + 1 = \frac{r}{R} + 1$$

(см. задачу 12.38 а).

12.41. а) Складывая равенства $\cos 2\alpha + \cos 2\beta = 2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = -2\cos\gamma\cos(\alpha-\beta)$ и $\cos 2\gamma = 2\cos^2\gamma - 1 = -2\cos\gamma\cos(\alpha+\beta) - 1$ и учитывая, что $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$, получаем требуемое.

б) Достаточно подставить выражения вида $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ в равенство, полученное в задаче а).

в) Согласно задаче 13.13 $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, поэтому

$$OH^2 = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})^2 = 3R^2 + 2R^2(\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma).$$

При записи последнего равенства мы воспользовались тем, что $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2R\cos\angle AOB = 2R\cos 2\gamma$ и т. д.

12.42. Складывая равенства $\sin 2\alpha + \sin 2\beta = 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = 2\sin\gamma\cos(\alpha-\beta)$ и $\sin 2\gamma = 2\sin\gamma\cos\gamma = -2\sin\gamma\cos(\alpha+\beta)$ и учитывая, что $\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\sin\beta$, получаем требуемое.

12.43. а) Ясно, что $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = (a^2+b^2+c^2)/4R$ и $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 4p^2 - 2(r^2+p^2+4rR)$ (см. задачу 12.32).

б) Согласно задаче 12.41 б) $2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2$. Остаётся воспользоваться результатом задачи а).

в) Возведём в квадрат тождество из задачи 12.40, подставим в полученное тождество $1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ вместо $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$ (задача 12.41 б), а затем воспользуемся задачей б). В результате получим требуемое.

12.44. Теорему косинусов можно переписать в виде $ab\cos\gamma = (a^2+b^2-c^2)/2$. Складывая три аналогичных равенства, получаем требуемое.

12.45. Согласно задаче 12.13 $\cos^2(\alpha/2)/a = p(p-a)/abc$. Остаётся заметить, что $p(p-a) + p(p-b) + p(p-c) = p^2$ и $abc = 4SR = 4prR$.

12.46. а) Так как $bc\cos\alpha = 2S\operatorname{ctg}\alpha$, то $a^2 = b^2 + c^2 - 4S\operatorname{ctg}\alpha$. Складывая три аналогичных равенства, получаем требуемое.

б) Для остроугольного треугольника $a^2\operatorname{ctg}\alpha = 2R^2\sin 2\alpha = 4S_{BOC}$, где O — центр описанной окружности. Остаётся сложить три аналогичных равенства. Для треугольника с тупым углом α величину S_{BOC} нужно взять со знаком минус.

12.47. Согласно задаче 12.18 $\operatorname{ctg}(\alpha/2) + \operatorname{ctg}(\beta/2) = c/r$ и $\operatorname{tg}(\alpha/2) + \operatorname{tg}(\beta/2) = c/r_c$. Остаётся сложить такие равенства для всех пар углов треугольника.

12.48. Ясно, что $\operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = -(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)/(1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)$. Домножая обе части на $1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$, получаем требуемое.

12.49. $\operatorname{tg}(\gamma/2) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = [1 - \operatorname{tg}(\alpha/2)\operatorname{tg}(\beta/2)]/[\operatorname{tg}(\alpha/2) + \operatorname{tg}(\beta/2)]$. Остаётся домножить обе части на $\operatorname{tg}(\alpha/2) + \operatorname{tg}(\beta/2)$.

12.50. а) Домножим обе части равенства на $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$. Дальнейший ход доказательства таков:

$$\cos\gamma(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha) + \sin\gamma(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) = \\ = \cos\gamma\sin(\alpha+\beta) + \sin\gamma\cos(\alpha+\beta) = \cos\gamma\sin\gamma - \sin\gamma\cos\gamma = 0.$$

б) Домножим обе части равенства на $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$. Дальнейший ход доказательства таков: $\cos\alpha(\sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma) + \sin\alpha(\cos\beta\sin\gamma + \cos\gamma\sin\beta) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

12.51. Так как $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2 = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ (см. задачу 12.41 б) и $S = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$, остаётся проверить, что

$$(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma)\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \sin\gamma\sin\beta\sin\alpha.$$

Последнее равенство доказано в решении задачи 12.50 а).

12.52. Пусть A и B — вершины углов α и β, P — точка пересечения несовпадающих сторон этих углов, Q — общая точка данных окружностей, лежащая на отрезке PA. Треугольник AQB равнобедренный, поэтому $\angle PQB = 2\alpha$. А так как $\angle PQB + \angle QPB = \beta + \angle QBA$, то $\beta = 3\alpha$.

12.53. Согласно задаче 4.48 $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2\cos(\alpha/2)/l_a$, поэтому $\cos(\alpha/2) = 1/2$, т. е. $\alpha = 120^\circ$.

12.54. Опустим из точки M перпендикуляр MD на прямую BC. Тогда $MD = AH/2 = BM/2$. В прямоугольном треугольнике BDM катет MD равен половине гипотенузы BM. Поэтому $\angle MBC = \angle MBD = 30^\circ$.

12.55. Величины $AD \cdot BC\sin ADB$ и $BE \cdot AC\sin AEB$ равны, так как они равны удвоенной площади треугольника ABC. Поэтому $\sin ADB = \sin AEB$. Возможны два случая.

1. $\angle ADB = \angle AEB$; в этом случае точки A, E, D, B лежат на одной окружности, поэтому $\angle EAD = \angle EBD$, т. е. $\angle A = \angle B$, чего не может быть по условию.

2. $\angle ADB + \angle AEB = 180^\circ$; в этом случае $\angle ECD + \angle EOD = 180^\circ$, где O — точка пересечения биссектрис. Так как $\angle EOD = 90^\circ + \angle C/2$ (задача 5.3), то $\angle C = 60^\circ$.

12.56. Пусть B' — точка пересечения серединного перпендикуляра к отрезку AC с прямой AB. Тогда $AB' = CB'$ и $\angle AB'C = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ$. Поэтому $AB' = CB' = 2CH = AB$, т. е. $B' = B$ и $\angle B = 30^\circ$.

12.57. Ясно, что $AKDM$ — прямоугольник и L — точка пересечения его диагоналей. Так как $AD \perp BC$ и $AM \perp BA$, то $\angle DAM = \angle ABC$. Аналогично, $\angle KAD = \angle ACB$. Опустим из точки A перпендикуляр AP на прямую KM.

Пусть для определённости $\angle B < \angle C$. Тогда точка P лежит на отрезке KL. Из подобия треугольников AKP и MKA получаем $AK : AP = MK : MA$. Поэтому $AK \cdot AM = AP \cdot MK = AP \cdot AD = 2AP \cdot AL$. По условию $AL^2 = AK \cdot AM$, следовательно, $AL = 2AP$, т. е. $\angle ALP = 30^\circ$. Ясно, что $\angle KMA = \angle ALP/2 = 15^\circ$. Поэтому острые углы треугольника ABC равны 15 и 75°.

12.58. Пусть CD — биссектриса. Тогда $BD = ac/(a+b)$. С другой стороны, $\triangle BDC \sim \triangle BCA$, поэтому $BD : BC = BC : BA$, т. е. $BD = a^2/c$. Следовательно, $c^2 = a(a+b) = 3a^2$. Стороны треугольника ABC равны a, $2a$ и $\sqrt{3}a$, поэтому его углы равны 30, 90 и 60°.

12.59. Пусть $\angle ABC = 2x$, тогда внешний угол A треугольника ABE равен $\angle ABE + \angle AEB = x + \alpha$. Далее, $\angle BAE - \angle BAK = (180^\circ - x - \alpha) - (180^\circ - 2x - 2\alpha) = x + \alpha$. Следовательно, AE — биссектриса внешнего угла A треугольника ABK. А так как BE — биссектриса внутреннего угла B этого треугольника, то E — центр его вневписанной окружности, касающейся стороны AK. Поэтому $\angle AKE = \angle AKC/2 = 90^\circ - \alpha$.

12.60. Пусть $A_1 \ldots A_{18}$ — правильный восемнадцатиугольник. В качестве треугольника ABC можно взять треугольник $A_{14}A_1A_9$. Согласно задаче 6.64 б) диагонали A_1A_{12}, A_2A_{14} и A_9A_{18} пересекаются в одной точке, поэтому $\angle AMC = (\smile A_{18}A_2 + \smile A_9A_{14})/2 = 70^\circ$.

12.61. Пусть $A_1 \ldots A_{18}$ — правильный восемнадцатиугольник, O — его центр. В качестве треугольника ABC можно взять треугольник A_1OA_{18}. Диагонали A_2A_{14} и $A_{18}A_6$ симметричны относительно диаметра A_1A_{10}, а диагональ A_2A_{14} проходит через точку пересечения диагоналей A_1A_{12} и A_9A_{18} (см. решение предыдущей задачи), поэтому $\angle ADE = (\smile A_1A_2 + \smile A_{12}A_{14})/2 = 30^\circ$.

12.62. Поскольку $\angle BDE = 50^\circ$ и $\angle CED = 30^\circ$, то $\angle BOC = \angle EOD = 180^\circ - 50^\circ - 30^\circ = 100^\circ$. Будем считать, что фиксированы диаметры BB' и CC' окружности, причём $\angle BOC = 100^\circ$, а точка A движется по дуге $B'C'$. Пусть D — точка пересечения BB' и AC, E — точка пересечения CC' и AB (рис. 12.6). Так как при движении точки A от B' к C' отрезок OE увеличивается, а OD уменьшается, то угол OED убывает, а угол ODE возрастает. Поэтому существует единственное положение точки A, при котором $\angle CED = \angle OED = 30^\circ$ и $\angle BDE = \angle ODE = 50^\circ$.

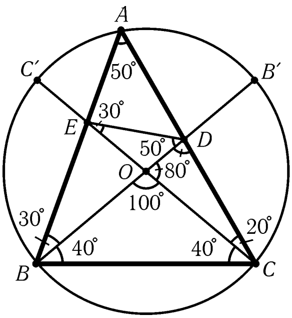


Рис. 12.6

Докажем теперь, что треугольник ABC с углами $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 70^\circ$, $\angle C = 60^\circ$ обладает требуемым свойством. Пусть $A_1 \ldots A_{18}$ — правильный восемнадцатиугольник. В качестве треугольника ABC можно взять треугольник $A_2A_{14}A_9$. Диагональ A_1A_{12} проходит через точку E (см. решение задачи 12.60). Пусть F — точка пересечения прямых A_1A_{12} и A_5A_{14}; прямая A_9A_{16} симметрична прямой A_1A_{12} относительно прямой A_5A_{14}, поэтому она проходит через точку F. В треугольнике CDF луч CE является биссектрисой угла C, а прямая FE — биссектрисой внешнего угла при вершине F. Поэтому DE — биссектриса угла ADB, т. е. $\angle ODE = (\smile A_2A_{14} + \smile A_5A_9)/4 = 50^\circ$.

12.63. Пусть D, E и F — точки касания окружности с BP, PQ и QC; $\angle BOD = 90^\circ - \angle B = 90^\circ - \angle C = \angle COF = \alpha$, $\angle DOP = \angle POE = \beta$ и $\angle EOQ = \angle QOF = \gamma$. Тогда $180^\circ = \angle BOC = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma$, т. е. $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$. Так как $\angle BPO = 90^\circ - \beta$

и $\angle QOC = \gamma + \alpha = 90^\circ - \beta$, то $\angle BPO = \angle COQ$. Ясно также, что $\angle PBO = \angle OCQ$. Поэтому $\triangle BPO \sim \triangle COQ$, а значит, $PB \cdot CQ = BO \cdot CO = BC^2/4$.

12.64. Пусть P и Q — середины сторон BC и CD соответственно. Точки P и Q являются точками касания вписанной окружности со сторонами BC и CD. Поэтому достаточно проверить, что $PF + GQ = FG$. В самом деле, если $F'G'$ — отрезок, параллельный FG и касающийся вписанной окружности, то $PF' + G'Q = F'G'$, поэтому $F' = F$ и $G' = G$.

Можно считать, что сторона квадрата равна 2. Пусть $GD = x$. Так как $BF : EB = AD : GD$, то $BF = 2/x$. Поэтому $CG = 2 - x$, $GQ = x - 1$, $CF = 2 - \frac{2}{x}$, $FP = \frac{2}{x} - 1$, т. е. $PF + GQ = x + 2/x - 2$ и $FG^2 = CG^2 + CF^2 = (2-x)^2 + \left(2 - \frac{2}{x}\right)^2 = 4 - 4x + x^2 + 4 - \frac{8}{x} + \frac{4}{x^2} = \left(x + \frac{2}{x} - 2\right)^2 = (PF + GQ)^2$.

12.65. Обозначим вершины квадратов так, как показано на рис. 12.7. Пусть O — центр окружности, H — середина данной хорды, K — середина отрезка AA_1. Так как $\operatorname{tg} AHB = 2 = \operatorname{tg} A_1HD_1$, точка H лежит на прямой AA_1. Пусть $\alpha = \angle AHB = \angle A_1HD_1$. Тогда $AB - A_1D_1 = (AH - A_1H)\sin\alpha = 2KH\sin\alpha = 2OH\sin^2\alpha$. Ясно, что $\sin^2\alpha = 4/5$. Поэтому разность длин сторон квадратов равна $8h/5$.

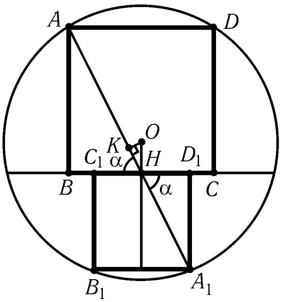


Рис. 12.7

12.66. Пусть медиана BM треугольника ABC пересекает вписанную окружность в точках K и L, причём $BK = KL = LM = x$. Пусть для определённости точка касания вписанной окружности со стороной AC лежит на отрезке MC. Тогда, так как при симметрии относительно серединного перпендикуляра к отрезку BM точки B и M переходят друг в друга, а вписанная окружность переходит в себя, касательная MC переходит в касательную BC. Следовательно, $BC = MC = AC/2$, т. е. $b = 2a$.

Так как $BM^2 = (2a^2 + 2c^2 - b^2)/4$ (см. задачу 12.11 а), то $9x^2 = (2a^2 + 2c^2 - 4a^2)/4 = (c^2 - a^2)/2$. Пусть точка P — точка касания вписанной окружности со стороной BC. Тогда $BP = (a + c - b)/2 = (c - a)/2$. С другой стороны, по свойству касательной $BP^2 = BK \cdot BL$, т. е. $BP^2 = 2x^2$. Поэтому $2x^2 = ((c-a)/2)^2$. Перемножая равенства $9x^2 = (c^2 - a^2)/2$ и $((c-a)/2)^2 = 2x^2$, получаем $(c + a)/(c - a) = 9/4$, т. е. $c : a = 13 : 5$. В итоге получаем, что $a : b : c = 5 : 10 : 13$.

12.67. Пусть $2a$ и $2b$ — длины сторон первого и второго квадратов. Тогда расстояние от центра окружности до вершин второго квадрата, лежащих на окружности, равно $\sqrt{(a + 2b)^2 + b^2}$. С другой стороны, это расстояние равно $\sqrt{2}a$. Следовательно, $(a + 2b)^2 + b^2 = 2a^2$, т. е. $a = 2b \pm \sqrt{4b^2 + 5b^2} = (2 \pm 3)b$. Нам подходит только решение $a = 5b$.

12.68. Пусть P и Q — середины отрезков AC и AB, R — центр окружности S_1; $a = AC/2$, $b = BC/2$, x — радиус окружности S_1. Легко проверить, что $PR = a + x$, $QR = a + b - x$ и $PQ = b$. Проведём в треугольнике PQR высоту RH. Расстояние от точки R до прямой CD равно x, поэтому $PH = a - x$, а значит, $QH = |b - a + x|$. Следовательно, $(a+x)^2 - (a-x)^2 = RH^2 = (a+b-x)^2 - (b-a+x)^2$, т. е. $ax = b(a - x)$. В итоге получаем $x = ab/(a + b)$. Для радиуса окружности S_2 получаем точно такое же выражение.

12.69. Пусть x — радиус окружности S, касающейся окружностей S_1 и S_2 и луча AB, y — радиус окружности S', касающейся окружностей S_2 и S_3 и луча BA. Положение окружности, касающейся окружности S_1 и луча AB (соответственно S_3 и луча BA) однозначно определяется её радиусом, поэтому достаточно проверить, что $x = y$.

Приравнивая два выражения для квадрата расстояния от центра окружности S до прямой AD, получаем $(x+1)^2 - (x-1)^2 = (3+x)^2 - (5-x)^2$, т. е. $x = 4/3$.

Рассматривая окружности S_2 и S_3, легко проверить, что $AB^2 = (3+4)^2 - 1^2 = 48$. С другой стороны, квадраты расстояний от центра окружности S' до прямых AD и BC равны $(y+3)^2 - (5-y)^2 = 16(y-1)$ и $(4+y)^2 - (4-y)^2 = 16y$ соответственно. Следовательно, $4\sqrt{y-1} + 4\sqrt{y} = \sqrt{48}$, т. е. $y = 4/3$.

12.70. Если углы треугольника образуют арифметическую прогрессию, то они равны $\alpha - \gamma$, α, $\alpha + \gamma$, где $\gamma \geqslant 0$. Так как сумма углов треугольника равна 180°, то $\alpha = 60^\circ$. Стороны этого треугольника равны $2R\sin(\alpha-\gamma)$, $2R\sin\alpha$, $2R\sin(\alpha+\gamma)$. Поскольку против большего угла лежит бóльшая сторона, то $\sin(\alpha-\gamma) \leqslant \sin\alpha \leqslant \sin(\alpha+\gamma)$.

а) Если числа $\sin(\alpha-\gamma) \leqslant \sin\alpha \leqslant \sin(\alpha+\gamma)$ образуют арифметическую прогрессию, то $\sin\alpha = (\sin(\alpha+\gamma) + \sin(\alpha-\gamma))/2 = \sin\alpha\cos\gamma$, т. е. $\cos\gamma = 1$, или $\gamma = 0$. Следовательно, все углы треугольника равны 60°.

б) Если числа $\sin(\alpha-\gamma) \leqslant \sin\alpha \leqslant \sin(\alpha+\gamma)$ образуют геометрическую прогрессию, то $\sin^2\alpha = \sin(\alpha-\gamma)\sin(\alpha+\gamma) = \sin^2\alpha\cos^2\gamma - \sin^2\gamma\cos^2\alpha \leqslant \sin^2\alpha\cos^2\gamma$. Поэтому $\cos\gamma = 1$, т. е. все углы треугольника равны 60°.

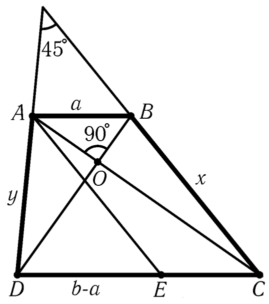


Рис. 12.8

12.71. Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABCE$ (рис. 12.8). Пусть $BC = x$ и $AD = y$. Тогда $(b-a)h = 2S_{AED} = xy\sin 45^\circ$ и $(b-a)^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 45^\circ = x^2 + y^2 - 2xy\sin 45^\circ$. По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = (AO^2 + BO^2) + (CO^2 + DO^2) = (BO^2 + CO^2) + (DO^2 + AO^2) = x^2 + y^2$. Следовательно, $(b-a)^2 = x^2 + y^2 - 2xy\sin 45^\circ = a^2 + b^2 - 2(b-a)h$, т. е. $h = ab/(b-a)$.

12.72. Так как $BK = (a+c-b)/2$ и $KC = (a+b-c)/2$ (см. задачу 3.2), то $BK \cdot KC = (a^2 - (b-c)^2)/4 = S\operatorname{tg}(\alpha/2)$ (см. задачу 12.12).

12.73. Так как $(b+c)/a = \cos((\beta-\gamma)/2)/\sin(\alpha/2)$ (задача 12.4), то $\cos((\beta-\gamma)/2) = \cos(\alpha/2)$, т. е. $\beta - \gamma = \pm\alpha$. Если $\beta = \gamma + \alpha$, то $\beta = 90^\circ$, а если $\beta + \alpha = \gamma$, то $\gamma = 90^\circ$.

12.74. Легко проверить, что $S_{ABC} = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$. Аналогично $S_{A_1B_1C_1} = 2R^2\sin((\beta+\gamma)/2)\sin((\alpha+\gamma)/2)\sin((\alpha+\beta)/2) = 2R^2\cos(\alpha/2)\cos(\beta/2)\cos(\gamma/2)$. Поэтому $S_{ABC}/S_{A_1B_1C_1} = 8\sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)\sin(\gamma/2) = 2r/R$ (см. задачу 12.38 а).

12.75. Сумма котангенсов углов треугольника равна $(a^2+b^2+c^2)/4S$ (задача 12.46 а). Кроме того, $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = 3(a^2+b^2+c^2)/4$ (задача 12.11 б) и площадь треугольника, составленного из медиан треугольника ABC, равна $3/4$ площади треугольника ABC (задача 1.37).

12.76. Одна из точек A_i лежит внутри треугольника, образованного тремя другими точками, поэтому можно считать, что треугольник $A_1A_2A_3$ остроугольный (или прямоугольный). Числа λ_1, λ_2 и λ_3 легко находятся из соответствующей системы уравнений; в результате получаем $\lambda_1 = (b^2 + c^2 - a^2)/2$, $\lambda_2 = (a^2 + c^2 - b^2)/2$ и $\lambda_3 = (a^2 + b^2 - c^2)/2$, где $a = A_2A_3$, $b = A_1A_3$ и $c = A_1A_2$. Согласно задаче 5.51 б) $A_1A_4^2 = 4R^2 - a^2$, где R — радиус описанной окружности треугольника $A_1A_2A_3$. Поэтому $\lambda_4 = A_1A_4^2 - \lambda_1 = 4R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)/2 = A_2A_4^2 - \lambda_2 = A_3A_4^2 - \lambda_3$.

Проверим теперь, что $\sum 1/\lambda_i = 0$. Так как $(b^2 + c^2 - a^2)/2 = bc\cos\alpha = 2S\operatorname{ctg}\alpha$, то $1/\lambda_1 = \operatorname{tg}\alpha/2S$. Остаётся заметить, что $2/(a^2 + b^2 + c^2 - 8R^2) = (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma)/2S$ (задача 12.51).

12.77. Если $ax_1 + by_1 + c = 0$ и $ax_2 + by_2 + c = 0$, то $a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) = 0$. Поэтому вектор (a, b) перпендикулярен рассматриваемой прямой. Следовательно, перпендикуляр, опущенный из точки (x_0, y_0) на рассматриваемую прямую, состоит из точек с координатами $(x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b)$. Если $a(x_0 + \lambda_0 a) + b(y_0 + \lambda_0 b) + c = 0$, т. е. $\lambda_0 = \dfrac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}$, то мы получаем точку на рассматриваемой прямой. Остаётся заметить, что расстояние от точки (x_0, y_0) до прямой $ax + by + c = 0$ равно $|\lambda_0|\sqrt{a^2 + b^2}$.

12.78. а) Прямая, проходящая через точки $(0, 0)$ и (x_1, y_1), задаётся уравнением $y_1x - x_1y = 0$. Поэтому согласно задаче 12.77 расстояние от точки (x_2, y_2) до этой прямой равно $\dfrac{|y_1x_2 - x_1y_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$. Это расстояние равно высоте рассматриваемого треугольника, опущенной на сторону длиной $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

б) Площадь рассматриваемого треугольника равна площади треугольника с вершинами в точках $(0, 0)$, $(x_1 - x_3, y_1 - y_3)$ и $(x_2 - x_3, y_2 - y_3)$. Воспользовавшись формулой из задачи а), получаем требуемое.

12.79. Пусть (a_1, b_1), (a_2, b_2) и (a_3, b_3) — координаты вершин треугольника. Координаты центра его описанной окружности задаются системой уравнений

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2,$$
$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = (x - a_3)^2 + (y - b_3)^2.$$

Легко проверить, что эти уравнения линейные, а значит, решение рассматриваемой системы уравнений рационально.

12.80. Возьмём на отрезках AB и CD точки K и L, делящие их в указанных отношениях. Достаточно доказать, что точка пересечения прямых AK и CL лежит на окружности S. Введём систему координат с началом в центре O окружности S и осями Ox и Oy, направленными по лучам OB и OD. Радиус окружности S можно считать равным 1. Прямые AK и CL задаются соответственно уравнениями $y = (x + 1)/3$ и $y = 2x - 1$. Поэтому их общая точка имеет координаты $x_0 = 4/5$ и $y_0 = 3/5$. Ясно, что $x_0^2 + y_0^2 = 1$.

12.81. Пусть d — расстояние от центра описанной окружности до образа центра вписанной окружности при рассматриваемой гомотетии. Достаточно проверить, что $R = d + 2r$. Пусть $(0, 0)$, $(2a, 0)$ и $(0, 2b)$ — координаты вершин данного треугольника. Тогда (a, b) — координаты центра описанной окружности, (r, r) — координаты центра вписанной окружности, причём $r = a + b - R$ (задача 5.18). Следовательно, $d^2 = (2r-a)^2 + (2r-b)^2 = a^2 + b^2 - 4r(a+b-r) + 4r^2 = (R - 2r)^2$, так как $a^2 + b^2 = R^2$.

12.82. Рассмотрим систему координат с началом в центре квадрата и осью Ox, параллельной прямой l. Пусть вершины квадрата имеют следующие координаты: $A(x, y)$, $B(y, -x)$, $C(-x, -y)$ и $D(-y, x)$; прямая l задаётся уравнением $y = a$. Тогда точка Q имеет координаты $((x + y)/2, (y - x)/2)$, а точка P имеет координаты $(-y, a)$. Следовательно, искомое ГМТ состоит из точек $(t, -t + a/2)$, где $t = (x - y)/4$. Остаётся заметить, что величина $x - y$ изменяется от $-\sqrt{2(x^2 + y^2)} = -AB$ до AB.

12.83. Введём на плоскости систему координат, выбрав прямую l в качестве оси x. Пусть (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) — координаты вершин A_1, A_1, A_3. Прямая A_2A_3 задаётся уравнением

$$\frac{x - a_2}{a_3 - a_2} = \frac{y - b_2}{b_3 - b_2}.$$

Прямая, проведённая через вершину A_1, задаётся уравнением, в котором отношение коэффициентов при x и y то же самое по абсолютной величине, но имеет противоположный знак. Таким образом, эта прямая задаётся уравнением

$$\frac{x - a_1}{a_3 - a_2} + \frac{y - b_1}{b_3 - b_2} = 0.$$

Напишем аналогично уравнения прямых, проведённых через вершины A_2 и A_3. Умножим левые части этих уравнений на $(a_3 - a_2)(b_3 - b_2)$, $(a_1 - a_3)(b_1 - b_3)$, $(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)$ соответственно и сложим их. Легко проверить, что указанная сумма тождественно равна нулю. Из этого следует, что прямые, заданные этими уравнениями, пересекаются в одной точке.

ГЛАВА 13

ВЕКТОРЫ

Основные сведения

1. Мы будем пользоваться следующими обозначениями:

а) $\overrightarrow{AB}$ и $\boldsymbol{a}$ — векторы;

б) AB и $|\boldsymbol{a}|$ — их длины; иногда длину вектора $\boldsymbol{a}$ обозначают a;

в) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ и $(\overrightarrow{AB}, \boldsymbol{a})$ — скалярные произведения векторов;

г) (x, y) — вектор с координатами x, y;

д) $\overrightarrow{0}$ или $\boldsymbol{0}$ — нулевой вектор.

2. *Ориентированным углом между ненулевыми векторами* $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (обозначение: $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$) будем называть угол, на который нужно повернуть против часовой стрелки вектор $\boldsymbol{a}$, чтобы он стал сонаправлен с вектором $\boldsymbol{b}$. Углы, отличающиеся на $360°$, считают равными. Легко проверить следующие свойства ориентированных углов между векторами:

а) $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = -\angle(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$;

б) $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \angle(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$;

в) $\angle(-\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + 180°$.

3. *Скалярным произведением векторов* $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называют число $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cos\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ (если один из этих векторов нулевой, то $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$). Легко проверить следующие свойства скалярного произведения:

а) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$;

б) $|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| \leqslant |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|$;

в) $(\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + \mu(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$;

г) если $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1)$ и $\boldsymbol{b} = (x_2, y_2)$, то $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = x_1x_2 + y_1y_2$;

д) если $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, то $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.

4. Многие векторные неравенства доказываются с помощью следующего факта.

Пусть даны два набора векторов, причём известно, что сумма длин проекций векторов первого набора на любую прямую не больше суммы длин проекций векторов второго набора на ту же прямую. Тогда сумма длин векторов первого набора не больше суммы длин векторов второго набора (см. задачу 13.42). Тем самым задача на плоскости сводится к задаче на прямой, которая обычно бывает легче.

Вводные задачи

1. Пусть AA_1 — медиана треугольника ABC. Докажите, что $\overrightarrow{AA_1} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})/2$.

2. Докажите, что $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|^2 + |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|^2 = 2(|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2)$.

3. Докажите, что если векторы $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ перпендикулярны, то $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$.

4. Пусть $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ и $OA=OB=OC$. Докажите, что ABC — правильный треугольник.

5. Пусть M и N — середины отрезков AB и CD. Докажите, что $\overrightarrow{MN}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})/2$.

§ 1. Векторы сторон многоугольников

13.1. а) Докажите, что из медиан треугольника можно составить треугольник.

б) Из медиан треугольника ABC составлен треугольник $A_1B_1C_1$, а из медиан треугольника $A_1B_1C_1$ составлен треугольник $A_2B_2C_2$. Докажите, что треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ подобны, причём коэффициент подобия равен $3/4$.

13.2. Стороны треугольника T параллельны медианам треугольника T_1. Докажите, что медианы треугольника T параллельны сторонам треугольника T_1.

13.3. $M_1, M_2, \ldots, M_6$ — середины сторон выпуклого шестиугольника $A_1A_2\ldots A_6$. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны и параллельны отрезкам M_1M_2, M_3M_4, M_5M_6.

13.4. Из точки, лежащей внутри выпуклого n-угольника, проведены лучи, перпендикулярные его сторонам и пересекающие стороны (или их продолжения). На этих лучах отложены векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, длины которых равны длинам соответствующих сторон. Докажите, что $\boldsymbol{a}_1+\ldots+\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{0}$.

13.5. Сумма четырёх единичных векторов равна нулю. Докажите, что их можно разбить на две пары противоположных векторов.

13.6. Пусть E и F — середины сторон AB и CD четырёхугольника $ABCD$, K, L, M и N — середины отрезков AF, CE, BF и DE. Докажите, что $KLMN$ — параллелограмм.

13.7. Дано n попарно не сонаправленных векторов ($n \geqslant 3$), сумма которых равна нулю. Докажите, что существует выпуклый n-угольник, набор векторов сторон которого совпадает с данным набором векторов.

13.8. Даны четыре попарно непараллельных вектора, сумма которых равна нулю. Докажите, что из них можно составить: а) невыпуклый четырёхугольник; б) самопересекающуюся четырёхзвенную ломаную.

13.9*. Даны четыре попарно непараллельных вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$, сумма которых равна нулю. Докажите, что

$$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|+|\boldsymbol{d}|>|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}|+|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{d}|.$$

13.10*. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ сторона BC параллельна диагонали AD, $CD \parallel BE$, $DE \parallel AC$ и $AE \parallel BD$. Докажите, что $AB \parallel CE$.

См. также задачу 5.49.

§ 2. Скалярное произведение. Соотношения

13.11. Докажите, что если диагонали четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны, то и диагонали любого другого четырёхугольника с такими же длинами сторон перпендикулярны.

13.12. а) Пусть A, B, C и D — произвольные точки. Докажите, что $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD}) = 0$.

б) Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

13.13. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, а точка H обладает тем свойством, что $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Докажите, что H — точка пересечения высот треугольника ABC.

13.14. Докажите, что $OH^2 = R^2(1 - 8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)$.

13.15. Пусть $A_1 \ldots A_n$ — правильный n-угольник, X — произвольная точка. Рассмотрим проекции $X_1, \ldots, X_n$ точки X на прямые $A_1A_2, \ldots, A_nA_1$. Пусть x_i — длина отрезка A_iX_i с учётом знака (знак плюс берётся в случае, когда лучи A_iX_i и A_iA_{i+1} сонаправлены). Докажите, что сумма $x_1 + \ldots + x_n$ равна половине периметра многоугольника $A_1 \ldots A_n$.

13.16. Пусть $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ — векторы сторон n-угольника, $\varphi_{ij} = \angle(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j)$. Докажите, что $a_1^2 = a_2^2 + \ldots + a_n^2 + 2\sum\limits_{i>j>1} a_i a_j \cos\varphi_{ij}$, где $a_i = |\boldsymbol{a}_i|$.

13.17. Дан четырёхугольник $ABCD$. Пусть $u = AD^2$, $v = BD^2$, $w = CD^2$, $U = BD^2 + CD^2 - BC^2$, $V = AD^2 + CD^2 - AC^2$, $W = AD^2 + BD^2 - AB^2$. Докажите, что $uU^2 + vV^2 + wW^2 = UVW + 4uvw$ (Гаусс).

13.18*. Точки A, B, C и D таковы, что для любой точки M числа $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ и $(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD})$ различны. Докажите, что $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$.

13.19*. Докажите, что в выпуклом k-угольнике сумма расстояний от любой внутренней точки до сторон постоянна тогда и только тогда, когда сумма векторов единичных внешних нормалей равна нулю.

13.20*. В выпуклом четырёхугольнике сумма расстояний от вершины до сторон одна и та же для всех вершин. Докажите, что этот четырёхугольник является параллелограммом.

См. также задачи 6.72, 6.73, 6.75—6.80, 6.89, 7.3.

§ 3. Неравенства

13.21. Даны точки A, B, C и D. Докажите, что $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 \geqslant AC^2 + BD^2$, причём равенство достигается, только если $ABCD$ — параллелограмм.

13.22. Докажите, что из пяти векторов всегда можно выбрать два так, чтобы длина их суммы не превосходила длины суммы оставшихся трёх векторов.

13.23. Десять векторов таковы, что длина суммы любых девяти их них меньше длины суммы всех десяти векторов. Докажите, что существует ось, проекция на которую каждого из десяти векторов положительна.

13.24. Точки $A_1, \ldots, A_n$ лежат на окружности с центром O, причём $\overrightarrow{OA_1} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$. Докажите, что для любой точки X справедливо неравенство $XA_1 + \ldots + XA_n \geqslant nR$, где R — радиус окружности.

13.25. Дано восемь вещественных чисел a, b, c, d, e, f, g, h. Докажите, что хотя бы одно из шести чисел $ac + bd$, $ae + bf$, $ag + bh$, $ce + df$, $cg + dh$, $eg + fh$ неотрицательно.

13.26*. На окружности радиуса 1 с центром O дано $2n + 1$ точек $P_1, \ldots, P_{2n+1}$, лежащих по одну сторону от некоторого диаметра. Докажите, что $|\overrightarrow{OP_1} + \ldots + \overrightarrow{OP_{2n+1}}| \geqslant 1$.

13.27*. Пусть $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ — векторы, длины которых не превосходят 1. Докажите, что в сумме $\boldsymbol{c} = \pm\boldsymbol{a}_1 \pm \boldsymbol{a}_2 \ldots \pm \boldsymbol{a}_n$ можно выбрать знаки так, что $|\boldsymbol{c}| \leqslant \sqrt{2}$.

13.28*. Из точки O выходит n векторов единичной длины, причём в любой полуплоскости, ограниченной прямой, проходящей через точку O, содержится не менее k векторов (предполагается, что граничная прямая входит в полуплоскость). Докажите, что длина суммы этих векторов не превосходит $n - 2k$.

См. также задачи 9.78, 10.5, 11.5, 11.11.

§ 4. Суммы векторов

13.29. Докажите, что точка X лежит на прямой AB тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{OX} = t\overrightarrow{OA} + (1 - t)\overrightarrow{OB}$ для некоторого t и любой точки O.

13.30. Дано несколько точек и для некоторых пар (A, B) этих точек взяты векторы $\overrightarrow{AB}$, причём в каждой точке начинается столько же векторов, сколько в ней заканчивается. Докажите, что сумма всех выбранных векторов равна $\vec{0}$.

13.31. Внутри треугольника ABC взята точка O. Докажите, что

$$S_{BOC} \cdot \overrightarrow{OA} + S_{AOC} \cdot \overrightarrow{OB} + S_{AOB} \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}.$$

13.32. Точки A и B движутся по двум фиксированным лучам с общим началом O так, что величина $\dfrac{p}{OA} + \dfrac{q}{OB}$ остаётся постоянной. Докажите, что прямая AB при этом проходит через фиксированную точку.

13.33. Через точку M пересечения медиан треугольника ABC проведена прямая, пересекающая прямые BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что $(1/\overline{MA_1}) + (1/\overline{MB_1}) + (1/\overline{MC_1}) = 0$ (отрезки MA_1, MB_1 и MC_1 считаются ориентированными).

13.34. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1. Отрезки BB_1 и CC_1, CC_1 и AA_1, AA_1 и BB_1 пересекаются в точках A_2, B_2 и C_2 соответственно. Докажите, что если $\overrightarrow{AA_2} + \overrightarrow{BB_2} + \overrightarrow{CC_2} = \vec{0}$, то $AB_1 : B_1C = CA_1 : A_1B = BC_1 : C_1A$.

13.35. Четырёхугольник $ABCD$ вписанный. Пусть H_a — ортоцентр треугольника BCD, M_a — середина отрезка AH_a; точки M_b, M_c и M_d определяются аналогично. Докажите, что точки M_a, M_b, M_c и M_d совпадают.

13.36*. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R.

а) Пусть S_a — окружность радиуса R с центром в ортоцентре треугольника BCD; окружности S_b, S_c и S_d определяются аналогично. Докажите, что эти четыре окружности пересекаются в одной точке.

б) Докажите, что окружности девяти точек треугольников ABC, BCD, CDA и DAB пересекаются в одной точке.

§ 5. Вспомогательные проекции

13.37. Точка X лежит внутри треугольника ABC, $\alpha = S_{BXC}$, $\beta = S_{CXA}$ и $\gamma = S_{AXB}$. Пусть A_1, B_1 и C_1 — проекции точек A, B и C на произвольную прямую l. Докажите, что длина вектора $\alpha\overrightarrow{AA_1} + \beta\overrightarrow{BB_1} + \gamma\overrightarrow{CC_1}$ равна $(\alpha + \beta + \gamma)d$, где d — расстояние от точки X до прямой l.

13.38*. Выпуклый $2n$-угольник $A_1A_2\ldots A_{2n}$ вписан в окружность радиуса 1. Докажите, что

$$|\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4} + \ldots + \overrightarrow{A_{2n-1}A_{2n}}| \leqslant 2.$$

13.39*. Пусть $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{2n+1}$ — векторы длины 1. Докажите, что в сумме $\boldsymbol{c} = \pm\boldsymbol{a}_1 \pm \boldsymbol{a}_2 \pm \ldots \pm \boldsymbol{a}_{2n+1}$ знаки можно выбрать так, что $|\boldsymbol{c}| \leqslant 1$.

13.40*. Пусть a, b и c — длины сторон треугольника ABC, $\boldsymbol{n}_a$, $\boldsymbol{n}_b$ и $\boldsymbol{n}_c$ — векторы единичной длины, перпендикулярные соответствующим сторонам и направленные во внешнюю сторону. Докажите, что

$$a^3\boldsymbol{n}_a + b^3\boldsymbol{n}_b + c^3\boldsymbol{n}_c = 12S \cdot \overrightarrow{MO},$$

где S — площадь, M — точка пересечения медиан, O — центр описанной окружности треугольника ABC.

13.41*. Пусть O и R — центр и радиус описанной окружности треугольника ABC, Z и r — центр и радиус его вписанной окружности; K — точка пересечения медиан треугольника с вершинами в точках касания вписанной окружности со сторонами треугольника ABC. Докажите, что точка Z лежит на отрезке OK, причём $OZ : ZK = 3R : r$.

См. также задачу 4.26.

§ 6. Метод усреднения

13.42*. Даны два набора векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ и $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$, причём сумма длин проекций векторов первого набора на любую прямую не больше суммы длин проекций векторов второго набора на ту же прямую. Докажите, что сумма длин векторов первого набора не больше суммы длин векторов второго набора.

13.43*. Докажите, что если один выпуклый многоугольник лежит внутри другого, то периметр внутреннего многоугольника не превосходит периметра внешнего.

13.44*. Сумма длин нескольких векторов на плоскости равна L. Докажите, что из этих векторов можно выбрать некоторое число векторов (может быть, только один) так, что длина их суммы будет не меньше L/π.

13.45*. Докажите, что если длины всех сторон и диагоналей выпуклого многоугольника меньше d, то его периметр меньше πd.

13.46*. На плоскости даны четыре вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$, сумма которых равна нулю. Докажите, что

$$|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| + |\boldsymbol{c}| + |\boldsymbol{d}| \geqslant |\boldsymbol{a} + \boldsymbol{d}| + |\boldsymbol{b} + \boldsymbol{d}| + |\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}|.$$

13.47*. Внутри выпуклого n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ взята точка O так, что $\overrightarrow{OA_1} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{0}$. Пусть $d = OA_1 + \ldots + OA_n$. Докажите, что периметр многоугольника не меньше $4d/n$ при чётном n и не меньше $4dn/(n^2 - 1)$ при нечётном n.

13.48*. Длина проекции замкнутой выпуклой кривой на любую прямую равна 1. Докажите, что её длина равна π.

13.49*. Дано несколько выпуклых многоугольников, причём нельзя провести прямую так, чтобы она не пересекала ни одного многоугольника и по обе стороны от неё лежал хотя бы один многоугольник. Докажите, что эти многоугольники можно заключить в многоугольник, периметр которого не превосходит суммы их периметров.

§ 7. Псевдоскалярное произведение

Псевдоскалярным произведением ненулевых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называют число $c = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \sin \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$; если хотя бы один из векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ нулевой, то $c = 0$. Псевдоскалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ обозначают $\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}$. Ясно, что $\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \vee \boldsymbol{a}$.

Абсолютная величина псевдоскалярного произведения векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равна площади параллелограмма, натянутого на эти векторы. В связи с этим *ориентированной площадью* тройки точек A, B и C называют число $S(A, B, C) = (\overrightarrow{AB} \vee \overrightarrow{AC})/2$; абсолютная величина числа $S(A, B, C)$ равна площади треугольника ABC.

13.50. Докажите, что:

а) $(\lambda\boldsymbol{a}) \vee \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b})$;

б) $\boldsymbol{a} \vee (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{c}$.

13.51. Пусть $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ и $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$. Докажите, что $\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b} = a_1b_2 - a_2b_1$.

13.52. а) Докажите, что $S(A, B, C) = -S(B, A, C) = S(B, C, A)$.

б) Докажите, что для любых точек A, B, C и D справедливо равенство $S(A, B, C) = S(D, A, B) + S(D, B, C) + S(D, C, A)$.

13.53. Три бегуна A, B и C бегут по параллельным дорожкам с постоянными скоростями. В начальный момент площадь треугольника ABC равна 2, через 5 с равна 3. Чему она может быть равна ещё через 5 с?

13.54. По трём прямолинейным дорогам с постоянными скоростями идут три пешехода. В начальный момент времени они не находились на одной прямой. Докажите, что они могут оказаться на одной прямой не более двух раз.

13.55. Решите с помощью псевдоскалярного произведения задачу 4.29 б).

13.56*. Точки P_1, P_2 и P_3, не лежащие на одной прямой, расположены внутри выпуклого $2n$-угольника $A_1 \ldots A_{2n}$. Докажите, что если сумма площадей треугольников $A_1A_2P_i$, $A_3A_4P_i$, …, $A_{2n-1}A_{2n}P_i$ равна одному и тому же числу c для $i = 1, 2, 3$, то для любой внутренней точки P сумма площадей этих треугольников равна c.

13.57*. Дан треугольник ABC и точка P. Точка Q такова, что $CQ \parallel AP$, а точка R такова, что $AR \parallel BQ$ и $CR \parallel BP$. Докажите, что $S_{ABC} = S_{PQR}$.

13.58*. Пусть H_1, H_2 и H_3 — ортоцентры треугольников $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$ и $A_1A_2A_4$. Докажите, что площади треугольников $A_1A_2A_3$ и $H_1H_2H_3$ равны.

13.59*. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$, площадь которого равна S, площади треугольников ABC, BCD, CDE, DEA и EAB равны a, b, c, d и e. Докажите, что

$$S^2 - S(a + b + c + d + e) + ab + bc + cd + de + ea = 0.$$

Задачи для самостоятельного решения

13.60. Пусть M и N — середины отрезков AB и AC, P — середина отрезка MN, O — произвольная точка. Докажите, что $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OP}$.

13.61. Точки A, B и C движутся равномерно с одинаковыми угловыми скоростями по трём окружностям в одну и ту же сторону. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника ABC при этом движется также по окружности.

13.62. Пусть A, B, C, D и E — произвольные точки. Существует ли такая точка O, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$? Найдите все такие точки.

13.63. Пусть P и Q — середины диагоналей выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4PQ^2.$$

13.64. Середины отрезков AB и CD, BC и DE соединены; середины полученных отрезков тоже соединены. Докажите, что последний отрезок параллелен отрезку AE и его длина равна $AE/4$.

13.65. Вписанная окружность касается сторон BC, CA и AB треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что если $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{0}$, то треугольник ABC правильный.

13.66. Четырёхугольники $ABCD$, $AEFG$, $ADFH$, $FIJE$ и $BIJC$ являются параллелограммами. Докажите, что четырёхугольник $AFHG$ тоже параллелограмм.

Решения

13.1. а) Пусть $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{BC}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{CA}$ и $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AB}$; AA', BB' и CC' — медианы треугольника ABC. Тогда $\overrightarrow{AA'} = (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b})/2$, $\overrightarrow{BB'} = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c})/2$ и $\overrightarrow{CC'} = (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})/2$. Поэтому $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{0}$.

б) Пусть $\boldsymbol{a}_1 = \overrightarrow{AA'}$, $\boldsymbol{b}_1 = \overrightarrow{BB'}$ и $\boldsymbol{c}_1 = \overrightarrow{CC'}$. Тогда $(\boldsymbol{c}_1 - \boldsymbol{b}_1)/2 = (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c})/4 = -3\boldsymbol{a}/4$ — вектор стороны треугольника $A_2B_2C_2$.

13.2. Первое решение. Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ — векторы сторон треугольника T. Тогда $(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})/2$, $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c})/2$ и $(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b})/2$ — векторы его медиан. Можно считать, что $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ — векторы, идущие из точки пересечения медиан треугольника T_1 в его вершины. Тогда $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}$ — векторы его сторон.

Второе решение. Пусть A_1 — середина стороны BC треугольника $T = ABC$, M — точка пересечения его медиан, P — точка, симметричная точке M относительно точки A_1. В качестве T_1 можно взять треугольник BPM. Его медиана BA_1 параллельна BC. Для остальных медиан треугольника T_1 доказательство аналогично.

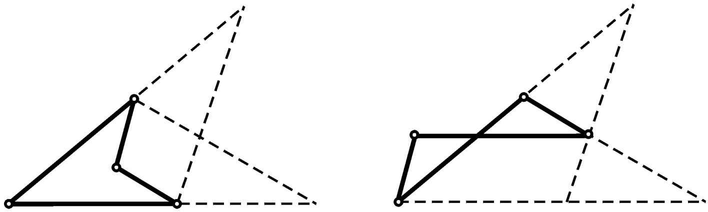
13.3. Ясно, что $2\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} = \overrightarrow{A_1A_3}$, $2\overrightarrow{M_3M_4} = \overrightarrow{A_3A_5}$ и $2\overrightarrow{M_5M_6} = \overrightarrow{A_5A_1}$. Поэтому $\overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_3M_4} + \overrightarrow{M_5M_6} = \overrightarrow{0}$.

13.4. После поворота на 90° векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ переходят в векторы сторон n-угольника.

13.5. Из данных векторов можно составить выпуклый четырёхугольник. Длины всех сторон этого четырёхугольника равны 1, поэтому он — ромб; пары его противоположных сторон дают требуемое разбиение.

13.6. Пусть $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AE}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{DF}$ и $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{AD}$. Тогда $2\overrightarrow{AK} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{v}$ и $2\overrightarrow{AL} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{b}$, поэтому $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AK} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})/2$. Аналогично $\overrightarrow{NM} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})/2$.

13.7. Отложим данные векторы от одной точки и, идя по часовой стрелке, занумеруем их по порядку: $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$. Рассмотрим замкнутую ломаную $A_1 \ldots A_n$, для которой $\overrightarrow{A_iA_{i+1}} = \boldsymbol{a}_i$. Докажем, что $A_1 \ldots A_n$ — выпуклый многоугольник. Введём систему координат, направив ось Ox по вектору $\boldsymbol{a}_1$. Пусть векторы $\boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ лежат по одну сторону от оси Ox, а векторы $\boldsymbol{a}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ — по другую (если есть вектор, направленный противоположно $\boldsymbol{a}_1$, то его можно отнести к любой из этих двух групп). Проекции векторов первой группы на ось Oy имеют один знак, а проекции векторов второй группы — другой. Поэтому вторые координаты как точек $A_2, A_3, \ldots, A_{k+1}$, так и точек $A_{k+1}, \ldots, A_n, A_1$ изменяются монотонно: в первом случае от нуля до некоторой величины d, а во втором — от d до нуля. Так как интервалов монотонности только два, все вершины многоугольника лежат по одну сторону от прямой A_1A_2. Для остальных прямых, проходящих через стороны многоугольника, доказательство проводится аналогично.



а *б*

Рис. 13.1

13.8. Согласно задаче 13.7 из данных векторов можно составить выпуклый четырёхугольник. Дальнейшее ясно из рис. 13.1.

13.9. Согласно задаче 13.8 б) из данных векторов можно составить самопересекающуюся четырёхзвенную ломаную; её можно представить как две диагонали и две противоположные стороны выпуклого четырёхугольника. Возможны два случая: вектор $\boldsymbol{a}$ может быть как стороной, так и диагональю этого четырёхугольника. Но в обоих случаях сумма в левой части неравенства представляет собой сумму длин двух противоположных сторон и двух диагоналей четырёхугольника, а в сумму в правой части входит длина суммы векторов тех же самых противоположных сторон и длины двух других противоположных сторон. Остаётся заметить, что сумма длин двух векторов не меньше длины их суммы, а сумма длин диагоналей выпуклого четырёхугольника больше суммы длин двух противоположных сторон (см. задачу 9.15).

13.10. Пусть диагональ BE пересекает диагонали AD и AC в точках F и G. Стороны треугольников AFE и BCD параллельны, поэтому они подобны и $AF : FE = BC : CD$. Следовательно, $AD : BE = (AF + BC) : (EF + CD) = BC : CD$. Аналогично $AE : BD = DE : AC$. Из подобия треугольников BED и EGA получаем $AE : DB = EG : BE = CD : BE$. Итак, $\dfrac{BC}{AD} = \dfrac{CD}{BE} = \dfrac{AE}{BD} = \dfrac{DE}{AC} = \lambda$. Ясно, что $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{EC} = \vec{0}$ и $\overrightarrow{BC} = \lambda\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CD} = \lambda\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{DE} = \lambda\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{EA} = \lambda\overrightarrow{DB}$. Следовательно, $\vec{0} = \lambda(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB}) + \overrightarrow{AB} = -\lambda\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{AB}$, т. е. $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{EC}$. Поэтому $AB \parallel EC$.

13.11. Пусть $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{BC}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{CD}$ и $\boldsymbol{d} = \overrightarrow{DA}$. Достаточно проверить, что $AC \perp BD$ тогда и только тогда, когда $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Ясно, что $d^2 = |\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2[(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a})]$. Поэтому условие $AC \perp BD$, т. е. $0 = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = b^2 + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, эквивалентно тому, что $d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2b^2$.

13.12. а) Выразим все входящие в указанную формулу векторы через $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$, т. е. запишем $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$. После сокращения получим требуемое.

б) Пусть D — точка пересечения высот, проведённых из вершин A и C треугольника ABC. Тогда в доказанной в задаче а) формуле первые два слагаемых нулевые, поэтому последнее слагаемое тоже нулевое, т. е. $BD \perp AC$.

13.13. Докажем, что $AH \perp BC$. Ясно, что $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, поэтому $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC}) = OC^2 - OB^2 = R^2 - R^2 = 0$, так как O — центр описанной окружности. Аналогично доказывается, что $BH \perp AC$ и $CH \perp AB$.

13.14. Ясно, что

$$OH^2 = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}|^2 = 3R^2 + 2R^2(\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma).$$

Остаётся заметить, что $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 - 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ согласно задаче 12.41 а).

13.15. Достаточно рассмотреть случай, когда длины сторон многоугольника $A_1\dots A_n$ равны 1. В этом случае $x_i = (\overrightarrow{A_iX}, \overrightarrow{A_iA_{i+1}})$. Пусть O — центр правильного многоугольника $A_1\dots A_n$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{A_iO}, \overrightarrow{A_iA_{i+1}}) + \left(\overrightarrow{OX}, \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_iA_{i+1}}\right) = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{A_iO}, \overrightarrow{A_iA_{i+1}}),$$

поскольку $\sum\limits_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_iA_{i+1}} = \vec{0}$ для любого многоугольника. Остаётся заметить, что $(\overrightarrow{A_iO}, \overrightarrow{A_iA_{i+1}}) = 1/2$ для всех i.

13.16. Пусть $\alpha_i = \angle(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_1)$. Рассматривая проекции на прямую, параллельную $\boldsymbol{a}_1$, и прямую, перпендикулярную $\boldsymbol{a}_1$, получаем $a_1 = \sum\limits_{i>1} a_i \cos\alpha_i$ и $0 = \sum\limits_{i>1} a_i \sin\alpha_i$ соответственно. Возводя эти равенства в квадрат и складывая их, получаем $a_1^2 = \sum\limits_{i>1} a_i^2(\cos^2\alpha_i + \sin^2\alpha_i) + 2\sum\limits_{i>j>1} a_ia_j(\cos\alpha_i\cos\alpha_j + \sin\alpha_i\sin\alpha_j) = a_2^2 + \ldots + a_n^2 + 2\sum\limits_{i>j>1} a_ia_j\cos(\alpha_i - \alpha_j)$. Остаётся заметить, что $\alpha_i - \alpha_j = \angle(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_1) - \angle(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_1) = \angle(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \varphi_{ij}$.

13.17. Пусть $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AD}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{BD}$ и $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{CD}$. Так как $BC^2 = |\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}|^2 = BD^2 + CD^2 - 2(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$, то $U = 2(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$. Аналогично $V = 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$ и $W = 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. Пусть $\alpha = \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ и $\beta = \angle(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$. Домножив обе части равенства $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2(\alpha+\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) + 1$ (см. задачу 12.41 б) на $4uvw = 4|a|^2|b|^2|c|^2$, получим требуемое.

13.18. Фиксируем произвольную точку O. Пусть $\boldsymbol{m} = \overrightarrow{OM}$, $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$, ..., $\boldsymbol{d} = \overrightarrow{OD}$. Тогда $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) - (\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}) = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{m}, \boldsymbol{b} - \boldsymbol{m}) - (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{m}, \boldsymbol{d} - \boldsymbol{m}) = (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} - \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{m}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$. Если $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} - \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, то когда точка M пробегает всю плоскость, величина $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{m})$ принимает все действительные значения, в частности, она принимает значение $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. Следовательно, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, т. е. $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, а значит, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$.

13.19. Пусть $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_k$ — единичные внешние нормали к сторонам, а $M_1, \ldots, M_k$ — произвольные точки на этих сторонах. Для любой точки X, лежащей внутри многоугольника, расстояние до i-й стороны равно $(\overrightarrow{XM_i}, \boldsymbol{n}_i)$. Поэтому суммы расстояний от внутренних точек A и B до сторон многоугольника равны тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{i=1}^{k} (\overrightarrow{AM_i}, \boldsymbol{n}_i) = \sum\limits_{i=1}^{k} (\overrightarrow{BM_i}, \boldsymbol{n}_i) = \sum\limits_{i=1}^{k} (\overrightarrow{BA}, \boldsymbol{n}_i) + \sum\limits_{i=1}^{k} (\overrightarrow{AM_i}, \boldsymbol{n}_i)$, т. е. $\left(\overrightarrow{BA}, \sum\limits_{i=1}^{n} \boldsymbol{n}_i\right) = 0$. Следовательно, сумма расстояний от любой внутренней точки многоугольника до сторон постоянна тогда и только тогда, когда $\sum \boldsymbol{n}_i = \boldsymbol{0}$.

13.20. Пусть l — произвольная прямая, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор, перпендикулярный прямой l. Если точки A и B лежат в той же полуплоскости, заданной прямой l, что и вектор $\boldsymbol{n}$, то $\rho(B,\,l)-\rho(A,\,l)=(\overrightarrow{AB},\,\boldsymbol{n})$, где $\rho(X,\,l)$ — расстояние от точки X до прямой l.

Пусть $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3$ и $\boldsymbol{n}_4$ — единичные векторы, перпендикулярные последовательным сторонам четырёхугольника $ABCD$ и направленные внутрь. Обозначим сумму расстояний от точки X до сторон четырёхугольника $ABCD$ через $\sum(X)$. Тогда $0=\sum(B)-\sum(A)=(\overrightarrow{AB},\,\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_2+\boldsymbol{n}_3+\boldsymbol{n}_4)$. Аналогично $(\overrightarrow{BC},\,\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_2+\boldsymbol{n}_3+\boldsymbol{n}_4)=0$. Так как точки A, B и C не лежат на одной прямой, то $\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_2+\boldsymbol{n}_3+\boldsymbol{n}_4=\boldsymbol{0}$. Остаётся воспользоваться результатом задачи 13.5.

13.21. Пусть $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC}$ и $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{CD}$. Тогда $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и $\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$. Ясно также, что $|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|^2-|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|^2=$ $=|\boldsymbol{a}|^2+2(\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{c})+|\boldsymbol{c}|^2=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}|^2\geqslant 0$. Равенство достигается, только если $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{c}$, т. е. $ABCD$ — параллелограмм.

13.22. Рассмотрим пять векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{a}_5$ и предположим, что длина суммы любых двух из них больше длины суммы трёх оставшихся. Так как $|\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2|>|\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5|$, то $|\boldsymbol{a}_1|^2+2(\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2)+|\boldsymbol{a}_2|^2>|\boldsymbol{a}_3|^2+|\boldsymbol{a}_4|^2+|\boldsymbol{a}_5|^2+2(\boldsymbol{a}_3,\,\boldsymbol{a}_4)+$ $+2(\boldsymbol{a}_4,\,\boldsymbol{a}_5)+2(\boldsymbol{a}_3,\,\boldsymbol{a}_5)$. Складывая такие неравенства для всех десяти пар векторов, получаем $4(|\boldsymbol{a}_1|^2+\ldots)+2((\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2)+\ldots)>6(|\boldsymbol{a}_1|^2+\ldots)+6((\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2)\ldots)$, т. е. $|\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5|^2<0$. Приходим к противоречию.

13.23. Обозначим данные векторы $\boldsymbol{e}_1,\,\ldots,\,\boldsymbol{e}_{10}$. Пусть $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1+\ldots+\boldsymbol{e}_{10}$. Докажем, что луч AB задаёт искомую ось. Ясно, что $|\overrightarrow{AB}-\boldsymbol{e}_i|^2=AB^2-2(\overrightarrow{AB},\,\boldsymbol{e}_i)+$ $+|\boldsymbol{e}_i|^2$, т. е. $(\overrightarrow{AB},\,\boldsymbol{e}_i)=(AB^2+|\boldsymbol{e}_i|^2-|\overrightarrow{AB}-\boldsymbol{e}_i|^2)/2$. По условию $AB>|\overrightarrow{AB}-\boldsymbol{e}_i|$, поэтому $(\overrightarrow{AB},\,\boldsymbol{e}_i)>0$, т. е. проекция вектора $\boldsymbol{e}_i$ на луч AB положительна.

13.24. Пусть $\boldsymbol{a}_i=\overrightarrow{OA_i}$ и $\boldsymbol{x}=\overrightarrow{OX}$. Тогда $|\boldsymbol{a}_i|=R$ и $\overrightarrow{XA_i}=\boldsymbol{a}_i-\boldsymbol{x}$. Поэтому $\sum XA_i=\sum|\boldsymbol{a}_i-\boldsymbol{x}|=\sum|\boldsymbol{a}_i-\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{a}_i|/R\geqslant\sum(\boldsymbol{a}_i-\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{a}_i)/R=\sum(\boldsymbol{a}_i,\,\boldsymbol{a}_i)/R-(\boldsymbol{x},\,\sum\boldsymbol{a}_i)/R$. Остаётся заметить, что $(\boldsymbol{a}_i,\,\boldsymbol{a}_i)=R^2$ и $\sum\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{0}$.

13.25. Рассмотрим на плоскости четыре вектора $(a,\,b)$, $(c,\,d)$, $(e,\,f)$ и $(g,\,h)$. Один из углов между этими векторами не превосходит $360^\circ/4=90^\circ$. Если же угол между векторами не превосходит 90°, то их скалярное произведение неотрицательно.

Данные шесть чисел являются скалярными произведениями всех пар наших четырёх векторов, поэтому одно из них неотрицательно.

13.26. Докажем это утверждение по индукции. Для $n=0$ утверждение, очевидно, верно. Допустим, что утверждение доказано для $2n+1$ векторов. Рассмотрим в системе из $2n+3$ векторов два крайних вектора (т. е. два вектора, угол между которыми максимален). Для определённости будем считать, что это — векторы $\overrightarrow{OP_1}$ и $\overrightarrow{OP_{2n+3}}$. По предположению индукции длина вектора $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP_2}+\ldots+\overrightarrow{OP_{2n+2}}$ не меньше 1. Вектор $\overrightarrow{OR}$ лежит внутри угла P_1OP_{2n+3}, поэтому он образует острый угол с вектором $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_{2n+3}}$. Следовательно, $|\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{OR}|\geqslant OR\geqslant 1$.

13.27. Докажем сначала, что если $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ — векторы, длины которых не превосходят 1, то хотя бы один из векторов $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b}\pm\boldsymbol{c}$ имеет длину, не превосходящую 1. В самом деле, два из векторов $\pm\boldsymbol{a}$, $\pm\boldsymbol{b}$, $\pm\boldsymbol{c}$ образуют угол, не превосходящий 60°, поэтому разность этих двух векторов имеет длину, не превосходящую 1 (если в треугольнике $AB\leqslant 1$, $BC\leqslant 1$ и $\angle ABC\leqslant 60^\circ$, то AC — не наибольшая сторона и $AC\leqslant 1$).

Таким образом можно спуститься до двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ или векторами $\boldsymbol{a}$ и $-\boldsymbol{b}$ не превосходит 90°, поэтому либо $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant\sqrt{2}$, либо $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant\sqrt{2}$.

13.28. Можно считать, что сумма $\boldsymbol{a}$ данных векторов отлична от нуля, так как иначе утверждение задачи очевидно. Введём систему координат, направив ось Oy по вектору $\boldsymbol{a}$. Занумеруем векторы нижней полуплоскости по порядку — по часовой стрелке: $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, … (рис. 13.2). По условию этих векторов не менее k. Докажем, что среди данных векторов найдутся ещё такие векторы $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$, что для любого $i = 1, \ldots, k$ вектор $\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{e}_i$ имеет неположительную вторую координату. Этим будет доказано требуемое утверждение. В самом деле, длина суммы всех данных векторов равна сумме вторых координат (именно так была введена система координат). Сумма векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{v}_k$ имеет неположительную вторую координату, а вторая координата любого из оставшихся $n-2k$ векторов не превосходит 1. Поэтому вторая координата суммы всех данных векторов не превосходит $n-2k$.

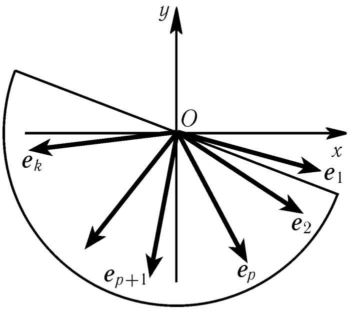


Рис. 13.2

Пусть векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_p$ лежат в четвёртом квадранте. Начнём сопоставлять им векторы $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p$. Будем поворачивать нижнюю полуплоскость, состоящую из точек с неположительной второй координатой, поворачивая ось Ox по часовой стрелке на угол от 0° до 90°. Если один из двух векторов, лежащих в повёрнутой таким образом полуплоскости, расположен в четвёртом квадранте, то их сумма имеет неположительную вторую координату. Как только при повороте плоскости ось Ox перейдёт за вектор $\boldsymbol{e}_1$, к векторам $\boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k$, лежащим в ней, должен добавиться ещё хотя бы один вектор; поэтому следующий за $\boldsymbol{e}_k$ по порядку вектор можно взять в качестве $\boldsymbol{v}_1$. Аналогично, когда ось Ox перейдёт за вектор $\boldsymbol{e}_2$, получим вектор $\boldsymbol{v}_2$ и т. д. Такие же рассуждения остаются справедливыми до тех пор, пока ось Ox остаётся в четвёртом квадранте. Для векторов $\boldsymbol{e}_{p+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_k$, лежащих в третьем квадранте, доказательство проводится аналогично (если вектор $\boldsymbol{e}_{p+1}$ имеет нулевую первую координату, то его следует сначала выбросить из рассмотрения, а затем в качестве парного к нему взять любой из оставшихся векторов).

13.29. Точка X лежит на прямой AB тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AB}$, т. е. $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$.

13.30. Возьмём произвольную точку O и запишем все выбранные векторы в виде $\overrightarrow{A_iA_j} = \overrightarrow{OA_j} - \overrightarrow{OA_i}$. В силу условия задачи каждый вектор $\overrightarrow{OA_i}$ в сумму всех выбранных векторов войдёт со знаком «плюс» столько же раз, сколько и со знаком «минус».

13.31. Пусть $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$ — единичные векторы, сонаправленные с векторами $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$; $\alpha = \angle BOC$, $\beta = \angle COA$ и $\gamma = \angle AOB$. Нужно доказать, что $\boldsymbol{e}_1 \sin\alpha + \boldsymbol{e}_2 \sin\beta + \boldsymbol{e}_3 \sin\gamma = \vec{0}$. Рассмотрим треугольник $A_1B_1C_1$, стороны которого параллельны прямым OC, OA и OB. Тогда $\vec{0} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{C_1A_1} = \pm 2R(\boldsymbol{e}_1 \sin\alpha + \boldsymbol{e}_2 \sin\beta + \boldsymbol{e}_3 \sin\gamma)$, где R — радиус описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$.

13.32. Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — единичные векторы, сонаправленные с лучами OA и OB, $\lambda = OA$ и $\mu = OB$. Прямая AB состоит из всех таких точек X, что $\overrightarrow{OX} = t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB} = t\lambda\boldsymbol{a} + (1-t)\mu\boldsymbol{b}$. Требуется найти такие числа x_0 и y_0, что

$x_0/\lambda = t = 1 - (y_0/\mu)$ при всех рассматриваемых значениях λ и μ. Положим $x_0 = p/c$ и $y_0 = q/c$. В итоге получаем, что если $p/OA + q/OB = c$, то прямая AB проходит через такую точку X, что $\overrightarrow{OX} = (p\boldsymbol{a} + q\boldsymbol{b})/c$.

13.33. Пусть $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{MA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{MB}$ и $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{MC}$. Тогда $\boldsymbol{e} = \overrightarrow{MC_1} = p\boldsymbol{a} + (1-p)\boldsymbol{b}$ и $\overrightarrow{MA_1} = q\boldsymbol{c} + (1-q)\boldsymbol{b} = -q\boldsymbol{a} + (1-2q)\boldsymbol{b}$. С другой стороны, $\overrightarrow{MA_1} = \alpha\boldsymbol{e}$. Аналогично $\beta\boldsymbol{e} = \overrightarrow{MB_1} = -r\boldsymbol{b} + (1-2r)\boldsymbol{a}$. Требуется доказать, что $1 + (1/\alpha) + (1/\beta) = 0$. Так как $\alpha p\boldsymbol{a} + \alpha(1-p)\boldsymbol{b} = \alpha\boldsymbol{e} = -q\boldsymbol{a} + (1-2q)\boldsymbol{b}$, то $\alpha p = -q$ и $\alpha(1-p) = 1-2q$, а значит, $1/\alpha = 1 - 3p$. Аналогично $\beta p = 1 - 2r$ и $\beta(1-p) = -r$, а значит, $1/\beta = 3p - 2$.

13.34. Сложив равенства $\overrightarrow{AA_2} + \overrightarrow{BB_2} + \overrightarrow{CC_2} = \vec{0}$ и $\overrightarrow{A_2B_2} + \overrightarrow{B_2C_2} + \overrightarrow{C_2A_2} = \vec{0}$, получим $\overrightarrow{AB_2} + \overrightarrow{BC_2} + \overrightarrow{CA_2} = \vec{0}$. Следовательно, $\overrightarrow{AB_2} = \lambda\overrightarrow{C_2B_2}$, $\overrightarrow{BC_2} = \lambda\overrightarrow{A_2C_2}$ и $\overrightarrow{CA_2} = \lambda\overrightarrow{B_2A_2}$. Пусть E — такая точка прямой BC, что $A_2E \parallel AA_1$. Тогда $\overrightarrow{BA_1} = \lambda\overrightarrow{EA_1}$ и $\overrightarrow{EC} = \lambda\overrightarrow{EA_1}$, поэтому $\overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{EA_1} = (\lambda-1)\overrightarrow{EA_1}$. Следовательно, $\overline{A_1C}/\overline{BA_1} = (\lambda-1)/\lambda$. Аналогично $\overline{AB_1}/\overline{B_1C} = \overline{BC_1}/\overline{C_1A} = (\lambda-1)/\lambda$.

13.35. Пусть O — центр описанной окружности данного четырёхугольника, $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC}$ и $\boldsymbol{d} = \overrightarrow{OD}$. Если H_a — ортоцентр треугольника BCD, то $\overrightarrow{OH_a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}$ (см. задачу 13.13). Поэтому $\overrightarrow{OM_a} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d})/2 = \overrightarrow{OM_b} = \overrightarrow{OM_c} = \overrightarrow{OM_d}$.

13.36. Пусть O — центр описанной окружности данного четырёхугольника, $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC}$ и $\boldsymbol{d} = \overrightarrow{OD}$. Если H_d — ортоцентр треугольника ABC, то $\overrightarrow{OH_d} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ (задача 13.13).

а) Возьмём точку K так, что $\overrightarrow{OK} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}$. Тогда $KH_d = |\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OH_d}| = |\boldsymbol{d}| = R$, т. е. точка K лежит на окружности S_d. Аналогично доказывается, что точка K лежит на окружностях S_a, S_b и S_c.

б) Пусть O_d — центр окружности девяти точек треугольника ABC, т. е. середина отрезка OH_d. Тогда $\overrightarrow{OO_d} = \overrightarrow{OH_d}/2 = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})/2$. Возьмём точку X так, что $\overrightarrow{OX} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d})/2$. Тогда $XO_d = |\boldsymbol{d}|/2 = R/2$, т. е. точка X лежит на окружности девяти точек треугольника ABC. Аналогично доказывается, что точка X лежит на окружностях девяти точек треугольников BCD, CDA и DAB.

13.37. Пусть X_1 — проекция точки X на прямую l. Вектор $\alpha\overrightarrow{AA_1} + \beta\overrightarrow{BB_1} + \gamma\overrightarrow{CC_1}$ является проекцией вектора $\alpha\overrightarrow{AX_1} + \beta\overrightarrow{BX_1} + \gamma\overrightarrow{CX_1}$ на прямую, перпендикулярную прямой l. Учитывая, что $\alpha\overrightarrow{AX_1} + \beta\overrightarrow{BX_1} + \gamma\overrightarrow{CX_1} = \alpha\overrightarrow{AX} + \beta\overrightarrow{BX} + \gamma\overrightarrow{CX} + (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{XX_1}$ и $\alpha\overrightarrow{AX} + \beta\overrightarrow{BX} + \gamma\overrightarrow{CX} = \vec{0}$ (задача 13.31), получаем требуемое.

13.38. Пусть $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4} + \ldots + \overrightarrow{A_{2n-1}A_{2n}}$, причём $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$. Введём систему координат, направив ось Ox вдоль вектора $\boldsymbol{a}$. Так как сумма проекций векторов $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_3A_4}, \ldots, \overrightarrow{A_{2n-1}A_{2n}}$ на ось Oy равна нулю, то длина вектора $\boldsymbol{a}$ равна абсолютной величине разности между суммой длин положительных проекций этих векторов на ось Ox и суммой длин их отрицательных проекций; следовательно, длина вектора $\boldsymbol{a}$ не превосходит либо суммы длин положительных проекций векторов, либо суммы длин их отрицательных проекций. Легко проверить, что как сумма длин положительных проекций, так и сумма длин отрицательных проекций данных векторов на любую ось не превосходит диаметра окружности, т. е. не превосходит 2.

13.39. Изменив нумерацию данных векторов и при необходимости меняя вектор $\boldsymbol{x}$ на $-\boldsymbol{x}$, можно считать, что концы векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{2n+1}, \ldots, -\boldsymbol{a}_1, -\boldsymbol{a}_2, \ldots, -\boldsymbol{a}_{2n+1}$, выходящих из одной точки, являются вершинами выпуклого $(4n+2)$-угольника $A_1A_2\ldots A_{4n+2}$. При этом $\overrightarrow{A_1A_2} = \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2$, $\overrightarrow{A_3A_4} = \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}_4, \ldots$ $\ldots, \overrightarrow{A_{2n-1}A_{2n}} = \boldsymbol{a}_{2n-1} - \boldsymbol{a}_{2n}$, $\overrightarrow{A_{2n+1}A_{2n+2}} = \boldsymbol{a}_{2n+1} + \boldsymbol{a}_1$, $\overrightarrow{A_{2n+3}A_{2n+4}} = -\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$,

$\overrightarrow{A_{2n+5}A_{2n+6}} = -\boldsymbol{a}_4 + \boldsymbol{a}_5$, ..., $\overrightarrow{A_{4n+1}A_{4n+2}} = -\boldsymbol{a}_{2n} + \boldsymbol{a}_{2n+1}$. Согласно задаче 13.38 длина суммы этих векторов не превосходит 2. С другой стороны, сумма этих векторов равна $2(\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}_4 + \ldots + \boldsymbol{a}_{2n+1})$.

13.40. Для доказательства равенства векторов достаточно проверить равенство их проекций (с учётом знака) на прямые BC, CA и AB. Доказательство проведём, например, для проекций на прямую BC; положительным при этом будем считать направление луча BC. Пусть P — проекция точки A на прямую BC, N — середина отрезка BC. Тогда $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CN} = (b^2 + a^2 - c^2)/2a - (a/2) = (b^2 - c^2)/2a$ (PC находится из уравнения $AB^2 - BP^2 = AC^2 - CP^2$). Так как $NM : NA = 1 : 3$, то проекция вектора $\overrightarrow{MO}$ на прямую BC равна $\overrightarrow{PN}/3 = (b^2 - c^2)/6a$. Остаётся заметить, что проекция вектора $a^3\boldsymbol{n}_a + b^3\boldsymbol{n}_b + c^3\boldsymbol{n}_c$ на прямую BC равна

$$b^3 \sin\gamma - c^3 \sin\beta = \frac{b^3c - c^3b}{2R} = \frac{abc}{2R} \cdot \frac{b^2 - c^2}{a} = 2S\,\frac{b^2 - c^2}{a}.$$

13.41. Пусть вписанная окружность касается сторон AB, BC и CA в точках U, V и W. Требуется доказать, что $\overrightarrow{OZ} = \frac{3R}{r}\overrightarrow{ZK}$, т. е. $\overrightarrow{OZ} = \frac{R}{r}(\overrightarrow{ZU} + \overrightarrow{ZV} + \overrightarrow{ZW})$. Докажем, например, что проекции (с учётом знака) этих векторов на прямую BC равны; положительным при этом будем считать направление луча BC. Пусть N — проекция точки O на прямую BC. Тогда проекция вектора $\overrightarrow{OZ}$ на прямую BC равна $\overrightarrow{NV} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CV} = (a/2) - (a + b - c)/2 = (c - b)/2$. А проекция вектора $\overrightarrow{ZU} + \overrightarrow{ZV} + \overrightarrow{ZW}$ на эту прямую равна проекции вектора $\overrightarrow{ZU} + \overrightarrow{ZW}$, т. е. равна

$$-r\sin VZU + r\sin VZW = -r\sin B + r\sin C = r(c - b)/2R.$$

13.42. Введём систему координат Oxy. Пусть l_φ — прямая, проходящая через точку O и образующая угол φ $(0 < \varphi < \pi)$ с осью Ox, т. е. если точка A лежит на l_φ и вторая координата точки A положительна, то $\angle AOx = \varphi$; $l_0 = l_\pi = Ox$.

Если вектор $\boldsymbol{a}$ образует угол α с осью Ox (угол отсчитывается против часовой стрелки от оси Ox к вектору $\boldsymbol{a}$), то длина проекции вектора $\boldsymbol{a}$ на прямую l_φ равна $|\boldsymbol{a}| \cdot |\cos(\varphi - \alpha)|$. Интеграл $\int\limits_0^\pi |\boldsymbol{a}| \cdot |\cos(\varphi - \alpha)|\, d\varphi = 2|\boldsymbol{a}|$ не зависит от α.

Пусть векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ образуют с осью Ox углы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_m$. Тогда по условию $|\boldsymbol{a}_1| \cdot |\cos(\varphi - \alpha_1)| + \ldots + |\boldsymbol{a}_n| \cdot |\cos(\varphi - \alpha_n)| \leqslant |\boldsymbol{b}_1| \cdot |\cos(\varphi - \beta_1)| + \ldots + |\boldsymbol{b}_m| \cdot |\cos(\varphi - \beta_m)|$ для любого угла φ. Интегрируя эти неравенства по φ от 0 до π, получаем $|\boldsymbol{a}_1| + \ldots + |\boldsymbol{a}_n| \leqslant |\boldsymbol{b}_1| + \ldots + |\boldsymbol{b}_m|$.

Замечание. Величину $\frac{1}{b - a}\int\limits_a^b f(x)\, dx$ называют *средним значением* функции f на отрезке $[a, b]$. Равенство

$$\int\limits_0^\pi |\boldsymbol{a}| \cdot |\cos(\varphi - \alpha)|\, d\varphi = 2|\boldsymbol{a}|$$

означает, что среднее значение длины проекции вектора $\boldsymbol{a}$ равно $2|\boldsymbol{a}|/\pi$, точнее говоря, среднее значение функции $f(\varphi)$, равной длине проекции вектора $\boldsymbol{a}$ на прямую l_φ, на отрезке $[0, \pi]$ равно $2|\boldsymbol{a}|/\pi$.

13.43. Сумма длин проекций сторон выпуклого многоугольника на любую прямую равна удвоенной длине проекции многоугольника на эту прямую.

Поэтому сумма длин проекций векторов сторон на любую прямую для внутреннего многоугольника не больше, чем для внешнего. Следовательно, согласно задаче 13.42 сумма длин векторов сторон, т. е. периметр, у внутреннего многоугольника не больше, чем у внешнего.

13.44. Если сумма длин векторов равна L, то согласно замечанию к задаче 13.42 среднее значение суммы длин проекций этих векторов равно $2L/\pi$.

Функция f на отрезке $[a, b]$ не может быть всюду меньше своего среднего значения c, так как иначе

$$c = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx < \frac{(b-a)c}{b-a} = c.$$

Поэтому найдётся такая прямая l, что сумма длин проекций исходных векторов на неё не меньше $2L/\pi$.

Зададим на прямой l направление. Тогда либо сумма длин положительных проекций на это направление, либо сумма длин отрицательных проекций не меньше L/π. Поэтому либо длина суммы векторов, дающих положительные проекции, либо длина суммы векторов, дающих отрицательные проекции, не меньше L/π.

13.45. Обозначим проекцию многоугольника на прямую l через AB. Ясно, что точки A и B являются проекциями некоторых вершин A_1 и B_1 многоугольника. Поэтому $A_1B_1 \geqslant AB$, т. е. длина проекции многоугольника не больше A_1B_1, а $A_1B_1 < d$ по условию. Так как сумма длин проекций сторон многоугольника на прямую l равна $2AB$, она не превосходит $2d$.

Среднее значение суммы длин проекций сторон равно $2P/\pi$, где P — периметр (см. задачу 13.42). Среднее значение не превосходит максимального, следовательно, $2P/\pi < 2d$, т. е. $P < \pi d$.

13.46. Согласно задаче 13.42 неравенство $|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| + |\boldsymbol{c}| + |\boldsymbol{d}| \geqslant |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{d}| + |\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}| + |\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}|$ достаточно доказать для проекций векторов на прямую, т. е. можно считать, что $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ — векторы, параллельные одной прямой, т. е. просто числа, причём $a + b + c + d = 0$. Будем считать, что $d \geqslant 0$, так как иначе можно изменить знаки у всех чисел.

Можно считать, что $a \leqslant b \leqslant c$. Нужно разобрать три случая: 1) $a, b, c \leqslant 0$; 2) $a \leqslant 0$ и $b, c \geqslant 0$ и 3) $a, b \leqslant 0$, $c \geqslant 0$. Все возникающие неравенства проверяются достаточно просто. При разборе третьего случая нужно отдельно рассмотреть случаи $|d| \leqslant |b|$, $|b| \leqslant |d| \leqslant |a|$ и $|a| \leqslant |d|$ (в последнем случае нужно учесть, что $|d| = |a| + |b| - |c| \leqslant |a| + |b|$).

13.47. Согласно задаче 13.42 неравенство достаточно доказать для проекций векторов на любую прямую. Пусть проекции векторов $\overrightarrow{OA_1}, \ldots, \overrightarrow{OA_n}$ на прямую l равны (с учётом знака) $a_1, \ldots, a_n$. Разобьём числа $a_1, \ldots, a_n$ на две группы: $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_k \geqslant 0$ и $y_1' \leqslant y_2' \leqslant \ldots \leqslant y_{n-k}' \leqslant 0$. Пусть $y_i = -y_i'$. Тогда $x_1 + \ldots + x_k = y_1 + \ldots + y_{n-k} = a$, а значит, $x_1 \geqslant a/k$ и $y_1 \geqslant a/(n-k)$. Периметру в проекции соответствует число $2(x_1 + y_1)$. Сумме длин векторов $\overrightarrow{OA_i}$ в проекции соответствует число $x_1 + \ldots + x_k + y_1 + \ldots + y_{n-k} = 2a$. А так как

$$\frac{2(x_1+y_1)}{x_1+\ldots+y_{n-k}} \geqslant \frac{2}{2a}\left(\frac{a}{k} + \frac{a}{n-k}\right) = \frac{n}{k(n-k)},$$

то остаётся заметить, что величина $k(n-k)$ максимальна при $k = n/2$ для чётного n и при $k = (n \pm 1)/2$ для нечётного n.

13.48. Длина кривой — предел периметров вписанных в неё многоугольников. Рассмотрим вписанный многоугольник с периметром P и длиной проекции на прямую l, равной d_l. Пусть $1-\varepsilon < d_l < 1$ для всех прямых l. Многоугольник можно подобрать так, чтобы ε было сколь угодно мало. Так как многоугольник выпуклый, то сумма длин проекций сторон многоугольника на прямую l равна $2d_l$.

Среднее значение величины $2d_l$ равно $2P/\pi$ (см. задачу 13.42), поэтому $2-2\varepsilon < 2P/\pi < 2$, т. е. $\pi - \pi\varepsilon < P < \pi$. Устремляя ε к нулю, получаем, что длина кривой равна π.

13.49. Докажем, что периметр выпуклой оболочки всех вершин данных многоугольников не превосходит суммы их периметров. Для этого достаточно заметить, что по условию проекции данных многоугольников на любую прямую покрывают проекцию выпуклой оболочки.

13.50. а) Если $\lambda < 0$, то $(\lambda\boldsymbol{a}) \vee \boldsymbol{b} = -\lambda|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\angle(-\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \lambda|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{b})$. При $\lambda > 0$ доказательство очевидно.

б) Пусть $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$ и $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC}$. Введём систему координат, направив ось Oy по лучу OA. Пусть $A = (0, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ и $C = (x_3, y_3)$. Тогда $\boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{b} = -x_2y_1$, $\boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{c} = -x_3y_1$ и $\boldsymbol{a}\vee(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = -(x_2+x_3)y_1 = \boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{c}$.

13.51. Пусть $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ — единичные векторы, направленные по осям Ox и Oy. Тогда $\boldsymbol{e}_1\vee\boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_2\vee\boldsymbol{e}_1 = 1$ и $\boldsymbol{e}_1\vee\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2\vee\boldsymbol{e}_2 = 0$. Поэтому $\boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{b} = (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2)\vee(b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2) = a_1b_2 - a_2b_1$.

13.52. а) Ясно, что $\overrightarrow{AB}\vee\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\vee(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}) = -\overrightarrow{BA}\vee\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}\vee\overrightarrow{BA}$.

б) Для доказательства достаточно воспользоваться равенством $\overrightarrow{AB}\vee\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})\vee(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AD}\vee\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DB}\vee\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}\vee\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC}\vee\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA}\vee\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB}\vee\overrightarrow{DC}$.

13.53. Пусть в начальный момент, т. е. при $t=0$, $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{v}$ и $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{w}$. Тогда в момент t получим $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{v} + t(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$ и $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{w} + t(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})$, где $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ — векторы скоростей бегунов A, B и C. Так как векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ параллельны, то $(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\vee(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}) = 0$, а значит, $|S(A, B, C)| = |\overrightarrow{AB}\vee\overrightarrow{AC}|/2 = |x+yt|$, где x и y — некоторые постоянные числа. Решая систему $|x| = 2$, $|x+5y| = 3$, получаем два решения, дающие для зависимости площади треугольника ABC от времени t выражения $|2+(t/5)|$ и $|2-t|$. Поэтому при $t=10$ площадь может принимать значения 4 и 8.

13.54. Пусть $\boldsymbol{v}(t)$ и $\boldsymbol{w}(t)$ — векторы, соединяющие первого пешехода со вторым и третьим в момент t. Ясно, что $\boldsymbol{v}(t) = t\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{w}(t) = t\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}$. Пешеходы находятся на одной прямой тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{v}(t)\parallel\boldsymbol{w}(t)$, т. е. $\boldsymbol{v}(t)\vee\boldsymbol{w}(t) = 0$. Функция $f(t) = \boldsymbol{v}(t)\vee\boldsymbol{w}(t) = t^2\boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{c} + t(\boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{d} + \boldsymbol{b}\vee\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b}\vee\boldsymbol{d}$ является квадратным трёхчленом, причём $f(0)\neq 0$. Квадратный трёхчлен, не равный тождественно нулю, имеет не более двух корней.

13.55. Пусть $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \lambda\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OD} = \boldsymbol{b}$ и $\overrightarrow{OA} = \mu\boldsymbol{b}$. Тогда $\pm 2S_{OPQ} = \overrightarrow{OP}\vee\overrightarrow{OQ} = ((\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})/2)\vee((\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})/2) = (1-\lambda\mu)(\boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{b})/4$ и $\pm 2S_{ABCD} = \pm 2(S_{COD} - S_{AOB}) = \pm(\boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{b} - \lambda\boldsymbol{a}\vee\mu\boldsymbol{b}) = \pm(1-\lambda\mu)\boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{b}$.

13.56. Пусть $\boldsymbol{a}_j = \overrightarrow{P_1A_j}$. Тогда удвоенная сумма площадей указанных треугольников для любой внутренней точки P равна

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}_1)\vee(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}_2) + (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}_3)\vee(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}_4) + \ldots + (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}_{2n-1})\vee(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}_{2n}),$$

где $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{PP_1}$; от удвоенной суммы площадей этих треугольников для точки P_1 она отличается на $\boldsymbol{x}\vee(\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}_4 + \ldots + \boldsymbol{a}_{2n-1} - \boldsymbol{a}_{2n}) = \boldsymbol{x}\vee\boldsymbol{a}$. По условию

$\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{a} = 0$ при $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{P_2P_1}$ и $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{P_3P_1}$, причём эти векторы не параллельны. Следовательно, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, т. е. $\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{a} = 0$ для любого вектора $\boldsymbol{x}$.

13.57. Пусть $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AP}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{BQ}$ и $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{CR}$. Тогда $\overrightarrow{QC} = \alpha\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{RA} = \beta\boldsymbol{b}$ и $\overrightarrow{PB} = \gamma\boldsymbol{c}$, причём $(1+\alpha)\boldsymbol{a} + (1+\beta)\boldsymbol{b} + (1+\gamma)\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$. Достаточно проверить, что $\overrightarrow{AB} \vee \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{PQ} \vee \overrightarrow{RP}$. Разность между этими величинами равна $(\boldsymbol{a} + \gamma\boldsymbol{c}) \vee (\boldsymbol{c} + \beta\boldsymbol{b}) - (\gamma\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}) \vee (\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{c} + \beta\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \vee [(1+\gamma)\boldsymbol{c} + (1+\beta)\boldsymbol{b}] = -\boldsymbol{a} \vee (1+\alpha)\boldsymbol{a} = 0$.

13.58. Пусть $\boldsymbol{a}_i = \overrightarrow{A_4A_i}$ и $\boldsymbol{w}_i = \overrightarrow{A_4H_i}$. Согласно задаче 13.52 б) достаточно проверить, что $\boldsymbol{a}_1 \vee \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_2 \vee \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_3 \vee \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{w}_1 \vee \boldsymbol{w}_2 + \boldsymbol{w}_2 \vee \boldsymbol{w}_3 + \boldsymbol{w}_3 \vee \boldsymbol{w}_1$. Векторы $\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{w}_2$ и $\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{w}_1$ перпендикулярны вектору $\boldsymbol{a}_3$, поэтому они параллельны, т. е. $(\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{w}_2) \vee (\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{w}_1) = 0$. Сложив это равенство с равенствами $(\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{w}_3) \vee (\boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{w}_2) = 0$ и $(\boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{w}_1) \vee (\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{w}_3) = 0$, получим требуемое.

13.59. Пусть $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$. Тогда $\boldsymbol{e}_1 \vee \boldsymbol{x} = x_2(\boldsymbol{e}_1 \vee \boldsymbol{e}_2)$ и $\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{e}_2 = x_1(\boldsymbol{e}_1 \vee \boldsymbol{e}_2)$, т. е.

$$\boldsymbol{x} = ((\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{e}_1 \vee \boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_2)/(\boldsymbol{e}_1 \vee \boldsymbol{e}_2).$$

Домножив это выражение справа на $(\boldsymbol{e}_1 \vee \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{y}$, получим

$$(\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{e}_2)(\boldsymbol{e}_1 \vee \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{e}_1 \vee \boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_2 \vee \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{e}_2 \vee \boldsymbol{e}_1)(\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}) = 0. \tag{1}$$

Положим $\boldsymbol{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{e}_2 = \overrightarrow{AC}$, $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{AD}$ и $\boldsymbol{y} = \overrightarrow{AE}$. Тогда $S = a + \boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{e}_2 + d = c + \boldsymbol{y} \vee \boldsymbol{e}_2 + a = d + \boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{e}_1 + b$, т. е. $\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{e}_2 = S - a - d$, $\boldsymbol{y} \vee \boldsymbol{e}_2 = S - c - a$ и $\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{e}_1 = S - d - b$. Подставив эти выражения в (1), получим требуемое.

ГЛАВА 14

ЦЕНТР МАСС

Основные сведения

1. Пусть на плоскости задана система точек с приписанными им массами, т. е. имеется набор пар (X_i, m_i), где X_i — точка плоскости, а m_i — положительное число. *Центром масс* системы точек $X_1, \ldots, X_n$ с массами $m_1, \ldots, m_n$ называют точку O, для которой выполняется равенство $m_1\overrightarrow{OX_1} + \ldots + m_n\overrightarrow{OX_n} = \overrightarrow{0}$.

Центр масс любой системы точек существует, причём только один (задача 14.1).

2. Внимательно просмотрев решение задачи 14.1, нетрудно заметить, что положительность чисел m_i фактически не используется — важно лишь то, что их сумма отлична от нуля. Иногда бывает удобно рассматривать системы точек, в которых часть масс положительна, а часть отрицательна (но сумма масс должна быть отлична от нуля).

3. Важнейшим свойством центра масс, на котором основаны почти все его применения, является теорема о группировке масс: *центр масс системы точек останется прежним, если часть точек заменить одной точкой, которая расположена в их центре масс и которой приписана масса, равная сумме их масс* (задача 14.2).

4. Величину $I_M = m_1MX_1^2 + \ldots + m_nMX_n^2$ называют *моментом инерции* системы точек $X_1, \ldots, X_n$ с массами $m_1, \ldots, m_n$ относительно точки M. Применения этого понятия в геометрии основаны на зависимости $I_M = I_O + mOM^2$, где O — центр масс системы, а $m = m_1 + \ldots + m_n$ (задача 14.19).

§ 1. Основные свойства центра масс

14.1. а) Докажите, что центр масс существует и единствен для любой системы точек.

б) Докажите, что если X — произвольная точка, а O — центр масс точек $X_1, \ldots, X_n$ с массами $m_1, \ldots, m_n$, то

$$\overrightarrow{XO} = \frac{1}{m_1 + \ldots + m_n}(m_1\overrightarrow{XX_1} + \ldots + m_n\overrightarrow{XX_n}).$$

14.2. Докажите, что центр масс системы точек останется прежним, если часть точек заменить одной точкой, которая расположена в их центре масс и которой приписана масса, равная сумме их масс.

14.3. Докажите, что центр масс точек A и B с массами a и b лежит на отрезке AB и делит его в отношении $b : a$.

§ 2. Теорема о группировке масс

14.4. Докажите, что медианы треугольника ABC пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2:1$, считая от вершины.

14.5. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник, K, L, M и N — середины сторон AB, BC, CD и DA. Докажите, что точка пересечения отрезков KM и LN является серединой этих отрезков, а также и серединой отрезка, соединяющего середины диагоналей.

14.6. Пусть A_1, B_1, …, F_1 — середины сторон AB, BC, …, FA произвольного шестиугольника. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников $A_1C_1E_1$ и $B_1D_1F_1$ совпадают.

14.7. Докажите теорему Чевы (задача 4.49 б) с помощью группировки масс.

14.8*. На сторонах AB, BC, CD и DA выпуклого четырёхугольника $ABCD$ взяты точки K, L, M и N соответственно, причём $AK:KB = DM:MC = \alpha$ и $BL:LC = AN:ND = \beta$. Пусть P — точка пересечения отрезков KM и LN. Докажите, что $NP:PL = \alpha$ и $KP:PM = \beta$.

14.9*. Найдите внутри треугольника ABC точку O, обладающую следующим свойством: для любой прямой, проходящей через O и пересекающей сторону AB в точке K и сторону BC в точке L, выполнено равенство $p\dfrac{AK}{KB} + q\dfrac{CL}{LB} = 1$, где p и q — данные положительные числа.

14.10*. Три мухи равной массы ползают по сторонам треугольника так, что их центр масс остаётся на месте. Докажите, что он совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC, если известно, что одна муха проползла по всей границе треугольника.

14.11*. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки C_1, A_1 и B_1 так, что прямые CC_1, AA_1 и BB_1 пересекаются в некоторой точке O. Докажите, что:

а) $\dfrac{CO}{OC_1} = \dfrac{CA_1}{A_1B} + \dfrac{CB_1}{B_1A}$;

б) $\dfrac{AO}{OA_1} \cdot \dfrac{BO}{OB_1} \cdot \dfrac{CO}{OC_1} = \dfrac{AO}{OA_1} + \dfrac{BO}{OB_1} + \dfrac{CO}{OC_1} + 2 \geqslant 8$.

14.12*. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 так, что $BA_1/A_1C = CB_1/B_1A = AC_1/C_1B$. Докажите, что центры масс треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают.

14.13*. В середины сторон треугольника ABC помещены точки, массы которых равны длинам сторон. Докажите, что центр масс этой системы точек расположен в центре вписанной окружности треугольника с вершинами в серединах сторон треугольника ABC.

З а м е ч а н и е. Центр масс системы точек, рассматриваемой в задаче 14.13, совпадает с центром масс фигуры, изготовленной из трёх тонких стержней одинаковой толщины. Действительно, при нахождении центра масс стержень можно заменить на точку, расположенную в середине стержня и имеющую массу, равную массе стержня. Ясно также, что масса стержня пропорциональна его длине.

14.14*. На окружности дано n точек. Через центр масс $n-2$ точек проводится прямая, перпендикулярная хорде, соединяющей две оставшиеся точки. Докажите, что все такие прямые пересекаются в одной точке.

14.15*. На прямых BC, CA, AB взяты точки A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2 так, что $A_1B_2 \parallel AB$, $B_1C_2 \parallel BC$ и $C_1A_2 \parallel CA$. Пусть l_a — прямая, соединяющая точки пересечения прямых BB_1 и CC_2, BB_2 и CC_1; прямые l_b и l_c определяются аналогично. Докажите, что прямые l_a, l_b и l_c пересекаются в одной точке (или параллельны).

14.16*. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1, причём отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке P. Пусть l_a, l_b, l_c — прямые, соединяющие середины отрезков BC и B_1C_1, CA и C_1A_1, AB и A_1B_1. Докажите, что прямые l_a, l_b и l_c пересекаются в одной точке, причём эта точка лежит на отрезке PM, где M — центр масс треугольника ABC.

14.17*. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1; прямые B_1C_1, BB_1 и CC_1 пересекают прямую AA_1 в точках M, P и Q соответственно. Докажите, что:

а) $A_1M/MA = (A_1P/PA) + (A_1Q/QA)$;

б) если $P = Q$, то $MC_1 : MB_1 = (BC_1/AB) : (CB_1/AC)$.

14.18*. На прямой AB взяты точки P и P_1, а на прямой AC взяты точки Q и Q_1. Прямая, соединяющая точку A с точкой пересечения прямых PQ и P_1Q_1, пересекает прямую BC в точке D. Докажите, что

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{(\overline{BP}/\overline{PA}) - (\overline{BP_1}/\overline{P_1A})}{(\overline{CQ}/\overline{QA}) - (\overline{CQ_1}/\overline{Q_1A})}.$$

§ 3. Момент инерции

14.19. Пусть O — центр масс системы точек, суммарная масса которой равна m. Докажите, что моменты инерции этой системы относительно точки O и произвольной точки X связаны соотношением $I_X = I_O + mXO^2$.

14.20. а) Докажите, что момент инерции относительно центра масс системы точек с единичными массами равен $\frac{1}{n}\sum\limits_{i<j} a_{ij}^2$, где n — число точек, a_{ij} — расстояние между точками с номерами i и j.

б) Докажите, что момент инерции относительно центра масс системы точек с массами $m_1, \ldots, m_n$, равен $\frac{1}{m}\sum\limits_{i<j} m_im_ja_{ij}^2$, где $m = m_1 + \ldots + m_n$, a_{ij} — расстояние между точками с номерами i и j.

14.21. а) Треугольник ABC правильный. Найдите геометрическое место таких точек X, что $AX^2 = BX^2 + CX^2$.

б) Докажите, что для точек указанного ГМТ подерный треугольник относительно треугольника ABC прямоугольный.

14.22. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, H — точка пересечения высот. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 = 9R^2 - OH^2$.

14.23. Хорды AA_1, BB_1 и CC_1 окружности с центром O пересекаются в точке X. Докажите, что $(AX/XA_1) + (BX/XB_1) + (CX/XC_1) = 3$ тогда и только тогда, когда точка X лежит на окружности с диаметром OM, где M — центр масс треугольника ABC.

14.24*. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC взяты такие точки A_1 и B_2, B_1 и C_2, C_1 и A_2, что отрезки A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 параллельны сторонам треугольника и пересекаются в точке P. Докажите, что $PA_1 \cdot PA_2 + PB_1 \cdot PB_2 + PC_1 \cdot PC_2 = R^2 - OP^2$, где O — центр описанной окружности.

14.25*. Внутри окружности радиуса R расположено n точек. Докажите, что сумма квадратов попарных расстояний между ними не превосходит n^2R^2.

14.26*. Внутри треугольника ABC взята точка P. Пусть d_a, d_b и d_c — расстояния от точки P до сторон треугольника, R_a, R_b и R_c — расстояния от неё до вершин. Докажите, что

$$3(d_a^2 + d_b^2 + d_c^2) \geqslant (R_a \sin A)^2 + (R_b \sin B)^2 + (R_c \sin C)^2.$$

14.27*. Точки $A_1, \ldots, A_n$ лежат на одной окружности, а M — их центр масс. Прямые $MA_1, \ldots, MA_n$ пересекают эту окружность в точках $B_1, \ldots, B_n$ (отличных от $A_1, \ldots, A_n$). Докажите, что $MA_1 + \ldots + MA_n \leqslant MB_1 + \ldots + MB_n$.

См. также задачу 23.20.

§ 4. Разные задачи

14.28. Докажите, что если у многоугольника есть несколько осей симметрии, то все они пересекаются в одной точке.

14.29. Центрально симметричная фигура на клетчатой бумаге состоит из n «уголков» и k прямоугольников размером 1×4, изображённых на рис. 14.1. Докажите, что n чётно.

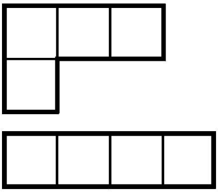


Рис. 14.1

14.30*. Решите задачу 13.47, используя свойства центра масс.

14.31*. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ взяты точки K и L так, что $BK : KC = CL : LD$. Докажите, что центр масс треугольника AKL лежит на диагонали BD.

§ 5. Барицентрические координаты

Пусть на плоскости задан треугольник $A_1A_2A_3$. Если точка X является центром масс вершин этого треугольника с массами m_1, m_2 и m_3, то числа $(m_1 : m_2 : m_3)$ называют *барицентрическими координатами* точки X относительно треугольника $A_1A_2A_3$.

14.32. Пусть задан треугольник $A_1A_2A_3$. Докажите, что:

а) любая точка X имеет некоторые барицентрические координаты относительно него;

б) при условии $m_1+m_2+m_3=1$ барицентрические координаты точки X определены однозначно.

Барицентрические координаты $(m_1 : m_2 : m_3)$, для которых выполняется условие $m_1+m_2+m_3=1$, будем называть *абсолютными барицентрическими координатами*; они определены уже не с точностью до пропорциональности, а однозначно.

14.33. Докажите, что барицентрические координаты точки X, лежащей внутри треугольника ABC, равны $(S_{BCX}:S_{CAX}:S_{ABX})$.

14.34. Точка X лежит внутри треугольника ABC. Прямые, проходящие через точку X параллельно AC и BC, пересекают сторону AB в точках K и L соответственно. Докажите, что барицентрические координаты точки X равны $(BL:AK:LK)$.

14.35. Найдите барицентрические координаты а) центра описанной окружности; б) центра вписанной окружности; в) ортоцентра треугольника.

14.36. Относительно треугольника ABC точка X имеет абсолютные барицентрические координаты (α, β, γ). Докажите, что $\overrightarrow{XA}=\beta\overrightarrow{BA}+\gamma\overrightarrow{CA}$.

14.37. Пусть (α, β, γ) — абсолютные барицентрические координаты точки X; M — центр масс треугольника ABC. Докажите, что $3\overrightarrow{XM}=(\alpha-\beta)\overrightarrow{AB}+(\beta-\gamma)\overrightarrow{BC}+(\gamma-\alpha)\overrightarrow{CA}$.

14.38*. а) Вычислите барицентрические координаты точки Нагеля N.

б) Пусть N — точка Нагеля, M — центр масс, I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $\overrightarrow{NM}=2\overrightarrow{MI}$; в частности точка N лежит на прямой MI.

14.39*. Пусть M — центр масс треугольника ABC, X — произвольная точка. На прямых BC, CA и AB взяты точки A_1, B_1 и C_1 так, что $A_1X \parallel AM$, $B_1X \parallel BM$ и $C_1X \parallel CM$. Докажите, что центр масс M_1 треугольника $A_1B_1C_1$ совпадает с серединой отрезка MX.

14.40*. Найдите уравнение описанной окружности треугольника $A_1A_2A_3$ в барицентрических координатах.

14.41*. а) Докажите, что точки с барицентрическими координатами $(\alpha:\beta:\gamma)$ и $(\alpha^{-1}:\beta^{-1}:\gamma^{-1})$ изотомически сопряжены относительно треугольника ABC.

б) Длины сторон треугольника ABC равны a, b и c. Докажите, что точки с барицентрическими координатами $(\alpha:\beta:\gamma)$ и $(a^2/\alpha:b^2/\beta:c^2/\gamma)$ изогонально сопряжены относительно треугольника ABC.

14.42*. Две прямые заданы в барицентрических координатах уравнениями $a_1\alpha+b_1\beta+c_1\gamma=0$ и $a_2\alpha+b_2\beta+c_2\gamma=0$.

а) Докажите, что точка пересечения этих прямых имеет барицентрические координаты

$$\left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right).$$

б) Докажите, что эти прямые параллельны тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

14.43*. На прямых AB, BC, CA даны точки C_1 и C_2, A_1 и A_2, B_1 и B_2. Точки C_1 и C_2 определяют числа γ_1 и γ_2, для которых $(1+\gamma_1)\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB}$ и $(1+\gamma_2)\overrightarrow{C_2B} = \overrightarrow{AB}$; числа α_1, α_2, β_1, β_2 определяются аналогично. Докажите, что прямые A_2B_1, B_2C_1 и C_2A_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\alpha_1\beta_1\gamma_1 + \alpha_2\beta_2\gamma_2 + \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 1.$$

Замечание. При $\alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = 0$ точки A_2, B_2, C_2 совпадают с B, C, A; в этом случае получаем теорему Чевы. При $\alpha_1\alpha_2 = \beta_1\beta_2 = \gamma_1\gamma_2 = 1$ совпадают точки A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2. (Действительно, совпадение точек A_1 и A_2 эквивалентно тому, что $\dfrac{1}{1+\alpha_1} + \dfrac{1}{1+\alpha_2} = 1$; это равенство эквивалентно равенству $\alpha_1\alpha_2 = 1$.) Прямые A_1B_1, B_1C_1 и C_1A_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда они совпадают. В этом случае получаем теорему Менелая.

14.44*. Пусть $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ и $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ — абсолютные барицентрические координаты точек M и N. Докажите, что

$$MN^2 = S_A(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + S_B(\beta_1 - \beta_2)^2 + S_C(\gamma_1 - \gamma_2)^2,$$

где $S_\omega = 2S \operatorname{ctg} \omega$ для произвольного угла ω, A, B, C — углы данного треугольника, а S — его площадь.

14.45*. Докажите, что величина S_ω, введённая в задаче 14.44, обладает следующими свойствами:

а) $S_A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$, $S_B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2}$, $S_C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}$.

б) $S_A + S_B = c^2$, $S_B + S_C = a^2$, $S_C + S_A = b^2$.

в) $S_A + S_B + S_C = S_\varphi$, где φ — угол Брокара.

г) $S_AS_B + S_BS_C + S_CS_A = 4S^2$.

д) $S_AS_BS_C = 4S^2S_\varphi - (abc)^2$.

14.46*. Прямая l проходит через точку X с барицентрическими координатами $(\alpha : \beta : \gamma)$. Пусть d_a, d_b, d_c — расстояния от вершин A, B, C до прямой l с учётом знака (для точек, лежащих по разные стороны от прямой l, знаки разные). Докажите, что $d_a\alpha + d_b\beta + d_c\gamma = 0$.

14.47*. Прямая l касается вписанной окружности треугольника ABC. Пусть δ_a, δ_b, δ_c — расстояния от прямой l до точек A, B, C с учётом знака (расстояние положительно, если точка и центр вписанной окружности лежат по одну сторону от прямой l; в противном случае расстояние отрицательно). Докажите, что $a\delta_a + b\delta_b + c\delta_c = 2S_{ABC}$.

14.48*. Прямая l касается вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны BC. Пусть δ_a, δ_b, δ_c — расстояния от прямой l до точек A, B, C с учётом знака (расстояние положительно, если точка и центр вневписанной окружности лежат по одну сторону от прямой l; в противном случае расстояние отрицательно). Докажите, что $-a\delta_a + b\delta_b + c\delta_c = 2S_{ABC}$.

14.49*. Пусть S_a и S_b — вневписанные окружности, касающиеся сторон BC и AC треугольника ABC, d_{ab} и d_{ac} — расстояния от вершин B и C до прямой l_a, касающейся внешним образом окружностей S_b и S_c (и отличной от прямой BC); числа d_{bc} и d_{ba}, d_{cb} и d_{ca} определяются аналогично. Докажите, что $d_{ab}d_{bc}d_{ca} = d_{ac}d_{ba}d_{cb}$.

См. также задачи 31.81, 31.83, 31.84.

§ 6. Трилинейные координаты

Трилинейные координаты тесно связаны с барицентрическими координатами. А именно, если $(\alpha : \beta : \gamma)$ — барицентрические координаты точки X относительно треугольника ABC, то $(x : y : z) = \left(\frac{\alpha}{a} : \frac{\beta}{b} : \frac{\gamma}{c}\right)$ — её *трилинейные координаты*. Трилинейные координаты, как и барицентрические, определены с точностью до пропорциональности.

Для точки X, лежащей внутри треугольника ABC, в качестве барицентрических координат можно взять площади треугольников $(S_{BCX} : S_{CAX} : S_{ABX})$. Это означает, что в качестве трилинейных координат можно взять расстояния от точки X до сторон треугольника — *абсолютные трилинейные координаты*. Если точка X лежит вне треугольника, то расстояния до сторон нужно взять с учётом знака. Например, если точки X и A лежат по одну сторону от прямой BC, то $x > 0$, а если по разные, то $x < 0$.

В трилинейных координатах изогональное сопряжение задаётся формулой $(x : y : z) \mapsto (x^{-1} : y^{-1} : z^{-1})$. В связи с этим трилинейные координаты часто бывают удобны при работе с изогональным сопряжением.

14.50*. Продолжения сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точках P и Q. Докажите, что точки пересечения биссектрис внешних углов при вершинах A и C, B и D, P и Q лежат на одной прямой.

14.51*. На сторонах AD и DC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ взяты точки P и Q так, что $\angle ABP = \angle CBQ$. Отрезки AQ и CP пересекаются в точке E. Докажите, что $\angle ABE = \angle CBD$.

14.52*. Найдите трилинейные координаты точек Брокара.

14.53*. На сторонах треугольника ABC внешним (внутренним) образом построены правильные треугольники ABC_1, AB_1C и A_1BC. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Найдите трилинейные координаты этой точки.

Эту точку называют первым (вторым) *изогоническим центром*. Первый изогонический центр называют также *точкой Торричелли* или *точкой Ферма*.

14.54*. Найдите уравнения в трилинейных координатах для: а) описанной окружности; б) вписанной окружности; в) вневписанной окружности.

14.55*. Найдите уравнение окружности девяти точек в трилинейных координатах.

14.56*. а) Докажите, что в трилинейных координатах любая окружность задаётся уравнением вида

$$(px+qy+rz)(x\sin\alpha+y\sin\beta+z\sin\gamma)=yz\sin\alpha+xz\sin\beta+xy\sin\gamma.$$

б) Докажите, что радикальная ось двух окружностей, заданных уравнениями такого вида, задаётся уравнением

$$p_1x+q_1y+r_1z=p_2x+q_2y+r_2z.$$

14.57*. Докажите, что касательная к вписанной окружности в точке $(x_0:y_0:z_0)$ задаётся уравнением

$$\frac{x}{\sqrt{x_0}}\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{y}{\sqrt{y_0}}\cos\frac{\beta}{2}+\frac{z}{\sqrt{z_0}}\cos\frac{\gamma}{2}=0.$$

14.58*. Докажите, что вписанная окружность касается окружности девяти точек (Фейербах). Найдите трилинейные координаты точки касания.

14.59*. а) Найдите трилинейные координаты вершин треугольника Брокара.

б) Найдите трилинейные координаты точки Штейнера (см. задачу 19.61).

14.60*. Пусть (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) — абсолютные трилинейные координаты точек M и N. Докажите, что

$$MN^2=\frac{\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}(x_1-x_2)^2+\frac{\cos\beta}{\sin\gamma\sin\alpha}(y_1-y_2)^2+\frac{\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}(z_1-z_2)^2.$$

См. также задачи 31.78, 31.81, 31.83, 31.84.

Решения

14.1. Пусть X и O — произвольные точки. Тогда $m_1\overrightarrow{OX_1}+\ldots+m_n\overrightarrow{OX_n}=(m_1+\ldots+m_n)\overrightarrow{OX}+m_1\overrightarrow{XX_1}+\ldots+m_n\overrightarrow{XX_n}$, поэтому точка O является центром масс данной системы точек тогда и только тогда, когда

$$(m_1+\ldots+m_n)\overrightarrow{OX}+m_1\overrightarrow{XX_1}+\ldots+m_n\overrightarrow{XX_n}=\vec{0},$$

т. е. $\overrightarrow{XO} = \dfrac{1}{m_1 + \ldots + m_n}\,(m_1\overrightarrow{XX_1} + \ldots + m_n\overrightarrow{XX_n})$. Из этого рассуждения вытекают решения обеих задач.

14.2. Пусть O — центр масс точек $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$ с массами $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$, а Y — центр масс точек $Y_1, \ldots, Y_m$ с массами $b_1, \ldots, b_m$. Тогда

$$a_1\overrightarrow{OX_1} + \ldots + a_n\overrightarrow{OX_n} + b_1\overrightarrow{OY_1} + \ldots + b_m\overrightarrow{OY_m} = \vec{0}$$

и $b_1\overrightarrow{YY_1} + \ldots + b_m\overrightarrow{YY_m} = \vec{0}$. Вычитая второе равенство из первого, получаем

$$a_1\overrightarrow{OX_1} + \ldots + a_n\overrightarrow{OX_n} + (b_1 + \ldots + b_m)\overrightarrow{OY} = 0,$$

т. е. O — центр масс точек $X_1, \ldots, X_n, Y$ с массами $a_1, \ldots, a_n, b_1 + \ldots + b_m$.

14.3. Пусть O — центр масс данной системы. Тогда $a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} = \vec{0}$, поэтому точка O лежит на отрезке AB и $aOA = bOB$, т. е. $AO : OB = b : a$.

14.4. Поместим в точки A, B и C единичные массы. Пусть O — центр масс этой системы точек. Точка O является также центром масс точки A с массой 1 и точки A_1 с массой 2, где A_1 — центр масс точек B и C с единичными массами, т. е. A_1 — середина отрезка BC. Поэтому точка O лежит на медиане AA_1 и делит её в отношении $AO : OA_1 = 2 : 1$. Аналогично доказывается, что остальные медианы проходят через точку O и делятся ею в отношении $2 : 1$.

14.5. Поместим в вершины четырёхугольника $ABCD$ единичные массы. Пусть O — центр масс этой системы точек. Достаточно доказать, что точка O является серединой отрезков KM и LN и серединой отрезка, соединяющего середины диагоналей. Ясно, что K — центр масс точек A и B, M — центр масс точек C и D. Поэтому точка O является центром масс точек K и M с массами 2, т. е. O — середина отрезка KM. Аналогично O — середина отрезка LN. Рассматривая центры масс пар точек (A, C) и (B, D) (т. е. середины диагоналей), получаем, что точка O является серединой отрезка, соединяющего середины диагоналей.

14.6. Поместим в вершины шестиугольника единичные массы; пусть O — центр масс полученной системы точек. Так как точки A_1, C_1 и E_1 являются центрами масс пар точек (A, B), (C, D) и (E, F), то точка O является центром масс системы точек A_1, C_1 и E_1 с массами 2, т. е. O — точка пересечения медиан треугольника $A_1C_1E_1$ (см. решение задачи 14.4). Аналогично доказывается, что O — точка пересечения медиан треугольника $B_1D_1F_1$.

14.7. Пусть прямые AA_1 и CC_1 пересекаются в точке O; $AC_1 : C_1B = p$ и $BA_1 : A_1C = q$. Нужно доказать, что прямая BB_1 проходит через точку O тогда и только тогда, когда $CB_1 : B_1A = 1 : pq$.

Поместим в точки A, B и C массы 1, p и pq соответственно. Тогда точка C_1 является центром масс точек A и B, а точка A_1 — центром масс точек B и C. Поэтому центр масс точек A, B и C с данными массами является точкой O пересечения прямых CC_1 и AA_1. С другой стороны, точка O лежит на отрезке, соединяющем точку B с центром масс точек A и C. Если B_1 — центр масс точек A и C с массами 1 и pq, то $AB_1 : B_1C = pq : 1$. Остаётся заметить, что на отрезке AC существует единственная точка, делящая его в данном отношении $AB_1 : B_1C$.

14.8. Поместим в точки A, B, C и D массы 1, α, $\alpha\beta$ и β соответственно. Тогда точки K, L, M и N являются центрами масс пар точек (A, B), (B, C), (C, D) и (D, A) соответственно. Пусть O — центр масс точек

A, B, C и D с указанными массами. Тогда O лежит на отрезке NL и $NO:OL=(\alpha\beta+\alpha):(1+\beta)=\alpha$. Точка O лежит на отрезке KM и $KO:OM=$ $=(\beta+\alpha\beta):(1+\alpha)=\beta$. Поэтому O — точка пересечения отрезков KM и LN, т. е. $O=P$ и $NP:PL=NO:OL=\alpha$, $KP:PM=\beta$.

14.9. Поместим в вершины A, B и C массы p, 1 и q соответственно. Пусть O — центр масс этой системы точек. Будем рассматривать точку с массой 1 как две совпадающие точки с массами x_a и x_c, где $x_a+x_c=1$. Пусть K — центр масс точек A и B с массами p и x_a, а L — центр масс точек C и B с массами q и x_c. Тогда $AK:KB=x_a:p$, $CL:LB=x_c:q$, а точка O, являющаяся центром масс точек K и L с массами $p+x_a$ и $q+x_c$, лежит на прямой KL. Изменяя x_a от 0 до 1, мы получим все прямые, проходящие через точку O и пересекающие стороны AB и BC. Поэтому для всех этих прямых выполняется равенство $\dfrac{pAK}{KB}+\dfrac{qCL}{LB}=x_a+x_c=1$.

14.10. Обозначим центр масс мух через O. Пусть одна муха находится в вершине A, а A_1 — центр масс двух других мух. Ясно, что точка A_1 лежит внутри треугольника ABC, а точка O лежит на отрезке AA_1 и делит его в отношении $AO:OA_1=2:1$. Поэтому точка O лежит внутри треугольника, полученного из треугольника ABC гомотетией с коэффициентом $2/3$ и центром A. Рассматривая такие треугольники для всех трёх вершин, получаем, что единственной их общей точкой является точка пересечения медиан треугольника ABC. Так как одна муха побывала во всех трёх вершинах, а точка O при этом оставалась на месте, точка O должна принадлежать всем трём этим треугольникам, т. е. O совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC.

14.11. а) Пусть $AB_1:B_1C=1:p$ и $BA_1:A_1C=1:q$. Поместим в точки A, B, C массы p, q, 1 соответственно. Тогда точки A_1 и B_1 являются центрами масс пар точек (B, C) и (A, C). Поэтому центр масс системы точек A, B и C лежит как на отрезке AA_1, так и на отрезке BB_1, т. е. совпадает с точкой O. Следовательно, точка C_1 является центром масс точек A и B. Поэтому $CO/OC_1=p+q=(CB_1/B_1A)+(CA_1/A_1B)$.

б) Согласно задаче а) $\dfrac{AO}{OA_1}\cdot\dfrac{BO}{OB_1}\cdot\dfrac{CO}{OC_1}=\dfrac{1+q}{p}\cdot\dfrac{1+p}{q}\cdot\dfrac{p+q}{1}=p+q+\dfrac{p}{q}+$ $+\dfrac{q}{p}+\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+2=\dfrac{AO}{OA_1}+\dfrac{BO}{OB_1}+\dfrac{CO}{OC_1}+2$. Ясно также, что $p+\dfrac{1}{p}\geqslant 2$, $q+\dfrac{1}{q}\geqslant 2$ и $\dfrac{p}{q}+\dfrac{q}{p}\geqslant 2$.

14.12. Пусть M — центр масс треугольника ABC. Тогда $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Кроме того, $\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{BC_1}+\overrightarrow{CA_1}=k(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB})=\vec{0}$. Сложив эти равенства, получим $\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{MC_1}+\overrightarrow{MA_1}=\vec{0}$, т. е. M — центр масс треугольника $A_1B_1C_1$.

З а м е ч а н и е. Аналогичное утверждение точно так же доказывается для произвольного n-угольника.

14.13. Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB. Центр масс точек B_1 и C_1 находится в точке K, для которой $B_1K:KC_1=c:b=B_1A_1:A_1C_1$. Поэтому A_1K — биссектриса угла $B_1A_1C_1$.

14.14. Пусть M_1 — центр масс $n-2$ точек, K — середина хорды, соединяющей две оставшиеся точки, O — центр окружности, M — центр масс всех данных точек. Если прямая OM пересекает прямую, проведённую через точку M_1 в точке P, то $\overline{OM}/\overline{MP}=\overline{KM}/\overline{MM_1}=(n-2)/2$, а значит, положение точки P однозначно определяется положением точек O и M (если $M=O$, то $P=O$).

14.15. Параллельность прямых A_1B_2 и AB означает, что если B_2 — центр масс точек A и C с массами 1 и γ, то A_1 — центр масс точек B и C с массами 1 и γ. Определим числа α и β аналогично.

Прямые BB_1 и CC_2 пересекаются в центре масс точек A, B и C с массами α, 1 и 1. Прямые BB_2 и CC_1 пересекаются в центре масс точек A, B и C с массами 1, β и γ. Поэтому прямая l_a проходит через центр масс точек A, B и C с массами $1+\alpha$, $1+\beta$ и $1+\gamma$. Аналогично доказывается, что через эту точку проходят и прямые l_b и l_c. Если сумма масс равна нулю, то центр масс — бесконечно удалённая точка; в этом случае прямые l_a, l_b и l_c параллельны.

14.16. Пусть P — центр масс точек A, B и C с массами a, b и c, M — центр масс точек A, B и C с массой $a+b+c$ в каждой точке, Q — центр масс объединения этих двух систем точек. Середина отрезка AB является центром масс точек A, B и C с массами $a+b+c-(ab/c)$, $a+b+c-(ab/c)$ и 0, а середина отрезка A_1B_1 является центром масс точек A, B и C с массами $a(b+c)/c$, $b(a+c)/c$ и $(b+c)+(a+c)$. Центр масс объединения этих систем точек является точкой Q.

14.17. а) Поместим в точки B, C и A такие массы β, γ и $b+c$, что $CA_1:BA_1=\beta:\gamma$, $BC_1:AC_1=b:\beta$ и $AB_1:CB_1=\gamma:c$. Тогда M — центр масс этой системы, а значит, $A_1M/AM=(b+c)/(\beta+\gamma)$. Точка P является центром масс точек A, B и C с массами c, β и γ, поэтому $A_1P/PA=c/(\beta+\gamma)$. Аналогично $A_1Q/AQ=b/(\beta+\gamma)$.

б) Как и в задаче а), получаем $MC_1/MB_1=(c+\gamma)/(b+\beta)$, $BC_1/AB=b/(b+\beta)$ и $AC/CB_1=(c+\gamma)/c$. Кроме того, $b=c$, так как прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке (см. задачу 14.7).

14.18. Точка пересечения прямых PQ и P_1Q_1 является центром масс точек A, B и C с массами a, b и c; при этом P — центр масс точек A и B с массами $a-x$ и b, а Q — центр масс точек A и C с массами x и c. Пусть $p=\overline{BP}/\overline{PA}=(a-x)/b$ и $q=\overline{CQ}/\overline{QA}=x/c$. Тогда $pb+qc=a$. Аналогично $p_1b+q_1c=a$. Следовательно, $\overline{BD}/\overline{CD}=-c/b=(p-p_1)/(q-q_1)$.

14.19. Занумеруем точки данной системы. Пусть $\boldsymbol{x}_i$ — вектор с началом в точке O и концом в точке с номером i, причём этой точке приписана масса m_i. Тогда $\sum m_i\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{0}$. Пусть, далее, $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{XO}$. Тогда $I_O=\sum m_i\boldsymbol{x}_i^2$, $I_M=\sum m_i(\boldsymbol{x}_i+\boldsymbol{a})^2=\sum m_i\boldsymbol{x}_i^2+2(\sum m_i\boldsymbol{x}_i,\,\boldsymbol{a})+\sum m_i\boldsymbol{a}^2=I_O+m\boldsymbol{a}^2$.

14.20. а) Пусть $\boldsymbol{x}_i$ — вектор с началом в центре масс O и концом в точке с номером i. Тогда $\sum\limits_{i,j}(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j)^2=\sum\limits_{i,j}(\boldsymbol{x}_i^2+\boldsymbol{x}_j^2)-2\sum\limits_{i,j}(\boldsymbol{x}_i,\,\boldsymbol{x}_j)$, где суммирование ведётся по всем возможным парам номеров точек. Ясно, что $\sum\limits_{i,j}(\boldsymbol{x}_i^2+\boldsymbol{x}_j^2)=2n\sum\limits_i\boldsymbol{x}_i^2=2nI_O$ и $\sum\limits_{i,j}(\boldsymbol{x}_i,\,\boldsymbol{x}_j)=\sum\limits_i(\boldsymbol{x}_i,\,\sum\limits_j\boldsymbol{x}_j)=0$. Поэтому $2nI_O=$ $=\sum\limits_{i,j}(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j)^2=2\sum\limits_{i<j}a_{ij}^2$.

б) Пусть $\boldsymbol{x}_i$ — вектор с началом в центре масс O и концом в точке с номером i. Тогда $\sum\limits_{i,j}m_im_j(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j)^2=\sum\limits_{i,j}m_im_j(\boldsymbol{x}_i^2+\boldsymbol{x}_j^2)-2\sum\limits_{i,j}m_im_j(\boldsymbol{x}_i,\,\boldsymbol{x}_j)$. Ясно, что $\sum\limits_{i,j}m_im_j(\boldsymbol{x}_i^2+\boldsymbol{x}_j^2)=\sum\limits_i m_i\sum\limits_j(m_j\boldsymbol{x}_i^2+m_j\boldsymbol{x}_j^2)=\sum\limits_i m_i(m\boldsymbol{x}_i^2+I_O)=2mI_O$

и $\sum\limits_{i,j} m_i m_j(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) = \sum\limits_i m_i(\boldsymbol{x}_i, \sum\limits_j m_j\boldsymbol{x}_j) = 0$. Поэтому $2mI_O = \sum\limits_{i,j} m_i m_j(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j)^2 = 2\sum\limits_{i<j} m_i m_j a_{ij}^2$.

14.21. а) Пусть M — точка, симметричная точке A относительно прямой BC. Тогда M — центр масс точек A, B и C с массами -1, 1 и 1, а значит, $-AX^2 + BX^2 + CX^2 = I_X = I_M + (-1+1+1)MX^2 = (-3+1+1)a^2 + MX^2$, где a — сторона треугольника ABC. В итоге получаем, что искомое ГМТ является окружностью радиуса a с центром M.

б) Пусть A', B' и C' — проекции точки X на прямые BC, CA и AB. Точки B' и C' лежат на окружности с диаметром AX, поэтому $B'C' = AX\sin B'AC' = \sqrt{3}AX/2$. Аналогично $C'A' = \sqrt{3}BX/2$ и $A'B' = \sqrt{3}CX/2$. Следовательно, если $AX^2 = BX^2 + CX^2$, то $\angle B'A'C' = 90^\circ$.

14.22. Пусть M — центр масс вершин треугольника ABC с единичными массами. Тогда $I_O = I_M + 3MO^2 = (a^2+b^2+c^2)/3 + 3MO^2$ (см. задачи 14.19 и 14.20 а). А так как $OA = OB = OC = R$, то $I_O = 3R^2$. Остаётся заметить, что $OH = 3OM$ (задача 5.128).

14.23. Ясно, что $AX/XA_1 = AX^2/AX\cdot XA_1 = AX^2/(R^2 - OX^2)$. Поэтому нужно проверить, что $AX^2 + BX^2 + CX^2 = 3(R^2 - OX^2)$ тогда и только тогда, когда $OM^2 = OX^2 + MX^2$. Для этого достаточно заметить, что $AX^2 + BX^2 + CX^2 = I_X = I_M + 3MX^2 = I_O - 3MO^2 + 3MX^2 = 3(R^2 - MO^2 + MX^2)$.

14.24. Пусть P — центр масс точек A, B и C с массами α, β и γ; можно считать, что $\alpha+\beta+\gamma = 1$. Если K — точка пересечения прямых CP и AB, то

$$\frac{BC}{PA_1} = \frac{CK}{PK} = \frac{CP+PK}{PK} = 1 + \frac{CP}{PK} = 1 + \frac{\alpha+\beta}{\gamma} = \frac{1}{\gamma}.$$

Аналогичные рассуждения показывают, что рассматриваемая величина равна $\beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2 + \alpha\beta c^2 = I_P$ (см. задачу 14.20 б). А так как $I_O = \alpha R^2 + \beta R^2 + \gamma R^2 = R^2$, то $I_P = I_O - OP^2 = R^2 - OP^2$.

14.25. Поместим в данные точки единичные массы. Как следует из результата задачи 14.20 а), сумма квадратов попарных расстояний между этими точками равна nI, где I — момент инерции системы точек относительно центра масс. Рассмотрим теперь момент инерции системы относительно центра O окружности. С одной стороны, $I \leqslant I_O$ (см. задачу 14.19). С другой стороны, так как расстояние от точки O до любой из данных точек не превосходит R, то $I_O \leqslant nR^2$. Поэтому $nI \leqslant n^2R^2$, причём равенство достигается, только если $I = I_O$ (т. е. центр масс совпадает с центром окружности) и $I_O = nR^2$ (т. е. все точки расположены на данной окружности).

14.26. Пусть A_1, B_1 и C_1 — проекции точки P на стороны BC, CA и AB; M — центр масс треугольника $A_1B_1C_1$. Тогда $3(d_a^2 + d_b^2 + d_c^2) = 3I_P \geqslant 3I_M = A_1B_1^2 + B_1C_1^2 + C_1A_1^2 = (R_c\sin C)^2 + (R_a\sin A)^2 + (R_b\sin B)^2$, так как, например, отрезок A_1B_1 является хордой окружности с диаметром CP.

14.27. Пусть O — центр данной окружности. Если хорда AB проходит через точку M, то $AM\cdot BM = R^2 - d^2$, где $d = MO$. Обозначим через I_X момент инерции системы точек $A_1, \ldots, A_n$ относительно точки X. Тогда $I_O = I_M + nd^2$ (см. задачу 14.19). С другой стороны, так как $OA_i = R$, то $I_O = nR^2$. Поэтому $A_iM\cdot B_iM = R^2 - d^2 = \frac{1}{n}(A_1M^2 + \ldots + A_nM^2)$. Таким образом, если ввести обозначение $a_i = A_iM$, то требуемое неравенство перепишется в виде

$a_1 + \ldots + a_n \leqslant \frac{1}{n}(a_1^2 + \ldots + a_n^2)\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)$. Для доказательства этого неравенства следует воспользоваться неравенством $x + y \leqslant x^2/y + y^2/x$ (последнее неравенство получается из неравенства $xy \leqslant x^2 - xy + y^2$ умножением обеих частей на $\frac{x+y}{xy}$).

14.28. Поместим в вершины многоугольника единичные массы. При симметрии относительно оси симметрии эта система точек переходит в себя, поэтому её центр масс тоже переходит в себя. Следовательно, все оси симметрии проходят через центр масс вершин с единичными массами.

14.29. Поместим в центры клеток, из которых состоят «уголки» и прямоугольники, единичные массы. Разобьём каждую исходную клетку бумаги на четыре клетки, получив тем самым новую клетчатую бумагу. Легко проверить, что теперь центр масс уголка лежит в центре новой клетки, а центр масс прямоугольника — в вершине клетки (рис. 14.2). Ясно, что центр масс фигуры

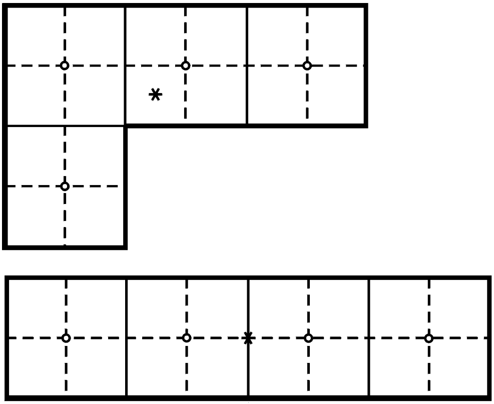


Рис. 14.2

совпадает с её центром симметрии, а центр симметрии фигуры, состоящей из исходных клеток, может находиться только в вершине новой клетки. Так как массы уголков и плиток равны, сумма векторов с началом в центре масс фигуры и с концами в центрах масс всех уголков и плиток равна нулю. Если бы число уголков было нечётно, то сумма векторов имела бы полуцелые координаты и была бы отлична от нуля. Следовательно, число уголков чётно.

14.30. Поместим в вершины многоугольника $A_1 \ldots A_n$ единичные массы. Тогда O — центр масс данной системы точек. Поэтому $\overrightarrow{A_iO} = (\overrightarrow{A_iA_1} + \ldots + \overrightarrow{A_iA_n})/n$ и $A_iO \leqslant (A_iA_1 + \ldots + A_iA_n)/n$. Следовательно, $d = A_1O + \ldots + A_nO \leqslant \frac{1}{n}\sum\limits_{i,j=1}^{n} A_iA_j$.

Число n можно записать либо в виде $n = 2m$, либо в виде $n = 2m + 1$. Пусть P — периметр многоугольника. Ясно, что $A_1A_2 + \ldots + A_nA_1 = P$, $A_1A_3 + A_2A_4 + \ldots + A_nA_2 \leqslant 2P$, ..., $A_1A_{m+1} + A_2A_{m+2} + \ldots + A_nA_m \leqslant mP$, причём в левых частях этих неравенств встречаются все стороны и диагонали. Так как в сумму $\sum\limits_{i,j=1}^{n} A_iA_j$ все они входят дважды, то

$$d \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n} A_iA_j \leqslant \frac{2}{n}(P + 2P + \ldots + mP) = \frac{m(m+1)}{n}\,P.$$

При чётном n это неравенство можно усилить за счёт того, что в этом случае в сумму $A_1A_{m+1} + \ldots + A_nA_{m+n}$ каждая диагональ входит дважды, т. е. вместо mP можно взять $mP/2$. Значит, при чётном n

$$d \leqslant \frac{2}{n}\Big(P + 2P + \ldots + (m-1)P + \frac{m}{2}P\Big) = \frac{m^2}{n}\,P.$$

Таким образом, при n чётном $d \leqslant \frac{m^2}{n}\,P = \frac{n}{4}P$, а при n нечётном $d \leqslant \frac{m(m+1)}{n}\,P = \frac{n^2-1}{4n}\,P$.

14.31. Пусть $k = BK/BC = 1 - (DL/DC)$. При проекции на прямую, перпендикулярную диагонали BD, точки A, B, K и L переходят в такие точки A', B', K' и L', что $B'K' + B'L' = kA'B' + (1-k)A'B' = A'B'$. Следовательно, центр масс точек A', K' и L' совпадает с точкой B'. Остаётся заметить, что при проекции центр масс переходит в центр масс.

14.32. Введём следующие обозначения: $\boldsymbol{e}_1 = \overrightarrow{A_3A_1}$, $\boldsymbol{e}_2 = \overrightarrow{A_3A_2}$ и $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{XA_3}$. Точка X является центром масс вершин треугольника $A_1A_2A_3$ с массами m_1, m_2, m_3 тогда и только тогда, когда $m_1(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_1) + m_2(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_2) + m_3\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, т. е. $m\boldsymbol{x} = -(m_1\boldsymbol{e}_1 + m_2\boldsymbol{e}_2)$, где $m = m_1 + m_2 + m_3$. Будем считать, что $m = 1$. Любой вектор $\boldsymbol{x}$ на плоскости можно представить в виде $\boldsymbol{x} = -m_1\boldsymbol{e}_1 - m_2\boldsymbol{e}_2$, причём числа m_1 и m_2 определены однозначно. Число m_3 находится по формуле $m_3 = 1 - m_1 - m_2$.

14.33. Эта задача является переформулировкой задачи 13.31.

З а м е ч а н и е. Если площади треугольников BCX, CAX и ABX считать ориентированными, то утверждение задачи останется верным и для точек, лежащих вне треугольника.

14.34. При проекции на прямую AB параллельно прямой BC вектор $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{XA}\cdot BL + \overrightarrow{XB}\cdot AK + \overrightarrow{XC}\cdot LK$ переходит в вектор $\overrightarrow{LA}\cdot BL + \overrightarrow{LB}\cdot AK + \overrightarrow{LB}\cdot LK$. Этот вектор нулевой, так как $LA = LK + KA$. Рассмотрев проекцию на прямую AB параллельно прямой AC, получим, что $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$.

14.35. Используя результат задачи 14.33, легко проверить, что ответ следующий: а) $(\sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma)$; б) $(a : b : c)$; в) $(\operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta : \operatorname{tg}\gamma)$.

Если потребовать, чтобы сумма барицентрических координат была равна 1, то ответ следующий: а) $\left(\frac{\cos\alpha}{2\sin\beta\sin\gamma} : \ldots\right)$; в) $(\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma : \ldots)$.

14.36. Прибавив к обеим частям равенства $\alpha\overrightarrow{XA} + \beta\overrightarrow{XB} + \gamma\overrightarrow{XC} = \overrightarrow{0}$ вектор $(\beta+\gamma)\overrightarrow{XA}$, получим $\overrightarrow{XA} = (\beta+\gamma)\overrightarrow{XA} + \beta\overrightarrow{BX} + \gamma\overrightarrow{CX} = \beta\overrightarrow{BA} + \gamma\overrightarrow{CA}$.

14.37. Согласно задаче 14.1 б) $3\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}$. Кроме того, $\overrightarrow{XA} = \beta\overrightarrow{BA} + \gamma\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{XB} = \alpha\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{XC} = \alpha\overrightarrow{AC} + \beta\overrightarrow{BC}$ (см. задачу 14.36).

14.38. а) Пусть прямые AN, BN и CN пересекают стороны треугольника в точках A_1, B_1 и C_1. Тогда

$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{p-c}{p-a}, \qquad \frac{CA_1}{A_1B} = \frac{p-b}{p-c}, \qquad \frac{BC_1}{C_1B} = \frac{p-a}{p-b}.$$

Поэтому точка N имеет барицентрические координаты $(p-a : p-b : p-c)$.

б) Абсолютные барицентрические координаты точек N и I равны

$$\left(\frac{p-a}{p}, \frac{p-b}{p}, \frac{p-c}{p}\right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{a}{2p}, \frac{b}{2p}, \frac{c}{2p}\right).$$

Поэтому, воспользовавшись задачей 14.37, получаем требуемое.

14.39. Пусть прямые, проходящие через точку X параллельно AC и BC, пересекают прямую AB в точках K и L соответственно. Если (α, β, γ) — абсолютные барицентрические координаты точки X, то $2\overrightarrow{XC_1} = \overrightarrow{XK} + \overrightarrow{XL} = \gamma\overrightarrow{CA} + \gamma\overrightarrow{CB}$ (см. решение задачи 14.34). Поэтому $3\overrightarrow{XM_1} = \overrightarrow{XA_1} + \overrightarrow{XB_1} + \overrightarrow{XC_1} = (\alpha(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \beta(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) + \gamma(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}))/2 = 3\overrightarrow{XM}/2$ (см. задачу 14.37).

14.40. Пусть X — произвольная точка, O — центр описанной окружности данного треугольника, $\boldsymbol{e}_i = \overrightarrow{OA_i}$ и $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{XO}$. Если точка X имеет барицентрические координаты $(x_1 : x_2 : x_3)$, то $\sum x_i(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{e}_i) = \sum x_i\overrightarrow{XA_i} = \boldsymbol{0}$, так как X — центр масс точек A_1, A_2, A_3 с массами x_1, x_2, x_3. Поэтому $(\sum x_i)\boldsymbol{a} = -\sum x_i\boldsymbol{e}_i$. Точка X принадлежит описанной окружности треугольника тогда и только тогда, когда $|\boldsymbol{a}| = XO = R$, где R — радиус этой окружности. Таким образом, описанная окружность треугольника задаётся в барицентрических координатах уравнением $R^2\left(\sum x_i\right)^2 = \left(\sum x_i\boldsymbol{e}_i\right)^2$, т. е. $R^2\sum x_i^2 + 2R^2\sum\limits_{i<j} x_ix_j = R^2\sum x_i^2 + 2\sum\limits_{i<j} x_ix_j(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$, так как $|\boldsymbol{e}_i| = R$. Это уравнение переписывается в виде $\sum\limits_{i<j} x_ix_j(R^2 - (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)) = 0$. Заметим теперь, что $2(R^2 - (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)) = a_{ij}^2$, где a_{ij} — длина стороны A_iA_j. В самом деле, $a_{ij}^2 = |\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j|^2 = |\boldsymbol{e}_i|^2 + |\boldsymbol{e}_j|^2 - 2(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = 2(R^2 - (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j))$. В итоге получаем, что описанная окружность треугольника $A_1A_2A_3$ задаётся в барицентрических координатах уравнением $\sum\limits_{i<j} x_ix_ja_{ij}^2 = 0$, где a_{ij} — длина стороны A_iA_j.

14.41. а) Пусть X и Y — точки с барицентрическими координатами $(\alpha : \beta : \gamma)$ и $(\alpha^{-1} : \beta^{-1} : \gamma^{-1})$; прямые CX и CY пересекают прямую AB в точках X_1 и Y_1. Тогда $\overline{AX_1} : \overline{BX_1} = \beta : \alpha = \alpha^{-1} : \beta^{-1} = \overline{BY_1} : \overline{AY_1}$. Аналогичные рассуждения для прямых AX и BX показывают, что точки X и Y изотомически сопряжены относительно треугольника ABC.

б) Пусть X — точка с абсолютными барицентрическими координатами (α, β, γ). Тогда согласно задаче 14.36 $\overrightarrow{AX} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} = \beta c(\overrightarrow{AB}/c) + \gamma b(\overrightarrow{AC}/b)$. Пусть Y — точка, симметричная точке X относительно биссектрисы угла A; $(\alpha' : \beta' : \gamma')$ — барицентрические координаты точки Y. Достаточно проверить, что $\beta' : \gamma' = (b^2/\beta) : (c^2/\gamma)$. При симметрии относительно биссектрисы угла A единичные векторы $\overrightarrow{AB}/c$ и $\overrightarrow{AC}/b$ переходят друг в друга, поэтому $\overrightarrow{AY} = \beta c(\overrightarrow{AC}/b) + \gamma b(\overrightarrow{AB}/c)$. Следовательно, $\beta' : \gamma' = (\gamma b/c) : (\beta c/b) = (b^2/\beta) : (c^2/\gamma)$.

14.42. а) Легко проверить, что указанная точка лежит на обеих прямых.

б) Несовпадающие прямые параллельны тогда и только тогда, когда точка их пересечения бесконечно удалённая. Точка является бесконечно удалённой тогда и только тогда, когда сумма её барицентрических координат равна 0.

14.43. Точки A_2 и B_1 имеют барицентрические координаты $(0 : 1 : \alpha_2)$ и $(1 : 0 : \beta_1)$, поэтому в барицентрических координатах $(\alpha : \beta : \gamma)$ прямая A_2B_1 задаётся уравнением $\alpha\beta_1 + \beta\alpha_2 = \gamma$. Прямые B_2C_1 и C_2A_1 задаются уравнениями $\beta\gamma_1 + \gamma\beta_2 = \alpha$ и $\gamma\alpha_1 + \alpha\gamma_2 = \beta$. Эти прямые пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_2 & -1 \\ -1 & \gamma_1 & \beta_2 \\ \gamma_2 & -1 & \alpha_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Это равенство легко переписать в требуемом виде.

14.44. Воспользуемся выражением квадрата длины отрезка через абсолютные трилинейные координаты его концов (задача 14.60). Абсолютные барицентрические координаты (α, β, γ) связаны с абсолютными трилинейными координатами (x, y, z) следующим образом: $\alpha = \lambda xa$, $\beta = \lambda yb$, $\gamma = \lambda zc$, причём $\lambda(xa + yb + zc) = 1$. Ясно, что $xa + yb + zc = 2S$. Поэтому $x = \dfrac{\alpha}{\lambda a} = \dfrac{2S}{a}\alpha$. Несложная проверка показывает, что $\dfrac{\cos A}{\sin B \sin C}\left(\dfrac{2S}{a}\right)^2 = 2S \operatorname{ctg} A$.

14.45. а) Согласно теореме косинусов $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, поэтому $2S \operatorname{ctg} A = bc \cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$.

б) Очевидно следует из а).

в) Согласно задаче 5.140 $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \operatorname{ctg} \varphi$.

г) Легко проверить, что $4(S_A S_B + S_B S_C + S_C S_A) = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - a^4 - b^4 - c^4$. Равенство $16S^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - a^4 - b^4 - c^4$ следует из формулы Герона.

д) Согласно задаче 12.46 а) $S_\varphi = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$. Таким образом, наша задача сводится к проверке тождества

$$(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) + 8a^2b^2c^2 = \\ = \bigl(2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - a^4 - b^4 - c^4\bigr)(a^2 + b^2 + c^2).$$

Это тождество легко проверяется.

14.46. Пусть A' — точка пересечения прямых XA и BC, d'_a — расстояние от точки A' до прямой l. Легко проверить, что $d'_a = \dfrac{d_b\beta + d_c\gamma}{\beta + \gamma}$ и $\dfrac{d'_a}{d_a} = -\dfrac{\alpha}{\beta + \gamma}$. Из этих двух равенств следует требуемое равенство.

14.47. Проведём через центр вписанной окружности прямую l', параллельную прямой l. Пусть $d_a = \delta_a - r$, $d_b = \delta_b - r$, $d_c = \delta_c - r$, где r — радиус вписанной окружности. Тогда d_a, d_b, d_c — расстояния то точек A, B, C до прямой l' с учётом знака. Центр вписанной окружности имеет барицентрические координаты $(a : b : c)$, поэтому согласно задаче 14.46 $ad_a + bd_b + cd_c = 0$, т. е. $a\delta_a + b\delta_b + c\delta_c = r(a + b + c) = 2S_{ABC}$.

14.48. Решение аналогично решению задачи 14.47. Нужно лишь воспользоваться тем, что центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC, имеет барицентрические координаты $(-a : b : c)$.

14.49. Запишем равенство из задачи 14.48 для прямой l_a и окружностей S_b и S_c. В результате получим $ad_{aa} - bd_{ab} + cd_{ac} = 2S_{ABC}$ и $ad_{aa} + bd_{ab} - cd_{ac} = 2S_{ABC}$, где d_{aa} — расстояние от точки A до прямой l_a. Таким образом, $bd_{ab} = cd_{ac}$, т. е. $d_{ab}/d_{ac} = c/b$. Аналогично $d_{bc}/d_{ba} = a/c$ и $d_{ca}/d_{cb} = b/a$. Перемножая эти три равенства, получаем требуемое.

14.50. Рассмотрим прямые $l_1 = AB$, $l_2 = BC$, $l_3 = CD$ и $l_4 = AD$. Пусть x_i — расстояние от точки X до прямой l_i с учётом знака (если точка X и четырёхугольник $ABCD$ лежат по одну сторону от прямой l_i, то знак положителен). Таким образом, $(x_1 : x_2 : x_3)$ — трилинейные координаты точки X относительно треугольника, образованного прямыми l_1, l_2, l_3.

Биссектрисы внешних углов при вершинах A и C задаются уравнениями $x_1 + x_4 = 0$ и $x_2 + x_3 = 0$; при вершинах B и D — уравнениями $x_1 + x_2 = 0$ и $x_3 + x_4 = 0$; при вершинах P и Q — уравнениями $x_1 + x_3 = 0$ и $x_2 + x_4 = 0$. Поэтому остаётся лишь проверить, что уравнение $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ задаёт прямую.

Если в прямоугольной системе координат прямая l_i задаётся уравнением $x\cos\varphi + y\sin\varphi = d$, то $x_i = \pm(x\cos\varphi + y\sin\varphi - d)$. Поэтому x_1, x_2, x_3, x_4 линейно выражаются через x и y.

14.51. Пусть $(x : y : z)$ — трилинейные координаты относительно треугольника ABC. Из равенства $\angle ABP = \angle CBQ$ следует, что точки P и Q имеют трилинейные координаты вида $(p : u : q)$ и $(q : v : p)$. Прямые AP и CQ задаются уравнениями $y : z = u : q$ и $x : y = q : v$, поэтому их точка пересечения D имеет трилинейные координаты $\left(\frac{1}{v} : \frac{1}{q} : \frac{1}{u}\right)$. Прямые AQ и CP задаются уравнениями $y : z = v : p$ и $x : y = p : u$, поэтому их точка пересечения E имеет трилинейные координаты $\left(\frac{1}{u} : \frac{1}{p} : \frac{1}{v}\right)$. Из вида трилинейных координат точек D и E следует, что $\angle CBD = \angle ABE$.

14.52. Пусть $(x : y : z)$ — трилинейные координаты первой точки Брокара P. Тогда $x : y : z = CP : AP : BP$. Кроме того, $AP/\sin\varphi = AB/\sin\alpha = 2Rc/a$ (здесь φ — угол Брокара). Аналогично $BP = 2R\sin\varphi\, a/b$ и $CP = 2R\sin\varphi\, b/c$. Таким образом, первая точка Брокара имеет трилинейные координаты $\left(\frac{b}{c} : \frac{c}{a} : \frac{a}{b}\right)$. Вторая точка Брокара имеет трилинейные координаты $\left(\frac{c}{b} : \frac{a}{c} : \frac{b}{a}\right)$.

14.53. Точка C_1 имеет трилинейные координаты

$$\left(\sin\left(\beta \pm \frac{\pi}{3}\right) : \sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{3}\right) : \mp\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

где верхний знак соответствует треугольникам, построенным внешним образом, а нижний — внутренним. Поэтому прямая CC_1 задаётся уравнением $x\sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{3}\right) = y\sin\left(\beta \pm \frac{\pi}{3}\right)$. Таким образом, точка с трилинейными координатами

$$\left(\frac{1}{\sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{3}\right)} : \frac{1}{\sin\left(\beta \pm \frac{\pi}{3}\right)} : \frac{1}{\sin\left(\gamma \pm \frac{\pi}{3}\right)}\right)$$

является точкой пересечения прямых AA_1, BB_1 и CC_1.

14.54. а) Описанная окружность задаётся уравнением $ayz + bxz + cxy = 0$, т. е. $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$ (здесь a, b, c — длины сторон треугольника). Одно доказательство этого утверждения содержится в решении задачи 5.11; другое — в решении задачи 14.40. Ещё одно доказательство можно получить, воспользовавшись тем, что описанная окружность изогонально сопряжена бесконечно удалённой прямой, которая задаётся уравнением $ax + by + cz = 0$.

б) Вписанная окружность задаётся уравнением $\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{x}+\cos\frac{\beta}{2}\sqrt{y}+$ $+\cos\frac{\gamma}{2}\sqrt{z}=0$, т. е.

$$\cos^4\frac{\alpha}{2}x^2+\cos^4\frac{\beta}{2}y^2+\cos^4\frac{\gamma}{2}z^2=$$
$$=2\Big(\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}yz+\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}xy+\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}xz\Big).$$

Чтобы получить это уравнение, можно воспользоваться тем, что вписанная окружность треугольника ABC является описанной окружностью треугольника $A_1B_1C_1$, где A_1, B_1 и C_1 — точки касания. Пусть $(x_1 : y_1 : z_1)$ — трилинейные координаты относительно треугольника $A_1B_1C_1$ точки описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$. Тогда

$$\sin\frac{\beta+\gamma}{2}y_1z_1+\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}x_1z_1+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}x_1y_1=0,$$

поскольку углы треугольника $A_1B_1C_1$ равны $\frac{\beta+\gamma}{2}$, $\frac{\alpha+\gamma}{2}$, $\frac{\alpha+\beta}{2}$. Согласно задаче 2.61 а) $xy=z_1^2$. Кроме того, $\sin\frac{\beta+\gamma}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}$.

в) Вневписанная окружность, касающаяся стороны BC, задаётся уравнением $\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{-x}+\cos\frac{\beta}{2}\sqrt{y}+\cos\frac{\gamma}{2}\sqrt{z}=0$, т. е.

$$\cos^4\frac{\alpha}{2}x^2+\cos^4\frac{\beta}{2}y^2+\cos^4\frac{\gamma}{2}z^2=$$
$$=2\Big(\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}yz-\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}xy-\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}xz\Big).$$

Это доказывается точно так же, как и для вписанной окружности.

14.55. Окружность девяти точек задаётся в трилинейных координатах уравнением

$$x^2\sin\alpha\cos\alpha+y^2\sin\beta\cos\beta+z^2\sin\gamma\cos\gamma=yz\sin\alpha+xz\sin\beta+xy\sin\gamma.$$

Чтобы доказать это, достаточно проверить, что кривая, заданная этим уравнением, пересекает каждую сторону треугольника в середине стороны и в основании высоты. (Кривая второй степени задаётся пятью точками, а у нас получается целых шесть точек.) Середина стороны BC имеет трилинейные координаты $(0 : \sin\gamma : \sin\beta)$, а основание высоты, опущенной на эту сторону, имеет трилинейные координаты $(0 : \cos\gamma : \cos\beta)$. Легко проверить, что обе эти точки лежат на данной кривой.

14.56. Уравнение $yz\sin\alpha+xz\sin\beta+xy\sin\gamma=0$ задаёт описанную окружность треугольника. В декартовых координатах уравнение любой окружности можно получить, вычтя из уравнения фиксированной окружности некоторую линейную функцию. В трилинейных координатах для сохранения однородности «линейную функцию» $px+qy+rz$ нужно домножить на «постоянную величину» $x\sin\alpha+y\sin\beta+z\sin\gamma$ (эта величина будет постоянной, если x, y, z — абсолютные трилинейные координаты).

б) Согласно задаче 3.56 в декартовых координатах степень точки (x_0, y_0) относительно окружности $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ равна $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2-R^2$.

Поэтому радикальная ось окружностей, заданных (в декартовых координатах) уравнениями $x^2+y^2+P_1x+Q_1y+R_1=0$ и $x^2+y^2+P_2x+Q_2y+R_2=0$, задаётся уравнением $P_1x+Q_1y+R_1=P_2x+Q_2y+R_2$. Для произвольных линейных функций, которые мы вычитаем из уравнения фиксированной окружности, получаем аналогичное уравнение.

14.57. Пусть точки $(x_0:y_0:z_0)$ и $(x_1:y_1:z_1)$ лежат на вписанной окружности. Тогда прямая, проходящая через эти точки, задаётся уравнением

$$x(\sqrt{y_0z_1}+\sqrt{y_1z_0})\cos\frac{\alpha}{2}+y(\sqrt{x_0z_1}+\sqrt{x_1z_0})\cos\frac{\beta}{2}+z(\sqrt{x_0y_1}+\sqrt{x_1y_0})\cos\frac{\gamma}{2}=0.$$

Проверим, например, что точка $(x_0:y_0:z_0)$ лежит на этой прямой. Для этого воспользуемся тождеством

$$x_0(\sqrt{y_0z_1}+\sqrt{y_1z_0})\cos\frac{\alpha}{2}+\ldots=$$
$$=(\sqrt{x_0y_0z_1}+\sqrt{x_0y_1z_0}+\sqrt{x_1y_0z_0})\left(\sqrt{x_0}\cos\frac{\alpha}{2}+\ldots\right)-\sqrt{x_0y_0z_1}\left(\sqrt{x_1}\cos\frac{\alpha}{2}+\ldots\right).$$

Точки $(x_0:y_0:z_0)$ и $(x_1:y_1:z_1)$ лежат на вписанной окружности, поэтому согласно задаче 14.54 б) $\sqrt{x_0}\cos\frac{\alpha}{2}+\ldots=0$ и $\sqrt{x_1}\cos\frac{\alpha}{2}+\ldots=0$.

Чтобы получить уравнение касательной в точке $(x_0:y_0:z_0)$, нужно положить $x_1=x_0$, $y_1=y_0$, $z_1=z_0$. После деления на $2\sqrt{x_0y_0z_0}$ уравнение примет требуемый вид.

14.58. Уравнение вписанной окружности можно записать в виде

$$\left(x\frac{\cos^4\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}+\ldots\right)(x\sin\alpha+\ldots)=\frac{4\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}(yz\sin\alpha+\ldots),$$

а уравнение окружности девяти точек можно записать в виде

$$(x\cos\alpha+\ldots)(x\sin\alpha+\ldots)=2(yz\sin\alpha+\ldots).$$

Поэтому согласно задаче 14.56 б) их радикальная ось задаётся уравнением

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}(x\cos\alpha+\ldots)=\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\left(x\frac{\cos^4\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}+\ldots\right).$$

Сократим обе части на $2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$. Учитывая, что

$$2\cos^3\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\cos\alpha=\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\gamma}{2},$$

полученное уравнение можно записать в виде

$$\frac{x\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}+\frac{y\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}}+\frac{z\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}=0.$$

Согласно задаче 14.57 это уравнение является уравнением касательной к вписанной окружности в точке $\left(\sin^2\frac{\beta-\gamma}{2}:\sin^2\frac{\gamma-\alpha}{2}:\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$. (Легко проверить, что эта точка действительно лежит на вписанной окружности.) Если радикальная ось двух окружностей касается одной из них в некоторой точке, то окружности касаются в той же самой точке.

14.59. а) Из решения задачи 19.59 следует, что вершина A_1 треугольника Брокара является точкой пересечения прямых CP и BQ, где P и Q — первая и вторая точки Брокара. Поэтому точка A_1 имеет трилинейные координаты

$$\left(1 : \frac{c^2}{ab} : \frac{b^2}{ac}\right) = (abc : c^3 : b^3).$$

Барицентрические координаты этой точки имеют вид $(a^2 : c^2 : b^2)$.

б) Вычисления удобнее провести в барицентрических координатах. В барицентрических координатах $(\alpha : \beta : \gamma)$ прямая B_1C_1 задаётся уравнением

$$0 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ c^2 & b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & c^2 \end{vmatrix} = \alpha\,(b^2c^2 - a^4) + \beta\,(a^2b^2 - c^4) + \gamma\,(a^2c^2 - b^4).$$

Кроме того, $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Поэтому прямая, проходящая через точку A параллельно прямой B_1C_1, задаётся уравнением

$$\beta\,(a^2b^2 - c^4 + a^4 - b^2c^2) + \gamma\,(a^2c^2 - b^4 + a^4 - b^2c^2) = 0,$$

т. е. $(a^2 + b^2 + c^2)\bigl(\beta\,(a^2 - c^2) + \gamma\,(a^2 - b^2)\bigr) = 0$. Поэтому $\beta : \gamma = \dfrac{1}{c^2 - a^2} : \dfrac{1}{a^2 - b^2}$. Таким образом, точка Штейнера имеет барицентрические координаты $\left(\dfrac{1}{b^2 - c^2} : \dfrac{1}{c^2 - a^2} : \dfrac{1}{a^2 - b^2}\right)$. Трилинейные координаты точки Штейнера имеют вид

$$\left(\frac{1}{a\,(b^2 - c^2)} : \frac{1}{b\,(c^2 - a^2)} : \frac{1}{c\,(a^2 - b^2)}\right).$$

14.60. Введём прямоугольную систему координат Ouv, направив ось u по лучу BC и выбрав направление оси v так, чтобы точка A имела положительную координату v. Тогда прямоугольные координаты (u, v) и трилинейные координаты (x, y, z) связаны следующим образом: $v = x$ и $u = \dfrac{x\cos\beta + z}{\sin\beta}$. Ясно также, что $xa + yb + zc = 2S$, т. е. $y = \dfrac{2S - xa - zc}{b}$. Пусть (u_1, v_1) и (u_2, v_2) — координаты точек M и N. Тогда

$$\begin{aligned} MN^2 &= (u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2 = \\ &= (x_1 - x_2)^2\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta} + 2(x_1 - x_2)(z_1 - z_2)\frac{\cos\beta}{\sin^2\beta} + \frac{(z_1 - z_2)^2}{\sin^2\beta} + (x_1 - x_2)^2 = \\ &= \frac{(x_1 - x_2)^2}{\sin^2\beta} + \frac{(z_1 - z_2)^2}{\sin^2\beta} + 2(x_1 - x_2)(z_1 - z_2)\frac{\cos\beta}{\sin^2\beta}. \end{aligned}$$

Если воспользоваться тем, что $(y_1 - y_2)^2 = \left((x_1 - x_2)\dfrac{a}{b} + (z_1 - z_2)\dfrac{c}{b}\right)^2$, то требуемое равенство можно преобразовать в полученное равенство; по ходу преобразований нужно воспользоваться тем, что $a/b = \sin\alpha / \sin\beta$ и $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

ГЛАВА 15

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС

Основные сведения

1. *Параллельным переносом* на вектор $\overrightarrow{AB}$ называют преобразование, переводящее точку X в такую точку X', что $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AB}$.

2. Композиция (т. е. последовательное выполнение) двух параллельных переносов является параллельным переносом.

Вводные задачи

1. Докажите, что при параллельном переносе окружность переходит в окружность.

2. Две окружности радиуса R касаются в точке K. На одной из них взята точка A, на другой — точка B, причём $\angle AKB = 90^\circ$. Докажите, что $AB = 2R$.

3. Две окружности радиуса R пересекаются в точках M и N. Пусть A и B — точки пересечения серединного перпендикуляра к отрезку MN с этими окружностями, лежащие по одну сторону от прямой MN. Докажите, что $MN^2 + AB^2 = 4R^2$.

4. Внутри прямоугольника $ABCD$ взята точка M. Докажите, что существует выпуклый четырёхугольник с перпендикулярными диагоналями длины AB и BC, стороны которого равны AM, BM, CM, DM.

§ 1. Перенос помогает решить задачу

15.1. В каком месте следует построить мост MN через реку, разделяющую деревни A и B, чтобы путь $AMNB$ из A в B был кратчайшим? (Берега реки считаются параллельными прямыми, мост перпендикулярен берегам.)

15.2. Дан треугольник ABC. Точка M, расположенная внутри треугольника, движется параллельно стороне BC до пересечения со стороной CA, затем параллельно AB до пересечения с BC, затем параллельно AC до пересечения с AB и т. д. Докажите, что через некоторое число шагов траектория движения точки замкнётся.

15.3. Пусть K, L, M и N — середины сторон AB, BC, CD и DA выпуклого четырёхугольника $ABCD$.

а) Докажите, что $KM \leqslant (BC + AD)/2$, причём равенство достигается, только если $BC \parallel AD$.

б) При фиксированных длинах сторон четырёхугольника $ABCD$ найдите максимальные значения длин отрезков KM и LN.

15.4. Внутри параллелограмма $ABCD$ взята точка O так, что $\angle OAD = \angle OCD$. Докажите, что $\angle OBC = \angle ODC$.

15.5. В трапеции $ABCD$ стороны BC и AD параллельны, M — точка пересечения биссектрис углов A и B, N — точка пересечения биссектрис углов C и D. Докажите, что $2MN = |AB + CD - BC - AD|$.

15.6*. Из вершины B параллелограмма $ABCD$ проведены его высоты BK и BH. Известно, что $KH = a$ и $BD = b$. Найдите расстояние от точки B до точки пересечения высот треугольника BKH.

15.7*. Внутри каждой стороны параллелограмма выбрано по точке. Выбранные точки сторон, имеющих общую вершину, соединены. Докажите, что центры описанных окружностей четырёх получившихся треугольников являются вершинами некоторого параллелограмма.

15.8*. В квадрате со стороной 1 расположена фигура, расстояние между любыми двумя точками которой не равно 0,001. Докажите, что площадь этой фигуры не превосходит: а) 0,34; б) 0,288.

§ 2. Построения и геометрические места точек

15.9. Дан угол ABC и прямая l. Постройте прямую, параллельную прямой l, на которой стороны угла ABC высекают отрезок данной длины a.

15.10. Даны две окружности S_1, S_2 и прямая l. Проведите прямую l_1, параллельную прямой l, так, чтобы:

а) расстояние между точками пересечения l_1 с окружностями S_1 и S_2 имело заданную величину a;

б) S_1 и S_2 высекали на l_1 равные хорды;

в) S_1 и S_2 высекали на l_1 хорды, сумма (или разность) длин которых имела бы заданную величину a.

15.11. Даны непересекающиеся хорды AB и CD окружности. Постройте точку X окружности так, чтобы хорды AX и BX высекали на хорде CD отрезок EF, имеющий данную длину a.

15.12. Постройте четырёхугольник $ABCD$ по четырём углам и длинам сторон $AB = a$ и $CD = b$.

15.13. Даны окружности S_1, S_2 и точка A. Проведите через точку A прямую l так, чтобы S_1 и S_2 высекали на ней равные хорды.

15.14. а) Даны окружности S_1 и S_2, пересекающиеся в точках A и B. Проведите через точку A прямую l так, чтобы отрезок этой прямой, заключённый внутри окружностей S_1 и S_2, имел данную длину.

б) Впишите в данный треугольник ABC треугольник, равный данному треугольнику PQR.

15.15*. Постройте четырёхугольник по углам и диагоналям.

* * *

15.16*. Найдите геометрическое место точек: а) сумма; б) разность расстояний от которых до двух данных прямых имеет данную величину.

15.17*. Угол, изготовленный из прозрачного материала, двигают так, что две непересекающиеся окружности касаются его сторон внутренним образом. Докажите, что на нём можно отметить точку, которая описывает дугу окружности.

См. также задачу 7.5.

Задачи для самостоятельного решения

15.18. Даны две пары параллельных прямых и точка P. Проведите через точку P прямую так, чтобы обе пары параллельных прямых отсекали на ней равные отрезки.

15.19. Постройте параллелограмм по сторонам и углу между диагоналями.

15.20. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны. Докажите, что:

а) прямые AB и CD образуют равные углы с прямой, соединяющей середины сторон AC и BD;

б) прямые AB и CD образуют равные углы с прямой, соединяющей середины диагоналей BC и AD.

15.21. Среди всех четырёхугольников с данными длинами диагоналей и величиной угла между ними найдите четырёхугольник наименьшего периметра.

15.22. Постройте параллелограмм, две смежные вершины которого даны, а две другие лежат на данной окружности.

Решения

15.1. Пусть A' — образ точки A при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{MN}$. Тогда $A'N = AM$, поэтому длина пути $AMNB$ равна $A'N + NB + MN$. Так как длина отрезка MN постоянна, то нужно найти точку N, для которой сумма $A'N + NB$ минимальна. Ясно, что она минимальна, когда точка N лежит на отрезке $A'B$, т. е. точка N является точкой пересечения берега, ближайшего к точке B, и отрезка $A'B$.

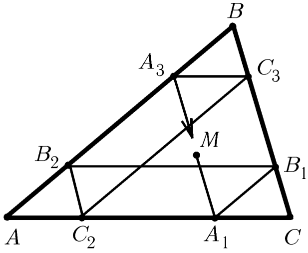


Рис. 15.1

15.2. Обозначим последовательные точки траектории на сторонах треугольника через A_1, B_1, B_2, C_2, C_3, A_3, A_4, B_4, ... (рис. 15.1). Так как $A_1B_1 \parallel AB_2$, $B_1B_2 \parallel CA_1$ и $B_1C \parallel B_2C_2$, то треугольник AB_2C_2 получается из треугольника A_1B_1C параллельным переносом. Аналогично треугольник

A_3BC_3 получен параллельным переносом из треугольника AB_2C_2, а треугольник A_4B_4C — из треугольника A_3BC_3. Но треугольник A_1B_1C тоже получен из треугольника A_3BC_3 параллельным переносом. Поэтому $A_1 = A_4$, т. е. после семи шагов траектория замкнётся (возможно, что она замкнётся и раньше).

15.3. а) Достроим треугольник CBD до параллелограмма $CBDE$. Тогда $2KM = AE \leqslant AD + DE = AD + BC$, причём равенство достигается, только если $AD \parallel BC$.

б) Пусть $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$ и $d = DA$. Если $|a - c| = |b - d| \neq 0$, то согласно задаче а) максимум достигается в вырожденном случае, когда все точки A, B, C и D окажутся на одной прямой. Предположим теперь, например, что $|a - c| < |b - d|$. Достроим треугольники ABL и LCD до параллелограммов $ABLP$ и $LCDQ$. Тогда $PQ \geqslant |b - d|$, а значит, $LN^2 = (2LP^2 + 2LQ^2 - PQ^2)/4 \leqslant (2(a^2 + c^2) - (b - d)^2)/4$. Кроме того, согласно задаче а) $KM \leqslant (b + d)/2$. Оба равенства достигаются, когда $ABCD$ — трапеция с основаниями AD и BC.

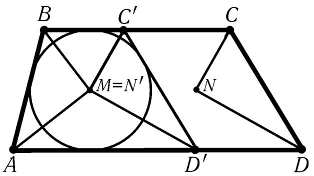


Рис. 15.2

15.4. Рассмотрим точку O', которая получается из точки O параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{AD}$. Тогда $\angle OAD = \angle OO'D$, поэтому $\angle OCD = \angle OO'D$. Следовательно, четырёхугольник $OCO'D$ вписанный, а значит, $\angle ODC = \angle OO'C = \angle OBC$.

15.5. Построим окружность S, касающуюся стороны AB и лучей BC и AD, и перенесём треугольник CND параллельно (в направлении оснований BC и AD) так, чтобы точка N' совпала с точкой M, т. е. сторона $C'D'$ касалась окружности S (рис. 15.2). Для описанной трапеции $ABC'D'$ равенство $2MN' = |AB + C'D' - BC' - AD'|$ очевидно, так как $N' = M$. При переходе от трапеции $ABC'D'$ к трапеции $ABCD$ к левой части этого равенства добавляется $2N'N$, а к правой добавляется $CC' + DD' = 2NN'$, поэтому равенство сохраняется.

15.6. Обозначим точку пересечения высот треугольника BKH через H_1. Так как $HH_1 \perp BK$ и $KH_1 \perp BH$, то $HH_1 \parallel AD$ и $KH_1 \parallel DC$, т. е. H_1HDK — параллелограмм. Поэтому при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{H_1H}$ точка K переходит в точку D, а точка B переходит в некоторую точку P (рис. 15.3). Так как $PD \parallel BK$, то $BPDK$ — прямоугольник и $PK = BD = b$. А так как $BH_1 \perp KH$, то $PH \perp KH$. Ясно также, что $PH = BH_1$.

В прямоугольном треугольнике PKH известны гипотенуза $KP = b$ и катет $KH = a$, поэтому $BH_1 = PH = \sqrt{b^2 - a^2}$.

15.7. Обозначим серединные перпендикуляры к сторонам треугольников так, как показано на рис. 15.4. Все прямые l_{ij} параллельны и расстояние

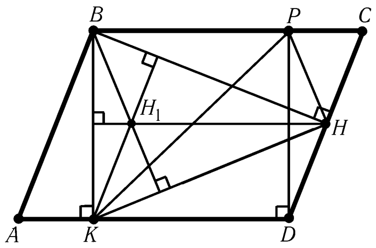


Рис. 15.3

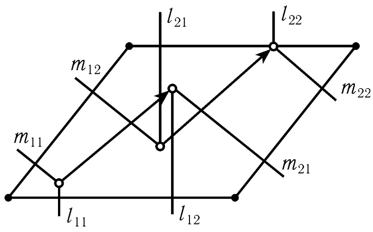


Рис. 15.4

между прямыми l_{11} и l_{12} равно расстоянию между прямыми l_{21} и l_{22} (оно равно половине длины стороны параллелограмма). Поэтому параллельный перенос, переводящий l_{11} в l_{12}, переводит l_{21} в l_{22}, а параллельный перенос, переводящий m_{11} в m_{21}, переводит m_{12} в m_{22}. Следовательно, параллельный перенос, переводящий точку пересечения прямых l_{11} и m_{11} в точку пересечения прямых l_{12} и m_{21}, переводит точку пересечения прямых l_{21} и m_{12} в точку пересечения прямых l_{22} и m_{22}.

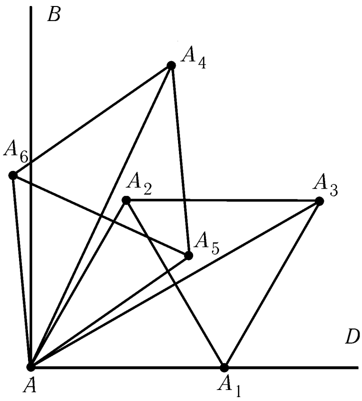


Рис. 15.5

15.8. а) Фигуру, лежащую внутри квадрата $ABCD$ со стороной 1, обозначим через F, а её площадь — через S. Рассмотрим два вектора $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{AA_2}$, где точка A_1 лежит на стороне AD и $AA_1 = 0{,}001$, а точка A_2 лежит внутри угла BAD, $\angle A_2AA_1 = 60^\circ$ и $AA_2 = 0{,}001$ (рис. 15.5).

Пусть F_1 и F_2 — образы F при параллельных переносах на векторы $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{AA_2}$. Фигуры F, F_1 и F_2 не имеют общих точек и лежат внутри квадрата со стороной 1,001. Поэтому $3S < 1{,}001^2$, а значит, $S < 0{,}335 < 0{,}34$.

б) Рассмотрим вектор $\overrightarrow{AA_3} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AA_2}$. Повернём вектор $\overrightarrow{AA_3}$ вокруг точки A (против часовой стрелки на острый угол) так, чтобы точка A_3 перешла в точку A_4, для которой $A_3A_4 = 0{,}001$. Рассмотрим также векторы $\overrightarrow{AA_5}$ и $\overrightarrow{AA_6}$ длиной 0,001, образующие с вектором $\overrightarrow{AA_4}$ углы 30° и лежащие по разные стороны от него (рис. 15.5).

Обозначим образ фигуры F при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AA_i}$ через F_i. Для определённости будем считать, что $S(F_4 \cap F) \leqslant S(F_3 \cap F)$. Тогда $S(F_4 \cap F) \leqslant S/2$, поэтому $S(F_4 \cup F) \geqslant 3S/2$. Фигуры F_5 и F_6 не пересекаются ни друг с другом, ни с фигурами F и F_4, поэтому $S(F \cup F_4 \cup F_5 \cup F_6) \geqslant 7S/2$. (Если бы оказалось, что $S(F_3 \cap F) \leqslant S(F_4 \cap F)$, то вместо фигур F_5 и F_6 нужно было бы взять F_1 и F_2.) Так как длины векторов $\overrightarrow{AA_i}$ не превосходят $0{,}001\sqrt{3}$, все рассматриваемые фигуры лежат внутри квадрата со стороной $1 + 0{,}002\sqrt{3}$. Поэтому $7S/2 \leqslant (1 + 0{,}002\sqrt{3})^2$ и $S < 0{,}288$.

Примечание. $S(A \cup B)$ — площадь объединения фигур A и B, $S(A \cap B)$ — площадь их пересечения.

15.9. Имеются два вектора $\pm \boldsymbol{a}$, параллельных прямой l и имеющих заданную длину a. Рассмотрим образы луча BC при параллельных переносах на эти векторы. Точка их пересечения с лучом BA лежит на искомой прямой (если точек пересечения нет, то задача решений не имеет).

15.10. а) Пусть S_1' — образ окружности S_1 при параллельном переносе на вектор длиной a, параллельный прямой l (таких векторов два). Искомая прямая проходит через точку пересечения окружностей S_1' и S_2.

б) Пусть O_1 и O_2 — проекции центров окружностей S_1 и S_2 на прямую l; S_1' — образ окружности S_1 при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{O_1O_2}$. Искомая прямая проходит через точку пересечения окружностей S_1' и S_2.

в) Пусть S_1' — образ окружности S_1 при параллельном переносе на некоторый вектор, параллельный прямой l. Тогда длины хорд, высекаемых прямой l_1

на окружностях S_1 и S'_1, равны. А если расстояние между проекциями центров окружностей S'_1 и S_2 на прямую l равно $a/2$, то сумма или разность длин хорд, высекаемых прямой, параллельной прямой l и проходящей через точку пересечения окружностей S'_1 и S_2, равна a. Требуемая окружность S'_1 легко строится.

15.11. Предположим, что точка X построена. Перенесём точку A на вектор $\overrightarrow{EF}$, т. е. построим точку A', для которой $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AA'}$. Это построение можно сделать, так как вектор $\overrightarrow{EF}$ известен: его длина равна a и он параллелен CD.

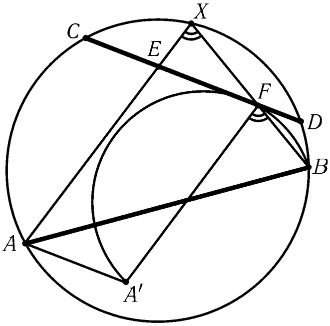


Рис. 15.6

Поскольку $AX \parallel A'F$, то $\angle A'FB = \angle AXB$, поэтому угол $A'FB$ известен. Таким образом, точка F лежит на пересечении двух фигур: отрезка CD и дуги окружности, из которой отрезок $A'B$ виден под углом AXB (рис. 15.6).

15.12. Предположим, что четырёхугольник $ABCD$ построен. Обозначим образ точки D при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{CB}$ через D_1. В треугольнике ABD_1 известны AB, BD_1 и $\angle ABD_1$. Из этого вытекает следующее построение. Строим произвольно луч BC', затем проводим лучи BD'_1 и BA' так, что $\angle D'_1BC' = 180^\circ - \angle C$, $\angle A'BC' = \angle B$ и эти углы откладываются от луча BC' в одной полуплоскости. На лучах BA' и BD'_1 отложим отрезки $BA = a$ и $BD_1 = b$ соответственно. Проведём луч AD' так, что $\angle BAD' = \angle A$ и лучи BC', AD' лежат по одну сторону от прямой AB. Вершина D является точкой пересечения луча AD' и луча, проведённого из точки D_1 параллельно лучу BC'. Вершина C является точкой пересечения луча BC' и луча, проведённого из точки D параллельно лучу D_1B.

15.13. Предположим, что точки M и N, в которых прямая l пересекает окружность S_2, построены. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей S_1 и S_2; O'_1 — образ точки O_1 при таком параллельном переносе вдоль прямой l, что $O'_1O_2 \perp MN$, S'_1 — образ окружности S_1 при этом переносе. Проведём касательные AP и AQ к окружностям S'_1 и S_2. Тогда $AQ^2 = AM \cdot AN = AP^2$, а значит, $O'_1A^2 = AP^2 + R^2$, где R — радиус окружности S'_1. Так как отрезок AP можно построить, то можно построить и отрезок AO'_1. Остаётся заметить, что точка O'_1 лежит на окружности радиуса AO'_1 с центром A и на окружности с диаметром O_1O_2.

15.14. а) Проведём через точку A прямую PQ (P лежит на окружности S_1, Q — на окружности S_2). Опустим из центров O_1 и O_2 окружностей S_1 и S_2 перпендикуляры O_1M и O_2N на прямую PQ. Перенесём отрезок MN параллельно на вектор $\overrightarrow{MO_1}$. Пусть C — образ точки N при этом переносе.

Треугольник O_1CO_2 прямоугольный и $O_1C = MN = PQ/2$. Следовательно, чтобы построить прямую PQ, для которой $PQ = a$, нужно построить треугольник O_1CO_2 с заданной гипотенузой O_1O_2 и катетом $O_1C = a/2$, а затем провести через точку A прямую, параллельную O_1C.

б) Достаточно решить обратную задачу: описать вокруг данного треугольника PQR треугольник, равный данному треугольнику ABC. Предположим, что мы построили треугольник ABC, стороны AB, BC и CA которого проходят через данные точки P, Q и R. Построим дуги окружностей, из которых отрезки RP и QP видны под углами A и B соответственно. Точки A и B лежат на этих дугах, причём длина отрезка AB известна. Согласно задаче а) можно построить прямую AP, проходящую через точку P, отрезок которой, заключённый внутри окружностей S_1 и S_2, имеет данную длину. Проводя прямые AR и BQ, получаем треугольник ABC, равный данному треугольнику, так как у этих треугольников по построению равны сторона и прилегающие к ней углы.

15.15. Предположим, что искомый четырёхугольник $ABCD$ построен. Пусть D_1 и D_2 — образы точки D при переносах на векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CA}$ соответственно. Опишем вокруг треугольников DCD_1 и DAD_2 окружности S_1 и S_2. Обозначим точки пересечения прямых BC и BA с окружностями S_1 и S_2 через M и N (рис. 15.7). Ясно, что $\angle DCD_1 = \angle DAD_2 = \angle D$, $\angle DCM = 180^\circ - \angle C$ и $\angle DAN = 180^\circ - \angle A$.

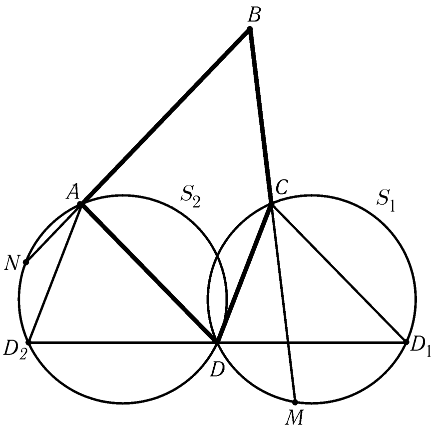


Рис. 15.7

Из этого вытекает следующее построение. На произвольной прямой l берём точку D и строим на l точки D_1 и D_2 так, что $DD_1 = DD_2 = AC$. Фиксируем одну из полуплоскостей П, заданных прямой l, и будем считать, что точка B лежит в этой полуплоскости. Построим окружность S_1, из точек которой, лежащих в П, отрезок DD_1 виден под углом D. Аналогично строим окружность S_2. Построим точку M на S_1 так, чтобы из всех точек части окружности, лежащей в П, отрезок DM был виден под углом $180^\circ - \angle C$. Аналогично строим точку N. Отрезок MN виден из точки B под углом B, т. е. B является точкой пересечения окружности с центром D радиуса DB и дуги окружности, из которой отрезок MN виден под углом B (и она лежит в полуплоскости П). Точки C и A являются точками пересечения прямых BM и BN с окружностями S_1 и S_2.

15.16. Опустим из точки X перпендикуляры XA_1 и XA_2 на данные прямые l_1 и l_2. Возьмём на луче A_1X точку B так, что $A_1B = a$. Тогда при

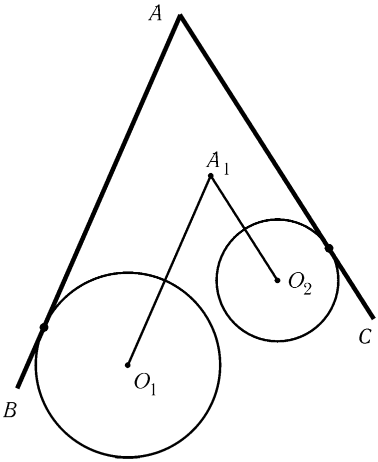


Рис. 15.8

$XA_1 \pm XA_2 = a$ получим $XB = XA_2$. Пусть l_1' — образ прямой l_1 при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{A_1B}$, M — точка пересечения прямых l_1' и l_2. Тогда луч MX будет биссектрисой угла A_2MB. В итоге получаем следующий ответ. Пусть точки пересечения прямых l_1 и l_2 с прямыми, параллельными прямым l_1 и l_2 и удалёнными от них на расстояние a, образуют прямоугольник $M_1M_2M_3M_4$. Искомое ГМТ в задаче а) — стороны этого прямоугольника, а в задаче б) — продолжения сторон.

15.17. Пусть сторона AB угла BAC касается окружности радиуса r_1 с центром O_1, сторона AC касается окружности радиуса r_2 с центром O_2. Перенесём прямую AB параллельно внутрь угла BAC на расстояние r_1, прямую AC — на расстояние r_2. Пусть A_1 — точка пересечения перенесённых прямых (рис. 15.8). Тогда $\angle O_1A_1O_2 = \angle BAC$. Постоянный угол $O_1A_1O_2$ опирается на неподвижный отрезок O_1O_2, поэтому точка A_1 описывает дугу окружности.

ГЛАВА 16

ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

Основные сведения

1. *Симметрией относительно точки* A называют преобразование плоскости, переводящее точку X в такую точку X', что A — середина отрезка XX'. Другие названия этого преобразования — *центральная симметрия с центром* A или просто *симметрия с центром* A.

Заметим, что симметрия с центром A представляет собой частный случай двух других преобразований — она является поворотом на 180° с центром A, а также гомотетией с центром A и коэффициентом -1.

2. Если фигура переходит в себя при симметрии относительно точки A, то A называют *центром симметрии* этой фигуры.

3. В этой главе используются следующие обозначения для преобразований:

S_A — симметрия с центром A;

$T_{\boldsymbol{a}}$ — перенос на вектор $\boldsymbol{a}$.

4. Композицию симметрий относительно точек A и B мы будем обозначать $S_B \circ S_A$; при этом сначала выполняется симметрия S_A, затем симметрия S_B. Кажущаяся неестественность такой последовательности операций оправдывается тождеством $(S_B \circ S_A)(X) = S_B(S_A(X))$.

Композиции любых отображений обладают свойством ассоциативности: $F \circ (G \circ H) = (F \circ G) \circ H$. Поэтому такую композицию можно обозначать $F \circ G \circ H$.

5. Композиции двух центральных симметрий или симметрии и переноса вычисляются по следующим формулам (см. задачу 16.9):

а) $S_B \circ S_A = T_{2\overrightarrow{AB}}$;

б) $T_{\boldsymbol{a}} \circ S_A = S_B$ и $S_B \circ T_{\boldsymbol{a}} = S_A$, где $\boldsymbol{a} = 2\overrightarrow{AB}$.

Вводные задачи

1. Докажите, что при центральной симметрии окружность переходит в окружность.

2. Докажите, что четырёхугольник, имеющий центр симметрии, является параллелограммом.

3. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника попарно равны и параллельны. Докажите, что он имеет центр симметрии.

4. Дан параллелограмм $ABCD$ и точка M. Через точки A, B, C и D проведены прямые, параллельные прямым MC, MD, MA и MB соответственно. Докажите, что они пересекаются в одной точке.

5. Докажите, что противоположные стороны шестиугольника, образованного сторонами треугольника и касательными к его вписанной окружности, параллельными сторонам, равны.

§ 1. Симметрия помогает решить задачу

16.1. Докажите, что если в треугольнике медиана и биссектриса совпадают, то треугольник равнобедренный.

16.2. Двое игроков поочерёдно выкладывают на прямоугольный стол пятаки. Монету разрешается класть только на свободное место. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Докажите, что первый игрок всегда может выиграть.

16.3. Окружность пересекает стороны BC, CA, AB треугольника ABC в точках A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2 соответственно. Докажите, что если перпендикуляры к сторонам треугольника, проведённые через точки A_1, B_1 и C_1, пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры к сторонам, проведённые через точки A_2, B_2 и C_2, тоже пересекаются в одной точке.

16.4. Докажите, что прямые, проведённые через середины сторон вписанного четырёхугольника перпендикулярно противоположным сторонам, пересекаются в одной точке.

16.5. Пусть P — середина стороны AB выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что если площадь треугольника PCD равна половине площади четырёхугольника $ABCD$, то $BC \parallel AD$.

16.6. Окружности S_1 и S_2 радиуса 1 касаются в точке A; центр O окружности S радиуса 2 принадлежит S_1. Окружность S_1 касается S в точке B. Докажите, что прямая AB проходит через точку пересечения окружностей S_2 и S.

16.7*. В треугольнике ABC проведены медианы AF и CE. Докажите, что если $\angle BAF = \angle BCE = 30^\circ$, то треугольник ABC правильный.

16.8*. Даны выпуклый n-угольник с попарно непараллельными сторонами и точка O внутри его. Докажите, что через точку O нельзя провести более n прямых, каждая из которых делит площадь n-угольника пополам.

См. также задачи 1.39, 4.41, 4.42.

§ 2. Свойства симметрии

16.9. а) Докажите, что композиция двух центральных симметрий является параллельным переносом.

б) Докажите, что композиция параллельного переноса и центральной симметрии (в любом порядке) является центральной симметрией.

16.10. Докажите, что если точку отразить симметрично относительно точек O_1, O_2 и O_3, а затем ещё раз отразить симметрично относительно этих же точек, то она вернётся на место.

16.11. а) Докажите, что ограниченная фигура не может иметь более одного центра симметрии.

б) Докажите, что никакая фигура не может иметь ровно двух центров симметрии.

в) Пусть M — конечное множество точек на плоскости. Назовём точку O «почти центром симметрии» множества M, если из M можно выбросить одну точку так, что O будет центром симметрии оставшегося множества. Сколько «почти центров симметрии» может иметь M?

16.12. На отрезке AB дано n пар точек, симметричных относительно его середины; n точек окрашено в синий цвет, остальные — в красный. Докажите, что сумма расстояний от A до синих точек равна сумме расстояний от B до красных точек.

См. также задачу 5.49.

§ 3. Симметрия в задачах на построение

16.13. Через общую точку A окружностей S_1 и S_2 проведите прямую так, чтобы эти окружности высекали на ней равные хорды.

16.14. Через данную точку A проведите прямую так, чтобы отрезок, заключённый между точками пересечения её с данной прямой и данной окружностью, делился точкой A пополам.

16.15. Даны угол ABC и точка D внутри его. Постройте отрезок с концами на сторонах данного угла, середина которого находилась бы в точке D.

16.16. Даны угол и внутри его точки A и B. Постройте параллелограмм, для которого точки A и B — противоположные вершины, а две другие вершины лежат на сторонах угла.

16.17. Даны четыре попарно непараллельные прямые и точка O, не лежащая на этих прямых. Постройте параллелограмм с центром O и вершинами, лежащими на данных прямых, — по одной на каждой.

16.18. Даны две концентрические окружности S_1 и S_2. Проведите прямую, на которой эти окружности высекают три равных отрезка.

16.19*. Даны непересекающиеся хорды AB и CD окружности и точка J на хорде CD. Постройте на окружности точку X так, чтобы хорды AX и BX высекали на хорде CD отрезок EF, делящийся точкой J пополам.

16.20*. Через общую точку A окружностей S_1 и S_2 проведите прямую l так, чтобы разность длин хорд, высекаемых на l окружностями S_1 и S_2 имела заданную величину a.

16.21*. Даны $m = 2n + 1$ точек — середины сторон m-угольника. Постройте его вершины.

См. также задачи 8.13, 8.49, 8.52, 8.53, 11.24.

Задачи для самостоятельного решения

16.22. Постройте треугольник по медианам m_a, m_b и углу C.

16.23. а) Дана точка внутри параллелограмма, не лежащая на отрезках, соединяющих середины противоположных сторон. Сколько существует отрезков с концами на сторонах параллелограмма, делящихся этой точкой пополам?

б) Дана точка, лежащая внутри треугольника, образованного средними линиями данного треугольника. Сколько существует отрезков с концами на сторонах данного треугольника, делящихся этой точкой пополам?

16.24. а) Найдите множество вершин выпуклых четырёхугольников, середины сторон которых являются вершинами данного квадрата.

б) На плоскости даны три точки. Найдите множество вершин выпуклых четырёхугольников, середины трёх сторон каждого из которых лежат в данных точках.

16.25. На прямой даны точки A, B, C, D, расположенные в указанном порядке, причём $AB = CD$. Докажите, что для любой точки P на плоскости $AP + DP \geqslant BP + CP$.

Решения

16.1. Пусть в треугольнике ABC медиана BD является биссектрисой. Рассмотрим точку B_1, симметричную B относительно точки D. Так как D — середина отрезка AC, то четырёхугольник $ABCB_1$ — параллелограмм. А так как $\angle ABB_1 = \angle B_1BC = \angle AB_1B$, то треугольник B_1AB равнобедренный и $AB = AB_1 = BC$.

16.2. Первый игрок кладёт пятак в центр стола, а затем кладёт пятаки симметрично пятакам второго игрока относительно центра стола. При такой стратегии первый игрок всегда имеет возможность сделать очередной ход. Ясно также, что игра завершится за конечное число ходов.

16.3. Пусть перпендикуляры к сторонам, проведённые через точки A_1, B_1 и C_1 пересекаются в точке M. Обозначим центр окружности через O. Перпендикуляр к стороне BC, проведённый через точку A_1, симметричен относительно точки O перпендикуляру к стороне BC, проведённому через точку A_2. Поэтому перпендикуляры к сторонам, проведённые через точки A_2, B_2 и C_2, пересекаются в точке, симметричной M относительно точки O.

16.4. Пусть P, Q, R и S — середины сторон AB, BC, CD и DA; M — точка пересечения отрезков PR и QS (т. е. середина обоих этих отрезков: см. задачу 14.5); O — центр описанной окружности, а точка O' симметрична O относительно точки M. Докажем, что прямые, о которых идёт речь в условии задачи, проходят через точку O'. В самом деле, $O'POR$ — параллелограмм, поэтому $O'P \parallel OR$, а так как R — середина хорды CD, то $OR \perp CD$, т. е. $O'P \perp CD$. Для прямых $O'Q$, $O'R$ и $O'S$ доказательство проводится аналогично.

16.5. Пусть точка D' симметрична D относительно точки P. Если площадь треугольника PCD равна половине площади четырёхугольника $ABCD$, то она равна сумме площадей треугольников PBC и PAD, т. е. сумме площадей треугольников PBC и PBD'. Так как P — середина отрезка DD', то $S_{PCD'} = S_{PCD} = S_{PBC} + S_{PBD'}$, поэтому точка B лежит на отрезке $D'C$. Остаётся заметить, что $D'B \parallel AD$.

16.6. Окружности S_1 и S_2 симметричны относительно точки A. Так как OB — диаметр окружности S_1, то $\angle BAO = 90^\circ$, поэтому при симметрии относительно A точка B снова попадает на окружность S. Следовательно, при симметрии относительно A точка B переходит в точку пересечения окружностей S_2 и S.

16.7. Так как $\angle EAF = \angle ECF = 30^\circ$, точки A, E, F и C лежат на одной окружности S, причём если O — её центр, то $\angle EOF = 60^\circ$. Точка B симметрична A относительно точки E, поэтому она лежит на окружности S_1, симметричной окружности S относительно точки E. Аналогично точка B лежит на окружности S_2, симметричной окружности S относительно точки F. Так как треугольник EOF правильный, центры окружностей S, S_1 и S_2 образуют правильный треугольник со стороной $2R$, где R — радиус этих окружностей. Поэтому окружности S_1 и S_2 имеют единственную общую точку B, причём треугольник BEF правильный. Следовательно, треугольник ABC тоже правильный.

16.8. Рассмотрим многоугольник, симметричный исходному относительно точки O. Так как стороны многоугольника попарно непараллельны, контуры этих многоугольников не могут иметь общих отрезков, а могут иметь только общие точки. А так как многоугольники выпуклые, на каждой стороне лежит не более двух точек пересечения; поэтому имеется не более $2n$ точек пересечения контуров (точнее, n пар симметричных относительно O точек).

Пусть l_1 и l_2 — прямые, проходящие через точку O и делящие площадь исходного многоугольника пополам. Докажем, что внутри каждой из четырёх частей, на которые эти прямые делят плоскость, есть точка пересечения контуров. Предположим, что в одной из частей между прямыми l_1 и l_2 нет таких точек. Обозначим точки пересечения прямых l_1 и l_2 со сторонами многоугольника так, как показано на рис. 16.1. Пусть точки A', B', C' и D' симметричны относительно точки O точкам A, B, C и D соответственно. Для определённости будем считать, что точка A лежит ближе к точке O, чем точка C'. Так как отрезки AB и $C'D'$ не пересекаются, точка B лежит ближе к точке O, чем точка D'. Поэтому $S_{ABO} < S_{C'D'O} = S_{CDO}$, где ABO — выпуклая фигура, ограниченная отрезками AO и BO и частью границы n-угольника, заключённой между точками A и B.

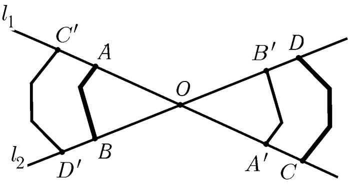


Рис. 16.1

С другой стороны, $S_{ABO} = S_{CDO}$, так как прямые l_1 и l_2 делят площадь многоугольника пополам. Получено противоречие. Поэтому между каждой парой прямых, делящих площадь пополам, лежит пара симметричных точек пересечения контуров, т. е. таких прямых не более n.

16.9. а) Пусть точка A при центральной симметрии относительно точки O_1 переходит в точку A_1, точка A_1 переходит при симметрии относительно O_2 в точку A_2. Тогда O_1O_2 — средняя линия треугольника AA_1A_2, поэтому $\overrightarrow{AA_2} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$.

б) Пусть O_2 — образ точки O_1 при переносе на вектор $\boldsymbol{a}/2$. Согласно задаче а) $S_{O_2} \circ S_{O_1} = T_{\boldsymbol{a}}$. Умножая это равенство на S_{O_1} справа или на S_{O_2} слева и учитывая, что $S_X \circ S_X$ — тождественное преобразование, получаем $S_{O_1} = S_{O_2} \circ T_{\boldsymbol{a}}$ и $S_{O_2} = T_{\boldsymbol{a}} \circ S_{O_1}$.

16.10. Согласно предыдущей задаче $S_B \circ S_A = T_{2\overrightarrow{AB}}$. Поэтому $S_{O_3} \circ S_{O_2} \circ S_{O_1} \circ \circ S_{O_3} \circ S_{O_2} \circ S_{O_1} = T_{2(\overrightarrow{O_2O_3}+\overrightarrow{O_3O_1}+\overrightarrow{O_1O_2})}$ — тождественное преобразование.

16.11. а) Предположим, что ограниченная фигура имеет два центра симметрии O_1 и O_2. Введём систему координат с осью абсцисс, направленной по лучу O_1O_2. Так как $S_{O_2} \circ S_{O_1} = T_{2\overrightarrow{O_1O_2}}$, фигура переходит в себя при переносе на вектор $2\overrightarrow{O_1O_2}$. Ограниченная фигура не может обладать этим свойством, так как образ точки с наибольшей абсциссой не принадлежит фигуре.

б) Пусть $O_3 = S_{O_2}(O_1)$. Легко проверить, что $S_{O_3} = S_{O_2} \circ S_{O_1} \circ S_{O_2}$. Поэтому если O_1 и O_2 — центры симметрии фигуры, то и O_3 — центр симметрии, причём $O_3 \neq O_1$ и $O_3 \neq O_2$.

в) Покажем, что конечное множество может иметь только 0, 1, 2 или 3 «почти центров симметрии». Соответствующие примеры приведены на рис. 16.2 (жирные точки являются одновременно точками M и центрами симметрии). Остаётся доказать, что конечное множество не может иметь больше трёх «почти центров симметрии».

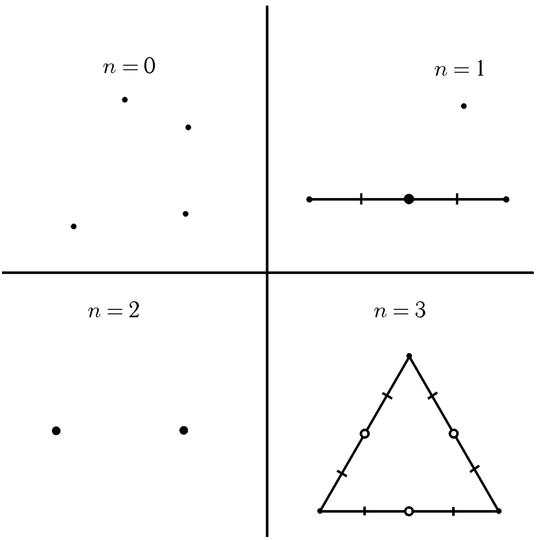


Рис. 16.2

Почти центров симметрии конечное число, так как они являются серединами отрезков, соединяющих точки множества. Поэтому можно выбрать прямую, проекции почти центров симметрии на которую не сливаются. Следовательно, доказательство достаточно провести для точек, лежащих на одной прямой.

Пусть на прямой задано n точек с координатами $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n$. Если мы выбрасываем точку x_1, то центром симметрии оставшегося множества может быть только точка $(x_2 + x_n)/2$; если выбрасываем x_n — то только точка $(x_1 + x_{n-1})/2$; если же выбрасываем любую другую точку — то только точка $(x_1 + x_n)/2$. Поэтому почти центров симметрии не больше трёх.

16.12. Если пара симметричных точек окрашена в разные цвета, то её можно просто выбросить из рассмотрения; выбросим все такие пары. В оставшемся наборе точек число синих пар равно числу красных пар. Кроме того, сумма расстояний как от точки A, так и от точки B до любой пары симметричных точек равна длине отрезка AB.

16.13. Рассмотрим окружность S_1', симметричную окружности S_1 относительно точки A. Искомая прямая проходит через точки пересечения S_1' и S_2.

16.14. Пусть l' — образ прямой l при симметрии относительно точки A. Искомая прямая проходит через точку A и точку пересечения прямой l' с окружностью S.

16.15. Построим точки A' и C' пересечения прямых, симметричных прямым BC и AB относительно точки D, с прямыми AB и BC (рис. 16.3). Ясно, что точка D является серединой построенного отрезка $A'C'$, так как точки A' и C' симметричны относительно D.

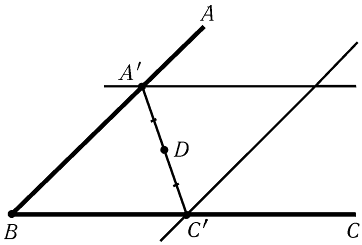


Рис. 16.3

16.16. Пусть O — середина отрезка AB. Нужно построить точки C и D, лежащие на сторонах угла, для которых точка O является серединой отрезка CD. Это построение описано в решении предыдущей задачи.

16.17. Предварительно разобьём прямые на пары. Это можно сделать тремя способами. Пусть противоположные вершины A и C параллелограмма $ABCD$ лежат на одной паре прямых, B и D — на другой. Рассматривая угол, образованный первой парой прямых, строим точки A и C, как это описано в решении задачи 16.15. Аналогично строим точки B и D.

16.18. Возьмём на меньшей окружности S_1 произвольную точку X. Пусть S_1' — образ окружности S_1 при симметрии относительно точки X, Y — точка пересечения окружностей S_1' и S_2. Тогда XY — искомая прямая.

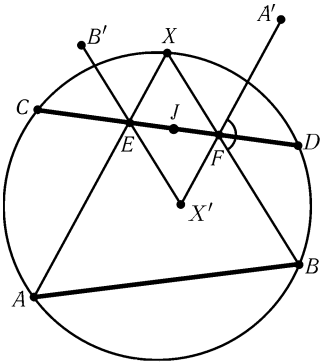


Рис. 16.4

16.19. Предположим, что точка X построена. Обозначим образы точек A, B и X при симметрии относительно точки J через A', B' и X' соответственно (рис. 16.4). Угол $\angle A'FB = 180^\circ - \angle AXB$ известен, поэтому точка F является точкой пересечения отрезка CD с дугой окружности, из которой отрезок BA' виден под углом $180^\circ - \angle AXB$. Точка X является точкой пересечения прямой BF с данной окружностью.

16.20. Предположим, что прямая l построена. Рассмотрим окружность S_1', симметричную окружности S_1 относительно точки A. Пусть O_1, O_1' и O_2 —

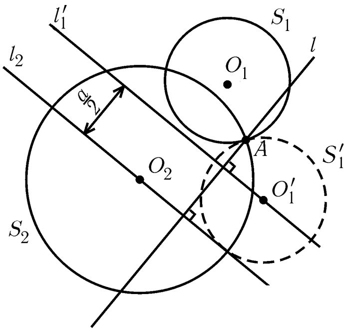


Рис. 16.5

центры окружностей S_1, S_1' и S_2 (рис. 16.5). Проведём через точки O_1' и O_2 прямые l_1' и l_2, перпендикулярные прямой l. Расстояние между прямыми l_1' и l_2 равно половине разности длин хорд, высекаемых прямой l на окружностях S_1 и S_2. Поэтому для построения прямой l нужно построить окружность радиуса $a/2$ с центром O_1'; прямая l_2 будет касательной к этой окружности. Построив прямую l_2, опускаем на неё перпендикуляр из точки A и получаем прямую l.

16.21. Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_m$ — середины сторон $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_mA_1$ многоугольника $A_1A_2\ldots A_m$. Тогда $S_{B_1}(A_1) = A_2$, $S_{B_2}(A_2) = A_3$, ..., $S_{B_m}(A_m) = A_1$. Поэтому $S_{B_m} \circ \ldots \circ S_{B_1}(A_1) = A_1$, т. е. A_1 — неподвижная точка композиции симметрий $S_{B_m} \circ S_{B_{m-1}} \circ \ldots \circ S_{B_1}$. Согласно задаче 16.9 композиция нечётного числа центральных симметрий является центральной симметрией, т. е. имеет единственную неподвижную точку. Эту точку можно построить как середину отрезка, соединяющего точки X и $S_{B_m} \circ S_{B_{m-1}} \circ \ldots \circ S_{B_1}(X)$, где X — произвольная точка.

ГЛАВА 17

ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ

Основные сведения

1. *Симметрией относительно прямой* l (обозначение: S_l) называют преобразование плоскости, переводящее точку X в такую точку X', что l — серединный перпендикуляр к отрезку XX'. Это преобразование называют также *осевой симметрией*, а l — осью симметрии.

2. Если фигура переходит в себя при симметрии относительно прямой l, то l называют *осью симметрии* этой фигуры.

3. Композиция двух осевых симметрий является параллельным переносом, если их оси параллельны, и поворотом, если они не параллельны (см. задачу 17.22).

Осевые симметрии являются как бы кирпичиками, из которых построены все другие движения плоскости: любое движение является композицией не более чем трёх осевых симметрий (задача 17.37). Поэтому композиции осевых симметрий дают гораздо более мощный метод решения задач, чем композиции центральных симметрий. Кроме того, поворот часто бывает удобно разложить в композицию двух симметрий, причём за одну из осей можно взять любую прямую, проходящую через центр поворота.

Вводные задачи

1. Докажите, что окружность при осевой симметрии переходит в окружность.

2. Четырёхугольник имеет ось симметрии. Докажите, что этот четырёхугольник либо является равнобедренной трапецией, либо симметричен относительно диагонали.

3. Ось симметрии многоугольника пересекает его стороны в точках A и B. Докажите, что точка A является либо вершиной многоугольника, либо серединой стороны, перпендикулярной оси симметрии.

4. Докажите, что если фигура имеет две перпендикулярные оси симметрии, то она имеет центр симметрии.

§ 1. Симметрия помогает решить задачу

17.1. Точка M лежит на диаметре AB окружности. Хорда CD проходит через M и пересекает AB под углом 45°. Докажите, что сумма $CM^2 + DM^2$ не зависит от выбора точки M.

17.2. Равные окружности S_1 и S_2 касаются окружности S внутренним образом в точках A_1 и A_2. Произвольная точка C окружности S соединена отрезками с точками A_1 и A_2. Эти отрезки пересекают S_1 и S_2 в точках B_1 и B_2. Докажите, что $A_1A_2 \parallel B_1B_2$.

17.3. Через точку M основания AB равнобедренного треугольника ABC проведена прямая, пересекающая его боковые стороны CA и CB (или их продолжения) в точках A_1 и B_1. Докажите, что $A_1A : A_1M = B_1B : B_1M$.

См. также задачи 2.16, 2.65, 2.93, 2.99, 4.11, 6.3, 6.29, 9.40, 11.27, 22.22, 22.23.

§ 2. Построения

17.4. Постройте четырёхугольник $ABCD$, у которого диагональ AC является биссектрисой угла A, зная длины его сторон.

17.5. Постройте четырёхугольник $ABCD$, в который можно вписать окружность, зная длины двух соседних сторон AB и AD и углы при вершинах B и D.

17.6. Постройте треугольник ABC по a, b и разности углов A и B.

17.7. Постройте треугольник ABC по стороне c, высоте h_c и разности углов A и B.

17.8. Постройте треугольник ABC по: а) c, $a - b$ $(a > b)$ и углу C; б) c, $a + b$ и углу C.

17.9. Дана прямая l и точки A и B, лежащие по одну сторону от неё. Постройте такую точку X прямой l, что $AX + XB = a$, где a — данная величина.

17.10. Дан острый угол MON и точки A и B внутри его. Найдите на стороне OM точку X так, чтобы треугольник XYZ, где Y и Z — точки пересечения прямых XA и XB с ON, был равнобедренным: $XY = XZ$.

17.11. Дана прямая MN и две точки A и B по одну сторону от неё. Постройте на прямой MN точку X так, что $\angle AXM = 2\angle BXN$.

* * *

17.12. Даны три прямые l_1, l_2 и l_3, пересекающиеся в одной точке, и точка A_1 на прямой l_1. Постройте треугольник ABC так, чтобы точка A_1 была серединой его стороны BC, а прямые l_1, l_2 и l_3 были серединными перпендикулярами к сторонам.

17.13. Постройте треугольник ABC, если даны точки A, B и прямая, на которой лежит биссектриса угла C.

17.14. Даны три прямые l_1, l_2 и l_3, пересекающиеся в одной точке, и точка A на прямой l_1. Постройте треугольник ABC так, чтобы точка A была его вершиной, а биссектрисы треугольника лежали на прямых l_1, l_2 и l_3.

17.15. Постройте треугольник по данным серединам двух сторон и прямой, на которой лежит биссектриса, проведённая к одной из этих сторон.

§ 3. Неравенства и экстремумы

17.16. На биссектрисе внешнего угла C треугольника ABC взята точка M, отличная от C. Докажите, что $MA+MB>CA+CB$.

17.17. В треугольнике ABC проведена медиана AM. Докажите, что $2AM \geqslant (b+c)\cos(\alpha/2)$.

17.18. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AC и BC в точках B_1 и A_1. Докажите, что если $AC>BC$, то $AA_1>BB_1$.

17.19. Докажите, что площадь любого выпуклого четырёхугольника не превосходит полусуммы произведений противоположных сторон.

17.20. Дана прямая l и две точки A и B по одну сторону от неё. Найдите на прямой l точку X так, чтобы длина ломаной AXB была минимальна.

17.21*. В данный остроугольный треугольник впишите треугольник наименьшего периметра.

§ 4. Композиции симметрий

17.22. а) Прямые l_1 и l_2 параллельны. Докажите, что $S_{l_1} \circ S_{l_2} = T_{2\boldsymbol{a}}$, где $T_{\boldsymbol{a}}$ — параллельный перенос, переводящий l_1 в l_2, причём $\boldsymbol{a} \perp l_1$.

б) Прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке O. Докажите, что $S_{l_2} \circ S_{l_1} = R_O^{2\alpha}$, где R_O^α — поворот, переводящий l_1 в l_2.

17.23. Даны три прямые a, b, c. Докажите, что композиция симметрий $S_c \circ S_b \circ S_a$ является симметрией относительно некоторой прямой тогда и только тогда, когда данные прямые пересекаются в одной точке.

17.24. Даны три прямые a, b, c. Пусть $T = S_a \circ S_b \circ S_c$. Докажите, что $T \circ T$ — параллельный перенос (или тождественное отображение).

17.25. Пусть $l_3 = S_{l_1}(l_2)$. Докажите, что $S_{l_3} = S_{l_1} \circ S_{l_2} \circ S_{l_1}$.

17.26. Вписанная окружность касается сторон треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1; точки A_2, B_2 и C_2 симметричны этим точкам относительно биссектрис соответствующих углов треугольника. Докажите, что $A_2B_2 \parallel AB$ и прямые AA_2, BB_2 и CC_2 пересекаются в одной точке.

17.27*. Две прямые пересекаются под углом γ. Кузнечик прыгает с одной прямой на другую; длина каждого прыжка равна 1 м, и кузнечик не прыгает обратно, если только это возможно. Докажите, что последовательность прыжков периодична тогда и только тогда, когда γ/π — рациональное число.

17.28*. а) Впишите в данную окружность n-угольник, стороны которого параллельны заданным n прямым.

б) Через центр O окружности проведено n прямых. Постройте описанный около окружности n-угольник, вершины которого лежат на этих прямых.

17.29*. Дано n прямых. Постройте n-угольник, для которого эти прямые являются: а) серединными перпендикулярами к сторонам; б) биссектрисами внешних или внутренних углов при вершинах.

17.30*. Впишите в данную окружность n-угольник, одна из сторон которого проходит через данную точку, а остальные стороны параллельны данным прямым.

§ 5. Свойства симметрий и осей симметрии

17.31. Точка A расположена на расстоянии 50 см от центра круга радиусом 1 см. Разрешается отразить точку симметрично относительно любой прямой, пересекающей круг. Докажите, что: а) за 25 отражений точку A можно «загнать» внутрь данного круга; б) за 24 отражения этого сделать нельзя.

17.32. На окружности с центром O даны точки $A_1, \ldots, A_n$, делящие её на равные дуги, и точка X. Докажите, что точки, симметричные X относительно прямых $OA_1, \ldots, OA_n$, образуют правильный многоугольник.

17.33. Сколько осей симметрии может иметь семиугольник?

17.34. Докажите, что если плоская фигура имеет ровно две оси симметрии, то эти оси перпендикулярны.

17.35*. Докажите, что если многоугольник имеет несколько (больше двух) осей симметрии, то все они пересекаются в одной точке.

17.36*. Докажите, что если многоугольник имеет чётное число осей симметрии, то он имеет центр симметрии.

§ 6. Теорема Шаля

Движением называют преобразование, сохраняющее расстояния между точками, т. е. если A' и B' — образы точек A и B, то $A'B' = AB$. Движение плоскости, оставляющее неподвижными три точки, не лежащие на одной прямой, оставляет неподвижными и все остальные точки.

17.37*. Докажите, что любое движение плоскости является композицией не более чем трёх симметрий относительно прямых.

Движение, являющееся композицией чётного числа симметрий относительно прямых, называют *движением первого рода* или *движением, сохраняющим ориентацию плоскости*. Движение, являющееся композицией нечётного числа симметрий относительно прямых, называют *движением второго рода* или *движением, изменяющим ориентацию плоскости*. Движения первого рода часто называют *собственными*, а движения второго рода — *несобственными*.

Композицию чётного числа симметрий относительно прямых нельзя представить в виде композиции нечётного числа симметрий относительно прямых (задача 17.40).

17.38*. Докажите, что любое движение первого рода является поворотом или параллельным переносом.

Скользящей симметрией называют композицию симметрии относительно некоторой прямой l и переноса на вектор, параллельный l (этот вектор может быть нулевым).

17.39*. Докажите, что любое движение второго рода является скользящей симметрией.

17.40*. Докажите, что композицию чётного числа симметрий относительно прямых нельзя представить в виде композиции нечётного числа симметрий относительно прямых.

17.41*. Дан треугольник ABC. Докажите, что композиция симметрий $S = S_{AC} \circ S_{AB} \circ S_{BC}$ является скользящей симметрией, для которой вектор переноса имеет длину $4R \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$, где R — радиус описанной окружности, α, β, γ — углы данного треугольника.

17.42*. Пусть движение плоскости переводит фигуру F в фигуру F'. Для каждой пары соответственных точек A и A' рассмотрим середину X отрезка AA'. Докажите, что либо все точки X совпадают, либо все они лежат на одной прямой, либо образуют фигуру, подобную F.

Задачи для самостоятельного решения

17.43. Дан невыпуклый четырёхугольник периметра P. Докажите, что найдётся выпуклый четырёхугольник того же периметра, но большей площади.

17.44. Может ли ограниченная фигура иметь центр симметрии и ровно одну ось симметрии?

17.45. Точка M лежит на описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что прямые, симметричные прямым AM, BM и CM относительно биссектрис углов A, B и C, параллельны.

17.46. Вершины выпуклого четырёхугольника лежат на различных сторонах квадрата. Докажите, что периметр этого четырёхугольника не меньше $2\sqrt{2}a$, где a — длина стороны квадрата.

17.47. На прямоугольном бильярдном столе лежит шар. Постройте траекторию, при движении по которой шар, отразившись от каждой стенки по одному разу, вернётся на исходное место.

Решения

17.1. Обозначим точки, симметричные точкам C и D относительно прямой AB, через C' и D' соответственно. $\angle C'MD = 90^\circ$, поэтому $CM^2 + MD^2 = C'M^2 + MD^2 = C'D^2$. Поскольку $\angle C'CD = 45^\circ$, хорда $C'D$ имеет постоянную длину.

17.2. Проведём диаметр окружности S, являющийся осью симметрии окружностей S_1 и S_2. Пусть точки C' и B_2' симметричны точкам C и B_2 относительно этого диаметра (рис. 17.1).

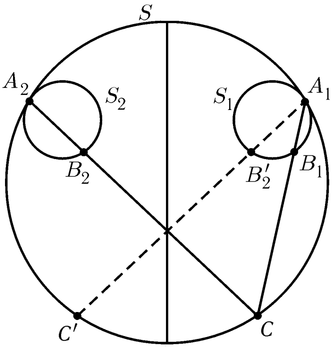


Рис. 17.1

Окружности S_1 и S гомотетичны с центром гомотетии в точке A_1, причём при этой гомотетии прямая B_1B_2' переходит в прямую CC', поэтому эти прямые параллельны. Ясно также, что $B_2B_2' \parallel CC'$. Поэтому точки B_1, B_2' и B_2 лежат на одной прямой, причём эта прямая параллельна прямой CC'.

17.3. Пусть прямая, симметричная прямой A_1B_1 относительно прямой AB, пересекает стороны CA и CB (или их продолжения) в точках A_2 и B_2. Так как $\angle A_1AM = \angle B_2BM$ и $\angle A_1MA = \angle B_2MB$, то $\triangle A_1AM \sim \triangle B_2BM$, т. е. $A_1A : A_1M = B_2B : B_2M$. Кроме того, так как MB — биссектриса треугольника B_1MB_2, то $B_2B : B_2M = B_1B : B_1M$.

17.4. Предположим, что четырёхугольник $ABCD$ построен. Пусть для определённости $AD > AB$. Обозначим через B' точку, симметричную точке B относительно диагонали AC. Точка B' лежит на стороне AD, причём $B'D = AD - AB$. В треугольнике $B'CD$ известны длины всех сторон: $B'D = AD - AB$ и $B'C = BC$. Построив треугольник $B'CD$, на продолжении стороны $B'D$ за точку B' построим точку A. Дальнейшее построение очевидно.

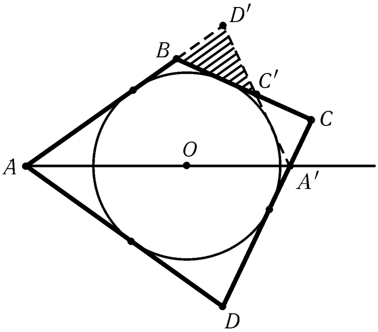


Рис. 17.2

17.5. Предположим, что четырёхугольник $ABCD$ построен. Для определённости будем считать, что $AD > AB$. Пусть O — центр вписанной окружности; точка D' симметрична D относительно прямой AO; A' — точка пересечения прямых AO и DC, C' — точка пересечения прямых BC и $A'D'$ (рис. 17.2).

В треугольнике $BC'D'$ известны сторона BD' и прилегающие к ней углы $\angle D'BC' = 180^\circ - \angle B$ и $\angle BD'C' = \angle D$. Построим треугольник $BC'D'$ по этим элементам. Так как $AD' = AD$, то можно построить точку A. Затем строим точку O пересечения биссектрис углов ABC' и $BD'C'$. Зная положение точки O, можно построить точку D и вписанную окружность. Точка C является точкой пересечения прямой BC' и касательной к окружности, проведённой из точки D.

17.6. Предположим, что треугольник ABC построен. Пусть C' — точка, симметричная точке C относительно серединного перпендикуляра к отрезку AB. В треугольнике ACC' известны $AC = b$, $AC' = a$ и $\angle CAC' = \angle A - \angle B$. Поэтому его можно построить. Точка B симметрична точке A относительно серединного перпендикуляра к отрезку CC'.

17.7. Предположим, что треугольник ABC построен. Обозначим через C' точку, симметричную C относительно серединного перпендикуляра к стороне AB, через B' — точку, симметричную B относительно прямой CC'. Для определённости будем считать, что $AC < BC$. Тогда $\angle ACB' = \angle ACC' + \angle C'CB = 180^\circ - \angle A + \angle C'CB = 180^\circ - (\angle A - \angle B)$, т. е. угол ACB' известен.

Треугольник ABB' можно построить, так как $AB = c$, $BB' = 2h_c$ и $\angle ABB' = 90^\circ$. Точка C является точкой пересечения серединного перпендикуляра к отрезку BB' и дуги окружности, из которой отрезок AB' виден под углом $180^\circ - (\angle A - \angle B)$.

17.8. а) Предположим, что треугольник ABC построен. Пусть C' — точка, симметричная точке A относительно биссектрисы угла C. Тогда $\angle BC'A = 180^\circ - \angle AC'C = 180^\circ - (180^\circ - \angle C)/2 = 90^\circ + \angle C/2$ и $BC' = a - b$.

В треугольнике ABC' известны $AB = c$, $BC' = a - b$ и $\angle C' = 90^\circ + \angle C/2$. Так как $\angle C' > 90^\circ$, треугольник ABC' строится по этим элементам однозначно. Точка C является точкой пересечения серединного перпендикуляра к отрезку AC' и прямой BC'.

б) Решение аналогично решению задачи а). В качестве C' нужно взять точку, симметричную точке A относительно биссектрисы внешнего угла C треугольника ABC. Так как $\angle AC'B = \angle C/2 < 90^\circ$, задача может иметь два решения.

17.9. Пусть S — окружность радиуса a с центром B, S' — окружность радиуса AX с центром X, A' — точка, симметричная точке A относительно прямой l. Тогда окружность S' касается окружности S, а точка A' лежит на окружности S'. Остаётся провести через данные точки A и A' окружность S', касающуюся данной окружности S, и найти её центр X (см. задачу 8.57 б).

17.10. Пусть проекция точки A на прямую ON лежит ближе к точке O, чем проекция точки B. Предположим, что равнобедренный треугольник XYZ построен.

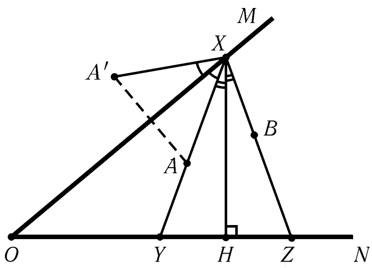


Рис. 17.3

Рассмотрим точку A', симметричную точке A относительно прямой OM. Опустим из точки X перпендикуляр XH на прямую ON (рис. 17.3). Так как $\angle A'XB = \angle A'XO + \angle OXA + \angle YXH + \angle HXZ = 2\angle OXY + 2\angle YXH = 2\angle OXH = 180^\circ - 2\angle MON$, то угол $A'XB$ известен. Точка X является точкой пересечения прямой OM и дуги, из которой отрезок $A'B$ виден под углом $180^\circ - 2\angle MON$. При этом проекция точки X на прямую ON должна лежать между проекциями точек A и B.

Обратно, если $\angle A'XB = 180^\circ - \angle MON$ и проекция точки X на прямую ON лежит между проекциями точек A и B, то треугольник XYZ равнобедренный.

17.11. Предположим, что точка X построена. Пусть B' — точка, симметричная точке B относительно прямой MN; окружность радиуса AB' с центром B' пересекает прямую MN в точке A'. Тогда луч $B'X$ является биссектрисой угла $AB'A'$. Следовательно, X — точка пересечения прямых $B'O$ и MN, где O — середина отрезка AA'.

17.12. Проведём через точку A_1 прямую BC, перпендикулярную прямой l_1. Вершина A искомого треугольника ABC является точкой пересечения прямых, симметричных прямой BC относительно прямых l_2 и l_3.

17.13. Пусть точка A' симметрична точке A относительно биссектрисы угла C. Тогда C — точка пересечения прямой $A'B$ и прямой, на которой лежит биссектриса угла C.

17.14. Пусть A_2 и A_3 — точки, симметричные точке A относительно прямых l_2 и l_3. Тогда точки A_2 и A_3 лежат на прямой BC. Поэтому точки B и C являются точками пересечения прямой A_2A_3 с прямыми l_2 и l_3.

17.15. Предположим, что треугольник ABC построен, причём N — середина AC, M — середина BC и биссектриса угла A лежит на данной прямой l. Построим точку N', симметричную N относительно прямой l. Прямая BA проходит через точку N' и параллельна прямой MN. Таким образом мы находим вершину A и прямую BA. Проведя прямую AN, получим прямую AC. Остаётся построить отрезок, концы которого лежат на сторонах угла BAC и M — его середина (см. решение задачи 16.15).

17.16. Пусть точка A' симметрична A относительно прямой CM. Тогда $AM + MB = A'M + MB > A'B = A'C + CB = AC + CB$.

17.17. Пусть точки B', C' и M' симметричны точкам B, C и M относительно биссектрисы внешнего угла при вершине A. Тогда $AM + AM' \geqslant MM' = (BB' + CC')/2 = (b + c)\sin(90^\circ - (\alpha/2)) = (b + c)\cos(\alpha/2)$.

17.18. Пусть точка B' симметрична B относительно биссектрисы угла ACB. Тогда $B'A_1 = BB_1$, т. е. требуется проверить, что $B'A_1 < AA_1$. Для этого достаточно заметить, что $\angle AB'A_1 > \angle AB'B > 90^\circ$.

17.19. Пусть D' — точка, симметричная точке D относительно серединного перпендикуляра к отрезку AC. Тогда $S_{ABCD} = S_{ABCD'} = S_{BAD'} + S_{BCD'} \leqslant AB \cdot AD'/2 + BC \cdot CD'/2 = (AB \cdot CD + BC \cdot AD)/2$.

17.20. Пусть точка A' симметрична точке A относительно прямой l. Пусть X — точка на прямой l. Тогда $AX + XB = A'X + XB \geqslant A'B$, причём равенство достигается, только если точка X лежит на отрезке $A'B$. Поэтому искомая точка является точкой пересечения прямой l и отрезка $A'B$.

17.21. Пусть PQR — треугольник, образованный основаниями высот треугольника ABC, $P'Q'R'$ — любой другой треугольник, вписанный в треугольник ABC. Пусть, далее, точки P_1 и P_2 (соответственно, P_1' и P_2') симметричны точке P (соответственно P') относительно прямых AB и AC (рис. 17.4). Точки Q и R лежат на отрезке P_1P_2 (см. задачу 1.58), поэтому периметр треуголь-

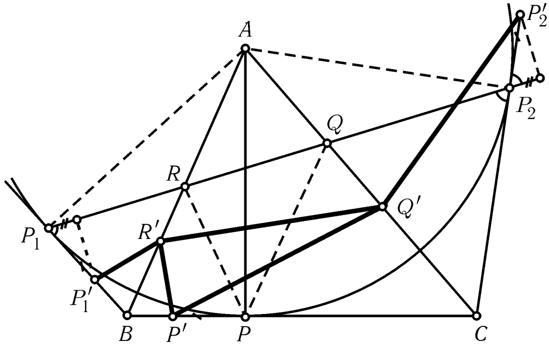


Рис. 17.4

ника PQR равен длине отрезка P_1P_2. А периметр треугольника $P'Q'R'$ равен длине ломаной $P_1'R'Q'P_2'$, т. е. он не меньше длины отрезка $P_1'P_2'$. Остаётся заметить, что $(P_1'P_2')^2 = P_1P_2^2 + 4d^2$, где d — расстояние от точки P_1' до прямой P_1P_2.

17.22. Пусть X — произвольная точка, $X_1 = S_{l_1}(X)$ и $X_2 = S_{l_2}(X_1)$.

а) Выберем на прямой l_1 произвольную точку O и рассмотрим систему координат с началом O и осью абсцисс, направленной по прямой l_1. Прямая l_2 задаётся в этой системе координат уравнением $y = a$. Пусть y, y_1 и y_2 — ординаты точек X, X_1 и X_2. Ясно, что $y_1 = -y$ и $y_2 = (a - y_1) + a = y + 2a$. Так как точки X, X_1 и X_2 имеют одинаковые абсциссы, то $X_2 = T_{2\boldsymbol{a}}(X)$, где $T_{\boldsymbol{a}}$ — перенос, переводящий l_1 в l_2, причём $\boldsymbol{a} \perp l_1$.

б) Рассмотрим систему координат с началом O и осью абсцисс, направленной по прямой l_1. Пусть угол поворота от прямой l_1 к l_2 в этой системе координат равен α, углы поворотов от оси абсцисс до лучей OX, OX_1 и OX_2 равны φ, φ_1 и φ_2. Ясно, что $\varphi_1 = -\varphi$ и $\varphi_2 = (\alpha - \varphi_1) + \alpha = \varphi + 2\alpha$. Так как $OX = OX_1 = OX_2$, то $X_2 = R_O^{2\alpha}(X)$, где R_O^{α} — поворот, переводящий l_1 в l_2.

17.23. Предположим сначала, что $S_c \circ S_b \circ S_a = S_l$ для некоторой прямой l. Тогда $S_b \circ S_a = S_c \circ S_c \circ S_b \circ S_a = S_c \circ S_l$. Неподвижной точкой преобразования $S_b \circ S_a$ является точка пересечения прямых a и b. Она должна быть также неподвижной точкой преобразования $S_c \circ S_l$, поэтому прямая c должна проходить через точку пересечения прямых a и b.

Предположим теперь, что данные прямые пересекаются в точке O. Композиция $S_b \circ S_a$ представляет собой поворот с центром O, поэтому $S_b \circ S_a = S_{b'} \circ S_{a'}$ для любой пары прямых a' и b', полученных из a и b поворотом с центром O на один и тот же угол. Можно добиться, чтобы при этом повороте прямая b' совпала с прямой c. Тогда $S_c \circ S_b \circ S_a = S_c \circ S_{b'} \circ S_{a'} = S_c \circ S_c \circ S_{a'} = S_{a'}$.

17.24. Представим $T \circ T$ в виде композиции трёх преобразований:

$$T \circ T = (S_a \circ S_b \circ S_c) \circ (S_a \circ S_b \circ S_c) = (S_a \circ S_b) \circ (S_c \circ S_a) \circ (S_b \circ S_c).$$

При этом $S_a \circ S_b$, $S_c \circ S_a$ и $S_b \circ S_c$ — повороты на углы $2\angle(b, a)$, $2\angle(a, c)$ и $2\angle(c, b)$ соответственно. Сумма углов поворотов равна $2(\angle(b, a) + \angle(a, c) + \angle(c, b)) = 2\angle(b, b) = 0^\circ$, причём эта величина определена с точностью до $2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$. Следовательно, эта композиция поворотов является параллельным переносом (см. задачу 18.37).

17.25. Если точки X и Y симметричны относительно прямой l_3, то точки $S_{l_1}(X)$ и $S_{l_1}(Y)$ симметричны относительно прямой l_2, т. е. $S_{l_1}(X) = S_{l_2} \circ S_{l_1}(Y)$. Поэтому $S_{l_1} \circ S_{l_3} = S_{l_2} \circ S_{l_1}$ и $S_{l_3} = S_{l_1} \circ S_{l_2} \circ S_{l_1}$.

17.26. Пусть O — центр вписанной окружности; a и b — прямые OA и OB. Тогда $S_a \circ S_b(C_1) = S_a(A_1) = A_2$ и $S_b \circ S_a(C_1) = S_b(B_1) = B_2$. Точки A_2 и B_2 получаются из точки C_1 поворотами с центром O на противоположные углы, поэтому $A_2B_2 \parallel AB$. Аналогичные рассуждения показывают, что стороны треугольников ABC и $A_2B_2C_2$ параллельны, а значит, эти треугольники гомотетичны. Прямые AA_2, BB_2 и CC_2 проходят через центр гомотетии, переводящей треугольник ABC в $A_2B_2C_2$. Заметим, что при этой гомотетии описанная окружность треугольника ABC переходит в его вписанную окружность, т. е. центр гомотетии лежит на прямой, соединяющей центры этих окружностей.

17.27. Для каждого вектора прыжка имеется ровно два положения кузнечика, для которых прыжок задаётся этим вектором. Поэтому последовательность прыжков периодична тогда и только тогда, когда имеется лишь конечное число различных векторов прыжков.

Пусть $\boldsymbol{a}_1$ — вектор прыжка кузнечика с прямой l_2 на прямую l_1; $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$, … — векторы последующих прыжков. Тогда $\boldsymbol{a}_2 = S_{l_2}(\boldsymbol{a}_1)$, $\boldsymbol{a}_3 = S_{l_1}(\boldsymbol{a}_2)$, $\boldsymbol{a}_4 = S_{l_2}(\boldsymbol{a}_3)$, … Так как композиция $S_{l_1} \circ S_{l_2}$ является поворотом на угол 2γ (или на угол $2\pi - 2\gamma$), векторы $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_5$, $\boldsymbol{a}_7$, … получаются из вектора $\boldsymbol{a}_1$ поворотами на 2γ, 4γ, 6γ, … (или на $2(\pi-\gamma)$, $4(\pi-\gamma)$, $6(\pi-\gamma)$, …). Поэтому набор $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_5$, … содержит конечное число различных векторов тогда и только тогда, когда γ/π — рациональное число. Набор $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{a}_6$, … рассматривается аналогично.

17.28. а) Предположим, что многоугольник $A_1A_2\dots A_n$ построен. Проведём через центр O окружности серединные перпендикуляры l_1, l_2, …, l_n к хордам A_1A_2, A_2A_3, …, A_nA_1 соответственно. Прямые l_1, …, l_n известны, так как они проходят через точку O и перпендикулярны данным прямым. Кроме того, $A_2 = S_{l_1}(A_1)$, $A_3 = S_{l_2}(A_2)$, …, $A_1 = S_{l_n}(A_n)$, т. е. точка A_1 является неподвижной точкой композиции симметрий $S_{l_n} \circ \ldots \circ S_{l_1}$. При нечётном n на окружности неподвижных точек ровно две; при чётном n либо неподвижных точек нет, либо все точки неподвижны.

б) Предположим, что искомый многоугольник $A_1\dots A_n$ построен. Рассмотрим многоугольник $B_1\dots B_n$, образованный точками касания описанного многоугольника с окружностью. Стороны многоугольника $B_1\dots B_n$ перпендикулярны данным прямым, т. е. имеют заданные направления, поэтому его можно построить (см. задачу а)); остаётся провести касательные к окружности в точках B_1, …, B_n.

17.29. Рассмотрим композицию последовательных симметрий относительно данных прямых l_1, …, l_n. В задаче а) в качестве вершины A_1 искомого n-угольника нужно взять неподвижную точку этой композиции, а в задаче б) в качестве прямой A_1A_n нужно взять неподвижную прямую.

17.30. При последовательных симметриях относительно прямых l_1, …, l_{n-1}, перпендикулярных данным прямым и проходящих через центр окружности, вершина A_1 искомого многоугольника переходит в вершину A_n. Если n нечётно, то композиция этих симметрий — поворот на известный угол, поэтому через точку M нужно провести хорду A_1A_n известной длины. Если n чётно, то рассматриваемая композиция является симметрией относительно некоторой прямой, поэтому из точки M нужно опустить перпендикуляр на эту прямую.

17.31. Пусть O — центр данного круга, D_R — круг радиуса R с центром O. Докажем, что множеством образов точек D_R при симметриях относительно прямых, проходящих через D_1, является круг D_{R+2}. В самом деле, образы точки O при указанных симметриях заполняют круг D_2, а круги радиуса R с центрами в D_2 заполняют круг D_{R+2}. Поэтому за n отражений из точек D_1 можно получить любую точку из D_{2n+1} и только эти точки. Остаётся заметить, что точку A можно «загнать» внутрь D_1 за n отражений тогда и только тогда, когда за n отражений можно перевести некоторую точку из D_1 в A.

17.32. Обозначим симметрии относительно прямых $OA_1, \dots, OA_n$ через S_1, …, S_n. Пусть $X_k = S_k(X)$ при $k = 1$, …, n. Нужно доказать, что при некотором повороте относительно точки O система точек X_1, …, X_n переходит в себя. Ясно, что $S_{k+1} \circ S_k(X_k) = S_{k+1} \circ S_k \circ S_k(X) = X_{k+1}$. Преобразования $S_{k+1} \circ S_k$ являются поворотами относительно точки O на угол $4\pi/n$ (см. задачу 17.22 б).

З а м е ч а н и е. При чётном n получается $n/2$-угольник.

17.33. Ответ: 0, 1 или 7. Ось симметрии семиугольника обязательно проходит через одну из его вершин (остальные вершины разбиваются на пары симметричных вершин). Пусть у семиугольника есть ось симметрии. Тогда у него есть три пары равных углов и три пары равных сторон. Вторая ось симметрии может быть расположена тремя существенно различными (не симметричными) способами. Легко видеть, что в каждом из этих трёх случаев все стороны семиугольника оказываются равными и все углы тоже.

17.34. Пусть прямые l_1 и l_2 являются осями симметрии плоской фигуры. Это означает, что если точка X принадлежит фигуре, то точки $S_{l_1}(X)$ и $S_{l_2}(X)$ принадлежат фигуре. Рассмотрим прямую $l_3 = S_{l_1}(l_2)$. Согласно задаче 17.25 $S_{l_3}(X) = S_{l_1} \circ S_{l_2} \circ S_{l_1}(X)$, поэтому l_3 также является осью симметрии.

Если у фигуры ровно две оси симметрии, то $l_3 = l_1$ или $l_3 = l_2$. Ясно, что $l_3 \neq l_1$, поэтому $l_3 = l_2$, т. е. прямая l_2 перпендикулярна прямой l_1.

17.35. Предположим, что многоугольник имеет три оси симметрии, которые не пересекаются в одной точке, т. е. они образуют треугольник. Пусть X — точка многоугольника, наиболее удалённая от некоторой внутренней точки M этого треугольника. Точки X и M лежат по одну сторону от одной из рассматриваемых осей симметрии l. Если X' — точка, симметричная X относительно прямой l, то $MX' > MX$ и точка X' более удалена от точки M, чем точка X. Получено противоречие, поэтому все оси симметрии многоугольника пересекаются в одной точке.

17.36. Все оси симметрии проходят через одну точку O (задача 17.35). Если l_1 и l_2 — оси симметрии, то $l_3 = S_{l_1}(l_2)$ — тоже ось симметрии (см. задачу 17.25). Выберем одну из осей симметрии l нашего многоугольника. Остальные оси разбиваются на пары прямых, симметричных относительно l. Если прямая l_1, перпендикулярная l и проходящая через точку O, не является осью симметрии, то число осей симметрии нечётно. Поэтому прямая l_1 является осью симметрии. Ясно, что $S_{l_1} \circ S_l = R_O^{180^\circ}$ центральная симметрия, т. е. O — центр симметрии.

17.37. Пусть F — движение, переводящее точку A в A', причём точки A и A' не совпадают; S — симметрия относительно серединного перпендикуляра l к отрезку AA'. Тогда $S \circ F(A) = A$, т. е. A — неподвижная точка преобразования $S \circ F$. Кроме того, если X — неподвижная точка преобразования F, то $AX = A'X$, т. е. точка X лежит на прямой l, а значит, X — неподвижная точка преобразования $S \circ F$. Таким образом, точка A и все неподвижные точки преобразования F являются неподвижными точками преобразования $S \circ F$.

Возьмём точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, и рассмотрим их образы при данном движении G. Можно построить такие преобразования S_1, S_2 и S_3, являющиеся симметриями относительно прямых или тождественными преобразованиями, что преобразование $S_3 \circ S_2 \circ S_1 \circ G$ оставляет неподвижными точки A, B и C, т. е. оно является тождественным преобразованием E. Домножая равенство $S_3 \circ S_2 \circ S_1 \circ G = E$ слева последовательно на S_3, S_2 и S_1 и учитывая, что $S_i \circ S_i = E$, получаем $G = S_1 \circ S_2 \circ S_3$.

17.38. Согласно задаче 17.37 любое движение первого рода является композицией двух симметрий относительно прямых. Остаётся воспользоваться результатом задачи 17.22.

17.39. Согласно задаче 17.37 любое движение второго рода можно представить в виде $S_3 \circ S_2 \circ S_1$, где S_1, S_2 и S_3 — симметрии относительно прямых l_1, l_2 и l_3. Предположим сначала, что прямые l_2 и l_3 не параллельны. Тогда при повороте прямых l_2 и l_3 относительно точки их пересечения на любой угол композиция $S_3 \circ S_2$ не изменяется (см. задачу 17.22. б)), поэтому можно считать, что $l_2 \perp l_1$. Остаётся повернуть прямые l_1 и l_2 относительно точки их пересечения так, чтобы прямая l_2 стала параллельна прямой l_3.

Предположим теперь, что $l_2 \parallel l_3$. Если прямая l_1 не параллельна этим прямым, то прямые l_1 и l_2 можно повернуть относительно точки их пересечения так, что прямые l_2 и l_3 станут не параллельны. А если $l_1 \parallel l_2$, то прямые l_1 и l_2 можно перенести параллельно так, что прямые l_2 и l_3 совпадут.

17.40. Предположим, что некоторое движение можно представить в виде композиции как чётного, так и нечётного числа симметрий относительно прямых. Тогда, с одной стороны, согласно задаче 17.39 это движение является скользящей симметрией относительно некоторой прямой l. Поэтому оно переводит прямую l в себя, но никакую другую прямую, параллельную l, оно в себя не переводит. Кроме того, скользящая симметрия либо не оставляет никакие точки неподвижными, либо оставляет неподвижными все точки прямой l. С другой стороны, согласно задаче 17.38 рассматриваемое движение является поворотом или параллельным переносом. Но поворот оставляет неподвижной ровно одну точку, а параллельный перенос переводит в себя каждую прямую некоторого семейства параллельных прямых.

З а м е ч а н и е. Если воспользоваться таким понятием, как направление обхода окружности, то можно сказать, что собственное движение сохраняет направление обхода, а несобственное — изменяет. Но если попытаться дать аккуратное определение этого понятие, то основанное на этом решение задачи 17.40 будет не таким уж коротким.

17.41. Пусть точка A_1 симметрична точке A относительно прямой BC. Тогда $S_{BC}(A_1) = A$, а при симметриях относительно прямых AB и AC точка A остаётся на месте. Поэтому преобразование S переводит точку A_1 в A. Аналогично проверяется, что преобразование S переводит точку B в точку B_1, симметричную B относительно прямой AC.

Согласно задаче 17.39 преобразование S является скользящей симметрией. Ось этой скользящей симметрии проходит через середины отрезков AA_1 и BB_1, т. е. через основания высот AH_1 и BH_2. Длина вектора переноса равна длине проекции отрезка AH_1 на прямую H_1H_2. Угол между прямыми AH_1 и H_1H_2 равен $90^\circ - \alpha$, поэтому длина проекции отрезка AH_1 на прямую H_1H_2 равна $AH_1 \cos(90^\circ - \alpha) = AH_1 \sin\alpha = AC \sin\alpha \sin\gamma = 2R \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$.

З а м е ч а н и е. Если $\angle C = 90^\circ$, то точки H_1 и H_2 совпадают. Тем не менее, предельное положение прямой H_1H_2 определено однозначно, поскольку эта прямая антипараллельна стороне AB.

17.42. Если движение несобственное, то согласно задаче 17.39 оно представляет собой скользящую симметрию относительно некоторой прямой l. В таком случае все точки X лежат на прямой l.

Если движение собственное, то согласно задаче 17.38 оно является либо параллельным переносом на вектор $\boldsymbol{a}$, либо поворотом на угол α, где $0 < \alpha \leqslant 180^\circ$ (этот поворот может быть либо по часовой стрелке, либо против). Если движение является переносом на вектор $\boldsymbol{a}$, то точка X получается из точки A переносом на вектор $\boldsymbol{a}/2$. Если движение является поворотом на 180°, то все точки X совпадают с центром поворота. Если движения является поворотом на угол α, где $0 < \alpha < 180^\circ$, то точка X получается из точки A поворотом на угол $\alpha/2$ и гомотетией с коэффициентом $\cos(\alpha/2)$.

ГЛАВА 18

ПОВОРОТ

Основные сведения

1. Мы не будем давать строгого определения поворота. Для решения задач достаточно иметь следующее представление о повороте: *поворот с центром O* (или *относительно точки O*) на угол φ — это преобразование плоскости, переводящее точку X в такую точку X', что:

а) $OX' = OX$;

б) угол поворота от вектора $\overrightarrow{OX}$ к вектору $\overrightarrow{OX'}$ равен φ.

2. В главе используются следующие обозначения для преобразований и их композиций:

$T_{\boldsymbol{a}}$ — перенос на вектор $\boldsymbol{a}$;

S_O — симметрия относительно точки O;

S_l — симметрия относительно прямой l;

R_O^{φ} — поворот с центром O на угол φ;

$F \circ G$ — композиция преобразований F и G, причём $(F \circ G)(X) = F(G(X))$.

3. Задачи, решаемые с помощью поворотов, можно разделить на два больших класса: задачи, не использующие свойств композиции поворотов, и задачи, использующие эти свойства. Для решения задач, использующих свойства композиции поворотов, нужно усвоить результат задачи 18.37: $R_B^{\beta} \circ R_A^{\alpha} = R_C^{\gamma}$, где $\gamma = \alpha + \beta$ и $\angle BAC = \alpha/2$, $\angle ABC = \beta/2$.

Вводные задачи

1. Докажите, что при повороте окружность переходит в окружность.

2. Докажите, что выпуклый n-угольник является правильным тогда и только тогда, когда он переходит в себя при повороте на угол $360^\circ/n$ относительно некоторой точки.

3. Докажите, что треугольник ABC является правильным тогда и только тогда, когда при повороте на 60° (либо по часовой стрелке, либо против) относительно точки A вершина B переходит в C.

4. Докажите, что середины сторон правильного многоугольника образуют правильный многоугольник.

5. Через центр квадрата проведены две перпендикулярные прямые. Докажите, что их точки пересечения со сторонами квадрата образуют квадрат.

§ 1. Поворот на 90°

18.1. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K соответственно, причём $\angle BAM = \angle MAK$. Докажите, что $BM + KD = AK$.

18.2. В треугольнике ABC проведены медиана CM и высота CH. Прямые, проведённые через произвольную точку P плоскости перпендикулярно CA, CM и CB, пересекают прямую CH в точках A_1, M_1 и B_1. Докажите, что $A_1M_1 = B_1M_1$.

18.3. Два квадрата $BCDA$ и $BKMN$ имеют общую вершину B. Докажите, что медиана BE треугольника ABK и высота BF треугольника CBN лежат на одной прямой. (Вершины обоих квадратов перечислены по часовой стрелке.)

18.4. Внутри квадрата $A_1A_2A_3A_4$ взята точка P. Из вершины A_1 опущен перпендикуляр на A_2P, из A_2 — на A_3P, из A_3 — на A_4P, из A_4 — на A_1P. Докажите, что все четыре перпендикуляра (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

18.5. На сторонах CB и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K так, что периметр треугольника CMK равен удвоенной стороне квадрата. Найдите величину угла MAK.

18.6. На плоскости даны три (одинаково ориентированных) квадрата: $ABCD$, $AB_1C_1D_1$ и $A_2B_2CD_2$; первый квадрат имеет с двумя другими общие вершины A и C. Докажите, что медиана BM треугольника BB_1B_2 перпендикулярна отрезку D_1D_2.

18.7*. Дан треугольник ABC. На его сторонах AB и BC построены внешним образом квадраты $ABMN$ и $BCPQ$. Докажите, что центры этих квадратов и середины отрезков MQ и AC образуют квадрат.

18.8*. Вокруг квадрата описан параллелограмм. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из вершин параллелограмма на стороны квадрата, образуют квадрат.

См. также задачи 1.43, 1.47, 4.25, 8.45.

§ 2. Поворот на 60°

18.9. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены правильные треугольники A_1BC, AB_1C и ABC_1. Докажите, что $AA_1 = BB_1 = CC_1$.

18.10. На отрезке AE по одну сторону от него построены равносторонние треугольники ABC и CDE; M и P — середины отрезков AD и BE. Докажите, что треугольник CPM равносторонний.

18.11. Постройте равносторонний треугольник ABC так, чтобы его вершины лежали на трёх данных параллельных прямых.

18.12. Рассмотрим всевозможные равносторонние треугольники PKM, вершина P которых фиксирована, а вершина K лежит в данном квадрате. Найдите геометрическое место вершин M.

18.13. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ построены внешним образом правильные треугольники BCP и CDQ. Докажите, что треугольник APQ правильный.

18.14. Точка M лежит на дуге AB описанной окружности правильного треугольника ABC. Докажите, что $MC = MA + MB$.

18.15. Найдите геометрическое место точек M, лежащих внутри правильного треугольника ABC, для которых $MA^2 = MB^2 + MC^2$.

18.16. Шестиугольник $ABCDEF$ правильный, K и M — середины отрезков BD и EF. Докажите, что треугольник AMK правильный.

18.17. Пусть M и N — середины сторон CD и DE правильного шестиугольника $ABCDEF$, P — точка пересечения отрезков AM и BN.

а) Найдите величину угла между прямыми AM и BN.

б) Докажите, что $S_{ABP} = S_{MDNP}$.

18.18. На сторонах AB и BC правильного треугольника ABC взяты точки M и N так, что $MN \parallel AC$, E — середина отрезка AN, D — центр треугольника BMN. Найдите величины углов треугольника CDE.

18.19. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены правильные треугольники ABC_1, AB_1C и A_1BC. Пусть P и Q — середины отрезков A_1B_1 и A_1C_1. Докажите, что треугольник APQ правильный.

18.20. На сторонах AB и AC треугольника ABC внешним образом построены правильные треугольники ABC' и $AB'C$. Точка M делит сторону BC в отношении $BM : MC = 3 : 1$; K и L — середины сторон AC' и $B'C$. Докажите, что углы треугольника KLM равны 30°, 60° и 90°.

18.21. Правильные треугольники ABC, CDE, EHK (вершины обходятся в направлении против часовой стрелки) расположены на плоскости так, что $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DK}$. Докажите, что треугольник BHD тоже правильный.

18.22. а) Для данного треугольника ABC, все углы которого меньше 120°, найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин минимальна.

б) Внутри треугольника ABC, все углы которого меньше 120°, взята точка O, из которой его стороны видны под углом 120°. Докажите, что сумма расстояний от точки O до вершин равна $(a^2 + b^2 + c^2)/2 + 2\sqrt{3}S$.

18.23*. Даны точка X и правильный треугольник ABC. Докажите, что из отрезков XA, XB и XC можно составить треугольник, причём этот треугольник вырожденный тогда и только тогда, когда точка X лежит на описанной окружности треугольника ABC (Помпею).

18.24*. Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность радиуса R, причём $AB = CD = EF = R$. Докажите, что середины сторон BC, DE и FA образуют правильный треугольник.

18.25*. На сторонах выпуклого центрально симметричного шестиугольника $ABCDEF$ внешним образом построены правильные треугольники. Докажите, что середины отрезков, соединяющих вершины соседних треугольников, образуют правильный шестиугольник.

§ 3. Повороты на произвольные углы

18.26. Докажите, что при повороте на угол α с центром в начале координат точка с координатами (x, y) переходит в точку

$$(x\cos\alpha - y\sin\alpha,\ x\sin\alpha + y\cos\alpha).$$

18.27. Даны точки A и B и окружность S. Постройте на окружности S такие точки C и D, что $AC \parallel BD$ и дуга CD имеет данную величину α.

18.28. Поворот с центром O переводит прямую l_1 в прямую l_2, а точку A_1, лежащую на прямой l_1, — в точку A_2. Докажите, что точка пересечения прямых l_1 и l_2 лежит на описанной окружности треугольника A_1OA_2.

18.29. На плоскости лежат две одинаковые буквы Г. Конец короткой палочки одной буквы обозначим A, а другой — A'. Длинные палочки разбиты на n равных частей точками $A_1, \ldots, A_{n-1}$; $A'_1, \ldots, A'_{n-1}$ (точки деления нумеруются от концов длинных палочек). Прямые AA_i и $A'A'_i$ пересекаются в точке X_i. Докажите, что точки $X_1, \ldots, X_{n-1}$ образуют выпуклый многоугольник.

18.30. По двум прямым, пересекающимся в точке P, равномерно с одинаковой скоростью движутся две точки: по одной прямой — точка A, по другой — точка B. Через точку P они проходят не одновременно. Докажите, что в любой момент времени описанная окружность треугольника ABP проходит через некоторую фиксированную точку, отличную от P.

18.31. Для данного треугольника ABC, один из углов которого больше 120°, найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин минимальна.

18.32. Треугольник $A_1B_1C_1$ получен из треугольника ABC поворотом на угол α $(\alpha<180^\circ)$ вокруг центра его описанной окружности. Докажите, что точки пересечения сторон AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 (или их продолжений) являются вершинами треугольника, подобного треугольнику ABC.

18.33*. Дан треугольник ABC. Постройте прямую, делящую пополам его площадь и периметр.

18.34*. На векторах $\overrightarrow{A_iB_i}$, где $i = 1, \ldots, k$, построены правильные одинаково ориентированные n-угольники $A_iB_iC_iD_i\ldots$ $(n \geqslant 4)$. Докажите, что k-угольники $C_1\ldots C_k$ и $D_1\ldots D_k$ правильные одинаково ориентированные тогда и только тогда, когда k-угольники $A_1\ldots A_k$ и $B_1\ldots B_k$ правильные одинаково ориентированные.

18.35*. Докажите, что три прямые, симметричные произвольной прямой, проходящей через точку пересечения высот треугольника, относительно сторон треугольника, пересекаются в одной точке.

18.36*. По арене цирка, являющейся кругом радиуса 10 м, бегает лев. Двигаясь по ломаной линии, он пробежал 30 км. Докажите, что сумма всех углов его поворотов не меньше 2998 радиан.

См. также задачи 1.52, 6.69, 6.74, 6.81.

§ 4. Композиции поворотов

18.37. Докажите, что композиция двух поворотов на углы, в сумме не кратные 360°, является поворотом. В какой точке находится его центр и чему равен угол поворота? Исследуйте также случай, когда сумма углов поворотов кратна 360°.

* * *

18.38. На сторонах произвольного выпуклого четырёхугольника внешним образом построены квадраты. Докажите, что отрезки, соединяющие центры противоположных квадратов, равны по длине и перпендикулярны.

18.39. На сторонах параллелограмма внешним образом построены квадраты. Докажите, что их центры образуют квадрат.

18.40. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены квадраты с центрами P, Q и R. На сторонах треугольника PQR внутренним образом построены квадраты. Докажите, что их центры являются серединами сторон треугольника ABC.

18.41. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ построены равнобедренные прямоугольные треугольники ABO_1, BCO_2, CDO_3 и DAO_4. Докажите, что если $O_1 = O_3$, то $O_2 = O_4$.

* * *

18.42*. а) На сторонах произвольного треугольника внешним образом построены правильные треугольники. Докажите, что их центры образуют правильный треугольник.

б) Докажите аналогичное утверждение для треугольников, построенных внутренним образом.

в) Докажите, что разность площадей правильных треугольников, полученных в задачах а) и б), равна площади исходного треугольника.

18.43*. На сторонах треугольника ABC построены правильные треугольники $A'BC$ и $B'AC$ внешним образом, $C'AB$ — внутренним, M — центр треугольника $C'AB$. Докажите, что $A'B'M$ — равнобедренный треугольник, причём $\angle A'MB' = 120°$.

18.44*. Пусть углы α, β, γ таковы, что $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$ и $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Докажите, что если композиция поворотов $R_C^{2\gamma} \circ R_B^{2\beta} \circ R_A^{2\alpha}$ является тождественным преобразованием, то углы треугольника ABC равны α, β, γ.

18.45*. Постройте n-угольник, если известны n точек, являющихся вершинами равнобедренных треугольников, построенных на сторонах этого n-угольника и имеющих при вершинах углы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

18.46*. На сторонах произвольного треугольника ABC вне его построены равнобедренные треугольники $A'BC$, $AB'C$ и ABC' с вершинами A', B' и C' и углами α, β и γ при этих вершинах, причём $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$. Докажите, что углы треугольника $A'B'C'$ равны $\alpha/2$, $\beta/2$, $\gamma/2$.

18.47*. Пусть AKL и AMN — подобные равнобедренные треугольники с вершиной A и углом α при вершине; GNK и $G'LM$ — подобные равнобедренные треугольники с углом $\pi-\alpha$ при вершине. Докажите, что $G=G'$. (Треугольники ориентированы одинаково.)

18.48*. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки P, Q и R соответственно. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников APR, BPQ и CQR образуют треугольник, подобный треугольнику ABC.

Задачи для самостоятельного решения

18.49. На плоскости проведена окружность радиуса 1 с центром O. Две соседние вершины квадрата лежат на этой окружности. На каком наибольшем расстоянии от точки O могут лежать две другие его вершины?

18.50. На сторонах выпуклого четырёхугольника $ABCD$ построены правильные треугольники ABM, CDP во внешнюю сторону, а BCN, ADK — во внутреннюю. Докажите, что $MN=AC$.

18.51. На сторонах выпуклого четырёхугольника $ABCD$ во внешнюю сторону построены квадраты с центрами M, N, P, Q. Докажите, что середины диагоналей четырёхугольников $ABCD$ и $MNPQ$ образуют квадрат.

18.52. Внутри правильного треугольника ABC лежит точка O. Известно, что $\angle AOB=113^\circ$, $\angle BOC=123^\circ$. Найдите углы треугольника, стороны которого равны отрезкам OA, OB, OC.

18.53. На плоскости проведено n прямых ($n>2$), причём никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Известно, что можно повернуть плоскость вокруг некоторой точки O на некоторый угол α ($\alpha<180^\circ$) так, что каждая из проведённых прямых совместится с какой-нибудь другой проведённой прямой. Укажите все n, для которых это возможно.

18.54. По кругу расположены 10 шестерёнок различных размеров. Первая шестерёнка сцеплена со второй, вторая с третьей и т. д. Десятая сцеплена с первой. Всегда ли такая система может вращаться?

Может ли вращаться такая же система, состоящая из 11 шестерёнок?

18.55. а) Постройте равносторонний треугольник, высоты которого пересекаются в данной точке, а две вершины лежат на данной окружности.

б) Постройте квадрат, две вершины которого лежат на данной окружности, а диагонали пересекаются в данной точке.

Решения

18.1. Повернём квадрат $ABCD$ относительно точки A на 90° так, чтобы точка B перешла в точку D. При этом повороте точка M переходит в точку M', а точка K — в точку K'. Ясно, что $\angle BMA = \angle DM'A$. Так как $\angle MAK = \angle MAB = \angle M'AD$, то $\angle MAD = \angle M'AK$. Поэтому $\angle M'AK = \angle MAD = \angle BMA = \angle DM'A$, а значит, $AK = KM' = KD + DM' = KD + BM$.

18.2. При повороте на 90° относительно точки P прямые PA_1, PB_1, PM_1 и CH переходят в прямые, параллельные CA, CB, CM и AB соответственно. Следовательно, при таком повороте треугольника PA_1B_1 отрезок PM_1 переходит в медиану (повёрнутого) треугольника.

18.3. Рассмотрим поворот на 90° относительно точки B, переводящий вершину K в вершину N, а вершину C — в A. При этом повороте точка A переходит в некоторую точку A' точка E — в E'. Так как E' и B — середины сторон $A'N$ и $A'C$ треугольника $A'NC$, то $BE' \parallel NC$. Но $\angle EBE' = 90^\circ$, поэтому $BE \perp NC$.

18.4. При повороте относительно центра квадрата на 90°, переводящем точку A_1 в точку A_2, перпендикуляры, опущенные из точек A_1, A_2, A_3 и A_4, переходят в прямые A_2P, A_3P, A_4P и A_1P соответственно. Поэтому точкой их пересечения является образ точки P при обратном повороте.

18.5. Повернём данный квадрат вокруг точки A на 90° так, чтобы вершина B перешла в D. Пусть M' — образ точки M при этом повороте. Так как по условию $MK + MC + CK = (BM + MC) + (KD + CK)$, то $MK = BM + KD = DM' + KD = KM'$. Кроме того, $AM = AM'$, поэтому $\triangle AMK = \triangle AM'K$, а значит, $\angle MAK = \angle M'AK = \angle MAM'/2 = 45^\circ$.

18.6. Пусть R — поворот на 90°, переводящий вектор $\overrightarrow{BC}$ в $\overrightarrow{BA}$. Пусть, далее, $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{CB_2} = \boldsymbol{b}$ и $\overrightarrow{AB_1} = \boldsymbol{c}$. Тогда $\overrightarrow{BA} = R\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{D_2C} = R\boldsymbol{b}$ и $\overrightarrow{AD_1} = R\boldsymbol{c}$. Поэтому $\overrightarrow{D_2D_1} = R\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} + R\boldsymbol{a} + R\boldsymbol{c}$ и $2\overrightarrow{BM} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + R\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}$. Следовательно, $R(2\overrightarrow{BM}) = \overrightarrow{D_2D_1}$, так как $R(R\boldsymbol{a}) = -\boldsymbol{a}$.

18.7. Введём следующие обозначения: $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{BM}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{BC}$; $R\boldsymbol{a}$ и $R\boldsymbol{b}$ — векторы, полученные из векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ поворотом на 90°: $R\boldsymbol{a} = \overrightarrow{BA}$, $R\boldsymbol{b} = \overrightarrow{BQ}$; O_1, O_2, O_3 и O_4 — середины отрезков AM, MQ, QC и CA соответственно. Тогда $\overrightarrow{BO_1} = (\boldsymbol{a} + R\boldsymbol{a})/2$, $\overrightarrow{BO_2} = (\boldsymbol{a} + R\boldsymbol{b})/2$, $\overrightarrow{BO_3} = (\boldsymbol{b} + R\boldsymbol{b})/2$, $\overrightarrow{BO_4} = (\boldsymbol{b} + R\boldsymbol{a})/2$. Поэтому $\overrightarrow{O_1O_2} = (R\boldsymbol{b} - R\boldsymbol{a})/2 = -\overrightarrow{O_3O_4}$ и $\overrightarrow{O_2O_3} = (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})/2 = -\overrightarrow{O_4O_1}$. Кроме того, $\overrightarrow{O_1O_2} = R(\overrightarrow{O_2O_3})$.

18.8. Вокруг квадрата $ABCD$ описан параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ (точка A лежит на стороне A_1B_1, B — на B_1C_1 и т. д.). Опустим из вершин A_1, B_1, C_1 и D_1 перпендикуляры l_1, l_2, l_3 и l_4 на стороны квадрата. Чтобы доказать, что эти прямые образуют квадрат, достаточно проверить, что при повороте на 90° относительно центра O квадрата $ABCD$ прямые l_1, l_2, l_3 и l_4 переходят друг в друга. При повороте относительно точки O на 90° точки A_1, B_1, C_1 и D_1 переходят в точки A_2, B_2, C_2 и D_2 (рис. 18.1).

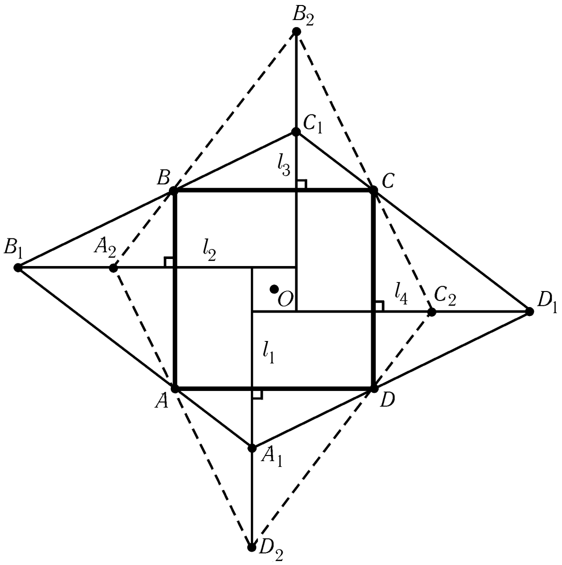


Рис. 18.1

Так как $AA_2 \perp B_1B$ и $BA_2 \perp B_1A$, то $B_1A_2 \perp AB$. Это означает, что прямая l_1 при повороте на 90° относительно точки O переходит в прямую l_2. Для остальных прямых доказательство аналогично.

18.9. При повороте вокруг точки C на 60° точка A переходит в B_1, а точка A_1 — в B. Поэтому отрезок AA_1 переходит в отрезок B_1B.

18.10. Рассмотрим поворот на 60° относительно точки C, переводящий точку E в D. При этом точка B переходит в A, т. е. отрезок BE переходит в отрезок AD. Поэтому середина P отрезка BE переходит в середину M отрезка AD, т. е. треугольник CPM равносторонний.

18.11. Предположим, что мы построили треугольник ABC так, что его вершины A, B и C лежат на прямых l_1, l_2 и l_3 соответственно. При повороте на 60° с центром A точка B переходит в точку C, поэтому C — точка пересечения прямой l_3 и образа прямой l_2 при повороте на 60° с центром A.

18.12. Искомое ГМТ состоит из двух квадратов, полученных из данного квадрата поворотами на $\pm 60^\circ$ с центром P.

18.13. При повороте на 60° векторы $\overrightarrow{QC}$ и $\overrightarrow{CP}$ переходят в $\overrightarrow{QD}$ и $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$. Следовательно, при этом повороте вектор $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CP}$ переходит в вектор $\overrightarrow{QD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{QA}$.

18.14. Пусть M' — образ точки M при повороте на 60° относительно точки B, переводящем A в C. Тогда $\angle CM'B = \angle AMB = 120^\circ$. Треугольник $MM'B$ равносторонний, поэтому $\angle BM'M = 60^\circ$. Так как $\angle CM'B + \angle BM'M = 180^\circ$, точка M' лежит на отрезке MC. Поэтому $MC = MM' + M'C = MB + MA$.

18.15. При повороте на 60° с центром A, переводящем B в C, точка M переходит в некоторую точку M', а точка C — в точку D. Равенство $MA^2 = MB^2 + MC^2$ эквивалентно равенству $M'M^2 = M'C^2 + MC^2$, т. е. тому, что $\angle MCM' = 90^\circ$, а значит, $\angle MCB + \angle MBC = \angle MCB + \angle M'CD = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$, т. е. $\angle BMC = 150^\circ$. Искомое ГМТ — дуга окружности, лежащая внутри треугольника, из которой отрезок BC виден под углом 150°.

18.16. Пусть O — центр шестиугольника. Рассмотрим поворот с центром A на 60°, переводящий точку B в O. При этом повороте отрезок OC переходит в отрезок FE. Точка K является серединой диагонали BD параллелограмма $BCDO$, поэтому она является серединой диагонали CO. Следовательно, точка K при нашем повороте переходит в точку M, т. е. треугольник AMK правильный.

18.17. При повороте на 60° относительно центра данного шестиугольника, переводящем вершину A в B, отрезок CD переходит в DE, поэтому точка M переходит в N. Таким образом, при этом повороте отрезок AM переходит в BN, т. е. угол между этими отрезками равен 60°. Кроме того, при этом повороте пятиугольник $AMDEF$ переходит в $BNEFA$, т. е. их площади равны. Вырезая из этих равновеликих пятиугольников их общую часть, пятиугольник $APNEF$, получаем две равновеликие фигуры: треугольник ABP и четырёхугольник $MDNP$.

18.18. Рассмотрим поворот на 60° с центром C, переводящий точку B в A. При этом точки M, N и D переходят в M', N' и D'. Так как $AMNN'$ — параллелограмм, середина E диагонали AN является его центром симметрии. Поэтому при симметрии относительно точки E треугольник BMN переходит в $M'AN'$, а значит, точка D переходит в D', т. е. E — середина отрезка DD'. А так как треугольник CDD' правильный, то углы треугольника CDE равны 30°, 60° и 90°.

18.19. Рассмотрим поворот с центром A, переводящий точку C_1 в точку B. При этом повороте правильный треугольник A_1BC переходит в треугольник A_2FB_1, а отрезок A_1C_1 переходит в отрезок A_2B. Остаётся заметить, что $BA_1A_2B_1$ — параллелограмм, т. е. середина отрезка A_2B совпадает с серединой отрезка A_1B_1.

18.20. Пусть $\overrightarrow{AB} = 4\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{CA} = 4\boldsymbol{b}$. Пусть, далее, R — поворот, переводящий вектор $\overrightarrow{AB}$ в $\overrightarrow{AC'}$ (а значит, вектор $\overrightarrow{CA}$ — в $\overrightarrow{CB'}$). Тогда $\overrightarrow{LM} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) - 2R\boldsymbol{b}$ и $\overrightarrow{LK} = -2R\boldsymbol{b} + 4\boldsymbol{b} + 2R\boldsymbol{a}$. Легко проверить, что $\boldsymbol{b} + R^2\boldsymbol{b} = R\boldsymbol{b}$. Поэтому $2R(\overrightarrow{LM}) = \overrightarrow{LK}$, а из этого соотношения вытекает требуемое.

18.21. При повороте относительно точки C на 60° против часовой стрелки точка A переходит в точку B, точка D — в точку E, а значит, вектор $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{AD}$ переходит в вектор $\overrightarrow{BE}$. Так как при повороте относительно точки H на 60° против часовой стрелки точка K переходит в точку E и вектор $\overrightarrow{DK}$ переходит в вектор $\overrightarrow{BE}$, то точка D при этом повороте переходит в точку B, т. е. треугольник BHD равносторонний.

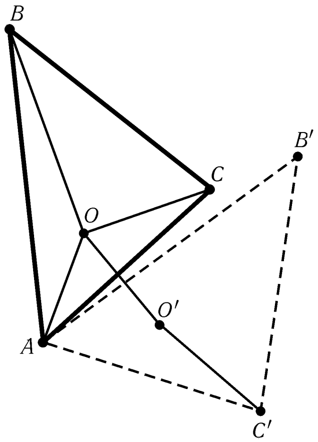


Рис. 18.2

18.22. а) Пусть O — произвольная точка. При повороте на 60° относительно точки A точки B, C и O переходят в некоторые точки B', C' и O' (рис. 18.2).

Так как $AO = OO'$ и $OC = O'C'$, то $BO + AO + CO = BO + OO' + O'C'$. Длина ломаной $BOO'C'$ минимальна тогда, когда эта ломаная является отрезком, т. е. $\angle AOB = \angle AO'C' = \angle AOC = 120^\circ$. Для построения искомой точки можно воспользоваться результатом задачи 2.8. Требуемая точка внутри треугольника ABC существует тогда и только тогда, когда все его углы меньше 120°. Если один из углов равен 120°, то требуемая точка — вершина этого угла.

З а м е ч а н и е. По поводу случая, когда у треугольника есть угол больше 120°, см. задачу 18.31.

б) Сумма расстояний от точки O до вершин равна длине отрезка BC', полученного при решении задачи а). Ясно также, что

$$(BC')^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha + 60^\circ) = b^2 + c^2 - bc\cos\alpha + bc\sqrt{3}\sin\alpha = \\ = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2\sqrt{3}S.$$

18.23. Пусть O — центр правильного треугольника ABC, $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{XO}$ и $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$. Тогда $\overrightarrow{OB} = R^\alpha \boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{OC} = R^{2\alpha}\boldsymbol{a}$, где $\alpha = 120^\circ$. Поэтому

$$\overrightarrow{XA} + R^\alpha(\overrightarrow{XB}) + R^{2\alpha}(\overrightarrow{XC}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}) + (R^\alpha \boldsymbol{x} + R^{2\alpha}\boldsymbol{a}) + (R^{2\alpha}\boldsymbol{x} + R^\alpha \boldsymbol{a}) = \\ = (\boldsymbol{x} + R^\alpha \boldsymbol{x} + R^{2\alpha}\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{a} + R^\alpha \boldsymbol{a} + R^{2\alpha}\boldsymbol{a}) = \vec{0}.$$

Это означает, что векторы $\overrightarrow{XA}$, $R^\alpha(\overrightarrow{XB})$ и $R^{2\alpha}(\overrightarrow{XC})$ являются векторами сторон некоторого треугольника. Вырожденность треугольника эквивалентна сонаправленности двух их этих векторов. Если сонаправлены, например, векторы $\overrightarrow{XA}$ и $R^\alpha(\overrightarrow{XB})$, то $\angle(AX, XB) = \angle(AC, CB)$, поэтому точка X лежит на описанной окружности треугольника ABC. Вырожденность треугольника в том случае, когда точка X лежит на описанной окружности, доказана в задаче 18.14.

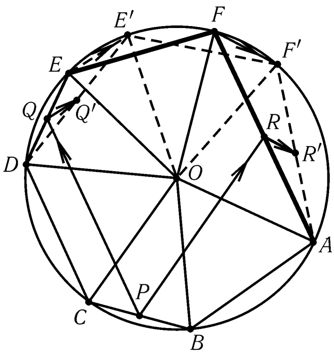


Рис. 18.3

18.24. Пусть P, Q и R — середины сторон BC, DE и FA, O — центр описанной окружности. Предположим, что треугольник PQR правильный. Докажем, что тогда середины сторон BC, DE' и $F'A$ шестиугольника $ABCDE'F'$, в котором вершины E' и F' получены из точек E и F поворотом на некоторый угол относительно точки O, тоже образуют правильный треугольник. Из этого следует требуемое утверждение, так как для правильного шестиугольника середины сторон BC, DE и FA образуют правильный треугольник, а любой из рассматриваемых нами шестиугольников может быть получен из правильного поворотами треугольников OCD и OEF.

Пусть Q' и R' — середины сторон DE' и AF' (рис. 18.3). При повороте на 60° вектор $\overrightarrow{EE'}$ переходит в вектор $\overrightarrow{FF'}$. Так как $\overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{EE'}/2$ и $\overrightarrow{RR'} = \overrightarrow{FF'}/2$, то вектор $\overrightarrow{QQ'}$ переходит в вектор $\overrightarrow{RR'}$ при этом повороте. По предположению треугольник PQR правильный, т. е. вектор $\overrightarrow{PQ}$ переходит в вектор

$\overrightarrow{PR}$ при повороте на 60°. Поэтому вектор $\overrightarrow{PQ'} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QQ'}$ переходит в вектор $\overrightarrow{PR'} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RR'}$ при повороте на 60°, т. е. треугольник $PQ'R'$ правильный.

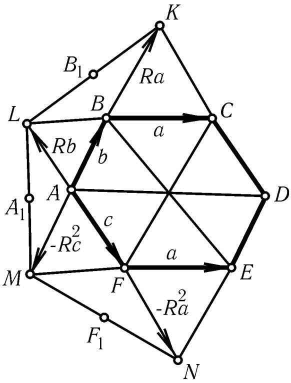


Рис. 18.4

18.25. Пусть K, L, M и N — вершины правильных треугольников, построенных на сторонах BC, AB, AF и FE; B_1, A_1 и F_1 — середины отрезков KL, LM и MN (рис. 18.4). Пусть, далее, $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FE}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AB}$ и $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AF}$; R — поворот на 60°, переводящий вектор $\overrightarrow{BC}$ в $\overrightarrow{BK}$. Тогда $\overrightarrow{AM} = -R^2\boldsymbol{c}$ и $\overrightarrow{FN} = -R^2\boldsymbol{a}$. Поэтому $2\overrightarrow{A_1B_1} = R^2\boldsymbol{c} + R\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ и $2\overrightarrow{F_1A_1} = R^2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c} + R\boldsymbol{b}$, т. е. $\overrightarrow{F_1A_1} = R(\overrightarrow{A_1B_1})$.

18.26. Если точка $X = (x, y)$ расположена на расстоянии R от начала координат O и луч OX образует угол φ с осью Ox, то $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$. Поэтому при повороте на угол α точка X переходит в точку с координатами

$$x' = R\cos(\varphi + \alpha) = R\cos\varphi\cos\alpha - R\sin\varphi\sin\alpha = x\cos\alpha - y\sin\alpha,$$

$$y' = R\sin(\varphi + \alpha) = R\sin\varphi\cos\alpha + R\cos\varphi\sin\alpha = x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

18.27. Пусть при повороте на угол α с центром в центре окружности S, переводящем точку C в точку D, точка A переходит в некоторую точку A'. Тогда $\angle(BD, DA') = \angle(AC, A'D) = \alpha$, т. е. точка D лежит на окружности, из точек которой отрезок $A'B$ виден под ориентированным углом α.

18.28. Пусть P — точка пересечения прямых l_1 и l_2. Тогда $\angle(OA_1, A_1P) = \angle(OA_1, l_1) = \angle(OA_2, l_2) = \angle(OA_2, A_2P)$. Поэтому точки O, A_1, A_2 и P лежат на одной окружности.

18.29. Одинаковые буквы Г можно совместить поворотом с некоторым центром O (если они совмещаются параллельным переносом, то $AA_i \parallel A'A'_i$). Согласно задаче 18.28 точка X_i лежит на описанной окружности треугольника $A'OA$. Ясно, что точки, лежащие на одной окружности, образуют выпуклый многоугольник.

18.30. Пусть O — центр поворота R, переводящего отрезок $A(t_1)A(t_2)$ в отрезок $B(t_1)B(t_2)$, где t_1 и t_2 — некоторые моменты времени. (Если точки A и B проходят через точку P не одновременно, то точка O отлична от P.) Тогда этот поворот переводит $A(t)$ в $B(t)$ в любой момент времени t. Поэтому, согласно задаче 18.28, точка O лежит на описанной окружности треугольника APB.

18.31. Пусть для определённости $\angle A = \alpha > 120^\circ$. Докажем, что искомая точка — вершина A. Рассмотрим поворот с центром A на угол $\beta = 180^\circ - \alpha$, при котором вершина B переходит в точку B', лежащую на продолжении стороны AC за точку A. Пусть точка O, отличная от A, при этом повороте переходит в точку O'. Треугольник OAO' равнобедренный с углом при вершине $\beta < 60^\circ$. Поэтому $OO' < AO$, а значит, $OA + OB + OC > OO' + O'B' + OC \geqslant CB' = AC + AB$. Но $AC + AB$ — это как раз и есть сумма расстояний от точки A до вершин треугольника ABC.

18.32. Пусть A и B — точки окружности с центром O, A_1 и B_1 — образы этих точек при повороте на угол α относительно центра O; P и P_1 — середины отрезков AB и A_1B_1; M — точка пересечения прямых AB и A_1B_1. Прямоугольные треугольники POM и P_1OM имеют общую гипотенузу и равные катеты

$PO = P_1O$, поэтому эти треугольники равны и $\angle MOP = \angle MOP_1 = \alpha/2$. Точка M получается из точки P поворотом на угол $\alpha/2$ и последующей гомотетией с коэффициентом $1/\cos(\alpha/2)$ и центром O.

Точки пересечения прямых AB и A_1B_1, AC и A_1C_1, BC и B_1C_1 являются вершинами треугольника, гомотетичного с коэффициентом $1/\cos(\alpha/2)$ треугольнику, образованному серединами сторон треугольника ABC. Ясно, что треугольник, образованный серединами сторон треугольника ABC, подобен треугольнику ABC.

18.33. Согласно задаче 5.57 прямая, делящая пополам площадь и периметр треугольника, проходит через центр его вписанной окружности. Ясно также, что если прямая проходит через центр вписанной окружности треугольника и делит его периметр пополам, то она делит пополам и его площадь. Поэтому нужно провести прямую, проходящую через центр вписанной окружности треугольника и делящую его периметр пополам.

Предположим, что мы построили точки M и N на сторонах AB и AC треугольника ABC так, что прямая MN проходит через центр O вписанной окружности и делит периметр треугольника пополам. Построим на луче AC точку D так, что $AD = p$, где p — полупериметр треугольника ABC. Тогда $AM = ND$. Пусть Q — центр поворота R, переводящего отрезок AM в отрезок DN (точку A — в D, точку M — в N). Так как угол между прямыми AM и CN известен, точку Q можно построить: она является вершиной равнобедренного треугольника AQD, причём $\angle AQD = 180^\circ - \angle A$ и точки B и Q лежат по одну сторону от прямой AD. При повороте R отрезок OM переходит в отрезок $O'N$. Точку O' мы можем построить. Ясно, что $\angle ONO' = \angle A$, поскольку угол между прямыми OM и $O'N$ равен $\angle A$. Поэтому точка N является точкой пересечения прямой AC и дуги окружности, из которой отрезок OO' виден под углом $\angle A$. Построив точку N, проводим прямую ON и находим точку M.

Легко проверить, что если построенные точки M и N лежат на сторонах AB и AC, то MN — искомая прямая. Основной момент в доказательстве — доказательство того, что при повороте относительно точки Q на $180^\circ - \angle A$ точка M переходит в точку N. Для доказательства этого факта надо воспользоваться тем, что $\angle ONO' = \angle A$, т. е. при этом повороте прямая OM переходит в прямую $O'N$.

18.34. Предположим, что k-угольники $C_1 \ldots C_k$ и $D_1 \ldots D_k$ правильные одинаково ориентированные. Пусть C и D — центры этих k-угольников, $\boldsymbol{c}_i = \overrightarrow{CC_i}$ и $\boldsymbol{d}_i = \overrightarrow{DD_i}$. Тогда $\overrightarrow{C_iD_i} = \overrightarrow{C_iC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DD_i} = -\boldsymbol{c}_i + \overrightarrow{CD} + \boldsymbol{d}_i$. Вектор $\overrightarrow{C_iD_i}$ переходит в вектор $\overrightarrow{C_iB_i}$ при повороте R^φ, где φ — угол при вершине правильного n-угольника. Поэтому $\overrightarrow{XB_i} = \overrightarrow{XC} + \boldsymbol{c}_i + \overrightarrow{C_iB_i} = \overrightarrow{XC} + \boldsymbol{c}_i + R^\varphi(-\boldsymbol{c}_i + \overrightarrow{CD} + \boldsymbol{d}_i)$. Точку X подберём так, что $\overrightarrow{XC} + R^\varphi(\overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{0}$. Тогда $\overrightarrow{XB_i} = \boldsymbol{c}_i + R^\varphi(\boldsymbol{d}_i - \boldsymbol{c}_i) = R^{i\psi}\boldsymbol{u}$, где $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{c}_k + R^\varphi(\boldsymbol{d}_k - \boldsymbol{c}_k)$, R^ψ — поворот, переводящий вектор $\boldsymbol{c}_k$ в $\boldsymbol{c}_1$. Следовательно, $B_1 \ldots B_k$ — правильный k-угольник с центром X. Аналогично доказывается, что $A_1 \ldots A_k$ — правильный k-угольник.

Обратное утверждение доказывается аналогично.

18.35. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC, H_1, H_2 и H_3 — точки, симметричные точке H относительно сторон BC, CA и AB. Точки H_1, H_2 и H_3 лежат на описанной окружности треугольника ABC (задача 5.10). Пусть l — прямая, проходящая через точку H. Прямая, симметричная прямой l относительно стороны BC (соответственно CA и AB), пересекает описанную окружность в точке H_1 (соответственно H_2 и H_3) и в некоторой точке P_1 (соответственно P_2 и P_3).

Рассмотрим какую-нибудь другую прямую l', проходящую через H. Пусть φ — угол между l и l'. Построим для прямой l' точки P_1', P_2' и P_3' тем же способом, каким были построены для прямой l точки P_1, P_2 и P_3. Тогда $\angle P_iH_iP_i' = \varphi$, т. е. величина дуги P_iP_i' равна 2φ (поворот от P_i к P_i' противоположен по направлению повороту от l к l'). Поэтому точки P_1', P_2' и P_3' являются образами точек P_1, P_2 и P_3 при некотором повороте. Ясно, что если в качестве l' выбрать высоту треугольника, опущенную из вершины A, то $P_1' = P_2' = P_3' = A$, а значит, $P_1 = P_2 = P_3$.

18.36. Предположим, что лев бежал по ломаной $A_1A_2\ldots A_n$. Распрямим траекторию движения льва следующим образом. Повернём относительно точки A_2 арену цирка и дальнейшую траекторию так, чтобы точка A_3 попала на луч A_1A_2. Затем повернём относительно точки A_3 арену цирка и дальнейшую траекторию так, чтобы точка A_4 попала на луч A_1A_2 и т. д. Центр O арены цирка переходит при этом последовательно в точки $O_1 = O$, O_2, ..., O_{n-1}; точки A_1, ..., A_n переходят в точки A_1', ..., A_n', лежащие на одной прямой (рис. 18.5).

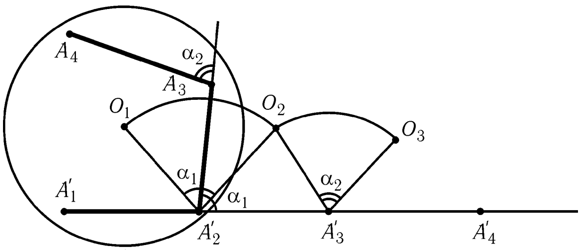


Рис. 18.5

Пусть α_{i-1} — угол поворота льва в точке A_i'. Тогда $\angle O_{i-1}A_i'O_i = \alpha_{i-1}$ и $A_i'O_{i-1} = A_i'O_i \leqslant 10$, поэтому $O_iO_{i-1} \leqslant 10\alpha_{i-1}$. Следовательно, $30\,000 = A_1'A_n' \leqslant$ $\leqslant A_1'O_1 + O_1O_2 + \ldots + O_{n-2}O_{n-1} + O_{n-1}A_n' \leqslant 10 + 10(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-2}) + 10$, т. е. $\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-2} \geqslant 2998$.

18.37. Рассмотрим композицию поворотов $R_B^{\beta} \circ R_A^{\alpha}$. Если $A = B$, то утверждение задачи очевидно, поэтому будем считать, что $A \neq B$. Пусть $l = AB$, прямые a и b проходят через точки A и B соответственно, причём $\angle(a, l) = \alpha/2$ и $\angle(l, b) = \beta/2$. Тогда $R_B^{\beta} \circ R_A^{\alpha} = S_b \circ S_l \circ S_l \circ S_a = S_b \circ S_a$.

Если $a \parallel b$, то $S_b \circ S_a = T_{2u}$, где T_u — параллельный перенос, переводящий b в a, причём $u \perp a$. А если прямые a и b не параллельны и O — точка их пересечения, то $S_b \circ S_a$ — поворот на угол $\alpha + \beta$ с центром O. Ясно также, что $a \parallel b$ тогда и только тогда, когда $(\alpha/2) + (\beta/2) = k\pi$, т. е. $\alpha + \beta = 2k\pi$.

18.38. Пусть P, Q, R и S — центры квадратов, построенных внешним образом на сторонах AB, BC, CD и DA соответственно. Построим на отрезках QR и SP внутренним образом равнобедренные прямоугольные треугольники с вершинами O_1 и O_2. Тогда $D = R_R^{90^\circ} \circ R_Q^{90^\circ}(B) = R_{O_1}^{180^\circ}(B)$ и $B = R_P^{90^\circ} \circ R_S^{90^\circ}(D) =$ $= R_{O_2}^{180^\circ}(D)$, т. е. $O_1 = O_2$ — середина отрезка BD.

При повороте на 90° относительно точки $O = O_1 = O_2$, переводящем точку Q в R, точка S переходит в P, т. е. отрезок QS переходит в RP, а значит, эти отрезки равны и перпендикулярны.

18.39. Пусть P, Q, R и S — центры квадратов, построенных внешним образом на сторонах AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$. Согласно предыдущей задаче $PR = QS$ и $PR \perp QS$. Кроме того, центр симметрии параллелограмма $ABCD$ является центром симметрии четырёхугольника $PQRS$, т. е. $PQRS$ — параллелограмм с равными и перпендикулярными диагоналями, а значит, он квадрат.

18.40. Пусть P, Q и R — центры квадратов, построенных внешним образом на сторонах AB, BC и CA. Рассмотрим поворот на 90° с центром R, переводящий C в A. При повороте на 90° в том же направлении с центром P точка A переходит в B. Композиция этих двух поворотов является поворотом на 180°, поэтому центр этого поворота — середина отрезка BC. С другой стороны, центр этого поворота является вершиной равнобедренного прямоугольного треугольника с основанием PR, т. е. является центром квадрата, построенного на PR. Этот квадрат построен на стороне треугольника PQR именно внутренним образом.

18.41. Если $O_1 = O_3$, то $R_D^{90^\circ} \circ R_C^{90^\circ} \circ R_B^{90^\circ} \circ R_A^{90^\circ} = R_{O_3}^{180^\circ} \circ R_{O_1}^{180^\circ} = E$. Поэтому $E = R_A^{90^\circ} \circ E \circ R_A^{-90^\circ} = R_A^{90^\circ} \circ R_D^{90^\circ} \circ R_C^{90^\circ} \circ R_B^{90^\circ} = R_{O_4}^{180^\circ} \circ R_{O_2}^{180^\circ}$, т. е. $O_4 = O_2$. (Здесь E — тождественное преобразование.)

18.42. а) См. решение более общей задачи 18.46 (достаточно положить $\alpha = \beta = \gamma = 120^\circ$). В случае б) доказательство аналогично.

в) Пусть Q и R (соответственно Q_1 и R_1) — центры правильных треугольников, построенных внешним (соответственно внутренним) образом на сторонах AC и AB. Так как $AQ = b/\sqrt{3}$, $AR = c/\sqrt{3}$ и $\angle QAR = 60^\circ + \alpha$, то $3QR^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha + 60^\circ)$. Аналогично $3Q_1R_1^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha - 60^\circ)$. Поэтому разность площадей полученных правильных треугольников равна $(QR^2 - Q_1R_1^2)\sqrt{3}/4 = bc\sin\alpha\sin 60^\circ/\sqrt{3} = S_{ABC}$.

18.43. Композиция поворота на 60° относительно точки A', переводящего B в C, поворота на 60° относительно точки B', переводящего C в A, и поворота на 120° относительно точки M, переводящего A в B, имеет неподвижную точку B. Так как первые два поворота производятся в направлении, противоположном направлению последнего поворота, то композиция этих поворотов является параллельным переносом, имеющим неподвижную точку, т. е. тождественным преобразованием: $R_M^{-120^\circ} \circ R_{B'}^{60^\circ} \circ R_{A'}^{60^\circ} = E$. Поэтому $R_{B'}^{60^\circ} \circ R_{A'}^{60^\circ} = R_M^{120^\circ}$, т. е. точка M является центром поворота $R_{B'}^{60^\circ} \circ R_{A'}^{60^\circ}$. Следовательно, $\angle MA'B' = \angle MB'A' = 30^\circ$, т. е. $A'B'M$ — равнобедренный треугольник, причём $\angle A'MB' = 120^\circ$.

18.44. Из условия задачи следует, что $R_C^{-2\gamma} = R_B^{2\beta} \circ R_A^{2\alpha}$, т. е. точка C является центром композиции поворотов $R_B^{2\beta} \circ R_A^{2\alpha}$. Это означает, что $\angle BAC = \alpha$ и $\angle ABC = \beta$ (см. задачу 18.37). Поэтому $\angle ACB = \pi - \alpha - \beta = \gamma$.

18.45. Обозначим данные точки через $M_1, \ldots, M_n$. Предположим, что мы построили многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ так, что треугольники $A_1M_1A_2$, $A_2M_2A_3, \ldots, A_nM_nA_1$ равнобедренные, причём $\angle A_iM_iA_{i+1} = \alpha_i$ и стороны многоугольника являются основаниями этих равнобедренных треугольников. Ясно, что $R_{M_n}^{\alpha_n} \circ \ldots \circ R_{M_1}^{\alpha_1}(A_1) = A_1$. Если $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n \neq k \cdot 360^\circ$, то точка A_1

является центром поворота $R^{\alpha_n}_{M_n} \circ \ldots \circ R^{\alpha_1}_{M_1}$. Центр композиции поворотов мы можем построить. Построение остальных вершин многоугольника производится очевидным образом. Если $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = k \cdot 360^\circ$, то задача неопределённая: либо любая точка A_1 задаёт многоугольник, обладающий требуемым свойством, либо задача не имеет решений.

18.46. Так как $R^{\gamma}_{C'} \circ R^{\beta}_{B'} \circ R^{\alpha}_{A'}(B) = R^{\gamma}_{C'} \circ R^{\beta}_{B'}(C) = R^{\gamma}_{C'}(A) = B$, то B — неподвижная точка композиции поворотов $R^{\gamma}_{C'} \circ R^{\beta}_{B'} \circ R^{\alpha}_{A'}$. А так как $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, то эта композиция является параллельным переносом, имеющим неподвижную точку, т. е. тождественным преобразованием. Остаётся воспользоваться результатом задачи 18.44.

18.47. Так как $R^{\pi-\alpha}_{G'} \circ R^{\alpha}_{A}(N) = L$ и $R^{\pi-\alpha}_{G} \circ R^{\alpha}_{A}(L) = N$, то преобразования $R^{\pi-\alpha}_{G'} \circ R^{\alpha}_{A}$ и $R^{\pi-\alpha}_{G} \circ R^{\alpha}_{A}$ являются центральными симметриями относительно середины отрезка LN, т. е. $R^{\pi-\alpha}_{G'} \circ R^{\alpha}_{A} = R^{\pi-\alpha}_{G} \circ R^{\alpha}_{A}$. Следовательно, $R^{\pi-\alpha}_{G'} = R^{\pi-\alpha}_{G}$ и $G' = G$.

18.48. Пусть A_1, B_1 и C_1 — центры описанных окружностей треугольников APR, BPQ и CQR. При последовательных поворотах с центрами A_1, B_1 и C_1 на углы 2α, 2β и 2γ точка R переходит сначала в P, затем в Q, а потом возвращается на место. Так как $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360^\circ$, то композиция указанных поворотов — тождественное преобразование. Следовательно, углы треугольника $A_1B_1C_1$ равны α, β и γ (см. задачу 18.44).

ГЛАВА 19

ГОМОТЕТИЯ И ПОВОРОТНАЯ ГОМОТЕТИЯ

Основные сведения

1. *Гомотетией* называют преобразование плоскости, переводящее точку X в точку X', обладающую тем свойством, что $\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}$ (точка O и число k фиксированы). Точку O называют *центром гомотетии*, а число k — *коэффициентом гомотетии*.

Гомотетию с центром O и коэффициентом k будем обозначать H_O^k.

2. Две фигуры называют *гомотетичными*, если одна из них переходит в другую при некоторой гомотетии.

3. *Поворотной гомотетией* называют композицию гомотетии и поворота, имеющих общий центр. Отметим, что обе композиции $R_O^\varphi \circ H_O^k$ и $H_O^k \circ R_O^\varphi$ дают одно и то же преобразование.

Коэффициент поворотной гомотетии можно считать положительным, так как $R_O^{180^\circ} \circ H_O^k = H_O^{-k}$.

4. Композиция двух гомотетий с коэффициентами k_1 и k_2, где $k_1k_2 \neq 1$, является гомотетией с коэффициентом k_1k_2, причём её центр лежит на прямой, соединяющей центры этих гомотетий (см. задачу 19.24).

5. Центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок AB в отрезок CD, является точка пересечения описанных окружностей треугольников ACP и BDP, где P — точка пересечения прямых AB и CD (см. задачу 19.42).

Вводные задачи

1. Докажите, что при гомотетии окружность переходит в окружность.

2. Две окружности касаются в точке K. Прямая, проходящая через точку K, пересекает эти окружности в точках A и B. Докажите, что касательные к окружностям, проведённые через точки A и B, параллельны.

3. Две окружности касаются в точке K. Через точку K проведены две прямые, пересекающие первую окружность в точках A и B, вторую — в точках C и D. Докажите, что $AB \parallel CD$.

4. Докажите, что точки, симметричные произвольной точке относительно середин сторон квадрата, являются вершинами некоторого квадрата.

5. На плоскости даны точки A и B и прямая l. По какой траектории движется точка пересечения медиан треугольников ABC, если точка C движется по прямой l?

§ 1. Гомотетичные многоугольники

19.1. Четырёхугольник разрезан диагоналями на четыре треугольника. Докажите, что их точки пересечения медиан образуют параллелограмм.

19.2. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке K, а её диагонали — в точке L. Докажите, что точки K, L, M и N, где M и N — середины оснований BC и AD, лежат на одной прямой.

19.3. В трапеции точка пересечения диагоналей равноудалена от прямых, на которых лежат боковые стороны. Докажите, что трапеция равнобедренная.

19.4. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M; P — произвольная точка. Прямая l_a проходит через точку A параллельно прямой PA_1; прямые l_b и l_c определяются аналогично. Докажите, что:

а) прямые l_a, l_b и l_c пересекаются в одной точке Q;

б) точка M лежит на отрезке PQ, причём $PM : MQ = 1 : 2$.

19.5. Окружность S касается равных сторон AB и BC равнобедренного треугольника ABC в точках P и K, а также касается внутренним образом описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что середина отрезка PK является центром вписанной окружности треугольника ABC.

19.6*. Выпуклый многоугольник обладает следующим свойством: если все его стороны отодвинуть на расстояние 1 во внешнюю сторону, то полученные прямые образуют многоугольник, подобный исходному. Докажите, что этот многоугольник описанный.

19.7*. Пусть R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника. Докажите, что $R \geqslant 2r$, причём равенство достигается лишь для равностороннего треугольника.

19.8*. Пусть M — центр масс n-угольника $A_1 \dots A_n$; $M_1, \dots, M_n$ — центры масс $(n-1)$-угольников, полученных из этого n-угольника выбрасыванием вершин $A_1, \dots, A_n$ соответственно. Докажите, что многоугольники $A_1 \dots A_n$ и $M_1 \dots M_n$ гомотетичны.

19.9*. Докажите, что любой выпуклый многоугольник Φ содержит два непересекающихся многоугольника Φ_1 и Φ_2, подобных Φ с коэффициентом $1/2$.

См. также задачи 4.12, 4.56, 5.99, 5.107, 5.126, 5.159 б), 5.165, 8.52.

§ 2. Гомотетичные окружности

19.10. На окружности фиксированы точки A и B, а точка C движется по этой окружности. Найдите геометрическое место точек пересечения медиан треугольников ABC.

19.11*. а) Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны AC в точке D, DM — её диаметр. Прямая BM пересекает сторону AC в точке K. Докажите, что $AK = DC$.

б) В окружности проведены перпендикулярные диаметры AB и CD. Из точки M, лежащей вне окружности, проведены касательные к окружности, пересекающие прямую AB в точках E и H, а также прямые MC и MD, пересекающие прямую AB в точках F и K. Докажите, что $EF = KH$.

19.12*. Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC, D — точка касания её со стороной AC, B_1 — середина стороны AC. Докажите, что прямая B_1O делит отрезок BD пополам.

19.13*. Окружности α, β и γ имеют одинаковые радиусы и касаются сторон углов A, B и C треугольника ABC соответственно. Окружность δ касается внешним образом всех трёх окружностей α, β и γ. Докажите, что центр окружности δ лежит на прямой, проходящей через центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC.

19.14*. Дан треугольник ABC. Построены четыре окружности равного радиуса ρ так, что одна из них касается трёх других, а каждая из этих трёх касается двух сторон треугольника. Найдите ρ, если радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника равны r и R соответственно.

19.15*. В каждый угол треугольника ABC вписана окружность, касающаяся описанной окружности. Пусть A_1, B_1 и C_1 — точки касания этих окружностей с описанной окружностью. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

См. также задачи 2.28, 5.7, 5.129, 12.81, 17.2, 17.26.

§ 3. Построения и геометрические места точек

19.16. Даны угол ABC и точка M внутри его. Постройте окружность, касающуюся сторон угла и проходящую через точку M.

19.17. Впишите в треугольник две равные окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника и другой окружности.

19.18. Дан остроугольный треугольник ABC. Постройте точки X и Y на сторонах AB и BC так, что а) $AX = XY = YC$; б) $BX = XY = YC$.

19.19. Постройте треугольник ABC по сторонам AB и AC и биссектрисе AD.

19.20. Решите задачу 16.18 с помощью гомотетии.

19.21. Постройте на стороне BC данного треугольника ABC такую точку, что прямая, соединяющая основания перпендикуляров, опущенных из этой точки на стороны AB и AC, параллельна BC.

* * *

19.22*. Прямоугольный треугольник ABC изменяется таким образом, что вершина A прямого угла треугольника не изменяет своего положения, а вершины B и C скользят по фиксированным окружностям S_1 и S_2, касающимся внешним образом в точке A. Найдите геометрическое место оснований D высот AD треугольников ABC.

См. также задачи 7.27—7.30, 8.15, 8.16, 8.74.

§ 4. Композиции гомотетий

19.23. Преобразование f обладает следующим свойством: если A' и B' — образы точек A и B, то $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$, где k — постоянное число. Докажите, что:

а) если $k = 1$, то преобразование f является параллельным переносом;

б) если $k \neq 1$, то преобразование f является гомотетией.

19.24. Докажите, что композиция двух гомотетий с коэффициентами k_1 и k_2, где $k_1k_2 \neq 1$, является гомотетией с коэффициентом k_1k_2, причём её центр лежит на прямой, соединяющей центры этих гомотетий. Исследуйте случай $k_1k_2 = 1$.

19.25. Общие внешние касательные к парам окружностей S_1 и S_2, S_2 и S_3, S_3 и S_1 пересекаются в точках A, B и C соответственно. Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой.

19.26. Трапеции $ABCD$ и $APQD$ имеют общее основание AD, причём длины всех их оснований попарно различны. Докажите, что на одной прямой лежат точки пересечения следующих пар прямых:

а) AB и CD, AP и DQ, BP и CQ;

б) AB и CD, AQ и DP, BQ и CP.

§ 5. Поворотная гомотетия

19.27. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B. Прямые p и q, проходящие через точку A, пересекают окружность S_1 в точках P_1 и Q_1, а окружность S_2 — в точках P_2 и Q_2. Докажите, что угол между прямыми P_1Q_1 и P_2Q_2 равен углу между окружностями S_1 и S_2.

19.28. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B. При поворотной гомотетии с центром A, переводящей S_1 в S_2, точка M_1 окружности S_1 переходит в M_2. Докажите, что прямая M_1M_2 проходит через точку B.

19.29. Окружности $S_1, \ldots, S_n$ проходят через точку O. Кузнечик прыгает из точки X_i окружности S_i в точку X_{i+1} окружности S_{i+1} так, что прямая X_iX_{i+1} проходит через точку пересечения окружностей S_i и S_{i+1}, отличную от точки O. Докажите, что после n прыжков (с окружности S_1 на S_2, с S_2 на S_3, ..., с S_n на S_1) кузнечик вернётся в исходную точку.

19.30. Две окружности пересекаются в точках A и B, а хорды AM и AN касаются этих окружностей. Треугольник MAN достроен до параллелограмма $MANC$ и отрезки BN и MC разделены точками P и Q в равных отношениях. Докажите, что $\angle APQ = \angle ANC$.

19.31. Даны две неконцентрические окружности S_1 и S_2. Докажите, что существуют ровно две поворотные гомотетии с углом поворота 90°, переводящие S_1 в S_2.

* * *

19.32. Дан квадрат $ABCD$. Точки P и Q лежат соответственно на сторонах AB и BC, причём $BP = BQ$. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на отрезок PC. Докажите, что $\angle DHQ = 90^\circ$.

19.33. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены подобные треугольники: $\triangle A_1BC \sim \triangle B_1CA \sim \triangle C_1AB$. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают.

19.34. Середины сторон BC и B_1C_1 правильных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают (вершины обоих треугольников перечислены по часовой стрелке). Найдите величину угла между прямыми AA_1 и BB_1, а также отношение длин отрезков AA_1 и BB_1.

19.35. Треугольник ABC при поворотной гомотетии переходит в треугольник $A_1B_1C_1$; O — произвольная точка. Пусть A_2 — вершина параллелограмма OAA_1A_2; точки B_2 и C_2 определяются аналогично. Докажите, что $\triangle A_2B_2C_2 \sim \triangle ABC$.

19.36*. На прямоугольную карту положили карту той же местности, но меньшего масштаба. Докажите, что можно проткнуть иголкой сразу обе карты так, чтобы точка прокола изображала на обеих картах одну и ту же точку местности.

19.37*. Поворотные гомотетии P_1 и P_2 с центрами A_1 и A_2 имеют один и тот же угол поворота, а произведение их коэффициентов равно 1. Докажите, что композиция $P_2 \circ P_1$ является поворотом, причём его центр совпадает с центром другого поворота, переводящего A_1 в A_2 и имеющего угол поворота $2\angle(\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MN})$, где M — произвольная точка и $N = P_1(M)$.

19.38*. Треугольники MAB и MCD подобны, но имеют противоположные ориентации. Пусть O_1 — центр поворота на угол $2\angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM})$, переводящего A в C, а O_2 — центр поворота на угол $2\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$, переводящего B в D. Докажите, что $O_1 = O_2$.

* * *

19.39*. Дана полуокружность с диаметром AB. Для каждой точки X этой полуокружности на луче XA откладывается точка Y так, что $XY = kXB$. Найдите ГМТ Y.

19.40*. На стороне AB треугольника ABC дана точка P. Впишите в треугольник ABC треугольник PXY, подобный данному треугольнику LMN.

19.41*. Постройте четырёхугольник $ABCD$ по $\angle B+\angle D$, $a=AB$, $b=BC$, $c=CD$ и $d=DA$.

См. также задачи 2.89, 5.108 б), 5.145, 18.32.

§ 6. Центр поворотной гомотетии

19.42. а) Пусть P — точка пересечения прямых AB и A_1B_1. Докажите, что если среди точек A, B, A_1, B_1 и P нет совпадающих, то общая точка описанных окружностей треугольников PAA_1 и PBB_1 является центром поворотной гомотетии, переводящей точку A в A_1, а точку B в B_1, причём такая поворотная гомотетия единственна.

б) Докажите, что центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок AB в отрезок BC, является точка пересечения окружности, проходящей через точку A и касающейся прямой BC в точке B, и окружности, проходящей через точку C и касающейся прямой AB в точке B.

19.43. По двум пересекающимся прямым с постоянными, но не равными скоростями движутся точки A и B. Докажите, что существует такая точка P, что в любой момент времени $AP:BP=k$, где k — отношение скоростей.

19.44. Постройте центр O поворотной гомотетии с данным коэффициентом $k\neq 1$, переводящей прямую l_1 в прямую l_2, а точку A_1 лежащую на l_1, — в точку A_2.

19.45. Докажите, что центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок AB в отрезок A_1B_1, совпадает с центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок AA_1 в отрезок BB_1.

19.46*. Четыре пересекающиеся прямые образуют четыре треугольника. Докажите, что четыре окружности, описанные около этих треугольников, имеют общую точку.

19.47*. Параллелограмм $ABCD$ отличен от ромба. Прямые, симметричные прямым AB и CD относительно диагоналей AC и DB соответственно, пересекаются в точке Q. Докажите, что Q — центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок AO в отрезок OD, где O — центр параллелограмма.

19.48*. Даны два правильных пятиугольника с общей вершиной. Вершины каждого пятиугольника нумеруются цифрами от 1 до 5 по часовой стрелке, причём в общей вершине ставится 1. Вершины с одинаковыми номерами соединены прямыми. Докажите, что полученные четыре прямые пересекаются в одной точке.

19.49*. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 так, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Пары отрезков BB_1 и CC_1, CC_1 и AA_1, AA_1 и BB_1 пересекаются в точках A_2, B_2 и C_2 соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников ABC_2, BCA_2, CAB_2, $A_1B_1C_2$, $B_1C_1A_2$ и $C_1A_1B_2$ пересекаются в одной точке.

См. также задачу 5.145.

§ 7. Композиции поворотных гомотетий

19.50. Пусть H_1 и H_2 — две поворотные гомотетии. Докажите, что $H_1 \circ H_2 = H_2 \circ H_1$ тогда и только тогда, когда центры этих поворотных гомотетий совпадают.

19.51. Пусть H_1 и H_2 — две поворотные гомотетии. Докажите, что $H_1 \circ H_2 = H_2 \circ H_1$ тогда и только тогда, когда $H_1 \circ H_2(A) = H_2 \circ H_1(A)$ для некоторой точки A.

19.52. а) На сторонах треугольника ABC построены собственно подобные треугольники A_1BC, CAB_1 и BC_1A. Пусть A_2, B_2 и C_2 — соответственные точки этих треугольников. Докажите, что $\triangle A_2C_2B_2 \sim \sim \triangle A_1BC$.

б) Докажите, что центры правильных треугольников, построенных внешним (внутренним) образом на сторонах треугольника ABC, образуют правильный треугольник.

§ 8. Окружность подобия трёх фигур

Пусть F_1, F_2 и F_3 — три подобные фигуры, O_1 — центр поворотной гомотетии, переводящей F_2 в F_3, точки O_2 и O_3 определяются аналогично. Если точки O_1, O_2 и O_3 не лежат на одной прямой, то треугольник $O_1O_2O_3$ называют *треугольником подобия* фигур F_1, F_2 и F_3, а его описанную окружность называют *окружностью подобия* этих фигур. В случае, когда точки O_1, O_2 и O_3 совпадают, окружность подобия вырождается в *центр подобия*, а в случае, когда эти точки не совпадают, но лежат на одной прямой, окружность подобия вырождается в *ось подобия*. В задачах этого параграфа предполагается, что окружность подобия рассматриваемых фигур не вырождена.

19.53*. Прямые A_2B_2 и A_3B_3, A_3B_3 и A_1B_1, A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются в точках P_1, P_2, P_3 соответственно.

а) Докажите, что описанные окружности треугольников $A_1A_2P_3$, $A_1A_3P_2$ и $A_2A_3P_1$ пересекаются в одной точке, лежащей на окружности подобия отрезков A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3.

б) Пусть O_1 — центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок A_2B_2 в отрезок A_3B_3; точки O_2 и O_3 определяются аналогично. Докажите, что прямые P_1O_1, P_2O_2 и P_3O_3 пересекаются в одной точке, лежащей на окружности подобия отрезков A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3.

Точки A_1 и A_2 называют *соответственными* точками подобных фигур F_1 и F_2, если при поворотной гомотетии, переводящей F_1 в F_2, точка A_1 переходит в A_2. Аналогично определяются соответственные прямые и отрезки.

19.54*. Пусть A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3, а также A_1C_1, A_2C_2 и A_3C_3 — соответственные отрезки подобных фигур F_1, F_2 и F_3. Докажите, что треугольник, образованный прямыми A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3, подобен треугольнику, образованному прямыми A_1C_1, A_2C_2 и A_3C_3, причём центр поворотной гомотетии, переводящей один из этих треугольников в другой, лежит на окружности подобия фигур F_1, F_2 и F_3.

19.55*. Пусть l_1, l_2 и l_3 — соответственные прямые подобных фигур F_1, F_2 и F_3, пересекающиеся в точке W.

а) Докажите, что точка W лежит на окружности подобия фигур F_1, F_2 и F_3.

б) Пусть J_1, J_2 и J_3 — точки пересечения прямых l_1, l_2 и l_3 с окружностью подобия, отличные от точки W. Докажите, что эти точки зависят только от фигур F_1, F_2 и F_3 и не зависят от выбора прямых l_1, l_2 и l_3.

Точки J_1, J_2 и J_3 называют *постоянными точками* подобных фигур F_1, F_2 и F_3, а треугольник $J_1J_2J_3$ называют *постоянным треугольником*.

19.56*. Докажите, что постоянный треугольник трёх подобных фигур подобен треугольнику, образованному их соответственными прямыми, причём эти треугольники противоположно ориентированы.

19.57*. Докажите, что постоянные точки трёх подобных фигур являются их соответственными точками.

Окружностью подобия треугольника ABC называют окружность подобия отрезка AB, отрезка BC и отрезка CA (или любых трёх подобных треугольников, построенных на этих отрезках). *Постоянными точками треугольника* называют постоянные точки трёх рассматриваемых фигур.

19.58*. Докажите, что окружностью подобия треугольника ABC является окружность с диаметром KO, где K — точка Лемуана, O — центр описанной окружности.

19.59*. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, K — точка Лемуана, P и Q — точки Брокара, φ — угол Брокара. Докажите, что точки P и Q лежат на окружности с диаметром KO, причём $OP = OQ$ и $\angle POQ = 2\varphi$.

Треугольник с вершинами в постоянных точках треугольника часто называют *треугольником Брокара*, а описанную окружность этого треугольника (т. е. окружность подобия треугольника) — *окружностью Брокара*. Диаметр KO этой окружности называют *диаметром Брокара*.

19.60*. Докажите, что вершинами треугольника Брокара $A_1B_1C_1$ являются точки пересечения окружности Брокара с прямыми, проходящими через точку Лемуана параллельно сторонам треугольника ABC.

19.61*. а) Докажите, что прямые, проходящие через вершины треугольника ABC параллельно сторонам треугольника Брокара $A_1B_1C_1$ (через A проходит прямая, параллельная B_1C_1, и т. п.), пересекаются в одной точке S (*точка Штейнера*), причём эта точка лежит на описанной окружности треугольника ABC.

б) Докажите, что прямая Симсона точки Штейнера параллельна диаметру Брокара.

Задачи для самостоятельного решения

19.62. Впишите в данный треугольник ABC треугольник $A_1B_1C_1$, стороны которого параллельны сторонам данного треугольника KLM.

19.63. На плоскости даны точки A и E. Постройте ромб $ABCD$ с заданной высотой, для которого E — середина стороны BC.

19.64. Дан четырёхугольник. Впишите в него ромб, стороны которого параллельны диагоналям четырёхугольника.

19.65. Даны острый угол AOB и внутри его точка C. Найдите на стороне OB точку M, равноудалённую от стороны OA и от точки C.

19.66. Дан остроугольный треугольник ABC, O — точка пересечения его высот, ω — окружность с центром O, лежащая внутри этого треугольника. Постройте треугольник $A_1B_1C_1$, описанный около окружности ω и вписанный в треугольник ABC.

19.67. Даны три прямые a, b, c и три точки A, B, C, расположенные соответственно на прямых a, b, c. Постройте точки X, Y, Z на прямых a, b, c так, чтобы $BY : AX = 2$, $CZ : AX = 3$ и точки X, Y, Z лежали на одной прямой.

Решения

19.1. При гомотетии с центром в точке пересечения диагоналей четырёхугольника и коэффициентом $3/2$ точки пересечения медиан указанных треугольников переходят в середины сторон четырёхугольника. Остаётся воспользоваться результатом задачи 1.2.

19.2. При гомотетии с центром K, переводящей $\triangle KBC$ в $\triangle KAD$, точка M переходит в N, поэтому точка K лежит на прямой MN. При гомотетии с центром L, переводящей $\triangle LBC$ в $\triangle LDA$, точка M переходит в N. Поэтому точка L лежит на прямой MN.

19.3. Пусть продолжения боковых сторон AB и CD пересекаются в точке K, а диагонали трапеции пересекаются в точке L. Согласно предыдущей задаче прямая KL проходит через середину отрезка AD, а по условию задачи эта же прямая делит пополам угол AKD. Поэтому треугольник AKD равнобедренный (см. задачу 16.1), а значит, трапеция $ABCD$ тоже равнобедренная.

19.4. При гомотетии с центром M и коэффициентом -2 прямые PA_1, PB_1 и PC_1 переходят в прямые l_a, l_b и l_c, а значит, искомая точка Q является образом точки P при этой гомотетии.

19.5. Рассмотрим гомотетию H_B^k с центром B, переводящую отрезок AC в отрезок $A'C'$, касающийся описанной окружности треугольника ABC. Обозначим середины отрезков PK и $A'C'$ через O_1 и D, центр окружности S — через O.

Окружность S является вписанной окружностью треугольника $A'BC'$, поэтому достаточно доказать, что при гомотетии H_B^k точка O_1 переходит в O. Для этого достаточно проверить, что $BO_1 : BO = BA : BA'$. Это равенство следует из того, что PO_1 и DA — высоты подобных прямоугольных треугольников BPO и BDA'.

19.6. Пусть k — коэффициент подобия многоугольников, причём $k < 1$. Сдвигая стороны исходного многоугольника внутрь последовательно на k, k^2,

k^3, ..., получаем стягивающуюся систему вложенных выпуклых многоугольников, подобных исходному с коэффициентами k, k^2, k^3, ... Единственная общая точка этих многоугольников является центром вписанной окружности исходного многоугольника.

19.7. Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно. При гомотетии с центром в точке пересечения медиан треугольника и коэффициентом гомотетии $-1/2$ описанная окружность S треугольника ABC переходит в описанную окружность S_1 треугольника $A_1B_1C_1$. Так как окружность S_1 пересекает все стороны треугольника ABC, то можно построить треугольник $A'B'C'$ со сторонами, параллельными сторонам треугольника ABC, для которого S_1 будет вписанной окружностью (рис. 19.1). Пусть r и r' — радиусы вписанных окружностей треугольников ABC и $A'B'C'$; R и R_1 — радиусы окружностей S и S_1. Ясно, что $r \leqslant r' = R_1 = R/2$. Равенство достигается, если треугольники $A'B'C'$ и ABC совпадают, т. е. S_1 — вписанная окружность треугольника ABC. В этом случае $AB_1 = AC_1$, поэтому $AB = AC$. Аналогично $AB = BC$.

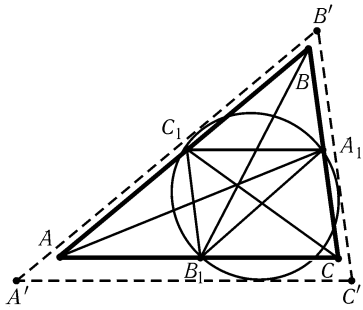


Рис. 19.1

19.8. Так как $\overrightarrow{MM_i} = (\overrightarrow{MA_1} + \ldots + \overrightarrow{MA_n} - \overrightarrow{MA_i})/(n-1) = -\overrightarrow{MA_i}/(n-1)$, то точка A_i переходит в точку M_i при гомотетии с центром M и коэффициентом $-1/(n-1)$.

19.9. Пусть A и B — пара наиболее удалённых друг от друга точек многоугольника Φ. Тогда $\Phi_1 = H_A^{1/2}(\Phi)$ и $\Phi_2 = H_B^{1/2}(\Phi)$ — искомые фигуры. В самом деле, Φ_1 и Φ_2 не пересекаются, так как лежат по разные стороны от серединного перпендикуляра к отрезку AB. Кроме того, Φ_i содержится в Φ, так как Φ — выпуклый многоугольник.

19.10. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC, O — середина отрезка AB. Ясно, что $3\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC}$, поэтому точки M заполняют окружность, полученную из исходной окружности гомотетией с коэффициентом $1/3$ и центром O.

19.11. а) При гомотетии с центром B, переводящей вписанную окружность во вневписанную окружность, касающуюся стороны AC, точка M переходит в некоторую точку M'. Точка M' является концом диаметра, перпендикулярного прямой AC, поэтому M' является точкой касания вписанной окружности со стороной AC, а значит, и точкой пересечения прямой BM со стороной AC. Поэтому $K = M'$ и точка K является точкой касания вневписанной окружности со стороной AC. Теперь легко вычислить, что $AK = (a + b - c)/2 = CD$, где a, b и c — длины сторон треугольника ABC.

б) Рассмотрим гомотетию с центром M, переводящую прямую EH в прямую, касающуюся данной окружности. При этой гомотетии точки E, F, K и H переходят в точки E', F', K' и H'. Согласно задаче а) $E'F' = K'H'$, поэтому $EF = KH$.

19.12. Воспользуемся решением и обозначениями задачи 19.11 а). Так как $AK = DC$, то $B_1K = B_1D$, а значит, B_1O — средняя линия треугольника MKD.

19.13. Пусть O_α, O_β, O_γ и O_δ — центры окружностей α, β, γ и δ; O_1 и O_2 — центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC.

Треугольник ABC переходит в треугольник $O_\alpha O_\beta O_\gamma$ при гомотетии с центром O_1. При этой гомотетии точка O_2 переходит в центр описанной окружности треугольника $O_\alpha O_\beta O_\gamma$, совпадающий с точкой O_δ. Поэтому точки O_1, O_2 и O_δ лежат на одной прямой.

19.14. Пусть A_1, B_1 и C_1 — центры данных окружностей, касающихся сторон треугольника, O — центр окружности, касающейся этих окружностей, O_1 и O_2 — центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC. Прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются биссектрисами треугольника ABC, поэтому они пересекаются в точке O_1. Следовательно, треугольник ABC переходит в треугольник $A_1B_1C_1$ при гомотетии с центром O_1, причём коэффициент гомотетии равен отношению расстояний от точки O_1 до сторон треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, т. е. равен $(r-\rho)/r$. При этой гомотетии описанная окружность треугольника ABC переходит в описанную окружность треугольника $A_1B_1C_1$. Так как $OA_1 = OB_1 = OC_1 = 2\rho$, радиус описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ равен 2ρ. Следовательно, $R(r-\rho)/r = 2\rho$, т. е. $\rho = rR/(2r+R)$.

19.15. Пусть X — центр гомотетии (с положительным коэффициентом), переводящей вписанную окружность треугольника ABC в описанную окружность. Прямая AX пересекает вписанную окружность в точках A' и A'', одна из которых (для определённости A'') при указанной гомотетии переходит в точку A, а другая — в некоторую точку A_2, лежащую на описанной окружности.

Рассмотрим гомотетию с центром A, переводящую A' в A_2. При этой гомотетии центр вписанной окружности переходит в точку, лежащую на отрезке OA_2, где O — центр описанной окружности. Это означает, что вписанная окружность переходит в окружность, касающуюся описанной окружности в точке A_2. Следовательно, $A_2 = A_1$. Поэтому прямые AA_1, BB_1 и CC_1 проходят через точку X.

19.16. Возьмём на биссектрисе угла ABC произвольную точку O и построим окружность S с центром O, касающуюся сторон угла. Прямая BM пересекает окружность S в точках M_1 и M_2. Задача имеет два решения: при гомотетии с центром B, переводящей M_1 в M, и при гомотетии с центром B, переводящей M_2 в M, окружность S переходит в окружности, проходящие через точку M и касающиеся сторон угла.

19.17. Ясно, что обе окружности касаются одной из сторон треугольника. Покажем, как построить окружности, касающиеся стороны AB. Построим окружности S_1' и S_2' одного радиуса, касающиеся друг друга и прямой $c' = AB$ и расположенные внутри треугольника ABC. Построим касательные a' и b' к этим окружностям, параллельные прямым BC и AC соответственно. Треугольник $A'B'C'$, образованный прямыми a', b' и c', имеет стороны, параллельные сторонам треугольника ABC. Поэтому существует гомотетия, переводящая треугольник $A'B'C'$ в треугольник ABC. Искомые окружности являются о́бразами окружностей S_1' и S_2' при этой гомотетии.

19.18. а) Отложим на сторонах AB и BC треугольника ABC отрезки AX_1 и CY_1 равной длины a. Проведём через точку Y_1 прямую l, параллельную стороне AC. Пусть Y_2 — точка пересечения прямой l и окружности радиуса a с центром X_1, лежащая внутри треугольника. Тогда искомая точка Y является точкой пересечения прямой AY_2 со стороной BC, X — такая точка луча AB, что $AX = CY$.

б) Возьмём на стороне AB произвольную точку $X_1 \neq B$. Окружность радиуса BX_1 с центром X_1 пересекает луч BC в точках B и Y_1. На прямой BC построим такую точку C_1, что $Y_1C_1 = BX_1$ и точка Y_1 лежит между B и C_1. При гомотетии с центром B, переводящей точку C_1 в C, точки X_1 и Y_1 переходят в искомые точки X и Y.

19.19. Возьмём отрезок AD и проведём окружности S_1 и S_2 с центром A и радиусами AB и AC соответственно. Вершина B является точкой пересечения окружности S_1 с образом окружности S_2 при гомотетии с центром D и коэффициентом $-DB/DC = -AB/AC$.

19.20. Возьмём на большей окружности S_2 произвольную точку X. Пусть S_2' — образ окружности S_2 при гомотетии с центром X и коэффициентом $1/3$, Y — точка пересечения окружностей S_2' и S_1. Тогда XY — искомая прямая.

19.21. Восставим из точек B и C перпендикуляры к прямым AB и AC; пусть P — точка их пересечения. Тогда точка пересечения прямых AP и BC — искомая.

19.22. Проведём к окружностям S_1 и S_2 общие внешние касательные l_1 и l_2. Прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке K, которая является центром гомотетии H, переводящей окружность S_1 в окружность S_2. Пусть $A_1 = H(A)$. Точки A и K лежат на прямой, соединяющей центры окружностей, поэтому AA_1 — диаметр окружности S_2, т. е. $\angle ACA_1 = 90^\circ$ и $A_1C \parallel AB$. Следовательно, отрезок AB при гомотетии H переходит в A_1C. Поэтому прямая BC проходит через точку K и $\angle ADK = 90^\circ$. Точка D лежит на окружности S с диаметром AK. Ясно также, что точка D лежит внутри угла, образованного прямыми l_1 и l_2. Таким образом, геометрическим местом точек D является дуга окружности S, высекаемая прямыми l_1 и l_2.

19.23. Из условия задачи следует, что отображение f взаимно однозначно.

а) Пусть точка A переходит при отображении f в точку A', а B — в точку B'. Тогда $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA'}$, т. е. преобразование f является параллельным переносом.

б) Рассмотрим три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Пусть A', B' и C' — их образы при отображении f. Прямые AB, BC и CA не могут совпасть с прямыми $A'B'$, $B'C'$ и $C'A'$ соответственно, так как в этом случае $A = A'$, $B = B'$ и $C = C'$. Пусть $AB \neq A'B'$. Прямые AA' и BB' не параллельны, поскольку иначе четырёхугольник $ABB'A'$ был бы параллелограммом и $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$. Пусть O — точка пересечения прямых AA' и BB'. Треугольники AOB и $A'OB'$ подобны с коэффициентом подобия k, поэтому $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$, т. е. O — неподвижная точка преобразования f. Следовательно, $\overrightarrow{Of(X)} = \overrightarrow{f(O)f(X)} = k\overrightarrow{OX}$ для любой точки X, а это означает, что преобразование f является гомотетией с коэффициентом k и центром O.

19.24. Пусть $H = H_2 \circ H_1$, где H_1 и H_2 — гомотетии с центрами O_1 и O_2 и коэффициентами k_1 и k_2. Введём обозначения $A' = H_1(A)$, $B' = H_1(B)$, $A'' = H_2(A')$, $B'' = H_2(B')$. Тогда $\overrightarrow{A'B'} = k_1\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A''B''} = k_2\overrightarrow{A'B'}$, т. е. $\overrightarrow{A''B''} = k_1k_2\overrightarrow{AB}$. Из этого с помощью предыдущей задачи получаем, что преобразование H при $k_1k_2 \neq 1$ является гомотетией с коэффициентом k_1k_2, а при $k_1k_2 = 1$ — параллельным переносом.

Остаётся проверить, что неподвижная точка преобразования H лежит на прямой, соединяющей центры гомотетий H_1 и H_2. Так как $\overrightarrow{O_1A'} = k_1\overrightarrow{O_1A}$ и $\overrightarrow{O_2A''} = k_2\overrightarrow{O_2A'}$, то $\overrightarrow{O_2A''} = k_2(\overrightarrow{O_2O_1} + \overrightarrow{O_1A'}) = k_2(\overrightarrow{O_2O_1} + k_1\overrightarrow{O_1A}) = k_2\overrightarrow{O_2O_1} + k_1k_2\overrightarrow{O_1O_2} + k_1k_2\overrightarrow{O_2A}$. Для неподвижной точки X получаем уравнение $\overrightarrow{O_2X} = (k_1k_2 - k_2)\overrightarrow{O_1O_2} + k_1k_2\overrightarrow{O_2X}$, поэтому $\overrightarrow{O_2X} = \lambda\overrightarrow{O_1O_2}$, где $\lambda = (k_1k_2 - k_2)/(1 - k_1k_2)$.

19.25. Точка A является центром гомотетии, переводящей S_1 в S_2, точка B — центром гомотетии, переводящей S_2 в S_3. Композиция этих гомотетий переводит S_1 в S_3, причём её центр лежит на прямой AB. С другой стороны, центром гомотетии, переводящей S_1 в S_3, является точка C. В самом деле, точке пересечения внешних касательных соответствует гомотетия с положительным коэффициентом, а композиция гомотетий с положительными коэффициентами является гомотетией с положительным коэффициентом.

19.26. а) Пусть K, L, M — точки пересечения прямых AB и CD, AP и DQ, BP и CQ. Эти точки являются центрами гомотетий H_K, H_L и H_M с положительными коэффициентами, переводящих соответственно отрезок BC в AD, AD в PQ и BC в PQ. Ясно, что $H_L \circ H_K = H_M$. Поэтому точки K, L и M лежат на одной прямой.

б) Пусть K, L, M — точки пересечения прямых AB и CD, AQ и DP, BQ и CP. Эти точки являются центрами гомотетий H_K, H_L и H_M, переводящих соответственно отрезок BC в AD, AD в QP, BC в QP, коэффициент первой гомотетии положительный, а двух последних — отрицательный. Ясно, что $H_L \circ H_K = H_M$. Поэтому точки K, L и M лежат на одной прямой.

19.27. Так как $\angle(P_1A, AB) = \angle(P_2A, AB)$, то ориентированные угловые величины дуг BP_1 и BP_2 равны. Поэтому при поворотной гомотетии с центром B, переводящей S_1 в S_2, точка P_1 переходит в P_2, а прямая P_1Q_1 переходит в прямую P_2Q_2.

19.28. Так как ориентированные угловые величины дуг AM_1 и AM_2 равны, то $\angle(M_1B, BA) = \angle(M_2B, BA)$, а значит, точки M_1, M_2 и B лежат на одной прямой.

19.29. Пусть P_i — поворотная гомотетия с центром O, переводящая окружность S_i в S_{i+1}. Тогда $X_{i+1} = P_i(X_i)$ (см. задачу 19.28). Остаётся отметить, что композиция $P_n \circ \ldots \circ P_2 \circ P_1$ является поворотной гомотетией с центром O, переводящей S_1 в S_1, т. е. она является тождественным преобразованием.

19.30. Так как $\angle AMB = \angle NAB$ и $\angle BAM = \angle BNA$, то $\triangle AMB \sim \triangle NAB$, а значит, $AN : AB = MA : MB = CN : MB$. Кроме того, $\angle ABM = 180^\circ - \angle MAN = \angle ANC$. Следовательно, $\triangle AMB \sim \triangle ACN$, т. е. поворотная гомотетия с центром A, переводящая M в B, переводит C в N, а значит, она переводит Q в P.

19.31. Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей, r_1 и r_2 — их радиусы. Коэффициент k поворотной гомотетии, переводящей S_1 в S_2, равен r_1/r_2, а её центр O лежит на окружности с диаметром O_1O_2, и, кроме того, $OO_1 : OO_2 = k = r_1/r_2$. Остаётся проверить, что окружность с диаметром O_1O_2 и ГМТ O таких, что $OO_1 : OO_2 = k$, имеют ровно две общие точки. При $k = 1$ это очевидно, а при $k \neq 1$ последнее ГМТ описано в решении задачи 7.14: оно является окружностью, причём одна из её точек пересечения с прямой O_1O_2 лежит внутри отрезка O_1O_2, а другая — вне его.

19.32. Рассмотрим преобразование, переводящее треугольник BHC в треугольник PHB, т. е. композицию поворота на 90° относительно точки H и гомотетии с коэффициентом $BP:CB$ и центром H. Поскольку при этом преобразовании вершины квадрата переходят в вершины некоторого другого квадрата, а точки C и B переходят в точки B и P, то точка D переходит в точку Q, т. е. $\angle DHQ = 90^\circ$.

19.33. Пусть P — поворотная гомотетия, переводящая вектор $\overrightarrow{CB}$ в вектор $\overrightarrow{CA_1}$. Тогда $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AC} + P(\overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{CB} + P(\overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{BA} + P(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{0}$. Значит, если M — центр масс треугольника ABC, то $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}) = \overrightarrow{0}$.

19.34. Пусть M — общая середина сторон BC и B_1C_1, $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{MB}$ и $\boldsymbol{y} = \overrightarrow{MB_1}$. Пусть, далее, P — поворотная гомотетия с центром M, углом поворота 90° и коэффициентом $\sqrt{3}$, переводящая точку B в A, а B_1 — в A_1. Тогда $\overrightarrow{BB_1} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$ и $\overrightarrow{AA_1} = P(\boldsymbol{y}) - P(\boldsymbol{x}) = P(\overrightarrow{BB_1})$. Поэтому угол между векторами $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BB_1}$ равен 90° и $AA_1 : BB_1 = \sqrt{3}$.

19.35. Пусть P — поворотная гомотетия, переводящая треугольник ABC в треугольник $A_1B_1C_1$. Тогда $\overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{A_2O} + \overrightarrow{OB_2} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A_1B_1} = -\overrightarrow{AB} + P(\overrightarrow{AB})$. Аналогично и остальные векторы сторон треугольника ABC переводятся в векторы сторон треугольника $A_2B_2C_2$ преобразованием $f(\boldsymbol{a}) = -\boldsymbol{a} + P(\boldsymbol{a})$.

19.36. Исходная карта является прямоугольником K_0 на плоскости, меньшая карта — прямоугольником K_1, содержащимся в K_0. Рассмотрим поворотную гомотетию f, отображающую прямоугольник K_0 на K_1. Пусть $K_{i+1} = f(K_i)$. Так как последовательность K_i является стягивающейся последовательностью вложенных многоугольников, существует единственная точка X, принадлежащая всем прямоугольникам K_i. Докажем, что X — искомая точка, т. е. $f(X) = X$. В самом деле, так как точка X принадлежит K_i, то точка $f(X)$ принадлежит K_{i+1}, т. е. точка $f(X)$ также принадлежит всем прямоугольникам K_i. Поскольку имеется только одна точка, принадлежащая всем прямоугольникам, то $f(X) = X$.

19.37. Так как произведение коэффициентов поворотных гомотетий P_1 и P_2 равно 1, их композиция является поворотом (см. задачу 17.38). Пусть O — центр поворота $P_2 \circ P_1$; $R = P_1(O)$. Так как $P_2 \circ P_1(O) = O$, то $P_2(R) = O$. Следовательно, по условию $A_1O : A_1R = A_2O : A_2R$ и $\angle OA_1R = \angle OA_2R$, т. е. $\triangle OA_1R \sim \triangle OA_2R$. Кроме того, OR — общая сторона этих подобных треугольников, значит, $\triangle OA_1R = \triangle OA_2R$. Следовательно, $OA_1 = OA_2$ и $\angle(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}) = 2\angle(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OR}) = 2\angle(\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MN})$, т. е. O — центр поворота на угол $2\angle(\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MN})$, переводящего A_1 в A_2.

19.38. Пусть P_1 — поворотная гомотетия с центром B, переводящая A в M, а P_2 — поворотная гомотетия с центром D, переводящая M в C. Так как произведение коэффициентов этих поворотных гомотетий равно $(BM : BA) \cdot (DC : DM) = 1$, то их композиция $P_2 \circ P_1$ является поворотом (переводящим A в C) на угол $\angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}) + \angle(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{DC}) = 2\angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM})$.

С другой стороны, центр поворота $P_2 \circ P_1$ совпадает с центром поворота на угол $2\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$, переводящего B в D (см. задачу 19.37).

19.39. Легко проверить, что $\operatorname{tg} XBY = k$ и $BY : BX = \sqrt{k^2+1}$, т. е. точка Y получается из X поворотной гомотетией с центром B, углом поворота $\operatorname{arctg} k$ и коэффициентом $\sqrt{k^2+1}$. Искомое ГМТ — образ данной полуокружности при этой поворотной гомотетии.

19.40. Предположим, что треугольник PXY построен, причём точки X и Y лежат на сторонах AC и CB соответственно. Нам известно преобразование, переводящее X в Y, а именно — поворотная гомотетия с центром P, углом поворота $\varphi = \angle XPY = \angle MLN$ и коэффициентом гомотетии $k = PY : PX = LN \cdot LM$. Искомая точка Y является точкой пересечения отрезка BC и образа отрезка AC при этом преобразовании.

19.41. Предположим, что четырёхугольник $ABCD$ построен. Рассмотрим поворотную гомотетию с центром A, переводящую B в D. Пусть C' — образ точки C при этой гомотетии. Тогда $\angle CDC' = \angle B + \angle D$ и $DC' = (BC \cdot AD)/AB = bd/a$.

Треугольник CDC' можно построить по CD, DC' и $\angle CDC'$. Точка A является точкой пересечения окружности радиуса d с центром D и геометрического места точек X, для которых $C'X : CX = d : a$ (это ГМТ — окружность; см. задачу 7.14). Дальнейшее построение очевидно.

19.42. а) Если O — центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок AB в отрезок A_1B_1, то

$$\angle(PA,\, AO) = \angle(PA_1,\, A_1O) \quad \text{и} \quad \angle(PB,\, BO) = \angle(PB_1,\, B_1O), \tag{1}$$

а значит, точка O является точкой пересечения описанных окружностей треугольников PAA_1 и PBB_1. Случай, когда эти окружности имеют единственную общую точку P, очевиден: отрезок AB переходит в отрезок A_1B_1 при гомотетии с центром P. Если P и O — две точки пересечения рассматриваемых окружностей, то из равенств (1) следует, что $\triangle OAB \sim \triangle OA_1B_1$, а значит, O — центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок AB в отрезок A_1B_1.

б) Достаточно заметить, что точка O является центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок AB в отрезок BC, тогда и только тогда, когда $\angle(BA,\, AO) = \angle(CB,\, BO)$ и $\angle(AB,\, BO) = \angle(BC,\, CO)$.

19.43. Пусть A_1 и B_1 — положения точек в один момент, A_2 и B_2 — положения точек в другой момент. Тогда в качестве точки P можно взять центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок A_1A_2 в отрезок B_1B_2.

19.44. Пусть P — точка пересечения прямых l_1 и l_2. Согласно задаче 19.42 точка O лежит на описанной окружности S_1 треугольника A_1A_2P. С другой стороны, $OA_2 : OA_1 = k$. Геометрическим местом точек X, для которых $XA_2 : XA_1 = k$, является окружность S_2 (задача 7.14). Точка O является точкой пересечения окружностей S_1 и S_2 (таких точек две).

19.45. Пусть O — центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок AB в отрезок A_1B_1. Тогда $\triangle ABO \sim \triangle A_1B_1O$, т. е. $\angle AOB = \angle A_1OB_1$ и $AO : BO = A_1O : B_1O$. Следовательно, $\angle AOA_1 = \angle BOB_1$ и $AO : A_1O = BO : B_1O$, т. е. $\triangle AA_1O \sim \triangle BB_1O$. Поэтому точка O является центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок AA_1 в отрезок BB_1.

19.46. Пусть прямые AB и DE пересекаются в точке C, а прямые BD и AE — в точке F. Центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок AB в отрезок ED, является точка пересечения описанных окружностей треугольников AEC и BDC, отличная от точки C (см. задачу 19.42), а центром поворотной гомотетии, переводящей AE в BD, — точка пересечения описанных окружностей треугольников ABF и EDF. Согласно задаче 19.45 центры этих поворотных гомотетий совпадают, т. е. все четыре описанные окружности имеют общую точку.

19.47. Центр O параллелограмма $ABCD$ равноудалён от следующих пар прямых: AQ и AB, AB и CD, CD и DQ, поэтому QO — биссектриса угла AQD. Пусть $\alpha = \angle BAO$, $\beta = \angle CDO$ и $\varphi = \angle AQO = \angle DQO$. Тогда $\alpha + \beta = \angle AOD = 360^\circ - \alpha - \beta - 2\varphi$, т. е. $\alpha + \beta + \varphi = 180^\circ$, а значит, $\triangle QAO = \triangle QOD$.

19.48. Решим задачу в несколько более общем виде. Пусть на окружности S взята точка O, H — поворотная гомотетия с центром O. Докажем, что тогда все прямые XX', где X — точка окружности S и $X' = H(X)$, пересекаются в одной точке.

Пусть P — точка пересечения прямых X_1X_1' и X_2X_2'. Согласно задаче 19.42 точки O, P, X_1 и X_2 лежат на одной окружности и точки O, P, X_1' и X_2' тоже лежат на одной окружности. Следовательно, P — точка пересечения окружностей S и $H(S)$, т. е. все прямые XX' проходят через точку пересечения окружностей S и $H(S)$, отличную от точки O.

19.49. Пусть O — центр поворотной гомотетии, переводящей треугольник $A_1B_1C_1$ в треугольник ABC. Докажем, например, что описанные окружности треугольников ABC_2 и $A_1B_1C_2$ проходят через точку O. При рассматриваемой гомотетии отрезок AB переходит в отрезок A_1B_1, поэтому точка O совпадает с центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок AA_1 в отрезок BB_1 (см. задачу 19.45). Согласно задаче 19.42 центр последней гомотетии является второй точкой пересечения описанных окружностей треугольников ABC_2 и $A_1B_1C_2$ (или точкой их касания).

19.50. Пусть O_1 и O_2 — центры поворотных гомотетий H_1 и H_2. Ясно, что если O_1 и O_2 совпадают, то $H_1 \circ H_2 = H_2 \circ H_1$. Предположим теперь, что $H_1 \circ H_2 = H_2 \circ H_1$. Тогда, в частности, $H_1 \circ H_2(O_1) = H_2 \circ H_1(O_1) = H_2(O_1)$. Поэтому $H_2(O_1)$ — центр поворотной гомотетии H_1, т. е. $H_2(O_1) = O_1$. Но тогда O_1 — центр поворотной гомотетии H_2, что и требовалось.

19.51. Достаточно доказать, что если $H_1 \circ H_2(A) = H_2 \circ H_1(A)$, то $H_1 \circ H_2 = H_2 \circ H_1$. Рассмотрим преобразование $(H_1 \circ H_2)^{-1} \circ H_2 \circ H_1$. Это преобразование является параллельным переносом (произведение коэффициентов гомотетии равно 1, а сумма углов поворотов равна 0). Кроме того, это преобразование имеет неподвижную точку A. Параллельный перенос, имеющий неподвижную точку, является тождественным преобразованием. Следовательно, $H_1 \circ H_2 = H_2 \circ H_1$.

19.52. а) Пусть H_1 — поворотная гомотетия, переводящая треугольник A_1BC в треугольник CAB_1, H_2 — поворотная гомотетия, переводящая треугольник CAB_1 в треугольник BC_1A, H — поворотная гомотетия, переводящая точки A_1 и C в точки A_2 и B_2. Тогда $H_1 \circ H(A_1) = H_1(A_2) = B_2 = H(C) = H \circ H_1(A_1)$. Поэтому согласно задаче 19.51 $H_1 \circ H = H \circ H_1$, а значит, согласно задаче 19.50 поворотные гомотетии H и H_1 имеют общий центр.

Ясно также, что $H_1 \circ H_2(C) = H_1(B) = A = H_2(B_1) = H_2 \circ H_1(C)$. Поэтому поворотные гомотетии H_1 и H_2 имеют общий центр. Итак, все три поворотные гомотетии H_1, H_2 и H имеют общий центр. Поэтому $H_2 \circ H = H \circ H_2$. Следовательно, $H(B) = H \circ H_2(C) = H_2 \circ H(C) = H_2(B_2) = C_2$. Таким образом, поворотная гомотетия H переводит треугольник A_1BC в треугольник $A_2C_2B_2$.

б) Эта задача является частным случаем задачи а).

19.53. Точки A_1, A_2 и A_3 лежат на прямых P_2P_3, P_3P_1 и P_1P_2 (рис. 19.2), поэтому описанные окружности треугольников $A_1A_2P_3$, $A_1A_3P_2$ и $A_2A_3P_1$

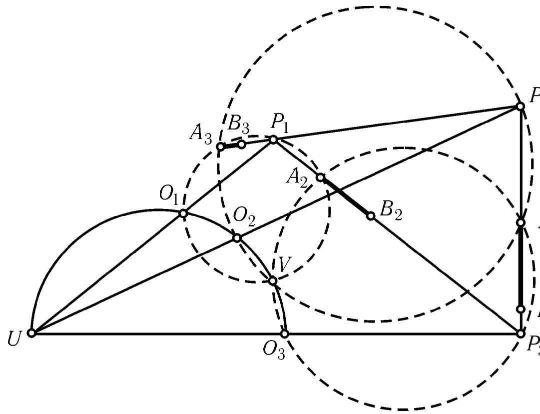


Рис. 19.2

имеют общую точку V (см. задачу 2.83 а), причём точки O_3, O_2 и O_1 лежат на этих окружностях (см. задачу 19.42). Аналогично описанные окружности треугольников $B_1B_2P_3$, $B_1B_3P_2$ и $B_2B_3P_1$ имеют общую точку V'. Пусть U — точка пересечения прямых P_2O_2 и P_3O_3. Докажем, что точка V лежит на описанной окружности треугольника O_2O_3U. В самом деле, $\angle(O_2V, VO_3) = \angle(VO_2, O_2P_2) + \angle(O_2P_2, P_3O_3) + \angle(P_3O_3, O_3V) = \angle(VA_1, A_1P_2) + \angle(O_2U, UO_3) + \angle(P_3A_1, A_1V) = \angle(O_2U, UO_3)$. Аналогичные рассуждения показывают, что точка V' лежит на описанной окружности треугольника O_2O_3U. В частности, точки O_2, O_3, V и V' лежат на одной окружности. Аналогично точки O_1, O_2, V и V' лежат на одной окружности, а значит, точки V и V' лежат на описанной окружности треугольника $O_1O_2O_3$; точка U тоже лежит на этой окружности. Аналогично доказывается, что прямые P_1O_1 и P_2O_2 пересекаются в точке, лежащей на окружности подобия. Прямая P_2O_2 пересекает окружность подобия в точках U и O_2, поэтому прямая P_1O_1 проходит через точку U.

19.54. Пусть P_1 — точка пересечения прямых A_2B_2 и A_3B_3, P_1' — точка пересечения прямых A_2C_2 и A_3C_3; точки P_2, P_3, P_2' и P_3' определяются аналогично. При поворотной гомотетии, переводящей F_1 в F_2, прямые A_1B_1 и A_1C_1 переходят в A_2B_2 и A_2C_2, поэтому $\angle(A_1B_1, A_2B_2) = \angle(A_1C_1, A_2C_2)$, т. е. углы при вершинах P_3 и P_3' треугольников $P_1P_2P_3$ и $P_1'P_2'P_3'$ равны или составляют в сумме 180°. Аналогичные рассуждения показывают, что $\triangle P_1P_2P_3 \sim \triangle P_1'P_2'P_3'$.

Центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок P_2P_3 в $P_2'P_3'$, лежит на описанной окружности треугольника $A_1P_3P_3'$ (см. задачу 19.42). А так как $\angle(P_3A_1, A_1P_3') = \angle(A_1B_1, A_1C_1) = \angle(A_2B_2, A_2C_2) = \angle(P_3A_2, A_2P_3')$, то описанная окружность треугольника $A_1P_3P_3'$ совпадает с описанной окружностью треугольника $A_1A_2P_3$. Аналогичные рассуждения показывают, что центр рассматриваемой поворотной гомотетии является точкой пересечения описанных окружностей треугольников $A_1A_2P_3$, $A_1A_3P_2$ и $A_2A_3P_1$; эта точка лежит на окружности подобия фигур F_1, F_2 и F_3 (задача 19.53 а).

19.55. а) Пусть l_1', l_2' и l_3' — соответственные прямые фигур F_1, F_2 и F_3, причём $l_i' \parallel l_i$; эти прямые образуют треугольник $P_1P_2P_3$. При поворотной гомотетии с центром O_3, переводящей F_1 в F_2, прямые l_1 и l_1' переходят в l_2 и l_2', поэтому при гомотетии с центром O_3, переводящей прямую l_1 в l_1', прямая l_2 переходит в l_2'. Следовательно, прямая P_3O_3 проходит через точку W. Аналогично прямые P_1O_1 и P_2O_2 проходят через точку W, а значит, точка W лежит на окружности подобия фигур F_1, F_2 и F_3 (см. задачу 19.53 б).

б) Отношение расстояний от точки O_1 до прямых l_2' и l_3' равно коэффициенту поворотной гомотетии, переводящей F_2 в F_3, а угол P_1 треугольника $P_1P_2P_3$ равен углу её поворота. Поэтому $\angle(O_1P_1, P_1P_2)$ зависит лишь от фигур F_2 и F_3. А так как $\angle(O_1W, WJ_3) = \angle(O_1P_1, P_1P_2)$, то дуга O_1J_3 фиксирована (рис. 19.3), а значит, точка J_3 фиксирована. Аналогично доказывается, что точки J_1 и J_2 фиксированы.

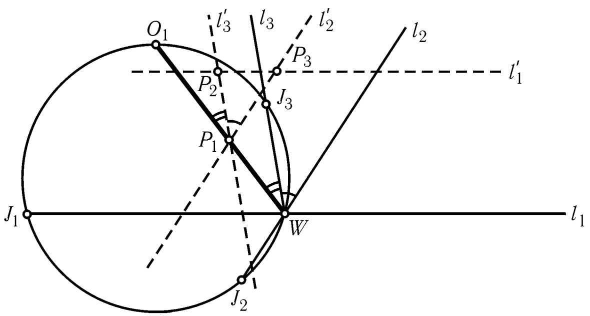


Рис. 19.3

19.56. Воспользуемся обозначениями задачи 19.55. Ясно, что $\angle(J_1J_2, J_2J_3) = \angle(J_1W, WJ_3) = \angle(P_3P_2, P_2P_1)$. Для других углов треугольников доказательство аналогично.

19.57. Докажем, например, что при поворотной гомотетии с центром O_1, переводящей F_2 в F_3, точка J_2 переходит в J_3. В самом деле, $\angle(J_2O_1, O_1J_3) = \angle(J_2W, WJ_3)$. Кроме того, прямые J_2W и J_3W являются соответственными прямыми фигур F_2 и F_3, поэтому отношение расстояний от них до точки O_1 равно коэффициенту подобия k_1, а значит, $O_1J_2/O_1J_3 = k_1$.

19.58. Пусть O_a — точка пересечения окружности, проходящей через точку B и касающейся прямой AC в точке A, и окружности, проходящей через точку C и касающейся прямой AB в точке A. Согласно задаче 19.42 б) точка O_a является центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок BA в отрезок AC. Определив аналогично точки O_b и O_c и воспользовавшись результатом задачи 19.53 б), получим, что прямые AO_a, BO_b и CO_c пересекаются в точке, лежащей на окружности подобия S. С другой стороны, эти прямые пересекаются в точке Лемуана K (см. задачу 5.155).

Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника являются соответственными прямыми рассматриваемых подобных фигур. Они пересекаются в точке O, поэтому точка O лежит на окружности подобия S (см. задачу 19.55 а); кроме того, эти прямые пересекают окружность S в постоянных точках A_1, B_1 и C_1 треугольника ABC (см. задачу 19.55 б). С другой стороны, прямые, проходящие через точку K параллельно BC, CA и AB, тоже являются соответственными прямыми рассматриваемых фигур. Действительно, трилинейные координаты точки Лемуана K равны $(a:b:c)$, потому что она изогонально сопряжена точке пересечения медиан, которая имеет трилинейные координаты $(a^{-1}:b^{-1}:c^{-1})$; поэтому расстояния от точки K до сторон треугольника пропорциональны длинам сторон. Таким образом, указанные прямые тоже пересекают окружность S в точках A_1, B_1 и C_1. Следовательно, $OA_1 \perp A_1K$, т. е. OK — диаметр окружности S.

19.59. Если P — первая точка Брокара треугольника ABC, то CP, AP и BP — соответственные прямые для подобных фигур, построенных на отрезках BC, CA и AB. Поэтому точка P лежит на окружности подобия S (см. задачу 19.55 а). Аналогично точка Q лежит на окружности S. Кроме того, прямые CP, AP и BP пересекают окружность S в постоянных точках A_1, B_1 и C_1 треугольника ABC (см. задачу 19.55 б). А так как $KA_1 \parallel BC$ (см. решение задачи 19.58), то $\angle(PA_1, A_1K) = \angle(PC, CB) = \varphi$, т. е. $\smile PK = 2\varphi$. Аналогично $\smile KQ = 2\varphi$. Поэтому $PQ \perp KO$, а значит, $OP = OQ$ и $\angle(POQ) = (\smile PQ)/2 = 2\varphi$.

19.60. Точка Лемуана имеет трилинейные координаты $(a:b:c)$, поэтому прямые, проходящие через точку Лемуана параллельно сторонам треугольника, являются соответственными прямыми фигур, построенных на сторонах треугольника ABC. (Имеется в виду, что коэффициент подобия фигур равен отношению сторон.)

19.61. а) Оба утверждения непосредственно следуют из задачи 5.115 а). Действительно, точка Лемуана K лежит на описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ и $KA_1 \parallel BC$ и т. д.

б) Это следует из задачи 5.115 б).

ГЛАВА 20

ПРИНЦИП КРАЙНЕГО

Основные сведения

1. Для решения многих задач бывает полезно рассмотреть какой-либо «крайний», «граничный» элемент, т. е. элемент, на котором некоторая величина принимает наибольшее или наименьшее значение, например, наибольшую или наименьшую сторону треугольника, наибольший или наименьший угол и т. д. Этот метод решения задач иногда называют *принципом* (*правилом*) *крайнего*; название это, правда, не общепринятое.

2. Пусть O — точка пересечения диагоналей выпуклого четырёхугольника. Его вершины можно обозначить так, что $CO \leqslant AO$ и $BO \leqslant DO$. Тогда при симметрии относительно точки O треугольник BOC попадает внутрь треугольника AOD, т. е. в некотором смысле треугольник BOC наименьший, а треугольник AOD наибольший (см. § 4).

3. Вершины выпуклой оболочки и опорные прямые тоже являются в некотором смысле крайними элементами; эти понятия используются в § 5, там приведены их определения и свойства.

§ 1. Наименьший или наибольший угол

20.1. Докажите, что если длины всех сторон треугольника меньше 1, то его площадь меньше $\sqrt{3}/4$.

20.2. Докажите, что круги, построенные на сторонах выпуклого четырёхугольника как на диаметрах, полностью покрывают этот четырёхугольник.

20.3. В некоторой стране 100 аэродромов, причём все попарные расстояния между ними различны. С каждого аэродрома поднимается самолёт и летит на ближайший к нему аэродром. Докажите, что ни на один аэродром не может прилететь больше пяти самолётов.

20.4. Внутри круга радиуса 1 лежат восемь точек. Докажите, что расстояние между некоторыми двумя из них меньше 1.

20.5. Шесть кругов расположены на плоскости так, что некоторая точка O лежит внутри каждого из них. Докажите, что один из этих кругов содержит центр некоторого другого.

20.6*. Внутри остроугольного треугольника взята точка P. Докажите, что наибольшее из расстояний от точки P до вершин этого треугольника не меньше удвоенного наименьшего из расстояний от P до его сторон.

20.7*. а) Длины биссектрис треугольника не превосходят 1. Докажите, что его площадь не превосходит $1/\sqrt{3}$.

б) На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1. Докажите, что если длины отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 не превосходят 1, то площадь треугольника ABC не превосходит $1/\sqrt{3}$.

См. также задачу 13.26.

§ 2. Наименьшее или наибольшее расстояние

20.8. На плоскости дано $n \geqslant 3$ точек, причём не все они лежат на одной прямой. Докажите, что существует окружность, проходящая через три из данных точек и не содержащая внутри ни одной из оставшихся точек.

20.9. На плоскости расположено несколько точек, все попарные расстояния между которыми различны. Каждую из этих точек соединяют с ближайшей. Может ли при этом получиться замкнутая ломаная?

20.10. Докажите, что по крайней мере одно из оснований перпендикуляров, опущенных из внутренней точки выпуклого многоугольника на его стороны, лежит на самой стороне, а не на её продолжении.

20.11. Из каждой вершины многоугольника опущены перпендикуляры на стороны, её не содержащие. Докажите, что хотя бы для одной вершины одно из оснований перпендикуляров лежит на самой стороне, а не на её продолжении.

20.12*. Докажите, что в любом выпуклом пятиугольнике найдутся три диагонали, из которых можно составить треугольник.

20.13*. Докажите, что многоугольник нельзя покрыть двумя многоугольниками, гомотетичными ему с коэффициентом k, где $0 < k < 1$.

20.14*. На плоскости дано конечное число точек, причём любая прямая, проходящая через две из данных точек, содержит ещё одну данную точку. Докажите, что все данные точки лежат на одной прямой (Сильвестр).

20.15*. На плоскости дано конечное число попарно непараллельных прямых, причём через точку пересечения любых двух из них проходит ещё одна из данных прямых. Докажите, что все эти прямые проходят через одну точку.

20.16*. На плоскости дано n точек и отмечены середины всех отрезков с концами в этих точках. Докажите, что различных отмеченных точек не менее $2n - 3$.

См. также задачи 9.18, 9.20, 9.57, 9.58, 16.11, 17.35, 19.9.

§ 3. Наименьшая или наибольшая площадь

20.17*. На плоскости расположено n точек, причём площадь любого треугольника с вершинами в этих точках не превосходит 1. Докажите, что все эти точки можно поместить в треугольник площади 4.

20.18*. Многоугольник M' гомотетичен многоугольнику M с коэффициентом гомотетии $-1/2$. Докажите, что существует параллельный перенос, переводящий многоугольник M' внутрь многоугольника M.

См. также задачу 9.46.

§ 4. Наибольший треугольник

20.19*. Пусть O — точка пересечения диагоналей выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что если периметры треугольников ABO, BCO, CDO и DAO равны, то $ABCD$ — ромб.

20.20*. Докажите, что если центр вписанной окружности четырёхугольника совпадает с точкой пересечения диагоналей, то четырёхугольник — ромб.

20.21*. Пусть O — точка пересечения диагоналей выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что если радиусы вписанных окружностей треугольников ABO, BCO, CDO и DAO равны, то $ABCD$ — ромб.

§ 5. Выпуклая оболочка и опорные прямые

При решении задач этого параграфа рассматриваются выпуклые оболочки систем точек и опорные прямые выпуклых многоугольников.

Выпуклой оболочкой конечного набора точек называют наименьший выпуклый многоугольник, содержащий все эти точки (слово «наименьший» означает, что он не содержится ни в каком другом таком многоугольнике). У любой конечной системы точек существует единственная выпуклая оболочка (рис. 20.1).

Опорной прямой выпуклого многоугольника называют прямую, проходящую через его вершину и обладающую тем свойством, что многоугольник лежит по одну сторону от неё. Легко проверить, что для любого выпуклого многоугольника существуют ровно две опорные прямые, параллельные данной прямой (рис. 20.2).

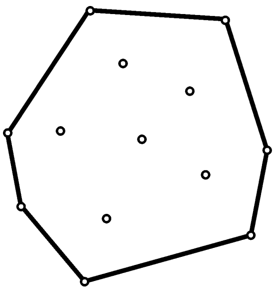


Рис. 20.1

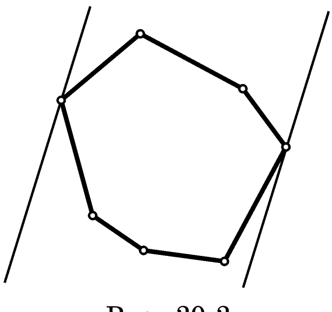


Рис. 20.2

20.22. Решите задачу 20.8, воспользовавшись понятием выпуклой оболочки.

20.23*. На плоскости даны $2n+3$ точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой, а никакие четыре не лежат на одной окружности. Докажите, что из этих точек можно выбрать три точки так, что n из оставшихся точек лежат внутри окружности, проведённой через выбранные точки, а n — вне её.

20.24*. Докажите, что любой выпуклый многоугольник площади 1 можно поместить в прямоугольник площади 2.

20.25*. На плоскости дано конечное число точек. Докажите, что из них всегда можно выбрать точку, для которой ближайшими к ней являются не более трёх данных точек.

20.26*. На столе расположено n картонных и n пластмассовых квадратов, причём никакие два картонных и никакие два пластмассовых квадрата не имеют общих точек, в том числе и точек границы. Оказалось, что множество вершин картонных квадратов совпадает с множеством вершин пластмассовых квадратов. Обязательно ли каждый картонный квадрат совпадает с некоторым пластмассовым?

20.27*. На плоскости дано $n \geqslant 4$ точек, причём никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что если для любых трёх из них найдётся четвёртая (тоже из данных), с которой они образуют вершины параллелограмма, то $n = 4$.

20.28*. На плоскости дано несколько точек, попарные расстояния между которыми не превосходят 1. Докажите, что эти точки можно покрыть правильным треугольником со стороной $\sqrt{3}$.

См. также задачи 9.58, 9.59.

§ 6. Разные задачи

20.29. На плоскости дано конечное множество многоугольников (не обязательно выпуклых), каждые два из которых имеют общую точку. Докажите, что существует прямая, имеющая общие точки со всеми этими многоугольниками.

20.30. Можно ли на плоскости расположить 1000 отрезков так, чтобы каждый отрезок обоими концами упирался строго внутрь других отрезков?

20.31. На плоскости даны четыре точки, не лежащие на одной прямой. Докажите, что хотя бы один из треугольников с вершинами в этих точках не является остроугольным.

20.32. На плоскости дано бесконечное множество прямоугольников, вершины каждого из которых расположены в точках с координатами $(0, 0)$, $(0, m)$, $(n, 0)$, (n, m), где n и m — целые положительные числа (свои для каждого прямоугольника). Докажите, что из этих прямоугольников можно выбрать два так, чтобы один содержался в другом.

20.33*. На плоскости дано n точек, причём любые три из них можно накрыть кругом радиуса 1. Докажите, что тогда все n точек можно накрыть кругом радиуса 1.

20.34*. Дан выпуклый многоугольник $A_1 \ldots A_n$. Докажите, что описанная окружность некоторого треугольника $A_iA_{i+1}A_{i+2}$ содержит весь многоугольник.

Решения

20.1. Пусть α — наименьший угол треугольника. Тогда $\alpha \leqslant 60^\circ$. Поэтому $S = (bc\sin\alpha)/2 \leqslant (\sin 60^\circ)/2 = \sqrt{3}/4$.

20.2. Пусть X — произвольная точка, лежащая внутри выпуклого четырёхугольника. Так как $\angle AXB + \angle BXC + \angle CXD + \angle AXD = 360^\circ$, то наибольший из этих углов не меньше 90°. Пусть для определённости $\angle AXB \geqslant 90^\circ$. Тогда точка X лежит внутри окружности с диаметром AB.

20.3. Если самолёты из точек A и B прилетели в точку O, то AB — наибольшая сторона треугольника AOB, т. е. $\angle AOB > 60^\circ$. Предположим, что в точку O прилетели самолёты из точек $A_1, \ldots, A_n$. Тогда один из углов A_iOA_j не превосходит $360^\circ/n$. Поэтому $360^\circ/n > 60^\circ$, т. е. $n < 6$.

20.4. По крайней мере семь точек отличны от центра O окружности. Поэтому наименьший из углов A_iOA_j, где A_i и A_j — данные точки, не превосходит $360^\circ/7 < 60^\circ$. Если A и B — точки, соответствующие наименьшему углу, то $AB < 1$, так как $AO \leqslant 1$, $BO \leqslant 1$ и угол AOB строго меньше наибольшего угла треугольника AOB.

20.5. Один из углов между шестью отрезками, соединяющими точку O с центрами кругов, не превосходит $360^\circ/6 = 60^\circ$. Пусть $\angle O_1OO_2 \leqslant 60^\circ$, где O_1 и O_2 — центры кругов радиуса r_1 и r_2 соответственно. Так как $\angle O_1OO_2 \leqslant 60^\circ$, этот угол не является наибольшим углом треугольника O_1OO_2 поэтому либо $O_1O_2 \leqslant O_1O$, либо $O_1O_2 \leqslant O_2O$. Пусть для определённости $O_1O_2 \leqslant O_1O$. Так как точка O лежит внутри кругов, то $O_1O < r_1$. Поэтому $O_1O_2 \leqslant O_1O < r_1$, т. е. точка O_2 лежит внутри круга радиуса r_1 с центром O_1.

20.6. Опустим из точки P перпендикуляры PA_1, PB_1 и PC_1 на стороны BC, CA и AB и выберем наибольший из углов, образованных этими перпендикулярами и лучами PA, PB и PC. Пусть для определённости это будет угол APC_1. Тогда $\angle APC_1 \geqslant 60^\circ$, поэтому $PC_1 : AP = \cos APC_1 \leqslant \cos 60^\circ = 1/2$, т. е. $AP \geqslant 2PC_1$. Ясно, что неравенство сохранится, если AP заменить на наибольшее из чисел AP, BP и CP, а PC_1 — на наименьшее из чисел PA_1, PB_1 и PC_1.

20.7. а) Пусть для определённости α — наименьший угол треугольника ABC; AD — биссектриса. Одна из сторон AB и AC не превосходит $AD/\cos(\alpha/2)$, так как иначе отрезок BC не проходит через точку D. Пусть для определённости $AB \leqslant AD/\cos(\alpha/2) \leqslant AD/\cos 30^\circ \leqslant 2/\sqrt{3}$. Тогда $S_{ABC} = h_cAB/2 \leqslant l_cAB/2 \leqslant 1/\sqrt{3}$.

б) Предположим сначала, что треугольник ABC не остроугольный, например, $\angle A \geqslant 90^\circ$. Тогда $AB \leqslant BB_1 \leqslant 1$. Ясно также, что $h_c \leqslant CC_1 \leqslant 1$. Поэтому $S_{ABC} \leqslant 1/2 < 1/\sqrt{3}$.

Предположим теперь, что треугольник ABC остроугольный. Пусть $\angle A$ — наименьший из его углов. Тогда $\angle A \leqslant 60^\circ$, поэтому высота h_a делит угол A

на два угла, один из которых не превосходит 30°. Если этот угол прилегает к стороне AB, то $AB \leqslant h_a/\cos 30^\circ \leqslant 2/\sqrt{3}$. Учитывая, что $h_c \leqslant 1$, получаем требуемое.

20.8. Пусть A и B — те из данных точек, расстояние между которыми минимально. Тогда внутри окружности с диаметром AB нет данных точек. Пусть C — та из оставшихся точек, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом. Тогда внутри окружности, проходящей через точки A, B и C, нет данных точек.

20.9. Предположим, что получилась замкнутая ломаная. Пусть AB — наибольшее звено этой ломаной, а AC и BD — соседние с ним звенья. Тогда $AC < AB$, т.е. B — не ближайшая к A точка, и $BD < AB$, т.е. A — не ближайшая к B точка. Поэтому точки A и B не могут быть соединены. Получено противоречие.

20.10. Пусть O — данная точка. Проведём прямые, содержащие стороны многоугольника, и выберем среди них ту, которая наименее удалена от точки O. Пусть на этой прямой лежит сторона AB. Докажем, что основание перпендикуляра, опущенного из точки O на сторону AB, лежит на самой стороне. Предположим, что основанием перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую AB, является точка P, лежащая вне отрезка AB. Так как точка O лежит внутри выпуклого многоугольника, отрезок OP пересекает некоторую сторону CD в точке Q. Ясно, что $OQ < OP$, а расстояние от точки O до прямой CD меньше OQ. Поэтому прямая CD менее удалена от точки O, чем прямая AB, что противоречит выбору прямой AB.

20.11. Возьмём наибольшую сторону AB данного многоугольника и рассмотрим полосу, состоящую из тех точек, проекции которых на прямую AB попадают на отрезок AB. Эту полосу должна пересекать какая-нибудь другая сторона CD многоугольника (одна из вершин C и D может совпадать с A или с B). Неравенство $CD \leqslant AB$ показывает, что одна из вершин C и D лежит внутри или на границе полосы (если $C = A$ или B, то вершина D лежит внутри полосы). Вершина, лежащая внутри или на границе полосы и отличная от A и B, обладает требуемым свойством.

20.12. Пусть BE — наибольшая диагональ пятиугольника $ABCDE$. Докажем, что тогда из отрезков BE, EC и BD можно составить треугольник. Для этого достаточно проверить, что $BE < EC + BD$. Пусть O — точка пересечения диагоналей BD и EC. Тогда $BE < BO + OE < BD + EC$.

20.13. Пусть O_1 и O_2 — центры гомотетий с коэффициентом k, переводящих многоугольник M в многоугольники M_1 и M_2. Тогда точка многоугольника M, наиболее удалённая от прямой O_1O_2 не покрыта многоугольниками M_1 и M_2.

20.14. Предположим, что не все данные точки лежат на одной прямой. Проведём через каждую пару данных точек прямую (этих прямых конечное число) и выберем наименьшее ненулевое расстояние от данных точек до этих прямых. Пусть наименьшим будет расстояние от точки A до прямой BC, где точки B и C данные. На прямой BC лежит ещё одна из данных точек — некоторая точка D. Опустим из точки A перпендикуляр AQ на прямую BC. Две из точек B, C и D лежат по одну сторону от точки Q, например C и D. Пусть для определённости $CQ < DQ$ (рис. 20.3). Тогда расстояние от точки C до прямой AD меньше, чем расстояние от точки A до прямой BC, что противоречит выбору точки A и прямой BC.

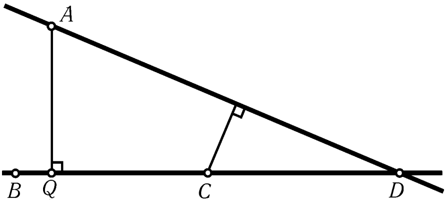


Рис. 20.3

20.15. Предположим, что не все прямые проходят через одну точку. Рассмотрим точки пересечения прямых и выберем наименьшее ненулевое расстояние от этих точек до данных прямых. Пусть наименьшим будет расстояние от точки A до прямой l. Через точку A проходят по крайней мере три данные прямые. Пусть они пересекают прямую l в точках B, C и D. Опустим из точки A перпендикуляр AQ на прямую l. Две из точек B, C и D лежат по одну сторону от точки Q, например C и D. Пусть для определённости $CQ < DQ$ (рис. 20.4). Тогда расстояние от точки C до прямой AD меньше, чем расстояние от точки A до прямой l, что противоречит выбору A и l.

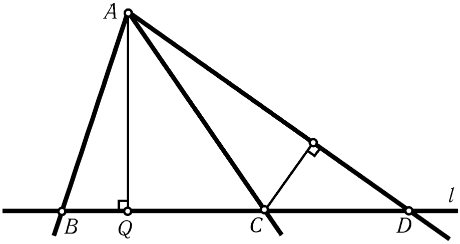


Рис. 20.4

20.16. Пусть A и B — наиболее удалённые друг от друга данные точки. Середины отрезков, соединяющих точку A (соответственно точку B) с остальными точками, все различны и лежат внутри окружности радиуса $AB/2$ с центром A (соответственно B). Полученные два круга имеют лишь одну общую точку, поэтому различных отмеченных точек не менее $2(n-1)-1=2n-3$.

20.17. Выберем среди всех треугольников с вершинами в данных точках треугольник наибольшей площади. Пусть это будет треугольник ABC. Проведём через вершину C прямую $l_c \parallel AB$. Если точки X и A лежат по разные стороны от прямой l_c, то $S_{ABX} > S_{ABC}$. Поэтому все данные точки лежат по одну сторону от прямой l_c. Аналогично, проводя через точки B и A прямые $l_b \parallel AC$ и $l_a \parallel BC$, получаем, что все данные точки находятся внутри (или на границе) треугольника, образованного прямыми l_a, l_b и l_c. Площадь этого треугольника ровно в 4 раза больше площади треугольника ABC, поэтому она не превосходит 4.

20.18. Пусть ABC — треугольник наибольшей площади с вершинами в вершинах многоугольника M. Тогда многоугольник M содержится внутри треугольника $A_1B_1C_1$, серединами сторон которого являются точки A, B и C. При гомотетии с центром в центре масс треугольника ABC и коэффициентом $-1/2$

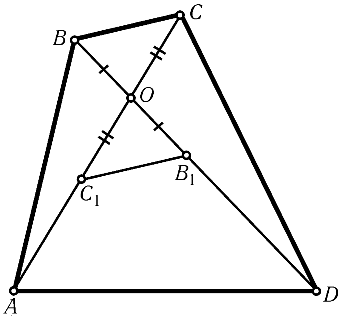


Рис. 20.5

треугольник $A_1B_1C_1$ переходит в треугольник ABC, поэтому многоугольник M переходит внутрь треугольника ABC.

20.19. Для определённости можно считать, что $AO \geqslant CO$ и $DO \geqslant BO$. Пусть точки B_1 и C_1 симметричны точкам B и C относительно точки O (рис. 20.5). Так как треугольник B_1OC_1 лежит внутри треугольника AOD, то $P_{AOD} \geqslant P_{B_1OC_1} = P_{BOC}$, причём равенство достигается, только если $B_1 = D$ и $C_1 = A$ (см. задачу 9.29 б). Следовательно, $ABCD$ — параллелограмм. Поэтому $AB - BC = P_{ABO} - P_{BCO} = 0$, т. е. $ABCD$ — ромб.

20.20. Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Для определённости можно считать, что $AO \geqslant CO$ и $DO \geqslant BO$. Пусть точки B_1 и C_1 симметричны точкам B и C относительно точки O. Так как точка O является центром вписанной окружности четырёхугольника, то отрезок B_1C_1 касается этой окружности. Поэтому отрезок AD может касаться этой окружности, только если $B_1 = D$ и $C_1 = A$, т. е. если $ABCD$ — параллелограмм. В этот параллелограмм можно вписать окружность, поэтому он — ромб.

20.21. Для определённости можно считать, что $AO \geqslant CO$ и $DO \geqslant BO$. Пусть точки B_1 и C_1 симметричны точкам B и C относительно точки O. Тогда треугольник C_1OB_1 содержится внутри треугольника AOD, поэтому вписанная окружность S треугольника C_1OB_1 содержится внутри треугольника AOD. Предположим, что отрезок AD не совпадает с отрезком C_1B_1. Тогда окружность S переходит во вписанную окружность треугольника AOD при гомотетии с центром O и коэффициентом больше 1, т. е. $r_{AOD} > r_{C_1OB_1} = r_{COB}$. Получено противоречие, поэтому $A = C_1$ и $D = B_1$, т. е. $ABCD$ — параллелограмм.

В параллелограмме $ABCD$ площади треугольников AOB и BOC равны, поэтому если у них равны радиусы вписанных окружностей, то равны и периметры, так как $S = pr$. Следовательно, $AB = BC$, т. е. $ABCD$ — ромб.

20.22. Пусть AB — сторона выпуклой оболочки данных точек, B_1 — ближайшая к A из всех данных точек, лежащих на AB. Выберем ту из оставшихся точек, из которой отрезок AB_1 виден под наибольшим углом. Пусть это будет точка C. Тогда описанная окружность треугольника AB_1C будет искомой.

20.23. Пусть AB — одна из сторон выпуклой оболочки данных точек. Занумеруем оставшиеся точки в порядке возрастания углов, под которыми виден из них отрезок AB, т. е. обозначим их через $C_1, C_2, \ldots, C_{2n+1}$, так, что $\angle AC_1B < \angle AC_2B < \ldots < AC_{2n+1}B$. Тогда точки $C_1, \ldots, C_n$ лежат вне описанной окружности треугольника ABC_{n+1}, а точки $C_{n+2}, \ldots, C_{2n+1}$ — внутри её, т. е. это и есть искомая окружность.

20.24. Пусть AB — наибольшая диагональ (или сторона) многоугольника. Проведём через точки A и B прямые a и b, перпендикулярные прямой AB. Если X — вершина многоугольника, то $AX \leqslant AB$ и $XB \leqslant AB$, поэтому многоугольник находится внутри полосы, образованной прямыми a и b. Проведём опорные прямые многоугольника, параллельные AB. Пусть эти прямые проходят через вершины C и D и вместе с прямыми a и b образуют прямоугольник $KLMN$ (рис. 20.6). Тогда $S_{KLMN} = 2S_{ABC} + 2S_{ABD} = 2S_{ACBD}$. Так как четырёхугольник $ACBD$ содержится в исходном многоугольнике, площадь которого равна 1, то $S_{KLMN} \leqslant 2$.

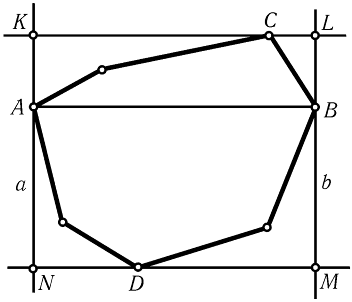


Рис. 20.6

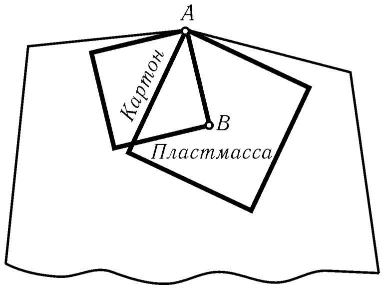


Рис. 20.7

20.25. Выберем наименьшее из всех попарных расстояний между данными точками и рассмотрим точки, у которых есть соседи на таком расстоянии. Достаточно доказать требуемое утверждение для этих точек. Пусть P — вершина их выпуклой оболочки. Если A_i и A_j — ближайшие к P точки, то $A_iA_j \geqslant A_iP$ и $A_iA_j \geqslant A_jP$, поэтому $\angle A_iPA_j \geqslant 60^\circ$. Следовательно, у точки P не может быть четырёх ближайших соседей, так как иначе один из углов A_iPA_j был бы меньше $180^\circ/3 = 60^\circ$. Поэтому P — искомая точка.

20.26. Предположим, что есть картонные квадраты, не совпадающие с пластмассовыми. Выбросим из рассмотрения все совпадающие квадраты и рассмотрим выпуклую оболочку вершин оставшихся квадратов. Пусть A — вершина этой выпуклой оболочки. Тогда A является вершиной двух разных квадратов — картонного и пластмассового. Легко проверить, что одна из вершин меньшего из этих квадратов лежит внутри большего (рис. 20.7). Пусть для определённости вершина B картонного квадрата лежит внутри пластмассового. Тогда точка B лежит внутри пластмассового квадрата и является вершиной другого пластмассового квадрата, чего не может быть. Получено противоречие, поэтому каждый картонный квадрат совпадает с некоторым пластмассовым.

20.27. Рассмотрим выпуклую оболочку данных точек. Возможны два случая.

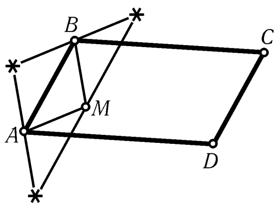


Рис. 20.8

1. Выпуклая оболочка является параллелограммом $ABCD$. Если точка M лежит внутри параллелограмма $ABCD$, то вершины всех трёх параллелограммов с вершинами A, B и M лежат вне $ABCD$ (рис. 20.8). Значит, в этом случае, кроме точек A, B, C и D, никаких других точек быть не может.

2. Выпуклая оболочка не является параллелограммом. Пусть AB и BC — стороны выпуклой оболочки. Проведём опорные прямые, параллельные AB и BC. Пусть эти опорные прямые проходят через вершины P и Q. Тогда

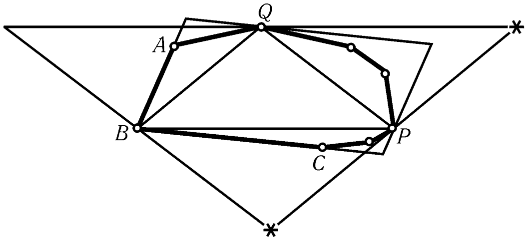


Рис. 20.9

вершины всех трёх параллелограммов с вершинами B, P и Q лежат вне выпуклой оболочки (рис. 20.9). Они даже лежат вне параллелограмма, образованного опорными прямыми, кроме того случая, когда P и Q являются вершинами этого параллелограмма. В этом случае его четвёртая вершина не принадлежит выпуклой оболочке, так как та не является параллелограммом.

20.28. Рассмотрим три прямые, попарно образующие углы 60°, и проведём к данному множеству точек три пары опорных прямых, параллельных выбранным прямым. Проведённые опорные прямые задают два правильных треугольника, каждый из которых накрывает данные точки. Докажем, что сторона одного из них не превосходит $\sqrt{3}$.

На каждой опорной прямой лежит хотя бы одна из данных точек. Расстояние между любой парой данных точек не превосходит 1, поэтому расстояние между любой парой опорных прямых не превосходит 1.

Возьмём одну из данных точек. Пусть a_1, b_1 и c_1 — расстояния от неё до сторон одного правильного треугольника, a_2, b_2 и c_2 — расстояния до сторон другого. При этом мы предполагаем, что a_1+a_2, b_1+b_2 и c_1+c_2 — расстояния между опорными прямыми. Как только что было доказано, $a_1+a_2\leqslant 1$, $b_1+b_2\leqslant 1$ и $c_1+c_2\leqslant 1$. С другой стороны, $a_1+b_1+c_1=h_1$ и $a_2+b_2+c_2=h_2$, где h_1 и h_2 — высоты построенных равносторонних треугольников (задача 4.47). Следовательно, $h_1+h_2\leqslant 3$, а значит, одна из высот h_1 и h_2 не превосходит $3/2$. Но тогда сторона соответствующего правильного треугольника не превосходит $\sqrt{3}$.

20.29. Возьмём на плоскости произвольную прямую l и спроецируем на неё все многоугольники. При этом мы получим несколько отрезков, любые два из которых имеют общую точку. Рассмотрим левые концы этих отрезков и выберем из них самый правый (чтобы стало ясно, что значит «правый» и «левый», на прямой нужно задать направление). Полученная точка принадлежит всем отрезкам, поэтому проведённый через неё перпендикуляр к прямой l пересекает все данные многоугольники.

20.30. Пусть на плоскости расположено 1000 отрезков. Возьмём произвольную прямую l, не перпендикулярную ни одному из них, и спроецируем концы всех этих отрезков на прямую l. Ясно, что конец отрезка, проецирующийся в самую левую из полученных точек, не может упираться строго внутрь другого отрезка.

20.31. Возможны два варианта расположения четырёх точек.

1. Точки являются вершинами выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Выберем наибольший из углов при его вершинах. Пусть это будет угол ABC. Тогда $\angle ABC \geqslant 90^\circ$, т. е. треугольник ABC не остроугольный.

2. Точка D лежит внутри треугольника ABC. Выберем наибольший из углов ADB, BDC и ADC. Пусть это будет угол ADB. Тогда $\angle ADB \geqslant 120^\circ$, т. е. треугольник ADB тупоугольный.

Доказать, что других вариантов расположения четырёх точек нет, можно следующим образом. Прямые, проходящие через три из данных точек, делят плоскость на семь частей (рис. 20.10). Если четвёртая данная точка лежит во второй, четвёртой или шестой частях, то имеет место первая ситуация, а если в первой, третьей, пятой или седьмой, то вторая.

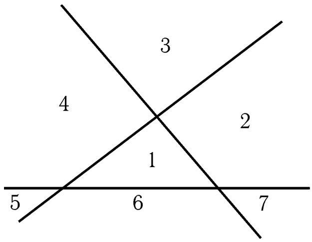


Рис. 20.10

20.32. У прямоугольника с вершинами в точках $(0, 0)$, $(0, m)$, $(n, 0)$ и (n, m) горизонтальная сторона равна n, а вертикальная равна m. Выберем из данного множества прямоугольник с наименьшей горизонтальной стороной. Пусть его вертикальная сторона равна m_1. Рассмотрим любые m_1 из оставшихся прямоугольников. Возможны два случая.

1. Вертикальные стороны двух из этих m_1 прямоугольников равны. Тогда один из них содержится в другом.

2. Вертикальные стороны всех этих прямоугольников различны. Тогда вертикальная сторона одного из них не меньше m_1, поэтому он содержит прямоугольник с наименьшей горизонтальной стороной.

20.33. Рассмотрим круг, содержащий все данные точки. Будем уменьшать радиус такого круга до тех пор, пока это возможно. Пусть R — радиус полученного круга. На границе этого круга лежат по крайней мере две данные точки. Рассмотрим сначала случай, когда на границе лежат ровно две точки A и B. Ясно, что они — диаметрально противоположные точки круга. Возьмём третью данную точку C. Минимальный радиус круга, содержащего точки A, B и C, равен R, поэтому $R \leqslant 1$. Рассмотрим теперь случай, когда на границе лежат ровно три данные точки A, B и C. Тогда треугольник ABC остроугольный, поскольку иначе можно было бы уменьшить радиус круга, содержащего все данные точки. Поэтому снова минимальный радиус круга, содержащего точки A, B и C, равен R. Рассмотрим наконец случай, когда на границе лежат по крайней мере четыре данные точки. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — угловые величины последовательных дуг, на которые данные точки разбивают границу круга. Если сумма угловых величин двух последовательных дуг не больше 180°, то сотрём их общую точку. Покажем, что при $n \geqslant 4$ такая пара последовательных дуг всегда найдётся. Предположим, что $\alpha_1 + \alpha_2 > 180^\circ$, $\alpha_2 + \alpha_3 > 180^\circ$, $\ldots$, $\alpha_n + \alpha_1 > 180^\circ$. Сложив эти неравенства, получим $2(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) > n \cdot 180^\circ$, а значит, $4 \cdot 180^\circ > n \cdot 180^\circ$. Получено противоречие. Таким образом, на границе полученного круга лежат либо две диаметрально противоположные данные точки, либо три данные точки, являющиеся вершинами остроугольного треугольника. Такие случаи мы уже разбирали.

20.34. Рассмотрим все окружности, проходящие через две соседние вершины A_i и A_{i+1} и такую вершину A_j, что $\angle A_iA_jA_{i+1} < 90^\circ$. Хотя бы одна такая окружность есть. В самом деле, один из углов $A_iA_{i+2}A_{i+1}$ и $A_{i+1}A_iA_{i+2}$ меньше 90°; в первом случае положим $A_j = A_{i+2}$, а во втором $A_j = A_i$. Выберем среди всех таких окружностей (для всех i и j) окружность S наибольшего радиуса; пусть для определённости она проходит через точки A_1, A_2 и A_k.

Предположим, что вершина A_p лежит вне окружности S. Тогда точки A_p и A_k лежат по одну сторону от прямой A_1A_2 и $\angle A_1A_pA_2 < \angle A_1A_kA_2 < 90^\circ$. Из теоремы синусов следует, что радиус описанной окружности у треугольника $A_1A_pA_2$ больше, чем у треугольника $A_1A_kA_2$. Получено противоречие, поэтому окружность S содержит весь многоугольник $A_1 \ldots A_n$.

Пусть для определённости $\angle A_2A_1A_k \leqslant A_1A_2A_k$. Докажем, что тогда A_2 и A_k — соседние вершины. Если $A_k \neq A_3$, то $180^\circ - \angle A_2A_3A_k \leqslant \angle A_2A_1A_k < 90^\circ$, поэтому радиус описанной окружности у треугольника $A_2A_3A_k$ больше, чем у треугольника $A_1A_2A_k$. Получено противоречие, поэтому окружность S проходит через соседние вершины A_1, A_2 и A_3.

ГЛАВА 21

ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ

Основные сведения

1. Самая популярная формулировка принципа Дирихле такова: «Если в n клетках сидит m зайцев, причём $m > n$, то хотя бы в одной клетке сидят по крайней мере два зайца». На первый взгляд даже непонятно, почему это совершенно очевидное замечание является весьма эффективным методом решения задач. Дело в том, что в каждой конкретной задаче нелегко бывает понять, что же здесь «зайцы» и «клетки» и почему зайцев больше, чем клеток. Выбор зайцев и клеток часто неочевиден; далеко не всегда по виду задачи можно определить, что следует воспользоваться принципом Дирихле. А главное, этот метод даёт неконструктивное доказательство (мы, естественно, не можем сказать, в какой именно клетке сидят два зайца, а знаем только, что такая клетка есть), а попытка дать конструктивное доказательство, т. е. доказательство путём явного построения или указания требуемого объекта, может привести к гораздо бо́льшим трудностям.

2. Некоторые задачи решаются также методами, в какой-то мере аналогичными принципу Дирихле. Сформулируем соответствующие утверждения (все они легко доказываются методом от противного).

а) Если на отрезке длиной 1 расположено несколько отрезков, сумма длин которых больше 1, то по крайней мере два из них имеют общую точку.

б) Если на окружности радиуса 1 расположено несколько дуг, сумма длин которых больше 2π, то по крайней мере две из них имеют общую точку.

в) Если внутри фигуры площадью 1 расположено несколько фигур, сумма площадей которых больше 1, то по крайней мере две из них имеют общую точку.

§ 1. Конечное число точек, прямых и т. д.

21.1. Узлы бесконечной клетчатой бумаги раскрашены в два цвета. Докажите, что существуют две горизонтальные и две вертикальные прямые, на пересечении которых лежат точки одного цвета.

21.2. Внутри равностороннего треугольника со стороной 1 расположено пять точек. Докажите, что расстояние между некоторыми двумя из них меньше 0,5.

21.3. В прямоугольнике 3×4 расположено 6 точек. Докажите, что среди них найдутся две точки, расстояние между которыми не превосходит $\sqrt{5}$.

21.4. На шахматной доске 8×8 отмечены центры всех полей. Можно ли тринадцатью прямыми разбить доску на части так, чтобы внутри каждой из них лежало не более одной отмеченной точки?

21.5. На плоскости дано 25 точек, причём среди любых трёх из них найдутся две на расстоянии меньше 1. Докажите, что существует круг радиуса 1, содержащий не меньше 13 из этих точек.

21.6*. В квадрате со стороной 1 находится 51 точка. Докажите, что какие-то три из них можно накрыть кругом радиуса $1/7$.

21.7*. Каждый из двух дисков разделён на 1985 равных секторов и на каждом окрашено произвольным образом (одним цветом) по 200 секторов. Диски наложили друг на друга и один стали поворачивать на углы, кратные $360^\circ/1985$. Докажите, что существует по крайней мере 80 положений, при которых совпадает не более 20 окрашенных секторов.

21.8*. Каждая из девяти прямых разбивает квадрат на два четырёхугольника, площади которых относятся как $2:3$. Докажите, что по крайней мере три из этих девяти прямых проходят через одну точку.

21.9*. В парке растёт 10 000 деревьев, посаженных квадратно-гнездовым способом (100 рядов по 100 деревьев). Какое наибольшее число деревьев можно срубить, чтобы выполнялось следующее условие: если встать на любой пень, то не будет видно ни одного другого пня? (Деревья можно считать достаточно тонкими.)

21.10*. Какое наименьшее число точек достаточно отметить внутри выпуклого n-угольника, чтобы внутри любого треугольника с вершинами в вершинах n-угольника содержалась хотя бы одна отмеченная точка?

21.11*. Внутри выпуклого $2n$-угольника взята точка P. Через каждую вершину и точку P проведена прямая. Докажите, что найдётся сторона многоугольника, с которой ни одна из проведённых прямых не имеет общих внутренних точек.

21.12*. Докажите, что в любом выпуклом $2n$-угольнике найдётся диагональ, не параллельная ни одной из его сторон.

21.13*. Узлы бесконечной клетчатой бумаги раскрашены в три цвета. Докажите, что существует равнобедренный прямоугольный треугольник с вершинами одного цвета.

§ 2. Углы и длины

21.14. На плоскости дано n попарно непараллельных прямых. Докажите, что угол между некоторыми двумя из них не больше $180^\circ/n$.

21.15. В окружности радиуса 1 проведено несколько хорд. Докажите, что если каждый диаметр пересекает не более k хорд, то сумма длин хорд меньше πk.

21.16. На плоскости отмечена точка O. Можно ли расположить на плоскости: а) пять кругов; б) четыре круга, не покрывающих точку O, так, чтобы любой луч с началом в точке O пересекал не менее двух кругов? («Пересекает» — имеет общую точку.)

21.17*. Внутри окружности радиуса n расположено $4n$ отрезков длиной 1. Докажите, что можно провести прямую, параллельную или перпендикулярную данной прямой l и пересекающую по крайней мере два данных отрезка.

21.18*. Внутри квадрата со стороной 1 расположено несколько окружностей, сумма длин которых равна 10. Докажите, что найдётся прямая, пересекающая по крайней мере четыре из этих окружностей.

21.19*. На отрезке длиной 1 закрашено несколько отрезков, причём расстояние между любыми двумя закрашенными точками не равно 0,1. Докажите, что сумма длин закрашенных отрезков не превосходит 0,5.

21.20*. Даны две окружности, длина каждой из которых равна 100 см. На одной из них отмечено 100 точек, а на другой — несколько дуг, сумма длин которых меньше 1 см. Докажите, что эти окружности можно совместить так, чтобы ни одна отмеченная точка не попала на отмеченную дугу.

21.21*. Даны две одинаковые окружности. На каждой из них отмечено по k дуг, угловая величина каждой из которых меньше $\dfrac{1}{k^2-k+1}\cdot 180^\circ$, причём окружности можно совместить так, чтобы отмеченные дуги одной окружности совпали с отмеченными дугами другой. Докажите, что эти окружности можно совместить так, чтобы все отмеченные дуги оказались на неотмеченных местах.

§ 3. Площадь

21.22. В квадрате со стороной 15 расположено 20 попарно непересекающихся квадратиков со стороной 1. Докажите, что в большом квадрате можно разместить круг радиуса 1 так, чтобы он не пересекался ни с одним из квадратиков.

21.23*. Дана бесконечная клетчатая бумага и фигура, площадь которой меньше площади клетки. Докажите, что эту фигуру можно положить на бумагу, не накрыв ни одной вершины клетки.

21.24*. Назовём крестом фигуру, образованную диагоналями квадрата со стороной 1 (рис. 21.1). Докажите, что в круге радиуса 100 можно разместить лишь конечное число непересекающихся крестов.

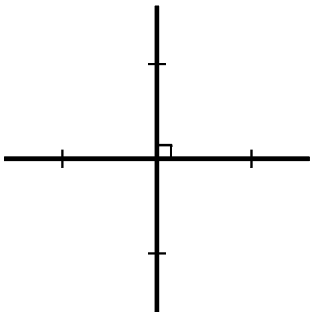


Рис. 21.1

21.25*. Попарные расстояния между точками $A_1, \ldots, A_n$ больше 2. Докажите, что любую фигуру, площадь которой меньше π, можно сдвинуть на вектор длиной не более 1 так, что она не будет содержать точек $A_1, \ldots, A_n$.

21.26*. В круге радиуса 16 расположено 650 точек. Докажите, что найдётся кольцо с внутренним радиусом 2 и внешним радиусом 3, в котором лежит не менее 10 из данных точек.

21.27*. На плоскости дано n фигур. Пусть $S_{i_1 \ldots i_k}$ — площадь пересечения фигур с номерами $i_1, \ldots, i_k$, а S — площадь части плоскости, покрытой данными фигурами; M_k — сумма всех $S_{i_1 \ldots i_k}$. Докажите, что:

а) $S = M_1 - M_2 + M_3 - \ldots + (-1)^{n+1} M_n$;

б) $S \geqslant M_1 - M_2 + M_3 - \ldots + (-1)^{m+1} M_m$ при m чётном и $S \leqslant M_1 - M_2 + M_3 - \ldots + (-1)^{m+1} M_m$ при m нечётном.

21.28*. а) В квадрате площади 6 расположены три многоугольника, площадь каждого из которых равна 3. Докажите, что среди них найдутся два многоугольника, площадь общей части которых не меньше 1.

б) В квадрате площади 5 расположено девять многоугольников площадь каждого из которых равна 1. Докажите, что среди них найдутся два многоугольника, площадь общей части которых не меньше 1/9.

21.29*. На кафтане площади 1 имеется пять заплат, причём площадь каждой их них не меньше 0,5. Докажите, что найдутся две заплаты, площадь общей части которых не меньше 0,2.

21.30*. На отрезке длиной 1 расположены попарно не пересекающиеся отрезки, сумма длин которых равна p. Обозначим эту систему отрезков A. Пусть B — дополнительная система отрезков (отрезки систем A и B не имеют общих внутренних точек и полностью покрывают данный отрезок). Докажите, что существует параллельный перенос T, для которого пересечение B и $T(A)$ состоит из отрезков, сумма длин которых не меньше $p(1-p)/2$.

Решения

21.1. Возьмём три вертикальные прямые и девять горизонтальных. Будем рассматривать только точки пересечения этих прямых. Так как имеется лишь $2^3 = 8$ вариантов раскраски трёх точек в два цвета, то найдутся две горизонтальные прямые, на которых лежат одинаково раскрашенные тройки точек. Среди трёх точек, раскрашенных в два цвета, найдутся две одинаково раскрашенные точки. Вертикальные прямые, проходящие через эти точки, вместе с ранее выбранными двумя горизонтальными являются искомыми.

21.2. Средние линии правильного треугольника со стороной 1 разбивают его на четыре правильных треугольника со стороной 0,5. Поэтому в одном из них лежат по крайней мере две данные точки, причём эти точки не могут попасть в вершины треугольника. Расстояние между этими точками меньше 0,5.

21.3. Разрежем прямоугольник на пять фигур, как показано на рис. 21.2. В одну из них попадут по крайней мере две точки, а расстояние между любыми двумя точками каждой из этих фигур не превосходит $\sqrt{5}$.

21.4. К краю шахматной доски 8×8 прилегает 28 полей. Проведём 28 отрезков, соединяющих центры соседних крайних полей. Каждая прямая может пересекать не более двух таких отрезков, поэтому 13 прямых могут пересекать не более 26 отрезков, т. е. найдутся по крайней мере 2 отрезка, не пересекающихся ни с одной из 13 проведённых прямых. Поэтому тринадцатью прямыми

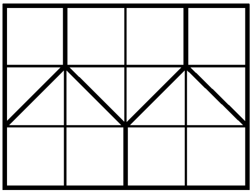


Рис. 21.2

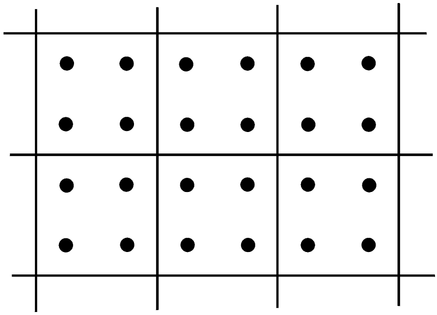


Рис. 21.3

нельзя разбить шахматную доску так, чтобы в каждой части лежало не более одной отмеченной точки, поскольку оба конца отрезка, не пересекающегося с прямыми, лежат в одной части.

21.5. Пусть A — одна из данных точек. Если все остальные точки лежат в круге S_1 радиуса 1 с центром A, то доказывать больше нечего. Пусть теперь B — данная точка, лежащая вне круга S_1, т. е. $AB > 1$. Рассмотрим круг S_2 радиуса 1 с центром B. Среди точек A, B и C, где C — любая из данных точек, найдутся две на расстоянии меньше 1, причём это не могут быть точки A и B. Поэтому круги S_1 и S_2 содержат все данные точки, т. е. один из них содержит не менее 13 точек.

21.6. Разрежем данный квадрат на 25 одинаковых квадратиков со стороной 0,2. В один из них попадает не меньше трёх точек. Радиус описанной окружности квадрата со стороной 0,2 равен $1/5\sqrt{2} < 1/7$, поэтому его можно накрыть кругом радиуса $1/7$.

21.7. Возьмём 1985 дисков, раскрашенных так же, как второй из наших дисков, и положим их на первый диск так, чтобы они занимали все возможные положения. Тогда над каждым окрашенным сектором первого диска расположено 200 окрашенных секторов, т. е. всего имеется 200^2 пар совпадающих окрашенных секторов. Пусть имеется n положений второго диска, при которых совпадает не менее 21 пары окрашенных секторов. Тогда число совпадений окрашенных секторов не меньше $21n$. Поэтому $21n \leqslant 200^2$, т. е. $n \leqslant 1904{,}8$. Так как n — целое число, то $n \leqslant 1904$. Следовательно, по крайней мере при $1985 - 1904 = 81$ положениях совпадает не более 20 пар окрашенных секторов.

21.8. Данные прямые не могут пересекать соседние стороны квадрата $ABCD$, так как иначе образуются не два четырёхугольника, а треугольник и пятиугольник. Пусть прямая пересекает стороны BC и AD в точках M и N. Трапеции $ABMN$ и $CDNM$ имеют равные высоты, поэтому их площади относятся как средние линии, т. е. MN делит отрезок, соединяющий середины сторон AB и CD, в отношении $2:3$. Точек, делящих средние линии квадрата в отношении $2:3$, имеется ровно четыре. Так как данные девять прямых проходят через эти четыре точки, то через одну из точек проходят по крайней мере три прямые.

21.9. Разобьём деревья на 2500 четвёрок, как показано на рис. 21.3. В каждой такой четвёрке нельзя срубить более одного дерева. С другой стороны, можно срубить все деревья, растущие в левых верхних углах квадратов, образованных нашими четвёрками деревьев. Поэтому наибольшее число деревьев, которые можно срубить, равно 2500.

21.10. Так как диагонали, выходящие из одной вершины, делят n-угольник на $n-2$ треугольника, $n-2$ точки необходимы.

Из рис. 21.4 можно понять, как обойтись $n-2$ точками: достаточно отметить по одной точке в каждом зачернённом треугольнике. В самом деле,

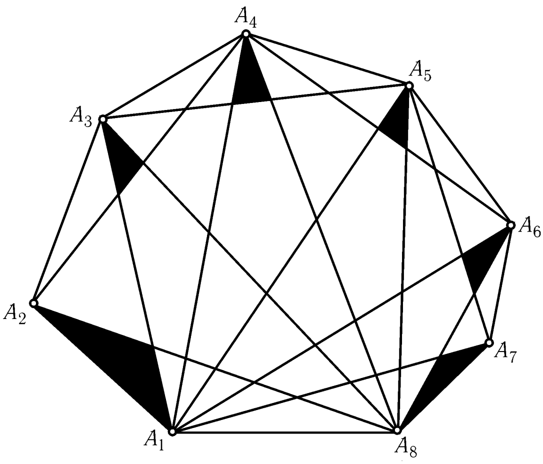


Рис. 21.4

внутри треугольника $A_pA_qA_r$, где $p<q<r$, всегда содержится зачернённый треугольник, прилегающий к вершине A_q.

21.11. Возможны два случая:

1. Точка P лежит на некоторой диагонали AB. Тогда прямые PA и PB совпадают и не пересекают сторон. Остаются $2n-2$ прямые; они пересекают не более $2n-2$ сторон.

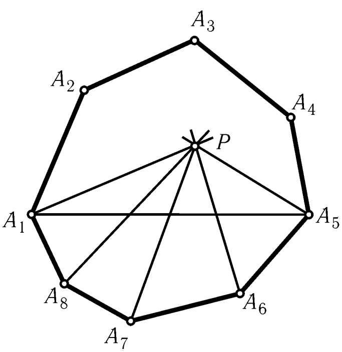


Рис. 21.5

2. Точка P не лежит на диагонали многоугольника $A_1A_2\ldots A_{2n}$. Проведём диагональ A_1A_{n+1}. По обе стороны от неё лежит по n сторон. Пусть для определённости точка P лежит внутри многоугольника $A_1\ldots A_{n+1}$ (рис. 21.5). Тогда прямые PA_{n+1}, PA_{n+2}, …, PA_{2n}, PA_1 (число этих прямых равно $n+1$) не могут пересекать стороны $A_{n+1}A_{n+2}$, $A_{n+2}A_{n+3}$, …, $A_{2n}A_1$. Поэтому оставшиеся прямые могут пересекать не более чем $n-1$ из этих n сторон.

21.12. Количество диагоналей $2n$-угольника равно $2n(2n-3)/2=n(2n-3)$. Легко проверить, что диагоналей, параллельных данной стороне, не более $n-2$. Поэтому всего диагоналей, параллельных сторонам, не более $2n(n-2)$. А так как $2n(n-2) < n(2n-3)$, то найдётся диагональ, не параллельная ни одной из сторон.

21.13. Предположим, что нет равнобедренного прямоугольного треугольника с катетами, параллельными сторонами клеток, и вершинами одного цвета. Для удобства можно считать, что раскрашены не узлы, а клетки. Разобьём лист на квадраты со стороной 4; тогда на диагонали каждого такого квадрата найдутся две клетки одного цвета. Пусть число n больше количества различных раскрасок квадрата со стороной 4. Рассмотрим квадрат, состоящий из n^2 квадратов со стороной 4. На его диагонали найдутся два одинаково раскрашенных квадрата со стороной 4. Возьмём, наконец, квадрат K, на диагонали которого найдутся два одинаково раскрашенных квадрата со стороной $4n$.

Рассмотрев квадрат со стороной $4n$ и в нём два одинаково раскрашенных квадрата со стороной 4, получим четыре клетки первого цвета, две клетки второго цвета и одну клетку третьего цвета (см. рис. 21.6). Аналогично, рассмотрев квадрат K, получим клетку, которая не может быть ни первого, ни второго, ни третьего цвета.

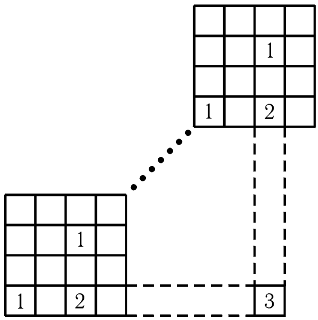


Рис. 21.6

21.14. Возьмём на плоскости произвольную точку и проведём через неё прямые, параллельные данным. Они разделят плоскость на $2n$ углов, в сумме дающих 360°. Поэтому один из этих углов не превосходит $180^\circ/n$.

21.15. Предположим, что сумма длин хорд не меньше πk, и докажем, что тогда найдётся диаметр, пересекающий по крайней мере $k+1$ хорду. Так как длина дуги, стягиваемой хордой, больше длины этой хорды, то сумма длин дуг, стягиваемых данными хордами, больше πk. Если мы к этим дугам добавим ещё и дуги, симметричные им относительно центра окружности, то сумма длин всех рассматриваемых дуг будет больше $2\pi k$. Поэтому найдётся точка, которую покрывает по крайней мере $k+1$ из этих дуг. Диаметр, проведённый через эту точку, пересекает по крайней мере $k+1$ хорду.

21.16. а) Можно. Пусть O — центр правильного пятиугольника $ABCDE$. Тогда круги, вписанные в углы AOC, BOD, COE, DOA и EOB, обладают требуемым свойством.

б) Нельзя. Рассмотрим для каждого из четырёх кругов угол, образованный касательными к нему, проходящими через точку O. Так как каждый из этих четырёх углов меньше 180°, в сумме они дают меньше $2 \cdot 360^\circ$. Поэтому найдётся точка плоскости, покрытая не более чем одним из этих углов. Луч, проведённый через эту точку, пересекает не более одного круга.

21.17. Пусть l_1 — произвольная прямая, перпендикулярная l. Обозначим длины проекций i-го отрезка на прямые l и l_1 через a_i и b_i соответственно. Так как длина каждого отрезка равна 1, то $a_i + b_i \geqslant 1$. Поэтому $(a_1 + \ldots + a_{4n}) + (b_1 + \ldots + b_{4n}) \geqslant 4n$. Пусть для определённости $a_1 + \ldots + a_{4n} \geqslant$ $\geqslant b_1 + \ldots + b_{4n}$. Тогда $a_1 + \ldots + a_{4n} \geqslant 2n$. Все данные отрезки проецируются на отрезок длиной $2n$, так как они лежат внутри окружности радиуса n. Если бы проекции данных отрезков на прямую l не имели общих точек, то выполнялось бы неравенство $a_1 + \ldots + a_{4n} < 2n$. Поэтому на l есть точка, в которую проецируются точки по крайней мере двух данных отрезков. Перпендикуляр к l, проведённый через эту точку, пересекает по крайней мере два данных отрезка.

21.18. Спроецируем все данные окружности на сторону AB квадрата $ABCD$. Проекцией окружности длиной l является отрезок длиной l/π. Поэтому сумма длин проекций всех данных окружностей равна $10/\pi$. Так как $10/\pi > 3 = 3AB$, то на отрезке AB есть точка, принадлежащая проекциям по крайней мере четырёх окружностей. Перпендикуляр к AB, проведённый через эту точку, пересекает по крайней мере четыре окружности.

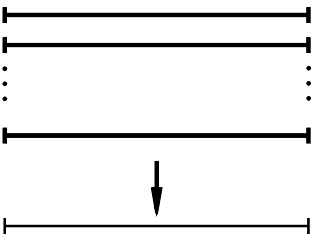


Рис. 21.7

21.19. Разрежем отрезок на десять отрезков длиной 0,1, сложим их стопочкой и спроецируем на такой же отрезок (рис. 21.7). Так как расстояние между любыми двумя окрашенными точками не равно 0,1, то окрашенные точки соседних отрезков не могут проецироваться в одну точку. Поэтому ни в одну точку не могут проецироваться окрашенные точки более чем пяти отрезков. Следовательно, сумма длин проекций окрашенных отрезков (равная сумме их длин) не превосходит $5 \cdot 0{,}1 = 0{,}5$.

21.20. Совместим данные окружности и посадим в фиксированную точку одной из них маляра. Будем вращать эту окружность и поручим маляру красить ту точку окружности, мимо которой он проезжает, всякий раз, когда какая-либо отмеченная точка лежит на отмеченной дуге. Нужно доказать, что после полного оборота часть окружности останется неокрашенной. Конечный результат работы маляра будет такой же, как если бы ему поручили на i-м обороте красить окружность, когда i-я отмеченная точка лежит на одной из отмеченных дуг, и сделали бы 100 оборотов. Так как в этом случае при каждом обороте окрашивается меньше 1 см, после 100 оборотов будет окрашено меньше 100 см. Поэтому часть окружности останется неокрашенной.

21.21. Совместим данные окружности и посадим в фиксированную точку одной из них маляра. Будем вращать эту окружность и поручим маляру красить ту точку окружности, мимо которой он проезжает, всякий раз, когда пересекаются какие-либо отмеченные дуги. Нужно доказать, что после полного оборота часть окружности останется неокрашенной. Конечный результат работы маляра будет такой же, как если бы ему поручили на i-м обороте красить окружность, когда i-я отмеченная дуга окружности, на которой сидит маляр, пересекается с какой-либо отмеченной дугой другой окружности, и сделали бы k оборотов.

Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — угловые величины отмеченных дуг. По условию $\varphi_1 < \alpha, \ldots, \varphi_n < \alpha$, где $\alpha = 180^\circ/(k^2 - k + 1)$. За то время, пока пересекаются отмеченные дуги с номерами i и j, маляр окрашивает дугу величиной $\varphi_i + \varphi_j$. Поэтому сумма угловых величин дуг, окрашенных маляром на i-м обороте, не превосходит $k\varphi_i + (\varphi_1 + \ldots + \varphi_k)$, а сумма угловых величин дуг, окрашенных за все k оборотов, не превосходит $2k(\varphi_1 + \ldots + \varphi_k)$. Заметим, что при этом пересечение дуг с одинаковыми номерами мы учли фактически k раз. В частности, точка A, мимо которой проезжает маляр в тот момент, когда совпадают отмеченные дуги, заведомо покрашена k раз. Поэтому целесообразно выбросить из рассмотрения те дуги окружности, которые маляр красит в моменты пересечения каких-либо отмеченных дуг с одинаковыми номерами. Так как все эти дуги содержат точку A, то фактически мы выбросили только одну дугу, причём угловая величина этой дуги не превосходит 2α. Сумма угловых величин оставшейся части дуг, окрашенных на i-м обороте, не превосходит $(k-1)\varphi_1 + (\varphi_1 + \ldots + \varphi_k - \varphi_i)$, а сумма угловых величин оставшейся части дуг, окрашенных за все k оборотов, не превосходит $(2k-2)(\varphi_1 + \ldots + \varphi_k) < (2k^2 - 2k)\alpha$. Часть окружности останется неокрашенной, если выполняется неравенство $(2k^2 - 2k)\alpha \leqslant 360^\circ - 2\alpha$, т.е. $\alpha \leqslant 180^\circ/(k^2 - k + 1)$.

21.22. Рассмотрим фигуру, состоящую из всех точек, удалённых от квадратика со стороной 1 на расстояние не больше 1 (рис. 21.8). Ясно, что круг радиуса 1, центр которого расположен вне этой фигуры, не пересекается с квадратиком. Площадь такой фигуры равна $\pi + 5$. Центр нужного круга должен также находиться на расстоянии больше 1 от сторон большого квадрата, т.е. внутри квадрата со стороной 13. Ясно, что 20 фигур площадью $\pi + 5$ не могут покрыть квадрат со стороной 13, так как $20(\pi + 5) < 13^2$. Круг с центром в непокрытой точке обладает требуемым свойством.

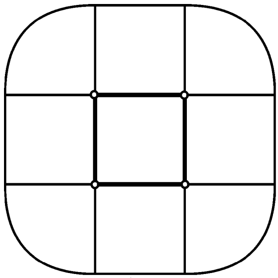


Рис. 21.8

21.23. Приклеим фигуру к клетчатой бумаге произвольным образом, разрежем бумагу по клеткам и сложим их в стопку, перенося их параллельно и не переворачивая. Спроецируем эту стопку на клетку. Проекции частей фигуры не могут покрыть всю клетку, так как их площадь меньше. Вспомним теперь, как была расположена фигура на клетчатой бумаге, и сдвинем клетчатую бумагу параллельно, чтобы её вершины попали в точки, проецирующиеся в какую-либо непокрытую точку. В результате получим искомое расположение фигуры.

21.24. Для каждого креста рассмотрим круг радиусом $1/2\sqrt{2}$ с центром в центре креста. Докажем, что если пересекаются два таких круга, то пересекаются и сами кресты. Расстояние между центрами пересекающихся равных кругов не превосходит их удвоенного радиуса, поэтому расстояние между центрами соответствующих им крестов не превосходит $1/\sqrt{2}$. Рассмотрим прямоугольник, заданный перекладинами первого креста и центром второго (рис. 21.9). Одна из перекладин второго креста проходит через этот прямоугольник, поэтому она пересекает первый крест, так как длина перекладины равна $1/\sqrt{2}$, а длина диагонали прямоугольника не превосходит $1/\sqrt{2}$. В круге конечного радиуса можно разместить лишь конечное число непересекающихся кругов радиуса $1/2\sqrt{2}$.

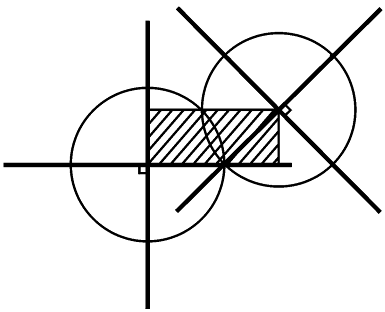


Рис. 21.9

21.25. Пусть Φ — данная фигура, $S_1, \ldots$ $\ldots, S_n$ — круги радиуса 1 с центрами в точках $A_1, \ldots, A_n$. Так как круги $S_1, \ldots, S_n$ попарно не пересекаются, то фигуры $V_i = \Phi \cap S_i$ попарно не пересекаются, а значит, сумма их площадей не превосходит площади фигуры Φ, т. е. она меньше π. Пусть O — произвольная точка и W_i — образ фигуры V_i при переносе на вектор $\overrightarrow{A_iO}$. Фигуры W_i лежат внутри круга S радиуса 1 с центром O и сумма их площадей меньше площади этого круга. Поэтому некоторая точка B круга S не принадлежит ни одной из фигур W_i. Перенос на вектор $\overrightarrow{BO}$ — искомый. Действительно, рассмотрим точку B_i, для которой $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{B_iA_i}$. При сдвиге на вектор $\overrightarrow{B_iA_i}$ фигура Φ переходит в фигуру, содержащую точку A_i, тогда и только тогда, когда точка B_i принадлежит V_i, т. е. точка B принадлежит W_i.

21.26. Заметим сначала, что точка X принадлежит кольцу с центром O тогда и только тогда, когда точка O принадлежит такому же кольцу с центром X. Поэтому достаточно доказать, что если построить кольца с центрами в данных точках, то одну из точек рассматриваемого круга покроет не менее 10 колец. Рассматриваемые кольца лежат внутри круга радиуса $16 + 3 = 19$, площадь которого равна 361π. Остаётся заметить, что $9 \cdot 361\pi = 3249\pi$, а суммарная площадь колец равна $650 \cdot 5\pi = 3250\pi$.

21.27. а) Пусть C_n^k — число способов выбрать k элементов из n. Можно проверить, что $(x+y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$ (бином Ньютона).

Обозначим через W_m площадь части плоскости, покрытой ровно m фигурами. Эта часть состоит из кусков, каждый из которых покрыт какими-то определёнными m фигурами. Площадь каждого такого куска при вычислении M_k учитывается C_m^k раз, так как из m фигур можно образовать C_m^k пересечений k фигур. Поэтому $M_k = C_k^k W_k + C_{k+1}^k W_{k+1} + \ldots + C_n^k W_n$. Следовательно, $M_1 - M_2 + M_3 - \ldots = C_1^1 W_1 + (C_2^1 - C_2^2) W_2 + \ldots + (C_n^1 - C_n^2 + C_n^3 - \ldots) W_n = W_1 + \ldots + W_n$, так как $C_m^1 - C_m^2 + C_m^3 - \ldots - (-1)^m C_m^m = (-1 + C_m^1 - C_m^2 + \ldots) + 1 = -(1-1)^m + 1 = 1$. Остаётся заметить, что $S = W_1 + \ldots + W_n$.

б) Согласно задаче а)

$$S - (M_1 - M_2 + \ldots + (-1)^{m+1} M_m) = (-1)^{m+2} M_{m+1} + (-1)^{m+3} M_{m+2} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n+1} M_n = \sum_{i=1}^{n} ((-1)^{m+2} C_i^{m+1} + \ldots + (-1)^{n+1} C_i^n) W_i$$

(считается, что если $k > i$, то $C_i^k = 0$). Поэтому достаточно проверить, что $C_i^{m+1} - C_i^{m+2} + C_i^{m+3} - \ldots + (-1)^{m+n+1} C_i^n \geqslant 0$ при $i \leqslant n$. Из тождества $(x+y)^i = (x+y)^{i-1}(x+y)$ следует равенство $C_i^j = C_{i-1}^{j-1} + C_{i-1}^j$. Поэтому $C_i^{m+1} - C_i^{m+2} + \ldots + (-1)^{m+n+1} C_i^n = C_{i-1}^m \pm C_{i-1}^n$. Остаётся заметить, что $C_{i-1}^n = 0$ при $i \leqslant n$.

21.28. а) Согласно задаче 21.27 а) $6 = 9 - (S_{12} + S_{23} + S_{13}) + S_{123}$, т. е. $S_{12} + S_{23} + S_{13} = 3 + S_{123} \geqslant 3$. Поэтому одно из чисел S_{12}, S_{23}, S_{13} не меньше 1.

б) Согласно задаче 21.27 б) $5 \geqslant 9 - M_2$, т. е. $M_2 \geqslant 4$. Так как из девяти многоугольников можно образовать $9 \cdot 8/2 = 36$ пар, площадь общей части одной из этих пар не меньше $M_2/36 \geqslant 1/9$.

21.29. Пусть площадь кафтана равна M, площадь пересечения заплат с номерами $i_1, \ldots, i_k$ равна $S_{i_1 \ldots i_k}$, а $M_k = \sum S_{i_1 \ldots i_k}$. Согласно задаче 21.27 а) $M - M_1 + M_2 - M_3 + M_4 - M_5 \geqslant 0$, так как $M \geqslant S$. Аналогичные неравенства можно написать не только для всего кафтана, но и для каждой заплаты: если мы рассмотрим заплату S_1 как кафтан с заплатами S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{15}, то получим $S_1 - \sum S_{1i} + \sum S_{1ij} - \sum S_{1ijk} + S_{12345} \geqslant 0$. Сложив такие неравенства для всех пяти заплат, получаем $M_1 - 2M_2 + 3M_3 - 4M_4 + 5M_5 \geqslant 0$ (слагаемое $S_{i_1 \dots i_k}$ входит в неравенства для заплат $i_1, \dots, i_k$, поэтому в сумму всех неравенств оно входит с коэффициентом k). Складывая неравенства $3(M - M_1 + M_2 - M_3 + M_4 - M_5) \geqslant 0$ и $M_1 - 2M_2 + 3M_3 - 4M_4 + 5M_5 \geqslant 0$, получаем неравенство $3M - 2M_1 + M_2 - M_4 + 2M_5 \geqslant 0$. Прибавив к нему неравенство $M_4 - 2M_5 \geqslant 0$ (оно следует из того, что S_{12345} входит во все $S_{i_1 i_2 i_3 i_4}$, т. е. $M_4 \geqslant 5M_5 \geqslant 2M_5$), получаем $3M - 2M_1 + M_2 \geqslant 0$, т. е. $M_2 \geqslant 2M_1 - 3M \geqslant$ $\geqslant 5 - 3 = 2$.

Так как из пяти заплат можно образовать десять пар, площадь пересечения одной из этих пар не меньше $M_2/10 \geqslant 0{,}2$.

21.30. Пусть $-1 \leqslant c \leqslant 1$. Сдвинем данный отрезок на c вдоль себя, а затем сдвинем его на c в ортогональном направлении. Заштрихованная на рис. 21.10

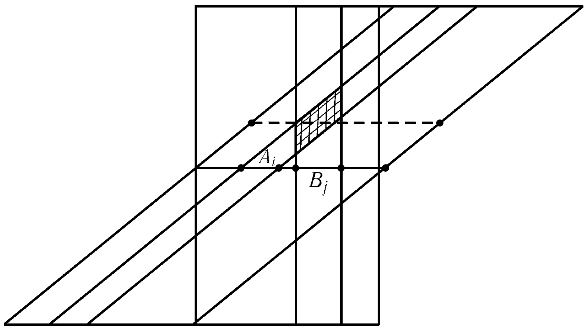


Рис. 21.10

область соответствует пересечению отрезков A_i и B_j. Её площадь равна произведению длин этих отрезков. Если рассмотреть все пары отрезков систем A и B, то заштрихованная область будет иметь площадь $p(1-p)$. Поэтому некоторое горизонтальное сечение заштрихованных областей имеет длину не меньше $p(1-p)/2$.

З а м е ч а н и е. Если вместо отрезка рассматривать окружность (и вместо параллельного переноса поворот), то $p(1-p)/2$ можно заменить на $p(1-p)$.

ГЛАВА 22

ВЫПУКЛЫЕ И НЕВЫПУКЛЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

Основные сведения

1. Есть несколько разных (но эквивалентных) определений выпуклого многоугольника. Приведём наиболее известные и часто встречающиеся из них. Многоугольник называют *выпуклым*, если выполнено одно из следующих условий:

а) он лежит по одну сторону от любой из своих сторон (т. е. продолжения сторон многоугольника не пересекают других его сторон);

б) он является пересечением (т. е. общей частью) нескольких полуплоскостей;

в) любой отрезок с концами в точках, принадлежащих многоугольнику, целиком ему принадлежит.

2. Фигуру называют *выпуклой*, если любой отрезок с концами в точках фигуры целиком принадлежит ей.

3. При решении некоторых задач этой главы используются понятия выпуклой оболочки и опорной прямой.

§ 1. Выпуклые многоугольники

22.1. На плоскости дано n точек, причём любые четыре из них являются вершинами выпуклого четырёхугольника. Докажите, что эти точки являются вершинами выпуклого n-угольника.

22.2. На плоскости дано пять точек, причём никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что четыре из этих точек расположены в вершинах выпуклого четырёхугольника.

22.3. Внутри квадрата $A_1A_2A_3A_4$ лежит выпуклый четырёхугольник $A_5A_6A_7A_8$. Внутри $A_5A_6A_7A_8$ выбрана точка A_9. Докажите, что из этих девяти точек можно выбрать 5 точек, расположенных в вершинах выпуклого пятиугольника.

22.4. На плоскости дано несколько правильных n-угольников. Докажите, что выпуклая оболочка их вершин имеет не менее n углов.

22.5. Среди всех таких чисел n, что любой выпуклый 100-угольник можно представить в виде пересечения (т. е. общей части) n треугольников, найдите наименьшее.

22.6. Назовём выпуклый семиугольник *особым*, если три его диагонали пересекаются в одной точке. Докажите, что, слегка пошевелив одну из вершин особого семиугольника, можно получить неособый семиугольник.

22.7. Выпуклый многоугольник $A_1 \dots A_n$ лежит внутри окружности S_1, а выпуклый многоугольник $B_1 \dots B_m$ — внутри S_2. Докажите, что если эти многоугольники пересекаются, то одна из точек $A_1, \dots, A_n$ лежит внутри S_2 или одна из точек $B_1, \dots, B_m$ лежит внутри S_1.

22.8*. Докажите, что существует такое число N, что среди любых N точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, можно выбрать 100 точек, являющихся вершинами выпуклого многоугольника.

22.9*. Выпуклый n-угольник разрезан на треугольники непересекающимися диагоналями. Рассмотрим преобразование такого разбиения, при котором треугольники ABC и ACD заменяются на треугольники ABD и BCD. Пусть $P(n)$ — наименьшее число преобразований, за которое любое разбиение можно перевести в любое другое. Докажите, что:

а) $P(n) \geqslant n - 3$;

б) $P(n) \leqslant 2n - 7$;

в) $P(n) \leqslant 2n - 10$ при $n \geqslant 13$.

* * *

22.10*. Докажите, что в любом выпуклом многоугольнике, кроме параллелограмма, можно выбрать три стороны, при продолжении которых образуется треугольник, объемлющий данный многоугольник.

22.11*. Дан выпуклый n-угольник, никакие две стороны которого не параллельны. Докажите, что различных треугольников, о которых идёт речь в задаче 22.10, не менее $n - 2$.

22.12*. Точка O лежит внутри выпуклого n-угольника $A_1 \dots A_n$. Докажите, что среди углов A_iOA_j не менее $n - 1$ не острых.

22.13*. В окружность вписан выпуклый n-угольник $A_1 \dots A_n$, причём среди его вершин нет диаметрально противоположных точек. Докажите, что если среди треугольников $A_pA_qA_r$ есть хотя бы один остроугольный, то таких остроугольных треугольников не менее $n - 2$.

22.14*. а) Докажите, что параллелограмм нельзя покрыть тремя меньшими гомотетичными ему параллелограммами.

б) Докажите, что любой выпуклый многоугольник, кроме параллелограмма, можно покрыть тремя меньшими гомотетичными ему многоугольниками.

§ 2. Изопериметрическое неравенство

Мы будем рассматривать фигуры, ограниченные гладкими или кусочно гладкими[1] кривыми. *Периметром* фигуры называют длину кривой, ограничивающей эту фигуру.

22.15. Докажите, что для любой невыпуклой фигуры Ψ существует выпуклая фигура с меньшим периметром и большей площадью.

[1]Состоящими из конечного числа дуг гладких кривых.

22.16. Докажите, что если существует фигура Φ', площадь которой не меньше площади фигуры Φ, а периметр — меньше, то существует фигура того же периметра, что и Φ, но большей площади.

22.17. Докажите, что если какая-либо хорда выпуклой фигуры Φ делит её на две части равного периметра, но разной площади, то существует выпуклая фигура Φ', имеющая тот же периметр, что и Φ, но бóльшую площадь.

22.18*. Докажите, что если выпуклая фигура Φ отлична от круга, то существует фигура Φ', имеющая тот же периметр, что и Φ, но бóльшую площадь.

22.19*. а) Докажите, что среди всех выпуклых четырёхугольников с данными углами и данным периметром наибольшую площадь имеет описанный четырёхугольник.

б) Докажите, что среди всех выпуклых n-угольников $A_1 \ldots A_n$ с данными величинами углов A_i и данным периметром наибольшую площадь имеет описанный n-угольник.

22.20*. Докажите, что площадь круга больше площади любой другой фигуры того же периметра. Другими словами, если площадь фигуры равна S, а её периметр равен P, то $S \leqslant P^2/4\pi$, причём равенство достигается только в случае круга (*изопериметрическое неравенство*).

22.21*. Докажите, что если соответственные стороны выпуклых многоугольников $A_1 \ldots A_n$ и $B_1 \ldots B_n$ равны, причём многоугольник $B_1 \ldots B_n$ вписанный, то его площадь не меньше площади многоугольника $A_1 \ldots A_n$.

22.22*. Несамопересекающаяся ломаная расположена в данной полуплоскости, причём концы ломаной лежат на границе этой полуплоскости. Длина ломаной равна L, а площадь многоугольника, ограниченного ломаной и границей полуплоскости, равна S. Докажите, что $S \leqslant L^2/2\pi$.

22.23*. Найдите кривую наименьшей длины, делящую равносторонний треугольник на две фигуры равной площади.

§ 3. Симметризация по Штейнеру

Пусть M — выпуклый многоугольник, l — некоторая прямая. *Симметризация по Штейнеру* многоугольника M относительно прямой l — это фигура Φ, которая получается следующим образом. Через каждую точку X прямой l проведём прямую m, перпендикулярную l. Если прямая m пересекает многоугольник M по отрезку длины a, то построим на m отрезок длины a с серединой в точке X. Построенные отрезки образуют фигуру Φ.

22.24*. Докажите, что симметризация по Штейнеру выпуклого многоугольника является выпуклым многоугольником.

22.25*. Докажите, что при симметризации по Штейнеру площадь многоугольника не изменяется, а его периметр не увеличивается.

§ 4. Сумма Минковского

22.26*. Пусть A и B — фиксированные точки, λ и μ — фиксированные числа. Выберем произвольную точку X и зададим точку P равенством $\overrightarrow{XP} = \lambda\overrightarrow{XA} + \mu\overrightarrow{XB}$. Докажите, что положение точки P не зависит от выбора точки X тогда и только тогда, когда $\lambda + \mu = 1$. Докажите также, что в этом случае точка P лежит на прямой AB.

Если $\lambda + \mu = 1$, то точку P из задачи 22.26 будем обозначать $\lambda A + \mu B$.

Пусть M_1 и M_2 — выпуклые многоугольники, λ_1 и λ_2 — положительные числа, сумма которых равна 1. Фигуру $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$, состоящую из всех точек вида $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$, где A_1 — точка M_1, а A_2 — точка M_2, называют *суммой Минковского* многоугольников M_1 и M_2. Сумму Минковского можно рассматривать не только для выпуклых многоугольников, но и для произвольных фигур (не обязательно выпуклых).

Аналогично для положительных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, сумма которых равна 1, можно рассмотреть фигуру $\lambda_1 M_1 + \ldots + \lambda_n M_n$. Можно рассматривать и фигуры $\lambda_1 M_1 + \ldots + \lambda_n M_n$ для $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n \neq 1$, но в этом случае фигура определена с точностью до параллельного переноса: при изменении точки X фигура сдвигается на некоторый вектор.

22.27*. а) Докажите, что если M_1 и M_2 — выпуклые многоугольники, то $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$ — выпуклый многоугольник, число сторон которого не превосходит суммы чисел сторон многоугольников M_1 и M_2.

б) Пусть P_1 и P_2 — периметры многоугольников M_1 и M_2. Докажите, что периметр многоугольника $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$ равен $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$.

22.28*. Пусть S_1 и S_2 — площади многоугольников M_1 и M_2. Докажите, что площадь $S(\lambda_1, \lambda_2)$ многоугольника $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$ равна

$$\lambda_1^2 S_1 + 2\lambda_1\lambda_2 S_{12} + \lambda_2^2 S_2,$$

где S_{12} зависит только от M_1 и M_2.

22.29*. Докажите, что $S_{12} \geqslant \sqrt{S_1 S_2}$, т. е. $\sqrt{S(\lambda_1, \lambda_2)} \geqslant \lambda_1\sqrt{S_1} + \lambda_2\sqrt{S_2}$ (Брунн).

22.30*. а) Пусть M — выпуклый многоугольник, площадь которого равна S, а периметр равен P; D — круг радиуса R. Докажите, что площадь фигуры $\lambda_1 M + \lambda_2 D$ равна

$$\lambda_1^2 S + \lambda_1\lambda_2 PR + \lambda_2^2 \pi R^2.$$

б) Докажите, что $S \leqslant P^2/4\pi$.

22.31*. Докажите, что выпуклый многоугольник имеет центр симметрии тогда и только тогда, когда его можно представить в виде суммы нескольких отрезков.

§ 5. Теорема Хелли

22.32*. а) На плоскости даны четыре выпуклые фигуры, причём любые три из них имеют общую точку. Докажите, что тогда и все они имеют общую точку.

б) На плоскости дано n выпуклых фигур, причём любые три из них имеют общую точку. Докажите, что все n фигур имеют общую точку (*теорема Хелли*).

22.33*. Решите с помощью теоремы Хелли задачу 20.33.

22.34*. а) Дан выпуклый многоугольник. Известно, что для любых трёх его сторон можно выбрать точку O внутри многоугольника так, что перпендикуляры, опущенные из точки O на эти три стороны, попадают на сами стороны, а не на их продолжения. Докажите, что тогда такую точку O можно выбрать для всех сторон одновременно.

б) Докажите, что в случае выпуклого четырёхугольника такую точку O можно выбрать, если её можно выбрать для любых двух сторон.

22.35*. Докажите, что внутри любого выпуклого семиугольника есть точка, не принадлежащая ни одному из четырёхугольников, образованных четвёрками его соседних вершин.

22.36*. Дано несколько параллельных отрезков, причём для любых трёх из них найдётся прямая, их пересекающая. Докажите, что найдётся прямая, пересекающая все отрезки.

§ 6. Невыпуклые многоугольники

22.37. Верно ли, что любой пятиугольник лежит по одну сторону от не менее чем двух своих сторон?

22.38. а) Нарисуйте многоугольник и точку O внутри его так, чтобы ни одна сторона не была видна из неё полностью.

б) Нарисуйте многоугольник и точку O вне его так, чтобы ни одна сторона не была видна из неё полностью.

22.39. Докажите, что если многоугольник таков, что из некоторой точки O виден весь его контур, то из любой точки плоскости полностью видна хотя бы одна его сторона.

22.40. Докажите, что сумма внешних углов любого многоугольника, прилегающих к меньшим 180° внутренним углам, не меньше 360°.

22.41*. а) Докажите, что у любого n-угольника ($n \geqslant 4$) есть хотя бы одна диагональ, целиком лежащая внутри его.

б) Выясните, какое наименьшее число таких диагоналей может иметь n-угольник.

22.42*. Чему равно наибольшее число вершин невыпуклого n-угольника, из которых нельзя провести диагональ?

22.43*. Докажите, что любой n-угольник можно разрезать на треугольники непересекающимися диагоналями.

22.44*. Докажите, что сумма внутренних углов любого n-угольника равна $(n-2)\cdot 180^\circ$.

22.45*. Докажите, что количество треугольников, на которые непересекающиеся диагонали разбивают n-угольник, равно $n-2$.

22.46*. Многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что по крайней мере две из этих диагоналей отсекают от него треугольники.

22.47*. Докажите, что для любого тринадцатиугольника найдётся прямая, содержащая ровно одну его сторону, однако при любом $n > 13$ существует n-угольник, для которого это неверно.

22.48*. Чему равно наибольшее число острых углов в невыпуклом n-угольнике?

22.49*. С невыпуклым несамопересекающимся многоугольником производятся следующие операции. Если он лежит по одну сторону от прямой AB, где A и B — несмежные вершины, то одна из частей, на которые контур многоугольника делится точками A и B, отражается относительно середины отрезка AB. Докажите, что после нескольких таких операций многоугольник станет выпуклым.

22.50*. Числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, сумма которых равна $(n-2)\pi$, удовлетворяют неравенствам $0 < \alpha_i < 2\pi$. Докажите, что существует n-угольник $A_1 \ldots A_n$ с углами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ при вершинах $A_1, \ldots, A_n$.

См. также задачи 9.29 а), 9.94, 23.1, 23.35.

Решения

22.1. Рассмотрим выпуклую оболочку данных точек. Она является выпуклым многоугольником. Нужно доказать, что все данные точки — его вершины. Предположим, что одна из данных точек (точка A) не является вершиной, т. е. лежит внутри или на стороне этого многоугольника. Диагоналями, выходящими из одной вершины, выпуклую оболочку можно разрезать на треугольники; точка A принадлежит одному из них. Вершины этого треугольника и точка A не могут быть вершинами выпуклого четырёхугольника. Получено противоречие.

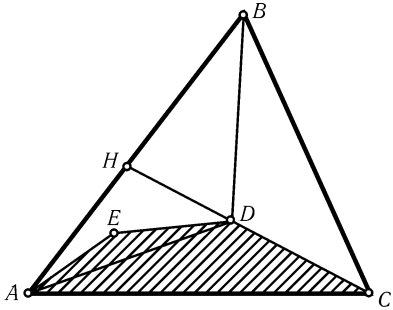


Рис. 22.1

22.2. Рассмотрим выпуклую оболочку данных точек. Если она является четырёх- или пятиугольником, то всё ясно. Допустим теперь, что выпуклая оболочка является треугольником ABC, а точки D и E лежат внутри его. Точка E лежит внутри одного из треугольников ABD, BCD, CAD; пусть для определённости она лежит внутри треугольника ABD. Обозначим точку пересечения прямых CD и AB через H. Точка E лежит внутри одного из треугольников ADH и BDH. Если, например, E лежит внутри треугольника ADH, то $AEDC$ — выпуклый четырёхугольник (рис. 22.1).

22.3. Предположим, что требуемого выпуклого пятиугольника нет. Проведём из точки A_9 лучи через точки A_5, A_6, A_7, A_8. Эти лучи разбивают плоскость на 4 угла, каждый из которых меньше 180°. Если внутри одного из этих углов лежат две из точек A_1, A_2, A_3, A_4, то мы немедленно получаем требуемый пятиугольник. Поэтому внутри каждого из этих углов лежит ровно одна из указанных точек. Но тогда внутри каждого из двух углов, образованных лучами A_9A_5 и A_9A_7, лежат две из указанных точек. Рассмотрев тот из углов, который меньше 180°, снова получаем требуемый пятиугольник.

22.4. Пусть выпуклая оболочка вершин данных n-угольников является m-угольником и $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ — его углы. Так как к каждому углу выпуклой оболочки прилегает угол правильного n-угольника, то $\varphi_i \geqslant (1 - (2/n))\pi$ (справа стоит величина угла правильного n-угольника). Поэтому $\varphi_1 + \ldots + \varphi_m \geqslant$ $\geqslant m(1 - (2/n))\pi = (m - (2m/n))\pi$. С другой стороны, $\varphi_1 + \ldots + \varphi_m = (m - 2)\pi$. Следовательно, $(m - 2)\pi \geqslant (m - (2m/n))\pi$, т. е. $m \geqslant n$.

22.5. Заметим сначала, что 50 треугольников достаточно. В самом деле, пусть Δ_k — треугольник, стороны которого лежат на лучах A_kA_{k-1} и A_kA_{k+1} и который содержит выпуклый многоугольник $A_1 \ldots A_{100}$. Тогда этот многоугольник является пересечением треугольников $\Delta_2, \Delta_4, \ldots, \Delta_{100}$. С другой стороны, 100-угольник, изображённый на рис. 22.2, нельзя представить в виде

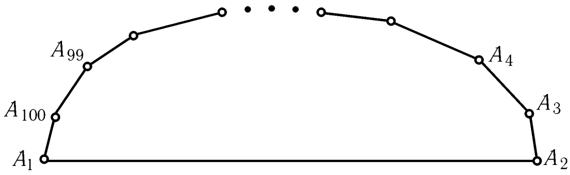


Рис. 22.2

пересечения менее чем 50 треугольников. В самом деле, если три его стороны лежат на сторонах одного треугольника, то одна из этих сторон — сторона A_1A_2. Все стороны этого многоугольника лежат на сторонах n треугольников, поэтому $2n + 1 \geqslant 100$, т. е. $n \geqslant 50$.

22.6. Пусть P — точка пересечения диагоналей A_1A_4 и A_2A_5 выпуклого семиугольника $A_1 \ldots A_7$. Одна из диагоналей A_3A_7 и A_3A_6, для определённости диагональ A_3A_6, не проходит через точку P. Точек пересечения диагоналей шестиугольника $A_1 \ldots A_6$ конечное число, поэтому вблизи точки A_7 можно выбрать такую точку A_7', что прямые $A_1A_7', \ldots, A_6A_7'$ не проходят через эти точки, т. е. семиугольник $A_1 \ldots A_7'$ неособый.

22.7. Предположим, что точки $A_1, \ldots, A_n$ лежат вне S_2, а точки $B_1, \ldots, B_m$ лежат вне S_1. Тогда окружность S_1 не может лежать внутри S_2, а окружность S_2 — внутри S_1. Окружности S_1 и S_2 не могут также быть расположены вне друг друга (или касаться внешним образом), поскольку иначе многоугольники $A_1 \ldots A_n$ и $B_1 \ldots B_m$ не могли бы пересекаться. Таким образом, окружности S_1 и S_2 пересекаются. При этом многоугольник $A_1 \ldots A_n$ лежит внутри S_1 и вне S_2, а многоугольник $B_1 \ldots B_m$ — внутри S_2 и вне S_1. Следовательно, эти многоугольники расположены по разные стороны от прямой, проходящей через точки пересечения окружностей S_1 и S_2. Но тогда они не могут пересекаться. Приходим к противоречию.

22.8. Мы докажем более общее утверждение. Пусть p, q и r — натуральные числа, причём $p, q \geqslant r$. Тогда существует число $N = N(p, q, r)$, обладающее следующим свойством: если все r-элементные подмножества N-элементного множества S произвольным образом разбиты на два непересекающихся семейства α и β, то либо существует p-элементное подмножество множества S, все r-элементные подмножества которого содержатся в α, либо существует q-элементное подмножество, все r-элементные подмножества которого содержатся в β (теорема Рамсея).

Требуемое утверждение легко следует из теоремы Рамсея. В самом деле, пусть $N = N(n, 5, 4)$ и семейство α состоит из тех четырёхэлементных подмножеств N-элементного множества точек, выпуклые оболочки которых — четырёхугольники. Тогда существует n-элементное подмножество данного множества точек, выпуклые оболочки любых четырёхэлементных подмножеств которого — четырёхугольники, так как пятиэлементного подмножества, выпуклые оболочки любых четырёхэлементных подмножеств которого — треугольники, не существует (см. задачу 22.2). Остаётся воспользоваться результатом задачи 22.1.

Докажем теперь теорему Рамсея. Легко проверить, что в качестве $N(p, q, 1)$, $N(r, q, r)$ и $N(p, r, r)$ можно взять числа $p + q - 1$, q и p соответственно. Докажем теперь, что если $p > r$ и $q > r$, то в качестве $N(p, q, r)$ можно взять число $N(p_1, q_1, r-1) + 1$, где $p_1 = N(p-1, q, r)$ и $q_1 = N(p, q-1, r)$. В самом деле, выбросим из $N(p, q, r)$-элементного множества S один элемент и разобьём $(r-1)$-элементные подмножества оставшегося множества S' на два семейства: семейство α' (соответственно β') состоит из тех подмножеств, объединения которых с выброшенным элементом входят в семейство α (соответственно β). Тогда либо существует p_1-элементное подмножество множества S', все $(r-1)$-элементные подмножества которого содержатся в семействе α', либо существует q_1-элементное подмножество, все $(r-1)$-элементные подмножества которого содержатся в семействе β'. Рассмотрим первый случай. Так как $p_1 = N(p-1, q, r)$, то либо существует q-элементное подмножество множества S', все r-элементные подмножества которого лежат в β (тогда эти q элементов искомые), либо существует $(p-1)$-элементное подмножество множества S', все r-элементные подмножества которого содержатся в α (тогда эти $p-1$ элементов вместе с выброшенным элементом искомые). Второй случай рассматривается аналогично.

Итак, доказательство теоремы Рамсея можно провести индукцией по r, причём при доказательстве шага индукции используется индукция по $p + q$.

22.9. а) Пусть A и B — соседние вершины n-угольника. Рассмотрим разбиение n-угольника диагоналями, выходящими из вершины A, и разбиение диагоналями, выходящими из вершины B. У этих разбиений нет общих диагоналей, а каждое преобразование изменяет только одну диагональ.

б) Индукцией по n легко доказать, что любое разбиение можно перевести в разбиение диагоналями, выходящими из данной вершины A, не более чем за $n-3$ преобразования. Действительно, при $n = 4$ это очевидно. При $n > 4$ всегда можно сделать одно преобразование так, чтобы появилась диагональ, выходящая из вершины A (если такой диагонали не было). Эта диагональ разбивает n-угольник на k-угольник и l-угольник, где $k + l = n + 2$. Остаётся заметить, что $(k-3) + (l-3) + 1 = n - 3$.

Ясно также, что если m диагоналей разбиения уже выходят из вершины A, то нужно не более $n-3-m$ преобразований, т. е. m преобразований можно сэкономить.

Если заданы два разбиения, то их можно перевести в разбиение диагоналями, выходящими из вершины A, за $2(n-3)$ преобразований. Одно преобразование можно сэкономить, выбрав в качестве A вершину, из которой выходит одна из диагоналей одного из разбиений. Поэтому от любого разбиения можно перейти к любому другому не более чем за $2n-7$ преобразований (пройдя через разбиение диагоналями, выходящими из вершины A).

в) Два разбиения содержат $2(n-3)$ диагоналей, поэтому в среднем из каждой вершины выходит $\dfrac{4(n-3)}{n} = 4 - \dfrac{12}{n}$ диагоналей двух данных разбиений. При $n \geqslant 13$ это число больше 3, поэтому найдётся вершина, из которой выходят по крайней мере 4 диагонали данных разбиений. Выбрав её, можно сэкономить не одно, а четыре преобразования.

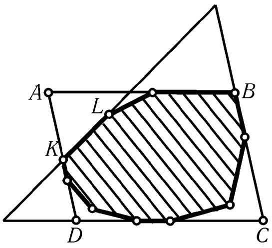


Рис. 22.3

22.10. Если многоугольник не треугольник и не параллелограмм, то у него найдутся две непараллельные несоседние стороны. Продолжив их до пересечения, получим новый многоугольник, содержащий исходный и имеющий меньшее число сторон. После нескольких таких операций получим треугольник или параллелограмм. Если получится треугольник, то всё доказано; поэтому будем считать, что получился параллелограмм $ABCD$. На каждой его стороне лежит сторона исходного многоугольника, и одна из его вершин, например A, не принадлежит исходному многоугольнику (рис. 22.3). Пусть K — ближайшая к A вершина многоугольника, лежащая на AD, а KL — сторона, не лежащая на AD. Тогда многоугольник заключён внутри треугольника, образованного прямыми KL, BC и CD.

22.11. Доказательство проведём индукцией по n. При $n=3$ утверждение очевидно. Согласно задаче 22.10 существуют прямые a, b и c, являющиеся продолжениями сторон данного n-угольника и образующие треугольник T, который содержит данный n-угольник. Пусть прямая l является продолжением какой-либо другой стороны данного n-угольника. Продолжения всех сторон n-угольника, кроме стороны, лежащей на прямой l, образуют выпуклый $(n-1)$-угольник, лежащий внутри треугольника T. По предположению индукции для этого $(n-1)$-угольника найдётся $n-3$ нужных треугольника. Кроме того, прямая l и две из прямых a, b и c тоже образуют нужный треугольник.

З а м е ч а н и е. Если точки $A_2, \ldots, A_n$ лежат на окружности с центром A_1, причём $\angle A_2A_1A_n < 90^\circ$ и n-угольник $A_1 \ldots A_n$ выпуклый, то для этого n-угольника существует ровно $n-2$ нужных треугольников.

22.12. Доказательство проведём индукцией по n. При $n=3$ доказательство очевидно. Рассмотрим теперь n-угольник $A_1 \ldots A_n$, где $n \geqslant 4$. Точка O лежит внутри некоторого треугольника $A_pA_qA_r$. Пусть A_k — вершина данного n-угольника, отличная от точек A_p, A_q и A_r. Выбросив вершину A_k, из n-угольника $A_1 \ldots A_n$ получим $(n-1)$-угольник, к которому можно применить предположение индукции. Кроме того, углы A_kOA_p, A_kOA_q и A_kOA_r не могут быть все острыми, так как сумма некоторых двух из этих углов больше 180°.

22.13. Доказательство проведём индукцией по n. При $n=3$ утверждение очевидно. Пусть $n \geqslant 4$. Фиксируем один остроугольный треугольник $A_pA_qA_r$ и выбросим вершину A_k, отличную от вершин этого треугольника. К полученному $(n-1)$-угольнику можно применить предположение индукции. Кроме того, если, например, точка A_k лежит на дуге A_pA_q и $\angle A_kA_pA_r \leqslant \angle A_kA_qA_r$, то треугольник $A_kA_pA_r$ остроугольный. В самом деле, $\angle A_pA_kA_r = \angle A_pA_qA_r$, $\angle A_pA_rA_k < \angle A_pA_rA_q$ и $\angle A_kA_pA_r \leqslant 90^\circ$, а значит, $\angle A_kA_pA_r < 90^\circ$.

22.14. а) Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм. В меньшем параллелограмме, гомотетичном ему, любой отрезок, параллельный стороне AB, строго меньше AB. То же самое верно не только для сторон, но и для диагоналей. Поэтому каждую из четырёх вершин параллелограмма должен покрывать свой параллелограмм.

б) Пусть выпуклый многоугольник M отличен от параллелограмма. Воспользовавшись результатом задачи 22.10, выберем три стороны многоугольника M, при продолжении которых образуется треугольник ABC, объемлющий многоугольник M. Затем выберем на этих трёх сторонах точки A_1, B_1 и C_1, отличные от вершин многоугольника (точка A_1 лежит на прямой BC и т. д.). Наконец, выберем произвольную точку O внутри многоугольника M. Отрезки OA_1, OB_1 и OC_1 разрезают M на три части. Рассмотрим гомотетию с центром A. Если коэффициент этой гомотетии достаточно близок к 1, то образ многоугольника M полностью покрывает ту часть, которую отрезают OB_1 и OC_1. Две остальные части покрываются аналогично.

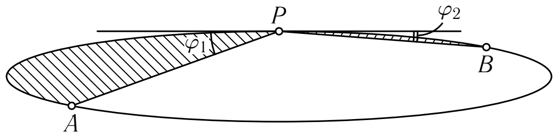
22.15. Для каждого направления проведём опорные прямые к фигуре Ψ и рассмотрим пересечение всех полуплоскостей, заданных этими прямыми и содержащих Ψ. В результате получим выпуклую фигуру Φ. Она содержит Ψ, поэтому её площадь больше. Кривая, ограничивающая Φ, отличается от кривой, ограничивающей Ψ, тем, что некоторые криволинейные участки (или ломаные) заменены прямолинейными отрезками. Поэтому периметр Φ меньше периметра Ψ.

22.16. Пусть P и P' — периметры фигур Φ и Φ', S и S' — их площади. При гомотетии с коэффициентом $P/P' > 1$ фигура Φ' переходит в фигуру, периметр которой равен P, а площадь равна $(P/P')^2S' > S$.

22.17. Пусть хорда AB делит фигуру Φ на две части Φ_1 и Φ_2, периметры которых равны, а площадь Φ_1 больше площади Φ_2. Тогда фигура, состоящая из Φ_1 и фигуры, симметричной Φ_1 относительно AB, имеет тот же периметр, что и Φ, но бо́льшую площадь.

Полученная фигура может оказаться невыпуклой. В этом случае, пользуясь результатами задач 22.15 и 22.16, можно построить выпуклую фигуру того же периметра и ещё большей площади.

22.18. Рассмотрим хорду AB, делящую пополам периметр фигуры Φ. Если AB делит фигуру Φ на две части разной площади, то согласно задаче 22.17 существует фигура Φ', которая имеет тот же периметр, что и Φ, но бо́льшую площадь. Поэтому будем считать, что хорда AB делит фигуру Φ на две части равной площади. На границе Φ есть точка P, для которой $\angle APB \neq 90^\circ$, поскольку иначе Φ — круг с диаметром AB. Займёмся построением требуемой фигуры Φ'. Построим прямоугольный треугольник $P_1A_1B_1$ с катетами $P_1A_1 = PA$ и $P_1B_1 = PB$ и приставим к его катетам сегменты, отсекаемые хордами PA и PB (рис. 22.4). Если такой сегмент будет теперь разрезан прямой A_1B_1, то, отразив одну из его частей относительно точки пересечения границы с прямой A_1B_1, получим фигуру, лежащую по одну сторону от прямой A_1B_1. Сегменты, прилегающие к катетам A_1P_1 и P_1B_1, не могут пересечься, поскольку угол между опорными прямыми в точке P_1 равен $90^\circ + \varphi_1 + \varphi_2 = 90^\circ + (180^\circ - \angle APB) < 270^\circ$.



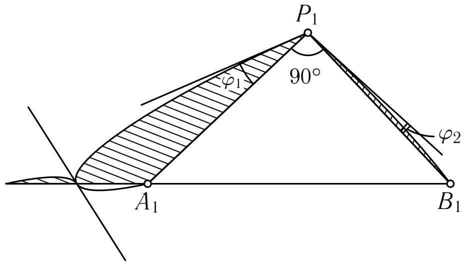


Рис. 22.4

Пусть Φ' — фигура, состоящая из построенной нами фигуры и фигуры, симметричной ей относительно прямой A_1B_1. Тогда Φ' имеет тот же периметр, что и Φ, но бо́льшую площадь, так как

$$S_{A_1P_1B_1} = \frac{1}{2}A_1P_1 \cdot B_1P_1 > \frac{1}{2}AP \cdot BP \sin APB = S_{APB}.$$

Замечание. Этими рассуждениями мы не доказали, что среди всех фигур данного периметра наибольшую площадь имеет круг. Мы не доказывали, что среди всех фигур данного периметра есть фигура наибольшей площади.

22.19. Для всех подобных многоугольников отношение площади к квадрату периметра постоянно. Поэтому достаточно доказать, что среди всех выпуклых многоугольников с данными углами отношение площади к квадрату периметра будет наибольшим для описанного многоугольника.

а) Рассмотрим сначала случай, когда четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм с заданным углом α. Если его стороны равны a и b, то отношение площади к квадрату периметра равно

$$\frac{ab \sin\alpha}{4(a+b)^2} \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{\sin\alpha}{4(a+b)^2} = \frac{1}{16}\sin\alpha,$$

причём равенство достигается только при $a = b$, т. е. в случае, когда $ABCD$ — ромб. Ромб является описанным четырёхугольником.

Будем теперь считать, что $ABCD$ — не параллелограмм. Тогда продолжения двух его сторон пересекаются. Пусть для определённости лучи AB и DC пересекаются в точке E. Проведём прямую $B'C' \parallel BC$, касающуюся вписанной в треугольник AED окружности (рис. 22.5; точки B' и C' лежат на сторонах

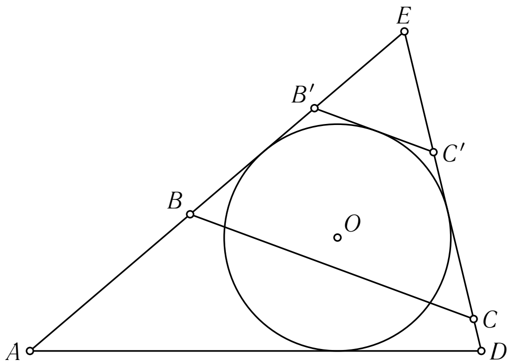


Рис. 22.5

AE и DE). Пусть r — радиус вписанной окружности треугольника AED, O — её центр. Тогда

$$S_{EB'C'} = S_{EB'O} + S_{EOC'} - S_{OB'C'} = \frac{r}{2}(EB' + EC' - B'C') = qr,$$

где $q = (EB' + EC' - B'C')/2$. Поэтому

$$S_{ABCD} = S_{AED} - S_{EBC} = S_{AED} - k^2 S_{EB'C'} = pr - k^2 qr,$$

где p — полупериметр треугольника AED, $k = EB/EB'$. Вычислим теперь периметр $ABCD$. Сумма периметров $ABCD$ и EBC равна сумме периметра AED и $2BC$, поэтому периметр $ABCD$ равен $2p - (EB + EC - BC) = 2p - 2kq$. Следовательно, отношение площади четырёхугольника $ABCD$ к квадрату его периметра равно $\dfrac{pr - k^2qr}{4(p - kq)^2}$. Для описанного четырёхугольника $AB'C'D'$ такое отношение равно $\dfrac{pr - qr}{4(p - q)^2}$, поскольку для него $k = 1$. Остаётся доказать неравенство $\dfrac{pr - k^2qr}{4(p - kq)^2} \leqslant \dfrac{pr - qr}{4(p - q)^2}$, т. е. $\dfrac{p - k^2q}{(p - kq)^2} \leqslant \dfrac{1}{p - q}$ (сократить на $p - q$ можно, потому что $p > q$). Неравенство $(p - k^2q)(p - q) \leqslant (p - kq)^2$ верно, поскольку его можно привести к виду $-pq(1 - k)^2 \leqslant 0$. Равенство достигается только при $k = 1$, т. е. в случае, когда четырёхугольник $ABCD$ описанный.

б) Доказательство проведём индукцией по n. Для $n = 4$ утверждение доказано в задаче а). Доказательство шага индукции начнём с доказательства того, что при $n \geqslant 5$ у любого n-угольника есть сторона, для которой сумма прилегающих к ней углов больше 180°. Действительно, сумма всех пар углов, прилегающих к сторонам, равна удвоенной сумме углов n-угольника, поэтому сумма углов, прилегающих к одной из сторон, не меньше $(n - 2) \cdot 360^\circ/n \geqslant 360^\circ \cdot 3/5 > 180^\circ$.

Пусть для определённости сумма углов при вершинах A_1 и A_2 больше 180°. Тогда лучи A_nA_1 и A_3A_2 пересекаются в точке B (рис. 22.6). Рассмотрим также вспомогательный описанный n-угольник $A'_1\dots A'_n$ со сторонами, параллельными сторонам n-угольника $A_1\dots A_n$. Обозначим точку пересечения лучей $A'_nA'_1$ и $A'_3A'_2$ через B'. Для облегчения вычислений будем считать, что периметры $(n-1)$-угольников $BA_3A_4\dots A_{n-1}$ и $B'A'_3A'_4\dots A'_{n-1}$ одинаковы и равны P (этого можно добиться переходом к подобным многоугольникам).

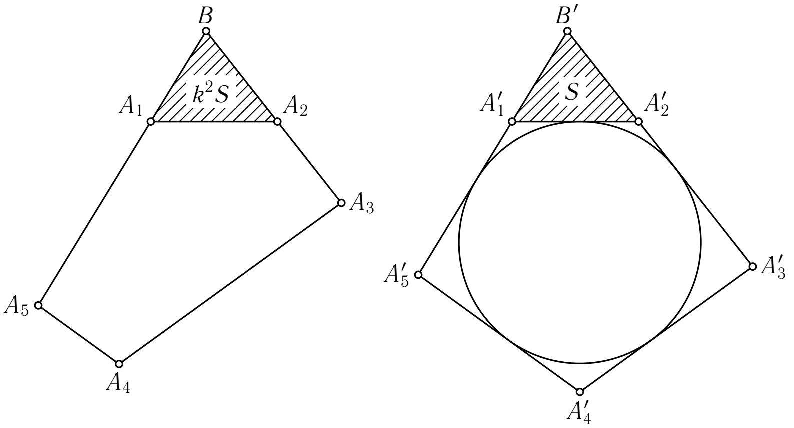


Рис. 22.6

Пусть r — радиус вписанной окружности многоугольника $A'_1\dots A'_n$. Тогда площадь многоугольника $B'A'_3A'_4\dots A'_{n-1}$ равна $rP/2$. По предположению индукции площадь $(n-1)$-угольника $BA_3A_4\dots A_{n-1}$ не больше площади $B'A'_3A'_4\dots A'_{n-1}$, т. е. она равна $\alpha rP/2$, где $\alpha\leqslant 1$, причём $\alpha=1$ только в случае, когда многоугольник $B'A'_3A'_4\dots A'_{n-1}$ описанный.

Пусть площадь треугольника $A'_1A'_2B'$ равна S, а коэффициент подобия треугольников A_1A_2B и $A'_1A'_2B'$ равен k. Тогда площадь треугольника A_1A_2B равна k^2S. Ясно, что

$$S=\frac{1}{2}rA'_1B'+\frac{1}{2}rA'_2B'-\frac{1}{2}rA'_1A'_2=\frac{1}{2}rq,$$

где $q=A'_1B'+A'_2B'-A'_1A'_2$. Поэтому площади многоугольников $A_1\dots A_n$ и $A'_1\dots A'_n$ равны $r(P-q)/2$ и $r(\alpha P-k^2q)/2$, а их периметры равны $P-q$ и $P-kq$. Остаётся доказать, что

$$\frac{\alpha P-k^2q}{(P-kq)^2}\leqslant\frac{P-q}{(P-q)^2}=\frac{1}{P-q},$$

причём равенство достигается только при $\alpha=1$ и $k=1$ (если $\alpha=1$, то многоугольники $BA_3A_4\dots A_{n-1}$ и $B'A'_3A'_4\dots A'_{n-1}$ равны, а если при этом ещё и $k=1$, то $\triangle A_1A_2B=\triangle A'_1A'_2B'$, т. е. многоугольники $A_1\dots A_n$ и $A'_1\dots A'_n$ равны). Несложные вычисления показывают, что неравенство $(P-q)(\alpha P-k^2q)\leqslant$ $\leqslant(P-kq)^2$ эквивалентно неравенству

$$0\leqslant Pq(1-k)^2+(1-\alpha)(P-q)P.$$

Последнее неравенство справедливо, причём равенство достигается только при $\alpha = 1$ и $k = 1$.

22.20. Для любой невыпуклой фигуры существует выпуклая фигура того же периметра и большей площади (задачи 22.15 и 22.16). Поэтому можно ограничиться выпуклыми фигурами.

Пусть Φ — выпуклая фигура, отличная от круга, K — круг. Нужно доказать, что для K отношение площади к квадрату периметра больше, чем для Φ. Площадь и периметр Φ и K можно определить как предел площадей и периметров описанных вокруг Φ и K многоугольников, все внешние углы которых стремятся к нулю. Пусть некоторый многоугольник описан вокруг K. Рассмотрим другой многоугольник, соответственные стороны которого параллельны сторонам первого, а описан он вокруг Φ. Для первого многоугольника отношение площади к квадрату периметра больше, чем для второго (задача 22.19). Переходя к пределу, получаем, что отношение площади к квадрату периметра для K не меньше, чем для Φ.

Если фигура Φ периметра 1 отлична от круга, то её площадь не может равняться площади круга периметра 1, поскольку тогда существовала бы фигура Φ' периметра 1, площадь которой была бы больше площади Φ (задача 22.18), т. е. больше площади круга периметра 1.

Замечание. Другое доказательство требуемого утверждения приведено в решении задачи 22.30 б).

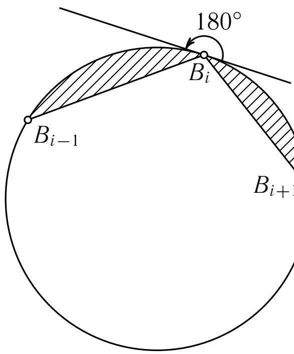


Рис. 22.7

22.21. Пусть K — круг, в который вписан многоугольник $B_1 \ldots B_n$. Построим на каждой стороне A_iA_{i+1} многоугольника $A_1 \ldots A_n$ внешним образом сегмент, равный сегменту, отсекаемому стороной B_iB_{i+1} от круга K, и рассмотрим фигуру Φ, состоящую из многоугольника $A_1 \ldots A_n$ и этих сегментов. Два таких сегмента могут пересечься только если $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1} - \angle B_{i-1}B_iB_{i+1} > 180^\circ$ (рис. 22.7), а этого не может быть, поскольку многоугольник $A_1 \ldots A_n$ выпуклый. Поэтому $S_\Phi = S_{A_1 \ldots A_n} + S$ и $S_K = S_{B_1 \ldots B_n} + S$, где S — сумма площадей сегментов. Ясно также, что $P_\Phi = P_K$. Следовательно, согласно изопериметрическому неравенству $S_K \geqslant S_\Phi$, т. е. $S_{B_1 \ldots B_n} \geqslant S_{A_1 \ldots A_n}$, причём равенство достигается только в том случае, когда Φ — круг, а многоугольник $A_1 \ldots A_n$ вписанный.

22.22. Добавим к данному многоугольнику многоугольник, симметричный ему относительно границы полуплоскости. Полученный многоугольник имеет площадь $2S$ и периметр $2L$. Поэтому согласно изопериметрическому неравенству $2S \leqslant (2L)^2/4\pi$, т. е. $S \leqslant L^2/2\pi$.

22.23. Рассмотрим кривую, делящую равносторонний треугольник ABC на две фигуры площади $S/2$. Возможны два случая: либо кривая отделяет одну из вершин треугольника (для определённости вершину A) от противоположной стороны, либо кривая замкнута. Во втором случае согласно задаче 22.20 длина кривой не меньше $\sqrt{2\pi S}$. Рассмотрим теперь первый случай. Образы кривой при последовательных симметриях относительно прямых AC, AB_1,

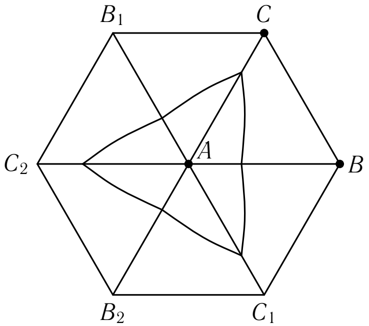


Рис. 22.8

AC_2, AB_2 и AC_1 (рис. 22.8) образуют замкнутую кривую, ограничивающую фигуру площади $3S$. Поэтому искомая кривая — дуга окружности радиуса $\sqrt{3S/\pi}$ с центром в точке A. Её длина равна $\sqrt{\pi S/3} < \sqrt{2\pi S}$.

22.24. Пусть M' — симметризация по Штейнеру выпуклого многоугольника M относительно прямой l. Нужно доказать, что если A и B — точки M', то весь отрезок AB принадлежит M'. Рассмотрим два отрезка, по которым пересекают M' прямые, проходящие через точки A и B перпендикулярно l. Эти прямые пересекают M по двум отрезкам такой же длины. Выпуклая оболочка этих отрезков является трапецией, целиком лежащей в M. При симметризации этой трапеции получается трапеция, лежащая в M'. Отрезок AB принадлежит полученной трапеции, поэтому он принадлежит M'.

22.25. Проведём через каждую вершину многоугольника M прямую, перпендикулярную прямой l. Эти прямые разрезают многоугольник на трапеции (некоторые из трапеций могут вырождаться в треугольники). При симметризации по Штейнеру каждая такая трапеция заменяется на равнобочную трапецию с теми же основаниями и той же высотой. Ясно, что при такой замене площадь трапеции не изменяется. Остаётся проверить, что периметр не увеличивается. При этом достаточно рассмотреть случай, когда трапеция вырождается в треугольник. Действительно, если $ABCD$ — трапеция с основаниями AB и CD, где $AB \leqslant CD$, то от неё можно отрезать параллелограмм $ABCD'$.

Итак, пусть ABC — треугольник, у которого сторона AB фиксирована, а вершина C движется по прямой m, параллельной AB. Пусть точка B' симметрична точке B относительно прямой m. Тогда $AC + CB = AC + CB' \geqslant AB'$. Равенство достигается тогда и только тогда, когда $AC = CB$.

22.26. Если $\overrightarrow{XP} = \lambda\overrightarrow{XA} + \mu\overrightarrow{XB}$, то $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XP} = (\lambda - 1)\overrightarrow{XA} + \mu\overrightarrow{XB} = (\lambda - 1 + \mu)\overrightarrow{XA} + \mu\overrightarrow{AB}$. Поэтому вектор $\overrightarrow{AP}$ не зависит от выбора точки X тогда и только тогда, когда $\lambda - 1 + \mu = 0$. В этом случае $\overrightarrow{AP} = \mu\overrightarrow{AB}$, поэтому точка P лежит на прямой AB.

22.27. Пусть $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$ и $\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2$ — точки фигуры $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$ (здесь A_i и B_i — точки многоугольника M_i). Тогда фигура $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$ содержит параллелограмм с вершинами $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$, $\lambda_1 B_1 + \lambda_2 A_2$, $\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2$, $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 B_2$. Выпуклость фигуры $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$ следует из того, что она содержит диагональ этого параллелограмма.

Предположим, что многоугольники M_1 и M_2 лежат по одну стороны от некоторой прямой l. Будем сдвигать эту прямую параллельно самой себе до тех пор, пока она впервые не соприкоснётся с M_1 и с M_2 (вообще говоря, в разные моменты времени). Пусть a_1 и a_2 — длины отрезков, по которым l пересекает M_1 и M_2 в момент соприкосновения ($a_i = 0$, если прямая l не параллельна сторонам многоугольника M_i). Тогда в момент соприкосновения с фигурой $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$ прямая l пересекает её по отрезку длины $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$. Число $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$ отлично от нуля лишь в том случае, когда одно из чисел a_1 и a_2 отлично от нуля.

22.28. Выберем внутри многоугольника M_i точку O_i и разрежем его на треугольники с вершиной O_i; многоугольник $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$ разрежем на треугольники с вершиной $O = \lambda_1 O_1 + \lambda_2 O_2$. Снова, как и в решении задачи 22.27, возьмём прямую l и рассмотрим отрезки, по которым прямая l пересекает M_1 и M_2 в первые моменты соприкосновения. Пусть a_1 и a_2 — длины этих отрезков. Паре треугольников с основаниями a_1 и a_2 и высотами h_1 и h_2 соответствует треугольник с основанием $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$ и высотой $\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2$. Остаётся заметить, что

$$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2)(\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2) = \lambda_1^2 a_1 h_1 + \lambda_1 \lambda_2 (a_1 h_2 + a_2 h_1) + \lambda_2^2 a_2 h_2.$$

22.29. Рассмотрим сначала случай, когда M_1 и M_2 — прямоугольники с параллельными сторонами. Пусть a_1 и b_1 — длины сторон прямоугольника M_1, a_2 и b_2 — длины сторон прямоугольника M_2 (сторона a_1 параллельна стороне a_2). Тогда $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$ — прямоугольник со сторонами $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$ и $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$. Таким образом, нужно проверить неравенство

$$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2)(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2) \geqslant (\lambda_1 \sqrt{a_1 b_1} + \lambda_2 \sqrt{a_2 b_2})^2,$$

т. е. $a_1 b_2 + a_2 b_1 \geqslant 2\sqrt{a_1 a_2 b_1 b_2}$. Это — неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел.

Рассмотрим теперь случай, когда многоугольник M_1 устроен следующим образом: $n-1$ горизонтальных прямых разрезают его на n прямоугольников площади S_1/n; многоугольник M_2 устроен аналогично. Тогда площадь суммы прямоугольников с одинаковыми номерами не меньше

$$\left(\lambda_1 \sqrt{\frac{S_1}{n}} + \lambda_2 \sqrt{\frac{S_2}{n}}\right)^2 = \frac{1}{n}(\lambda_1 \sqrt{S_1} + \lambda_2 \sqrt{S_2})^2.$$

Каждая из таких сумм содержится в многоугольнике $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$. Ясно также, что все n таких сумм прямоугольников не перекрываются, поскольку сумма полосы, ограниченной параллельными прямыми l_1 и l_1', и полосы, ограниченной параллельными прямыми l_2 и l_2', является полосой, ограниченной прямыми $\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2$ и $\lambda_1 l_1' + \lambda_2 l_2'$ (предполагается, что прямая l_1 расположена выше прямой l_1', а прямая l_2 — выше l_2'). Следовательно, площадь многоугольника $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$ не меньше $(\lambda_1 \sqrt{S_1} + \lambda_2 \sqrt{S_2})^2$.

Многоугольники M_1 и M_2 можно с любой точностью приблизить многоугольниками рассмотренного выше вида, поэтому требуемое неравенство в случае выпуклых многоугольников общего вида доказывается предельным переходом.

Замечание. Неравенство $S_{12} \geqslant \sqrt{S_1 S_2}$ называют *неравенством Брунна—Минковского* в связи с тем, что Минковский доказал, что это неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда многоугольники M_1 и M_2 гомотетичны.

22.30. а) Фигура $\lambda_1 M + \lambda_2 D$ состоит из точек, удалённых не более чем на $\lambda_2 R$ от многоугольника, гомотетичного M с коэффициентом λ_1. Площадь такой фигуры равна $\lambda_1^2 S + \lambda_1 \lambda_2 PR + \lambda_2^2 \pi R^2$. (см. решение задачи 9.44).

б) Согласно неравенству Брунна

$$\lambda_1^2 S + \lambda_1 \lambda_2 PR + \lambda_2^2 \pi R^2 \geqslant (\lambda_1 \sqrt{S} + \lambda_2 \sqrt{\pi R^2})^2,$$

т. е. $PR \geqslant 2\sqrt{S\pi R^2}$. Поэтому $S \leqslant P^2/4\pi$.

22.31. Если $I_1, \ldots, I_n$ — отрезки, расположенные на плоскости, а $O_1, \ldots$ $\ldots, O_n$ — их середины, то многоугольник $\lambda_1 I_1 + \ldots + \lambda_n I_n$ симметричен относительно точки $\lambda_1 O_1 + \ldots + \lambda_n O_n$.

Рассмотрим теперь выпуклый многоугольник $A_1 \ldots A_{2n}$ с центром симметрии O. Перенесём отрезки $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_{n+1}$ параллельно так, чтобы их середины попали в точку O. Увеличим эти отрезки в n раз, оставив их середины неподвижными. Пусть $I_1, \ldots, I_n$ — полученные отрезки. Тогда сумма $\frac{1}{n}I_1 + \ldots + \frac{1}{n}I_n$ — исходный многоугольник.

22.32. а) Обозначим данные фигуры через M_1, M_2, M_3 и M_4. Пусть A_i — точка пересечения всех фигур, кроме M_i. Возможны два варианта расположения точек A_i.

1. Одна из точек, например A_4, лежит внутри треугольника, образованного остальными точками. Так как точки A_1, A_2, A_3 принадлежат выпуклой фигуре M_4, то и все точки треугольника $A_1A_2A_3$ принадлежат M_4. Поэтому точка A_4 принадлежит M_4, а остальным фигурам она принадлежит по своему определению.

2. $A_1A_2A_3A_4$ — выпуклый четырёхугольник. Пусть C — точка пересечения диагоналей A_1A_3 и A_2A_4. Докажем, что точка C принадлежит всем данным фигурам. Обе точки A_1 и A_3 принадлежат фигурам M_2 и M_4, поэтому отрезок A_1A_3 принадлежит этим фигурам. Аналогично отрезок A_2A_4 принадлежит фигурам M_1 и M_3. Следовательно, точка пересечения отрезков A_1A_3 и A_2A_4 принадлежит всем данным фигурам.

б) Доказательство проведём индукцией по числу фигур. Для $n = 4$ утверждение доказано в предыдущей задаче. Докажем, что если утверждение верно для $n \geqslant 4$ фигур, то оно верно и для $n+1$ фигуры. Пусть даны выпуклые фигуры $\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \Phi_{n+1}$, каждые три из которых имеют общую точку. Рассмотрим вместо них фигуры $\Phi_1, \ldots, \Phi_{n-1}, \Phi'_n$, где Φ'_n является пересечением Φ_n и Φ_{n+1}. Ясно, что фигура Φ'_n тоже выпукла. Докажем, что любые три из новых фигур имеют общую точку. Сомнение в этом может возникнуть только для тройки фигур, содержащей Φ'_n, но из предыдущей задачи следует, что фигуры Φ_i, Φ_j, Φ_n и Φ_{n+1} всегда имеют общую точку. Следовательно, по предположению индукции $\Phi_1, \ldots, \Phi_{n-1}, \Phi'_n$ имеют общую точку, т. е. $\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \Phi_{n+1}$ имеют общую точку.

22.33. Круг радиуса 1 с центром O накрывает некоторые точки тогда и только тогда, когда круги радиуса 1 с центрами в этих точках содержат точку O. Поэтому наша задача допускает следующую переформулировку: «На плоскости дано n точек, причём любые три круга радиуса 1 с центрами в этих точках имеют общую точку. Докажите, что все эти круги имеют общую точку». Это утверждение очевидным образом следует из теоремы Хелли.

22.34. а) Для каждой стороны AB данного многоугольника рассмотрим полосу, ограниченную перпендикулярами к прямой AB, проведёнными через точки A и B. К этому набору выпуклых фигур добавим ещё и сам многоугольник. По условию любые три из этих фигур имеют общую точку. Поэтому по теореме Хелли все они имеют общую точку.

б) Пусть $ABCD$ — данный выпуклый четырёхугольник. Согласно задаче а) достаточно проверить, что требуемую точку O можно выбрать для любых трёх его сторон. Докажем, например, что её можно выбрать для сторон AB,

BC и CD. Пусть X — множество всех точек четырёхугольника, для которых основания перпендикуляров, опущенных на стороны AB и CD, лежат на самих этих сторонах. По условию это множество не пусто. Рассмотрим три случая.

1) Углы B и C оба не тупые. Тогда нам подходит любая точка множества X.

2) Углы B и C оба тупые. Тогда нам подходит точка пересечения перпендикуляров к AB и CD, восставленных из точек B и C.

3) Угол B не тупой, а угол C тупой. Тогда нам подходит любая точка множества X, лежащая на перпендикуляре к прямой CD, восставленном из точки C.

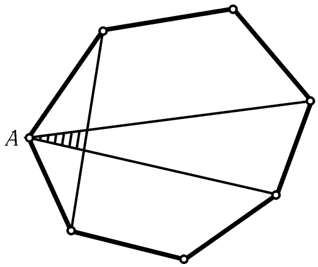


Рис. 22.9

22.35. Рассмотрим пятиугольники, остающиеся при выбрасывании пар соседних вершин семиугольника. Достаточно проверить, что любые три из них имеют общую точку. Для трёх пятиугольников выбрасывается не более шести различных вершин, т. е. одна вершина остаётся. Если вершина A не выброшена, то заштрихованный на рис. 22.9 треугольник принадлежит всем трём пятиугольникам.

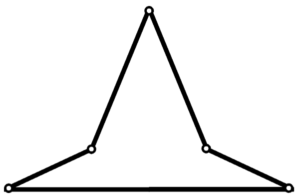


Рис. 22.10

22.36. Введём систему координат с осью Oy, параллельной данным отрезкам. Для каждого отрезка рассмотрим множество всех таких точек (a, b), что прямая $y = ax + b$ его пересекает. Достаточно проверить, что эти множества выпуклые, и применить к ним теорему Хелли. Для отрезка с концами (x_0, y_1) и (x_0, y_2) рассматриваемое множество является полосой, заключённой между параллельными прямыми $ax_0 + b = y_1$ и $ax_o + b = y_2$.

22.37. Нет, не верно. Пример приведён на рис. 22.10.

22.38. Требуемые многоугольники и точки изображены на рис. 22.11.

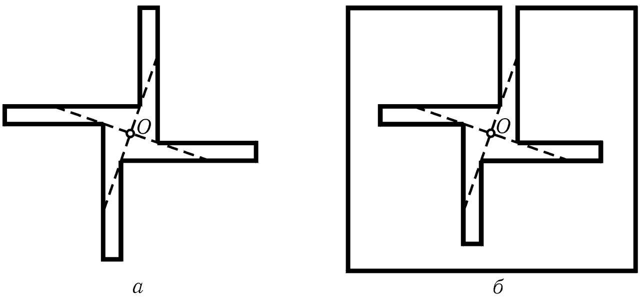


Рис. 22.11

22.39. Пусть из точки O виден весь контур многоугольника $A_1 \ldots A_n$. Тогда угол A_iOA_{i+1} не содержит других сторон многоугольника, кроме A_iA_{i+1},

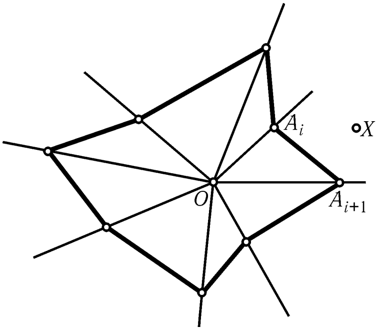


Рис. 22.12

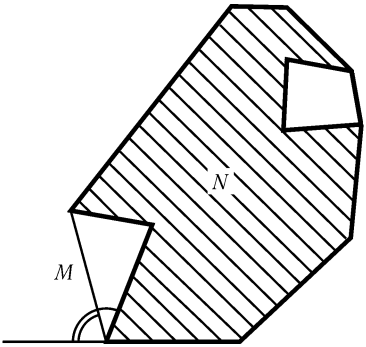


Рис. 22.13

и поэтому точка O лежит внутри многоугольника (рис. 22.12). Любая точка X плоскости принадлежит одному из углов A_iOA_{i+1}, поэтому из неё видна сторона A_iA_{i+1}.

22.40. Так как у выпуклого n-угольника все внутренние углы меньше 180° и их сумма равна $(n-2)\cdot 180^\circ$, то сумма внешних углов равна 360°, т. е. в случае выпуклого многоугольника достигается равенство.

Пусть теперь M — выпуклая оболочка многоугольника N. Каждый угол M содержит меньший 180° угол N, причём угол M может быть только больше угла N, т. е. внешний угол N не меньше внешнего угла M (рис. 22.13). Поэтому, даже ограничившись только углами N, примыкающими к углам M, мы уже получим не меньше 360°.

22.41. а) Если многоугольник выпуклый, то утверждение очевидно. Предположим теперь, что внутренний угол многоугольника при вершине A больше 180°. Видимая часть стороны видна из точки A под углом меньше 180°, поэтому из точки A видны части по крайней мере двух сторон. Следовательно, существуют лучи, выходящие из точки A, на которых происходит смена (частей) сторон, видимых из точки A (на рис. 22.14 изображены все такие лучи). Каждый из этих лучей задаёт диагональ, целиком лежащую внутри многоугольника.

б) Из рис. 22.15 видно, как построить n-угольник, у которого ровно $n-3$ диагонали лежат внутри его. Остаётся доказать, что у любого n-угольника есть по крайней мере $n-3$ диагонали. При $n=3$ это утверждение очевидно. Предположим, что утверждение верно для всех k-угольников, где $k<n$, и до-

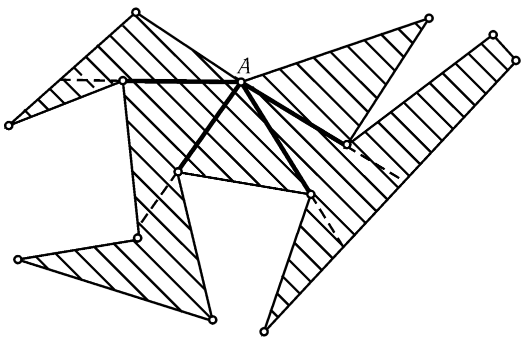


Рис. 22.14

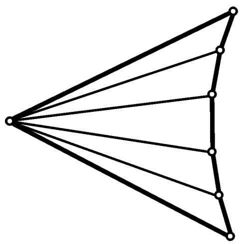


Рис. 22.15

кажем его для n-угольника. Согласно задаче а) n-угольник можно разрезать диагональю на два многоугольника: $(k+1)$-угольник и $(n-k+1)$-угольник, причём $k+1<n$ и $n-k+1<n$. У них имеется соответственно по крайней мере $(k+1)-3$ и $(n-k+1)-3$ диагоналей, лежащих внутри. Поэтому у n-угольника имеется по крайней мере $1+(k-2)+(n-k-2)=n-3$ диагоналей, лежащих внутри.

22.42. Докажем сначала, что если A и B — соседние вершины n-угольника, то из A или из B можно провести диагональ. Случай, когда внутренний угол многоугольника при вершине A больше 180°, разобран в решении задачи 22.41 а). Предположим теперь, что угол при вершине A меньше 180°. Пусть B и C — вершины, соседние с A. Если внутри треугольника ABC нет других вершин многоугольника, то BC — диагональ, а если P — ближайшая к A вершина многоугольника, лежащая внутри треугольника ABC, то AP — диагональ. Следовательно, число вершин, из которых нельзя провести диагональ, не превосходит $[n/2]$ (т. е. целой части числа $n/2$). С другой стороны, существуют n-угольники, для которых эта оценка достигается (рис. 22.16).

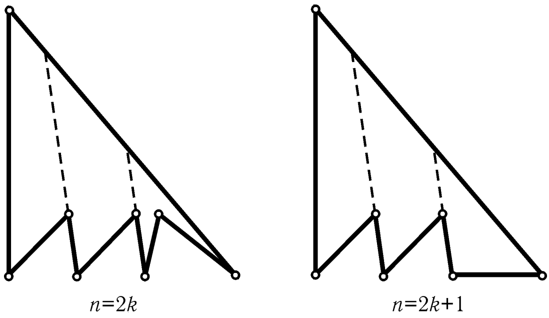


Рис. 22.16

22.43. Докажем это утверждение индукцией по n. При $n=3$ оно очевидно. Предположим, что утверждение доказано для всех k-угольников, где $k<n$, и докажем его для любого n-угольника. Любой n-угольник можно разрезать диагональю на два многоугольника (см. задачу 22.41 а), причём число вершин у каждого из них строго меньше n, т. е. их можно разрезать на треугольники по предположению индукции.

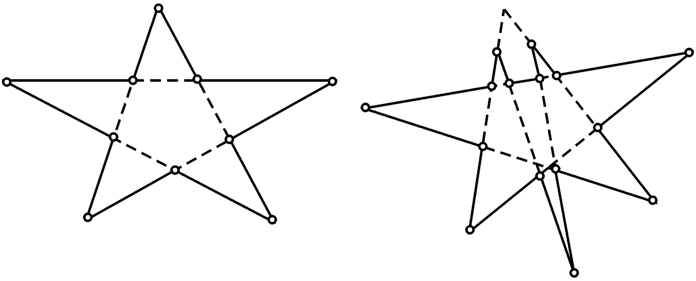
22.44. Докажем это утверждение по индукции. При $n=3$ оно очевидно. Предположим, что оно доказано для всех k-угольников, где $k<n$, и докажем его для любого n-угольника. Любой n-угольник можно разрезать диагональю на два многоугольника (см. задачу 22.41 а). Если число сторон одного из них равно $k+1$, то число сторон второго равно $n-k+1$, причём оба числа меньше n. Поэтому суммы углов этих многоугольников равны $(k-1)\cdot 180^\circ$ и $(n-k-1)\cdot 180^\circ$ соответственно. Ясно также, что сумма углов n-угольника равна сумме углов этих многоугольников, т. е. она равна $(k-1+n-k-1)\cdot 180^\circ=(n-2)\cdot 180^\circ$.

22.45. Сумма всех углов полученных треугольников равна сумме углов многоугольника, т. е. она равна $(n-2)\cdot 180^\circ$ (см. задачу 22.44). Поэтому количество треугольников равно $n-2$.

22.46. Пусть k_i — количество треугольников данного разбиения, у которых ровно i сторон является сторонами многоугольника. Требуется доказать, что $k_2 \geqslant 2$. Число сторон n-угольника равно n, а число треугольников разбиения равно $n-2$ (см. задачу 22.45), поэтому $2k_2 + k_1 = n$ и $k_2 + k_1 + k_0 = n - 2$. Вычитая из первого равенства второе, получаем $k_2 = k_0 + 2 \geqslant 2$.

22.47. Предположим, что существует тринадцатиугольник, у которого на любой прямой, содержащей сторону, есть ещё хотя бы одна сторона. Проведём через все стороны этого тринадцатиугольника прямые. Так как у него тринадцать сторон, то на одной из проведённых прямых лежит нечётное число сторон, т. е. на одной прямой лежат по крайней мере три стороны. У них есть 6 вершин и через каждую вершину проходит прямая, на которой лежат по крайней мере две стороны. Поэтому всего у этого тринадцатиугольника не менее $3 + 2 \cdot 6 = 15$ сторон, чего не может быть.

Для чётного $n \geqslant 10$ требуемый пример — контур «звезды» (рис. 22.17, *а*); идея построения примера для нечётного n показана на рис. 22.17, *б*.

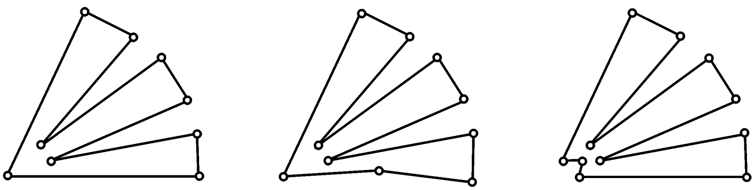


а *б*

Рис. 22.17

22.48. Пусть k — число острых углов n-угольника. Тогда сумма его углов меньше $k \cdot 90^\circ + (n-k) \cdot 360^\circ$. С другой стороны, сумма углов n-угольника равна $(n-2) \cdot 180^\circ$ (см. задачу 22.44), поэтому $k \cdot 90^\circ + (n-k) \cdot 360^\circ > (n-2) \cdot 180^\circ$, т. е. $3k < 2n + 4$. Следовательно, $k \leqslant [2n/3] + 1$, где через $[x]$ обозначено наибольшее целое число, не превосходящее x.

Примеры n-угольников, имеющих $[2n/3] + 1$ острых углов, приведены на рис. 22.18.



$n{=}3m$ $n{=}3m{+}1$ $n{=}3m{+}2$

Рис. 22.18

22.49. При этих операциях векторы сторон многоугольника остаются теми же самыми; изменяется только их порядок (рис. 22.19). Поэтому имеется лишь конечное число многоугольников, которые могут получиться. Кроме того, после каждой операции площадь многоугольника строго возрастает. Следовательно, процесс конечен.

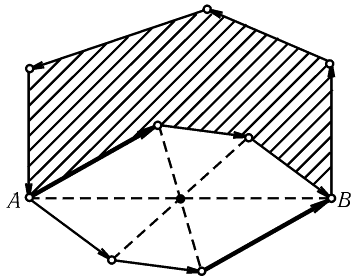


Рис. 22.19

22.50. Доказательство проведём индукцией по n. При $n = 3$ утверждение очевидно. Если одно из чисел α_i, равно π, то шаг индукции очевиден, поэтому можно считать, что все числа α_i отличны от π. Если $n \geqslant 4$, то $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + \alpha_{i+1}) = 2(n-2)\pi/n \geqslant \pi$, причём равенство достигается только для четырёхугольника. Значит, в любом случае, кроме параллелограмма ($\alpha_1 = \pi - \alpha_2 = \alpha_3 = \pi - \alpha_4$), найдутся два соседних числа, сумма которых больше π. Более того, найдутся такие числа α_i и α_{i+1}, что $\pi < \alpha_i + \alpha_{i+1} < 3\pi$. В самом деле, если все данные числа меньше π, то можно взять вышеука-

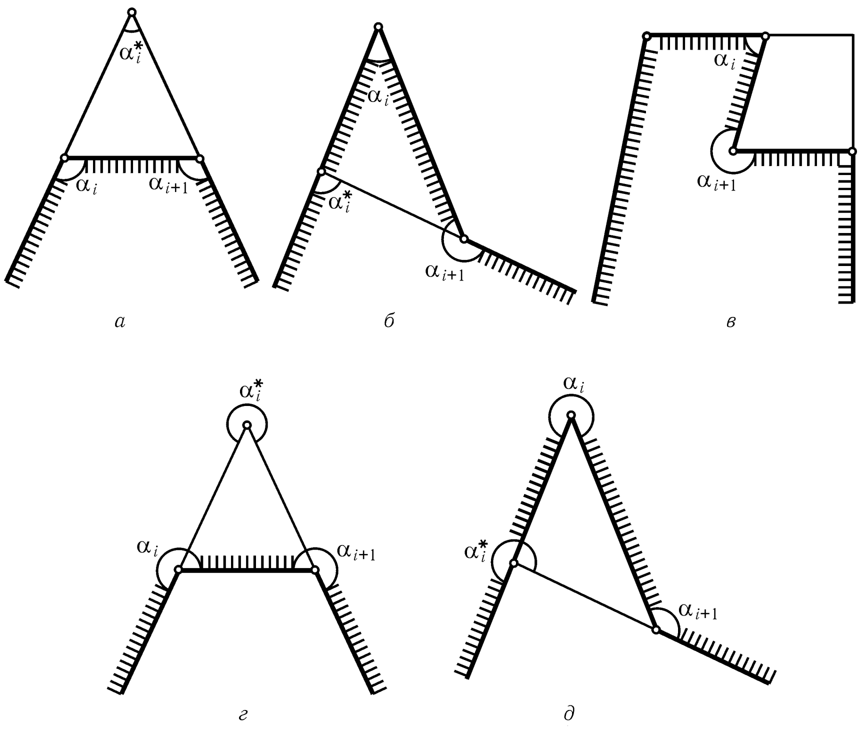


Рис. 22.20

занную пару чисел; если же $\alpha_j > \pi$, то можно взять такие числа α_i и α_{i+1}, что $\alpha_i < \pi$ и $\alpha_{i+1} > \pi$. Пусть $\alpha_i^* = \alpha_i + \alpha_{i+1} - \pi$. Тогда $0 < \alpha_i^* < 2\pi$, поэтому по предположению индукции существует $(n-1)$-угольник M с углами $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i^*, \alpha_{i+2}, \ldots, \alpha_n$.

Возможны три случая: 1) $\alpha_i^* < \pi$, 2) $\alpha_i^* = \pi$, 3) $\pi < \alpha_i^* < 2\pi$. В первом случае $\alpha_i + \alpha_{i+1} < 2\pi$, поэтому одно из этих чисел, например α_i, меньше π. Если $\alpha_{i+1} < \pi$, то отрежем от M треугольник с углами $\pi - \alpha_i$, $\pi - \alpha_{i+1}$, α_i^* (рис. 22.20, *а*), если $\alpha_{i+1} > \pi$, то приставим к M треугольник с углами α_i, $\alpha_{i+1} - \pi$, $\pi - \alpha_i^*$ (рис. 22.20, *б*). Во втором случае отрежем от M трапецию с основанием, лежащим на стороне $A_{i-1}A_i^*A_{i+2}$ (рис. 22.20, *в*). В третьем случае $\alpha_i + \alpha_{i+1} > \pi$, поэтому одно из этих чисел, например α_i, больше π. Если $\alpha_{i+1} > \pi$, то приставим к M треугольник с углами $\alpha_i - \pi$, $\alpha_{i+1} - \pi$, $2\pi - \alpha_i^*$ (рис. 22.20, *г*), если $\alpha_{i+1} < \pi$, то отрежем от M треугольник с углами $2\pi - \alpha_i$, $\pi - \alpha_{i+1}$ и $\alpha_i^* - \pi$ (рис. 22.20, *д*).

ГЛАВА 23

ДЕЛИМОСТЬ, ИНВАРИАНТЫ, РАСКРАСКИ

Основные сведения

1. В ряде задач встречается следующая ситуация. Некоторая система последовательно изменяет своё состояние, и требуется выяснить нечто о её конечном состоянии. Полностью проследить за всеми переходами может оказаться делом сложным, но иногда ответить на требуемый вопрос помогает вычисление некоторой величины, связанной с состоянием системы и сохраняющейся при всех переходах (такую величину называют *инвариантом* для рассматриваемой системы). Ясно, что тогда в конечном состоянии значение инварианта будет то же самое, что и в начальном, т. е. система не может оказаться в состоянии с другим значением инварианта.

2. На практике этот метод сводится к тому, что некоторая величина вычисляется двумя способами: сначала она просто вычисляется в начальном и конечном состояниях, а затем прослеживается её изменение при последовательных мелких переходах.

3. Наиболее простым и часто встречающимся инвариантом является чётность числа; инвариантом может быть также и остаток от деления не только на 2, но и на какое-нибудь другое число.

Для построения инвариантов иногда бывают полезны вспомогательные раскраски, т. е. разбиения рассматриваемых объектов на несколько групп (каждая группа состоит из объектов одного цвета).

§ 1. Чёт и нечёт

23.1. Может ли прямая пересекать (во внутренних точках) все стороны невыпуклого: а) $(2n+1)$-угольника; б) $2n$-угольника?

23.2. На плоскости дана замкнутая ломаная с конечным числом звеньев. Прямая l пересекает её в 1985 точках. Докажите, что существует прямая, пересекающая эту ломаную более чем в 1985 точках.

23.3. На плоскости лежат три шайбы A, B и C. Хоккеист бьёт по одной из шайб так, чтобы она прошла между двумя другими и остановилась в некоторой точке. Могут ли все шайбы вернуться на свои места после 25 ударов?

23.4. Можно ли окрасить на клетчатой бумаге 25 клеток так, чтобы у каждой из них было нечётное число окрашенных соседей? (Соседними клетками считаем те, у которых есть общая сторона.)

23.5*. Окружность разбита точками на $3k$ дуг: по k дуг длиной 1, 2 и 3. Докажите, что найдутся две диаметрально противоположные точки деления.

23.6*. На плоскости дана несамопересекающаяся замкнутая ломаная, никакие три вершины которой не лежат на одной прямой. Назовём пару несоседних звеньев ломаной *особой*, если продолжение одного из них пересекает другое. Докажите, что число особых пар чётно.

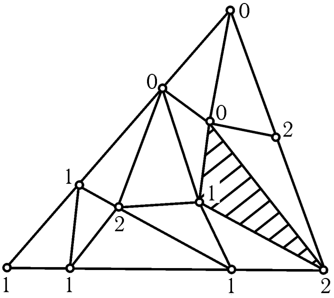


Рис. 23.1

23.7*. Вершины треугольника помечены цифрами 0, 1 и 2. Этот треугольник разбит на несколько треугольников таким образом, что никакая вершина одного треугольника разбиения не лежит на стороне другого. Вершинам исходного треугольника оставлены старые пометки, а дополнительные вершины получают номера 0, 1, 2, причём любая вершина на стороне исходного треугольника должна быть помечена одной из пометок вершин этой стороны (рис. 23.1). Докажите, что существует треугольник разбиения, помеченный цифрами 0, 1, 2 (*лемма Шпернера*).

23.8*. Вершины правильного $2n$-угольника $A_1 \ldots A_{2n}$ разбиты на n пар. Докажите, что если $n = 4m + 2$ или $n = 4m + 3$, то две пары вершин являются концами равных отрезков.

§ 2. Делимость

23.9*. На рис. 23.2 изображён шестиугольник, разбитый на чёрные и белые треугольники так, что любые два треугольника имеют либо общую сторону (и тогда они окрашены в разные цвета), либо общую вершину, либо не имеют общих точек, а каждая сторона шестиугольника является стороной одного из чёрных треугольников. Докажите, что десятиугольник разбить таким образом нельзя.

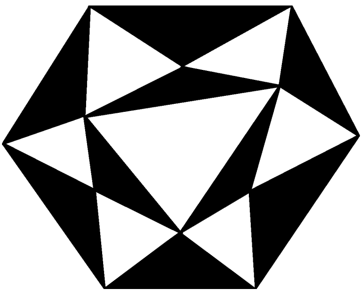


Рис. 23.2

23.10*. Квадратный лист клетчатой бумаги разбит на меньшие квадраты отрезками, идущими по сторонам клеток. Докажите, что сумма длин этих отрезков делится на 4. (Длина стороны клетки равна 1.)

§ 3. Инварианты

23.11. Дана шахматная доска. Разрешается перекрашивать в другой цвет сразу все клетки какой-либо горизонтали или вертикали. Может ли при этом получиться доска, у которой ровно одна чёрная клетка?

23.12. Дана шахматная доска. Разрешается перекрашивать в другой цвет сразу все клетки, расположенные внутри квадрата размером 2×2. Может ли при этом на доске остаться ровно одна чёрная клетка?

23.13*. Дан выпуклый $2m$-угольник $A_1 \ldots A_{2m}$. Внутри его взята точка P, не лежащая ни на одной из диагоналей. Докажите, что точка P принадлежит чётному числу треугольников с вершинами в точках $A_1, \ldots, A_{2m}$.

23.14*. В центре каждой клетки шахматной доски стоит по фишке. Фишки переставили так, что попарные расстояния между ними не уменьшились. Докажите, что в действительности попарные расстояния не изменились.

23.15*. Многоугольник разрезан на несколько многоугольников. Пусть p — количество полученных многоугольников, q — количество отрезков, являющихся их сторонами, r — количество точек, являющихся их вершинами. Докажите, что $p - q + r = 1$ (*формула Эйлера*).

23.16*. Выпуклый многоугольник разрезан на p треугольников так, что на их сторонах нет вершин других треугольников. Пусть n и m — количества вершин этих треугольников, лежащих на границе исходного многоугольника и внутри его.

а) Докажите, что $p = n + 2m - 2$.

б) Докажите, что количество отрезков, являющихся сторонами полученных треугольников, равно $2n + 3m - 3$.

23.17*. Квадратное поле разбито на 100 одинаковых квадратных участков, 9 из которых поросли бурьяном. Известно, что бурьян за год распространяется на те и только те участки, у которых не менее двух соседних (т. е. имеющих общую сторону) участков уже поросли бурьяном. Докажите, что поле никогда не зарастёт бурьяном полностью.

23.18*. Докажите, что существуют равновеликие многоугольники, которые нельзя разбить на многоугольники (возможно, невыпуклые), переводящиеся друг в друга параллельным переносом.

23.19*. Докажите, что выпуклый многоугольник нельзя разрезать на конечное число невыпуклых четырёхугольников.

23.20*. Даны точки $A_1, \ldots, A_n$. Рассмотрим окружность радиуса R, содержащую некоторые из них. Построим затем окружность радиуса R с центром в центре масс точек, лежащих внутри первой окружности, и т. д. Докажите, что этот процесс остановится, т. е. окружности начнут совпадать.

§ 4. Вспомогательные раскраски в шахматном порядке

23.21. В каждой клетке доски 5×5 клеток сидит жук. В некоторый момент все жуки переползают на соседние (по горизонтали или вертикали) клетки. Обязательно ли при этом останется пустая клетка?

23.22. а) Можно ли замостить костями домино размером 1×2 шахматную доску размером 8×8, из которой вырезаны два противоположных угловых поля?

б)* Докажите, что если из шахматной доски размером 8×8 вырезаны две произвольные клетки разного цвета, то оставшуюся часть доски всегда можно замостить костями домино размером 1×2.

23.23. Докажите, что доску размером 10×10 клеток нельзя разрезать на фигурки в форме буквы T, состоящие из четырёх клеток.

23.24*. Детали полотна игрушечной железной дороги имеют форму четверти окружности радиуса R. Докажите, что последовательно присоединяя их концами так, чтобы они плавно переходили друг в друга, нельзя составить путь, у которого начало совпадает с концом, а первое и последнее звенья образуют тупик, изображённый на рис. 23.3.

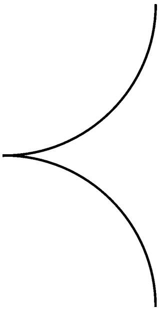


Рис. 23.3

23.25*. В трёх вершинах квадрата находятся три кузнечика, играющие в чехарду. При этом если кузнечик A прыгает через кузнечика B, то после прыжка он оказывается на том же расстоянии от него, но, естественно, по другую сторону и на той же прямой. Может ли после нескольких прыжков один из кузнечиков попасть в четвёртую вершину квадрата?

23.26*. Дан квадратный лист клетчатой бумаги размером 100×100 клеток. Проведено несколько несамопересекающихся ломаных, идущих по сторонам клеток и не имеющих общих точек. Эти ломаные идут строго внутри квадрата, а концами обязательно выходят на границу. Докажите, что кроме вершин квадрата найдётся ещё узел (внутри квадрата или на границе), не принадлежащий ни одной ломаной.

§ 5. Другие вспомогательные раскраски

23.27. Правильный треугольник разбит на n^2 одинаковых правильных треугольников (рис. 23.4). Часть из них занумерована числами $1, 2, \ldots, m$, причём треугольники с последовательными номерами имеют смежные стороны. Докажите, что $m \leqslant n^2 - n + 1$.

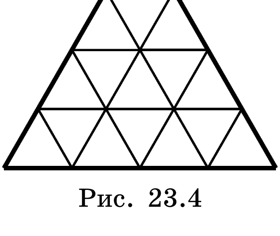


Рис. 23.4

23.28. Дно прямоугольной коробки выложено плитками размером 2×2 и 1×4. Плитки высыпали из коробки и потеряли одну плитку 2×2. Вместо неё достали плитку 1×4. Докажите, что выложить дно коробки плитками теперь не удастся.

23.29. Из листа клетчатой бумаги размером 29×29 клеток вырезано 99 квадратиков размером 2×2 клетки. Докажите, что из него можно вырезать ещё один такой квадратик.

23.30. Выпуклый n-угольник разбит на треугольники непересекающимися диагоналями, причём в каждой его вершине сходится нечётное число треугольников. Докажите, что n делится на 3.

* * *

23.31. Можно ли шашечную доску размером 10×10 замостить плитками размером 1×4?

23.32. На клетчатой бумаге даны произвольные n клеток. Докажите, что из них можно выбрать не менее $n/4$ клеток, не имеющих общих точек.

23.33*. Докажите, что если вершины выпуклого n-угольника лежат в узлах клетчатой бумаги, а внутри и на его сторонах других узлов нет, то $n \leqslant 4$.

23.34*. Из 16 плиток размером 1×3 и одной плитки 1×1 сложили квадрат со стороной 7. Докажите, что плитка 1×1 лежит в центре квадрата или примыкает к его границе.

23.35*. Картинная галерея представляет собой невыпуклый n-угольник. Докажите, что для обзора всей галереи достаточно $[n/3]$ сторожей.

§ 6. Задачи о раскрасках

23.36. Плоскость раскрашена в два цвета. Докажите, что найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми равно 1.

23.37*. Плоскость раскрашена в три цвета. Докажите, что найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми равно 1.

23.38*. Плоскость раскрашена в семь цветов. Обязательно ли найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми равно 1?

23.39*. Точки сторон правильного треугольника раскрашены в два цвета. Докажите, что найдётся прямоугольный треугольник с вершинами одного цвета.

* * *

23.40*. *Триангуляцией* многоугольника называют его разбиение на треугольники, обладающее тем свойством, что эти треугольники либо имеют общую сторону, либо имеют общую вершину, либо не имеют общих точек (т. е. вершина одного треугольника не может лежать на стороне другого). Докажите, что треугольники триангуляции можно раскрасить в три цвета так, что имеющие общую сторону треугольники будут разного цвета.

23.41*. Многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что вершины многоугольника можно раскрасить в три цвета так, что все вершины каждого из полученных треугольников будут разного цвета.

23.42*. Несколько кругов одного радиуса положили на стол так, что никакие два не перекрываются. Докажите, что круги можно раскрасить в четыре цвета так, что любые два касающихся круга будут разного цвета.

См. также задачу 24.11.

Решения

23.1. а) Пусть прямая пересекает все стороны многоугольника. Рассмотрим все вершины, лежащие по одну сторону от неё. Каждой из этих вершин можно поставить в соответствие пару сторон, из неё выходящих. При этом получим разбиение всех сторон многоугольника на пары. Поэтому если прямая пересекает все стороны m-угольника, то m чётно.

б) Из рис. 23.5 видно, как построить $2n$-угольник и прямую, пересекающую все его стороны, при любом n.

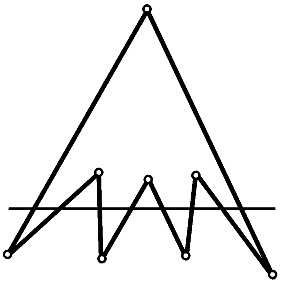


Рис. 23.5

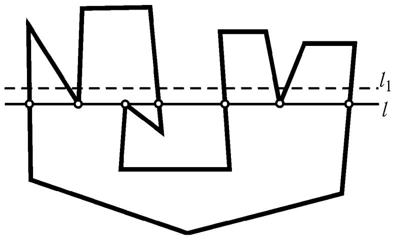


Рис. 23.6

23.2. Прямая l задаёт две полуплоскости; одну из них будем называть верхней, а другую нижней. Пусть n_1 (соответственно n_2) — число вершин ломаной, лежащих на прямой l, для которых оба выходящих из них звена лежат в верхней (соответственно в нижней) полуплоскости, а m — число всех остальных точек пересечения прямой l и ломаной. Совершим обход ломаной, выйдя из некоторой точки, не лежащей на прямой l, и вернувшись в ту же точку. При этом мы переходим из одной полуплоскости в другую, только проходя через любую из m точек пересечения. Так как мы вернёмся в ту же точку, из которой начали обход, то m чётно. По условию $n_1 + n_2 + m = 1985$, поэтому число $n_1 + n_2$ нечётно; в частности, $n_1 \neq n_2$. Пусть для определённости $n_1 > n_2$. Проведём тогда в верхней полуплоскости прямую l_1, параллельную l и удалённую от неё на расстояние меньшее, чем любое ненулевое расстояние от l до вершин ломаной (рис. 23.6). Число точек пересечения ломаной с прямой l_1 равно $2n_1 + m > n_1 + n_2 + m = 1985$, т. е. l_1 — искомая прямая.

23.3. Нет, не могут. После каждого удара изменяется ориентация (т. е. направление обхода) треугольника ABC.

23.4. Пусть на клетчатой бумаге окрашено несколько клеток и n_k — число окрашенных клеток, имеющих ровно k окрашенных соседей. Пусть N — число общих сторон окрашенных клеток. Так как каждая из них принадлежит ровно двум окрашенным клеткам, то $N=(n_1+2n_2+3n_3+4n_4)/2=(n_1+n_3)/2+n_2+$ $+n_3+2n_4$. Поскольку N — целое число, то число n_1+n_3 чётно.

Мы доказали, что число окрашенных клеток, имеющих нечётное число окрашенных соседей, всегда чётно. Поэтому нельзя окрасить 25 клеток так, чтобы у каждой из них было нечётное число окрашенных соседей.

23.5. Предположим, что окружность разбита на дуги указанным образом, причём диаметрально противоположных точек деления нет. Тогда против концов любой дуги длиной 1 не лежат точки разбиения, поэтому против неё лежит дуга длиной 3. Выбросим одну из дуг длиной 1 и противолежащую ей дугу длиной 3. При этом окружность разбивается на две дуги. Если на одной из них лежит m дуг длиной 1 и n дуг длиной 3, то на другой лежит m дуг длиной 3 и n дуг длиной 1. Общее количество дуг длиной 1 и 3, лежащих на этих двух «больших» дугах, равно $2(k-1)$, поэтому $n+m=k-1$. Так как кроме дуг длиной 1 и 3 есть только дуги с чётной длиной, то чётность длины каждой из двух рассматриваемых дуг совпадает с чётностью числа $k-1$. С другой стороны, длина каждой из них равна $(6k-1-3)/2=3k-2$. Получено противоречие, так как числа $k-1$ и $3k-2$ имеют разную чётность.

23.6. Возьмём соседние звенья AB и BC и назовём *уголком* угол, симметричный углу ABC относительно точки B (на рис. 23.7 уголок заштрихован). Такие же уголки можно рассмотреть для всех вершин ломаной. Ясно, что число особых пар равно числу точек пересечения звеньев с уголками. Остаётся заметить, что число звеньев ломаной, пересекающихся с одним уголком, чётно, так как по пути от A к C ломаная входит в уголок столько же раз, сколько выходит из него.

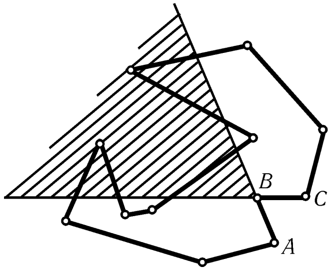


Рис. 23.7

23.7. Рассмотрим отрезки, на которые разбита сторона 01. Пусть a — число отрезков вида 00, b — число отрезков вида 01. Для каждого отрезка рассмотрим число нулей, стоящих на его концах, и сложим все эти числа. В итоге получим $2a+b$. С другой стороны, все «внутренние» нули входят в эту сумму дважды, а есть ещё один нуль, стоящий в вершине исходного треугольника. Поэтому число $2a+b$ нечётно, т. е. b нечётно.

Перейдём теперь к разбиению треугольника. Пусть a_1 — общее количество треугольников вида 001 и 011, а b_1 — число треугольников вида 012. Для каждого треугольника рассмотрим число его сторон вида 01 и сложим все эти числа. В итоге получим $2a_1+b_1$. С другой стороны, все «внутренние» стороны входят в эту сумму дважды, а все «граничные» лежат на стороне 01 исходного треугольника и число их нечётно по предыдущему рассуждению. Поэтому число $2a_1+b_1$ нечётно, в частности, $b_1\neq 0$.

23.8. Предположим, что все пары вершин задают отрезки разной длины. Отрезку A_pA_q поставим в соответствие наименьшее из чисел $|p-q|$ и $2n-|p-q|$. В результате для данных n пар вершин получим числа $1, 2, \ldots, n$; пусть среди этих чисел k чётных и $n-k$ нечётных. Нечётным числам соответствуют отрезки A_pA_q, где числа p и q разной чётности. Поэтому среди вершин остальных отрезков будет k вершин с чётными номерами и k вершин с нечётными номерами, причём отрезки соединяют вершины с номерами одной чётности. Следовательно, число k чётно. Для чисел n вида $4m$, $4m+1$, $4m+2$ и $4m+3$ количество k чётных чисел равно $2m$, $2m$, $2m+1$ и $2m+1$ соответственно, поэтому $n=4m$ или $n=4m+1$.

23.9. Предположим, что мы разбили десятиугольник требуемым образом. Пусть n — число сторон чёрных треугольников, m — число сторон белых треугольников. Так как каждая сторона чёрного треугольника (кроме сторон многоугольника) является также и стороной белого треугольника, то $n-m=10$. С другой стороны, оба числа n и m делятся на 3. Получено противоречие.

23.10. Пусть Q — квадратный лист бумаги, $L(Q)$ — сумма длин тех сторон клеток, которые лежат внутри его. Тогда $L(Q)$ делится на 4, так как все рассматриваемые стороны разбиваются на четвёрки сторон, получающихся друг из друга поворотами на $\pm 90^\circ$ и 180° относительно центра квадрата.

Если квадрат Q разделён на квадраты $Q_1, \ldots, Q_n$, то сумма длин отрезков деления равна $L(Q)-L(Q_1)-\ldots-L(Q_n)$. Ясно, что это число делится на 4, так как числа $L(Q)$, $L(Q_1)$, …, $L(Q_n)$ делятся на 4.

23.11. При перекрашивании горизонтали или вертикали, содержащей k чёрных и $8-k$ белых клеток, получится $8-k$ чёрных и k белых клеток. Поэтому число чёрных клеток изменится на $(8-k)-k=8-2k$, т. е. на чётное число. Так как чётность числа чёрных клеток сохраняется, из исходных 32 чёрных клеток мы не сможем получить одну чёрную клетку.

23.12. При перекрашивании квадрата 2×2, содержащего k чёрных и $4-k$ белых клеток, получится $4-k$ чёрных и k белых клеток. Поэтому число чёрных клеток изменится на $(4-k)-k=4-2k$, т. е. на чётное число. Так как чётность числа чёрных клеток сохраняется, из исходных 32 чёрных клеток мы не сможем получить одну чёрную клетку.

23.13. Диагонали разбивают многоугольник на несколько частей. Будем называть *соседними* те из них, у которых есть общая сторона. Ясно, что из любой внутренней точки многоугольника можно попасть в любую другую, переходя каждый раз только в соседнюю часть. Часть плоскости, лежащую вне многоугольника, также можно считать одной из этих частей. Число рассматриваемых треугольников для точек этой части равно нулю, поэтому достаточно доказать, что при переходе в соседнюю часть чётность числа треугольников сохраняется.

Пусть общая сторона двух соседних частей лежит на диагонали (или стороне) PQ. Тогда всем рассматриваемым треугольникам, кроме треугольников со стороной PQ, обе эти части одновременно либо принадлежат, либо не принадлежат. Поэтому при переходе из одной части в другую число треугольников изменяется на k_1-k_2, где k_1 — число вершин многоугольника, лежащих по одну сторону от PQ, k_2 — число вершин, лежащих по другую сторону от PQ. Так как $k_1+k_2=2m-2$, то число k_1-k_2 чётно.

23.14. Если хотя бы одно из расстояний между фишками увеличилось бы, то увеличилась бы и сумма всех попарных расстояний между фишками, но сумма всех попарных расстояний между фишками не изменяется при любой перестановке.

23.15. Пусть n — число вершин исходного многоугольника, $n_1, \ldots, n_p$ — числа вершин полученных многоугольников (к вершинам данного многоугольника мы относим и все вершины других многоугольников, лежащие на его сторонах). Представим число r в виде $r = n + r_1 + r_2$, где r_1 и r_2 — количества вершин полученных многоугольников, лежащих на сторонах исходного многоугольника и внутри его. С одной стороны, сумма углов всех полученных многоугольников равна $\sum\limits_{i=1}^{p}(n_i - 2)\pi = \sum\limits_{i=1}^{p} n_i\pi - 2p\pi$. С другой стороны, она равна $(n-2)\pi + r_1\pi + 2r_2\pi$. Остаётся заметить, что $\sum\limits_{i=1}^{p} n_i = 2(q - n - r_1) + n + r_1$.

23.16. а) С одной стороны, сумма всех углов полученных треугольников равна $p\pi$. С другой стороны, она равна $(n-2)\pi + 2m\pi$. Поэтому $p = n + 2m - 2$.

б) Воспользуемся результатом задачи 23.15. В рассматриваемой ситуации $p = n + 2m - 2$ и $r = n + m$; требуется вычислить q. Согласно формуле Эйлера $q = p + r - 1 = 2n + 3m - 3$.

23.17. Легко проверить, что длина границы всего заросшего бурьяном участка (или нескольких участков) не возрастает. В начальный момент она не превосходит $9 \cdot 4 = 36$, поэтому в конечный момент она не может быть равной 40.

23.18. Фиксируем на плоскости некоторый луч AB. Любому многоугольнику M поставим в соответствие число $F(M)$ (зависящее от AB) следующим образом. Рассмотрим все стороны M, перпендикулярные AB, и каждой из них поставим в соответствие число $\pm l$, где l — длина этой стороны и знак «плюс» берётся, если мы, идя от этой стороны в направлении луча AB, попадаем внутрь M, а знак «минус» — если наружу (рис. 23.8). Сумму всех полученных чисел мы и обозначим $F(M)$; если у M нет сторон, перпендикулярных AB, то $F(M) = 0$.

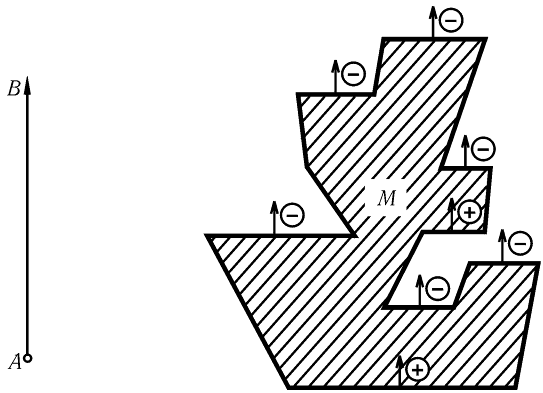


Рис. 23.8

Легко видеть, что если многоугольник M разрезан на многоугольники M_1 и M_2, то $F(M) = F(M_1) + F(M_2)$, а если M' получен из M параллельным переносом, то $F(M') = F(M)$. Поэтому, если M_1 и M_2 можно разрезать на части, переводящиеся друг в друга параллельным переносом, то $F(M_1) = F(M_2)$.

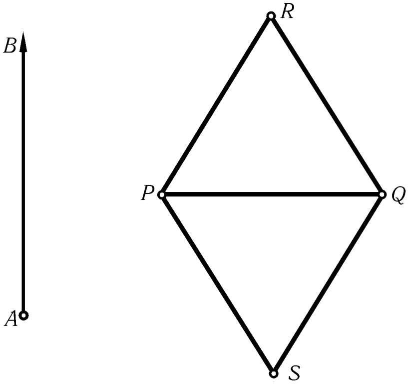


Рис. 23.9

На рис. 23.9 изображены равные правильные треугольники PQR и PQS и луч AB, перпендикулярный стороне PQ. Легко видеть, что $F(PQR) = a$ и $F(PQS) = -a$, где a — длина сторон этих правильных треугольников. Поэтому равные треугольники PQR и PQS нельзя разрезать на части, переводящиеся друг в друга параллельным переносом.

23.19. Предположим, что выпуклый многоугольник M разрезан на невыпуклые четырёхугольники $M_1, \ldots, M_n$. Каждому многоугольнику N поставим в соответствие число $f(N)$, равное разности между суммой его внутренних углов, меньших 180°, и суммой углов, дополняющих до 360° его углы, бо́льшие 180°. Сравним числа $A = f(M)$ и $B = f(M_1) + \ldots + f(M_n)$. Рассмотрим для этого все точки, являющиеся вершинами четырёхугольников $M_1, \ldots, M_n$. Их можно разбить на четыре типа.

1. Вершины многоугольника M. Эти точки дают одинаковые вклады в A и B.

2. Точки на сторонах многоугольника M или M_i. Вклад каждой такой точки в B на 180° больше, чем в A.

3. Внутренние точки многоугольника, в которых сходятся углы четырёхугольника, меньшие 180°. Вклад каждой такой точки в B на 360° больше, чем в A.

4. Внутренние точки многоугольника M, в которых сходятся углы четырёхугольников, причём один из них больше 180°. Такие точки дают нулевые вклады в A и B.

В итоге получаем $A \leqslant B$. С другой стороны, $A > 0$, а $B = 0$. Неравенство $A > 0$ очевидно, а для доказательства равенства $B = 0$ достаточно проверить, что если N — невыпуклый четырёхугольник, то $f(N) = 0$. Пусть углы N равны $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma \geqslant \delta$. У любого невыпуклого четырёхугольника ровно один угол больше 180°, поэтому $f(N) = \beta + \gamma + \delta - (360^\circ - \alpha) = \alpha + \beta + \gamma + \delta - 360^\circ = 0^\circ$.

Получено противоречие, поэтому выпуклый многоугольник нельзя разрезать на конечное число невыпуклых четырёхугольников.

23.20. Пусть S_n — окружность, построенная на n-м шаге, O_n — её центр. Рассмотрим величину $F_n = \sum(R^2 - O_nA_i^2)$, где суммирование ведётся только по точкам, оказавшимся внутри окружности S_n. Будем обозначать точки, лежащие внутри окружностей S_n и S_{n+1}, буквами B с индексом; точки, лежащие внутри окружности S_n, но вне окружности S_{n+1}, буквами C, а точки, лежащие внутри окружности S_{n+1}, но вне окружности S_n, буквами D. Тогда $F_n = \sum(R^2 - O_nB_i^2) + \sum(R^2 - O_nC_i^2)$ и $F_{n+1} = \sum(R^2 - O_{n+1}B_i^2) + \sum(R^2 - O_{n+1}D_i^2)$. Так как точка O_{n+1} является центром масс системы точек B и C, то $\sum O_nB_i^2 + \sum O_nC_i^2 = qO_nO_{n+1}^2 + \sum O_{n+1}B_i^2 + \sum O_{n+1}C_i^2$, где q — общее количество точек B и C. Следовательно, $F_{n+1} - F_n = qO_nO_{n+1}^2 + \sum(R^2 - O_{n+1}D_i^2) - \sum(R^2 - O_{n+1}C_i^2)$.

Все три слагаемых неотрицательны, поэтому $F_{n+1} \geqslant F_n$. В частности, $F_n \geqslant F_1 > 0$, т. е. $q > 0$.

Центров масс различных наборов данных точек конечное число, поэтому различных положений окружностей S_i конечное число. Следовательно, $F_{n+1} = F_n$ для некоторого n, а значит, $qO_nO_{n+1}^2 = 0$, т. е. $O_n = O_{n+1}$.

23.21. Так как общее число клеток шахматной доски 5×5 клеток нечётно, то чёрных и белых клеток не может быть поровну. Пусть для определённости чёрных клеток больше. Тогда жуков, сидящих на белых клетках, меньше, чем чёрных клеток. Поэтому хотя бы одна из чёрных клеток останется пустой, так как на чёрные клетки переползают только жуки, сидящие на белых клетках.

23.22. а) Вырезаны поля одного цвета, пусть для определённости чёрного. Поэтому остаётся 32 белых и 30 чёрных клеток. Так как кость домино всегда накрывает одну белую и одну чёрную клетку, то костями домино нельзя замостить шахматную доску 8×8 клеток, из которой вырезаны два противоположных угловых поля.

б) Рис. 23.10 показывает, что клетки шахматной доски можно обойти в циклическом порядке так, чтобы вернуться на то же самое место, с которого начинали обход. При этом полученный коридор можно замостить костями домино двумя разными способами, положив первую кость произвольно (на поворотах есть два способа положить кости домино).

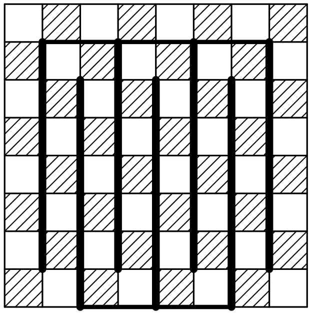


Рис. 23.10

При указанном обходе цвета клеток чередуются, поэтому если мы вырежем две клетки разного цвета, то наш цикл распадётся на два отрезка, состоящих из чётного числа клеток (если вырезаны две соседние клетки, то может получиться один отрезок). Каждый из этих отрезков мы можем замостить очевидным образом.

23.23. Предположим, что доска 10×10 клеток разбита на такие фигурки. Каждая фигурка содержит либо 1, либо 3 чёрные клетки, т. е. всегда нечётное число. Самих фигурок должно быть $100/4 = 25$ штук. Поэтому они содержат нечётное число чёрных клеток, а всего чёрных клеток $100/2 = 50$ штук. Получено противоречие.

23.24. Разрежем плоскость на одинаковые квадраты со стороной $2R$ и раскрасим их в шахматном порядке. Впишем в каждый из них окружность. Тогда детали полотна можно считать расположенными на этих окружностях, причём движение поезда, идущего из начала в конец, происходит в белых клетках по часовой стрелке, а в чёрных — против (или наоборот; см. рис. 23.11). Поэтому тупик образоваться не может, так как по обоим звеньям тупика движение происходит в одну сторону.

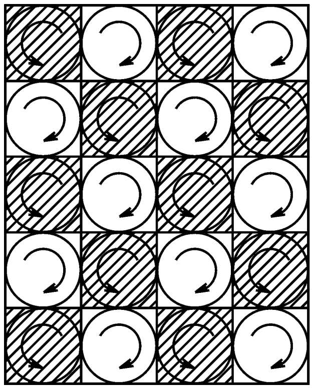


Рис. 23.11

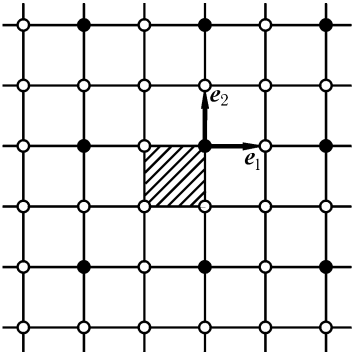


Рис. 23.12

23.25. Рассмотрим решётку, изображённую на рис. 23.12, и раскрасим её в два цвета, как показано на этом рисунке (белые узлы на этом рисунке не закрашены; исходный квадрат заштрихован, причём кузнечики сидят в его белых вершинах). Докажем, что кузнечики могут попасть только в белые узлы, т. е. при симметрии относительно белого узла белый узел переходит в белый. Для этого достаточно доказать, что при симметрии относительно белого узла чёрный узел переходит в чёрный. Пусть A — чёрный узел, B — белый, а A_1 — образ точки A при симметрии относительно B. Точка A_1 является чёрным узлом тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AA_1} = 2me_1 + 2ne_2$, где m и n — целые числа. Ясно, что $\overrightarrow{AA_1} = 2\overrightarrow{AB} = 2(me_1 + ne_2)$, поэтому A_1 — чёрный узел. Таким образом, кузнечик не может попасть в четвёртую вершину квадрата.

23.26. Раскрасим узлы клетчатой бумаги в шахматном порядке (рис. 23.13). Так как концы любого единичного отрезка разноцветны, то ломаная с одноцветными концами содержит нечётное число узлов, а с разноцветными — чётное. Предположим, что из всех узлов границы (кроме вершин квадрата) выходят ломаные. Докажем, что тогда все ломаные вместе содержат чётное число узлов. Для этого достаточно доказать, что число ломаных с одноцветными концами чётно. Пусть на границе квадрата расположено $4m$ белых и $4n$ чёрных узлов (вершины квадрата не учитываются). Обозначим число ломаных, у которых оба конца белые, через k. Тогда имеется $4m - 2k$ ломаных с разноцветными концами и $[4n - (4m - 2k)]/2 = 2(n - m) + k$ ломаных с чёрными концами. Поэтому ломаных с одноцветными концами будет $k + 2(n - m) + k = 2(n - m + k)$ — чётное число. Остаётся заметить, что квадратный лист бумаги размером 100×100 клеток содержит нечётное число узлов. Поэтому ломаные, содержащие в совокупности чётное число узлов, не могут проходить через все узлы.

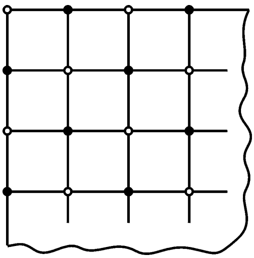


Рис. 23.13

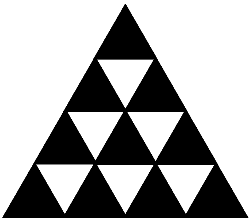


Рис. 23.14

23.27. Раскрасим треугольники, как показано на рис. 23.14. Тогда чёрных треугольников будет $1 + 2 + \ldots + n = n(n + 1)/2$, а белых $1 + 2 + \ldots$ $\ldots + (n - 1) = n(n - 1)/2$. Ясно, что два треугольника с последовательными номерами разноцветные. Поэтому среди занумерованных треугольников чёрных может быть только на 1 больше, чем белых. Следовательно, общее число занумерованных треугольников не превосходит $n(n - 1) + 1$.

23.28. Раскрасим дно коробки в два цвета, как показано на рис. 23.15. Тогда каждая плитка 2×2 покрывает ровно одну чёрную клетку, а плитка 1×4 покрывает 2 или 0. Поэтому чётность числа чёрных клеток дна коробки

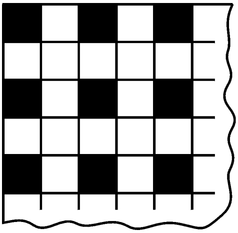


Рис. 23.15

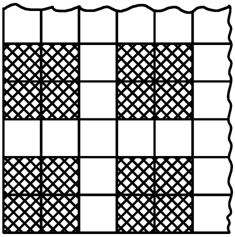


Рис. 23.16

совпадает с чётностью числа плиток 2×2. Так как при замене плитки 2×2 на плитку 1×4 чётность числа плиток 2×2 изменится, выложить дно коробки плитками не удастся.

23.29. Заштрихуем на данном квадратном листе бумаги квадратики 2×2 так, как показано на рис. 23.16. При этом получится 100 заштрихованных квадратиков. Каждый вырезанный квадратик задевает ровно один заштрихованный квадратик, поэтому хотя бы один заштрихованный квадратик остаётся целым, и его можно вырезать.

23.30. Если многоугольник разбит на части несколькими диагоналями, то эти части можно окрасить в два цвета так, чтобы части, имеющие общую сторону, были разного цвета. Это можно сделать следующим образом. Будем последовательно проводить диагонали. Каждая диагональ разбивает многоугольник на две части. В одной из них сохраняем раскраску, а другую перекрашиваем, заменяя везде белый цвет на чёрный, а чёрный — на белый. Проделав эту операцию для всех нужных диагоналей, получим требуемую раскраску. Так как в нашем случае в каждой вершине сходится нечётное число треугольников, то при такой раскраске все стороны многоугольника будут принадлежать треугольникам одного цвета, например чёрного (рис. 23.17).

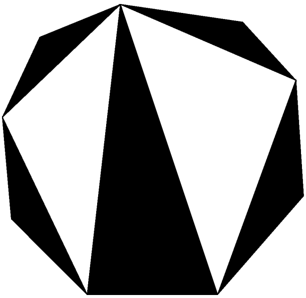


Рис. 23.17

Обозначим число сторон белых треугольников через m. Ясно, что m делится на 3. Так как каждая сторона белого треугольника является также и стороной чёрного треугольника, а все стороны многоугольника являются сторонами чёрных треугольников, то число сторон чёрных треугольников равно $n + m$. Поэтому $n + m$ делится на 3, а поскольку m делится на 3, то и n делится на 3.

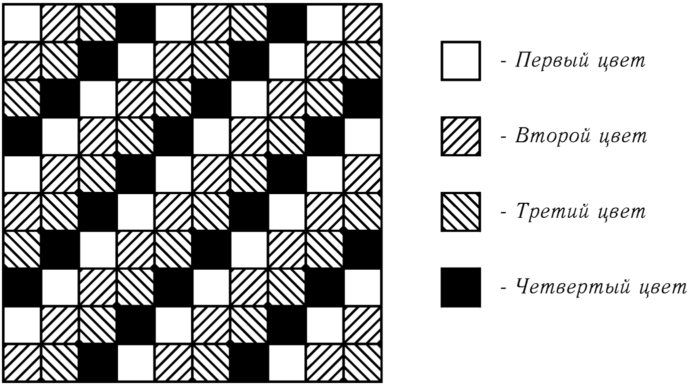


Рис. 23.18

23.31. Раскрасим доску в четыре цвета, как показано на рис. 23.18. Легко сосчитать, что клеток второго цвета 26, а четвёртого 24. Каждая плитка 1×4 накрывает по одной клетке каждого цвета. Поэтому плитками 1×4 нельзя замостить доску 10×10, так как иначе клеток каждого цвета было бы поровну.

23.32. Раскрасим клетчатую бумагу в четыре цвета, как показано на рис. 23.19. Среди данных n клеток найдётся не менее $n/4$ одноцветных клеток, а одноцветные клетки не имеют общих точек.

23.33. Раскрасим узлы клетчатой бумаги в четыре цвета в том же порядке, в каком раскрашены клетки на рис. 23.19. Если $n \geqslant 5$, то найдутся две одноцветные вершины n-угольника. Середина отрезка с концами в одноцветных узлах является узлом. Так как n-угольник выпуклый, то середина отрезка с концами в его вершинах лежит либо внутри его, либо на стороне.

23.34. Разобьём полученный квадрат на клетки размером 1×1 и раскрасим их в три цвета, как показано на рис. 23.20. Легко проверить, что плитки 1×3 можно разбить на два типа: плитка 1-го типа накрывает одну клетку 1-го цвета и две клетки 2-го цвета, а плитка 2-го типа накрывает одну клетку 2-го цвета и две клетки 3-го цвета. Предположим, что все клетки 1-го цвета накрыты плитками 1×3. Тогда плиток 1-го типа 9, а плиток 2-го типа 7.

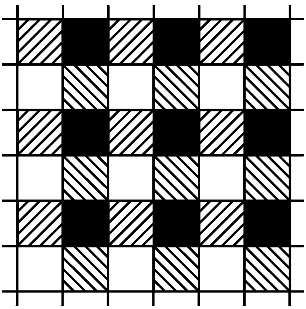


Рис. 23.19

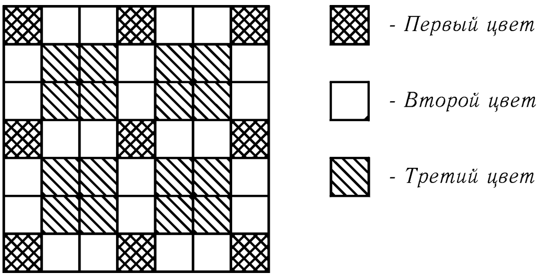


Рис. 23.20

Следовательно, они накрывают $9 \cdot 2 + 7 = 25$ клеток 2-го цвета и $7 \cdot 2 = 14$ клеток 3-го цвета. Получено противоречие, поэтому одна из клеток 1-го цвета накрыта плиткой 1×1.

23.35. Разрежем данный n-угольник непересекающимися диагоналями на треугольники (см. задачу 22.43). Вершины n-угольника можно раскрасить в три цвета так, что все вершины каждого из полученных треугольников будут разного цвета (см. задачу 23.41). Вершин какого-нибудь цвета будет не более $[n/3]$; сторожей достаточно поставить в этих вершинах.

23.36. Рассмотрим правильный треугольник со стороной 1. Все три его вершины не могут быть разного цвета, поэтому две вершины имеют один цвет; расстояние между ними равно 1.

23.37. Предположим, что любые две точки, лежащие на расстоянии 1, окрашены в разные цвета. Рассмотрим правильный треугольник ABC со стороной 1; все его вершины разного цвета. Пусть точка A_1 симметрична A относительно прямой BC. Так как $A_1B = A_1C = 1$, то цвет точки A_1 отличен от цветов точек B и C, т. е. она окрашена в тот же цвет, что и точка A. Эти рассуждения показывают, что если $AA_1 = \sqrt{3}$, то точки A и A_1 одного цвета. Поэтому все точки окружности радиуса $\sqrt{3}$ с центром A одного цвета. Ясно, что на этой окружности найдутся две точки, расстояние между которыми равно 1. Получено противоречие.

23.38. Приведём пример раскраски плоскости в семь цветов, для которой расстояние между любыми двумя одноцветными точками не равно 1. Разобьём плоскость на равные шестиугольники со стороной a и окрасим их, как пока-

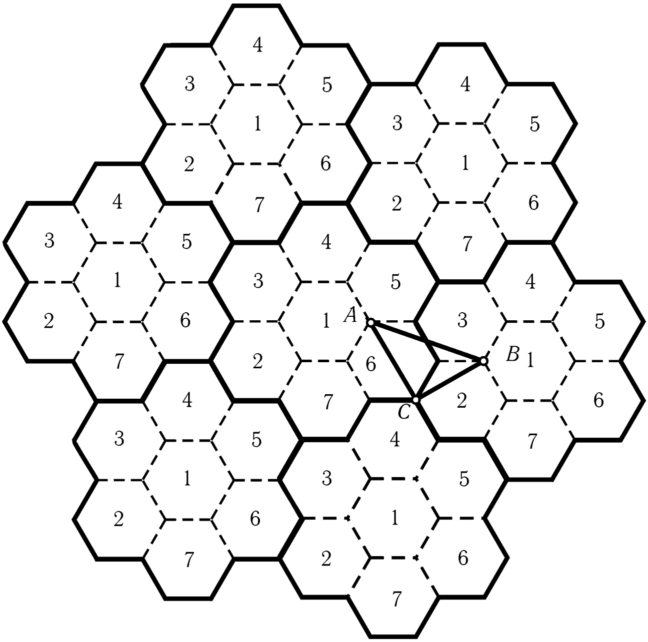


Рис. 23.21

зано на рис. 23.21 (точки, принадлежащие двум или трём шестиугольникам, можно красить в любой из цветов этих шестиугольников). Наибольшее расстояние между точками одного цвета, лежащими в одном шестиугольнике, не превосходит $2a$, а наименьшее расстояние между точками одного цвета, лежащими в разных шестиугольниках, не меньше длины отрезка AB (см. рис. 23.21). Ясно, что $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 4a^2 + 3a^2 = 7a^2 > (2a)^2$. Поэтому, если $2a < 1 < \sqrt{7}a$, т. е. $1/\sqrt{7} < a < 1/2$, то расстояние между точками одного цвета не может быть равно 1.

23.39. Предположим, что нет прямоугольного треугольника с вершинами одного цвета. Разделим каждую сторону правильного треугольника двумя точками на три равные части. Эти точки образуют правильный шестиугольник. Если две его противоположные вершины одного цвета, то все остальные вершины будут второго цвета, а значит, есть прямоугольный треугольник с вершинами второго цвета. Следовательно, противоположные вершины шестиугольника разноцветные. Поэтому найдутся две соседние разноцветные вершины; противоположные им вершины тоже разноцветные. Одна из этих пар разноцветных вершин лежит на стороне треугольника. Точки этой стороны, отличные от вершин шестиугольника, не могут быть ни первого, ни второго цвета. Получено противоречие.

23.40. Докажем это утверждение индукцией по числу треугольников триангуляции. Для одного треугольника требуемая раскраска существует. Предположим теперь, что можно раскрасить требуемым образом любую триангуляцию, состоящую менее чем из n треугольников, и докажем, что тогда можно раскрасить любую триангуляцию, состоящую из n треугольников. Выбросим треугольник, одна из сторон которого лежит на стороне триангулированной фигуры. Оставшуюся часть можно раскрасить по предположению индукции (она, конечно, может состоять из нескольких кусков, но это не мешает). У выброшенного треугольника только две стороны могут граничить с остальными треугольниками. Поэтому его можно окрасить в цвет, отличный от цветов двух соседних с ним треугольников.

23.41. Доказательство аналогично решению задачи 23.40. Главное отличие заключается в том, что выбрасывать нужно треугольник, выходящий двумя сторонами на границу многоугольника (см. задачу 22.46).

23.42. Доказательство проведём индукцией по числу кругов n. При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть M — любая точка, O — наиболее удалённый от неё центр круга. Тогда круг с центром O касается не более трёх других данных кругов. Выбросим его и раскрасим остальные круги согласно предположению индукции. Этот круг можно окрасить цветом, отличным от цветов касающихся его кругов.

ГЛАВА 24

ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ РЕШЁТКИ

Основные сведения

Рассмотрим на плоскости систему прямых, заданных уравнениями $x = m$ и $y = n$, где m и n — целые числа. Эти прямые образуют решётку квадратов или *целочисленную решётку*. Вершины этих квадратов, т. е. точки с целочисленными координатами, называют *узлами* целочисленной решётки.

§ 1. Многоугольники с вершинами в узлах решётки

24.1*. Существует ли правильный треугольник с вершинами в узлах целочисленной решётки?

24.2*. Докажите, что при $n \neq 4$ правильный n-угольник нельзя расположить так, чтобы его вершины оказались в узлах целочисленной решётки.

24.3*. Можно ли прямоугольный треугольник с целыми сторонами расположить так, чтобы его вершины лежали в узлах целочисленной решётки, но ни одна из его сторон не проходила по линиям решётки?

24.4*. Существует ли замкнутая ломаная с нечётным числом звеньев равной длины, все вершины которой лежат в узлах целочисленной решётки?

24.5*. На клетчатой бумаге выбраны три точки A, B, C, находящиеся в вершинах клеток. Докажите, что если треугольник ABC остроугольный, то внутри его или на сторонах есть по крайней мере ещё одна вершина клетки.

24.6*. Вершины выпуклого многоугольника расположены в узлах целочисленной решётки, причём ни одна из его сторон не проходит по линиям решётки. Докажите, что сумма длин горизонтальных отрезков линий решётки, заключённых внутри многоугольника, равна сумме длин вертикальных отрезков.

См. также задачи 21.13, 23.33.

§ 2. Формула Пика

24.7*. Вершины многоугольника (не обязательно выпуклого) расположены в узлах целочисленной решётки. Внутри его лежит n узлов решётки, а на границе m узлов. Докажите, что его площадь равна $n + m/2 - 1$ (*формула Пика*).

24.8*. *Последовательностью Фарея* F_n называют возрастающую последовательность несократимых дробей a/b, где $0 < a < b \leqslant n$. Пусть a/b и c/d — соседние члены последовательности Фарея. Докажите, что $|ad - bc| = 1$.

24.9*. Вершины треугольника ABC расположены в узлах целочисленной решётки, причём на его сторонах других узлов нет, а внутри его есть ровно один узел O. Докажите, что O — точка пересечения медиан треугольника ABC.

24.10*. Докажите, что квадрат со стороной n не может накрыть более $(n+1)^2$ точек целочисленной решётки.

§ 3. Разные задачи

24.11*. На бесконечном листе клетчатой бумаги N клеток окрашено в чёрный цвет. Докажите, что из этого листа можно вырезать конечное число квадратов так, что будут выполняться два условия: 1) все чёрные клетки лежат в вырезанных квадратах; 2) в любом вырезанном квадрате K площадь чёрных клеток составит не менее 0,2 и не более 0,8 площади K.

24.12*. Докажите, что для любого n существует окружность, внутри которой лежит ровно n целочисленных точек.

24.13*. Докажите, что для любого n существует окружность, на которой лежит ровно n целочисленных точек.

См. также задачи 21.1, 21.23, 23.4.

§ 4. Вокруг теоремы Минковского

24.14*. Начало координат является центром симметрии выпуклой фигуры площадью более 4. Докажите, что эта фигура содержит хотя бы одну точку с целыми координатами, отличную от начала координат (Минковский).

24.15*. а) Во всех узлах целочисленной решётки, кроме одного, в котором находится охотник, растут деревья, стволы которых имеют радиус r. Докажите, что охотник не сможет увидеть зайца, находящегося от него на расстоянии больше $1/r$.

б) Пусть n — натуральное число. Во всех точках целочисленной решётки, расположенных строго внутри окружности радиуса $\sqrt{n^2+1}$ с центром в начале координат и отличных от начала координат, растут деревья радиуса r. Докажите, что если $r < \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$, то на указанной окружности есть точка, которую можно увидеть из начала координат.

24.16*. Внутри выпуклой фигуры с площадью S и полупериметром p нет точек целочисленной решётки. Докажите, что $S \leqslant p$.

24.17*. Выпуклая фигура Φ имеет площадь S и полупериметр p. Докажите, что если $S > np$ для некоторого натурального n, то Φ содержит по крайней мере n целочисленных точек.

24.18*. Внутри выпуклой фигуры с площадью S и полупериметром p лежит n узлов решётки. Докажите, что $n > S - p$.

Решения

24.1. Предположим, что вершины правильного треугольника ABC расположены в узлах целочисленной решётки. Тогда тангенсы всех углов, образованных сторонами AB и AC с линиями решётки, рациональны. При любом положении треугольника ABC сумма или разность некоторых двух таких углов α и β равна 60°. Следовательно, $\sqrt{3} = \operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = (\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta)/(1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta)$ — рациональное число. Получено противоречие.

24.2. Для $n = 3$ и $n = 6$ утверждение вытекает из предыдущей задачи, поэтому будем в дальнейшем считать, что $n \neq 3, 4, 6$. Предположим, что существуют правильные n-угольники с вершинами в узлах целочисленной решётки ($n \neq 3, 4, 6$). Среди всех таких n-угольников можно выбрать тот, у которого длина стороны наименьшая. (Для доказательства достаточно заметить, что если a — длина отрезка с концами в узлах решётки, то $a = \sqrt{n^2 + m^2}$, где n и m — целые числа, поэтому длина отрезка с концами в узлах решётки может принимать лишь конечное число различных значений, меньших данного.) Пусть $\overrightarrow{A_iB_i} = \overrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}$. Тогда $B_1 \dots B_n$ — правильный n-угольник, вершины которого лежат в узлах целочисленной решётки, а его сторона меньше стороны правильного n-угольника $A_1 \dots A_n$. Для $n = 5$ это видно из рис. 24.1, а для $n \geqslant 7$ — из рис. 24.2. Получено противоречие с выбором n-угольника $A_1 \dots A_n$.

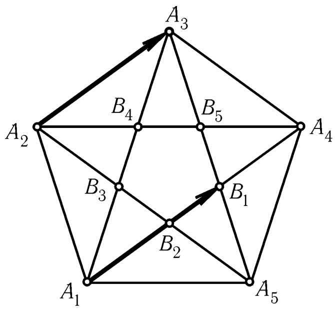


Рис. 24.1

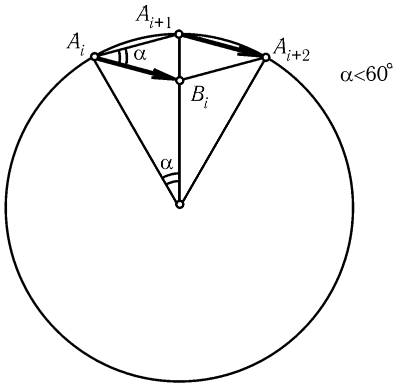


Рис. 24.2

24.3. Легко проверить, что треугольник с вершинами в точках с координатами $(0, 0)$, $(12, 16)$ и $(-12, 9)$ обладает требуемыми свойствами.

24.4. Предположим, что существует замкнутая ломаная $A_1 \dots A_n$ с нечётным числом звеньев равной длины, все вершины которой лежат в узлах целочисленной решётки. Пусть a_i и b_i — координаты проекций вектора $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ на горизонтальную и вертикальную оси. Обозначим длину звена ломаной через c. Тогда $c^2 = a_i^2 + b_i^2$, поэтому c^2 при делении на 4 даёт остаток 0, 1 или 2. Если c^2 делится на 4, то a_i и b_i делятся на 2 (это доказывается простым перебором всех возможных остатков, которые a_i и b_i дают при делении на 2). Поэтому при гомотетии с центром A_1 и коэффициентом 0,5 наша ломаная перейдёт в ломаную с меньшей длиной звена, вершины которой по-прежнему лежат в узлах решётки. После нескольких таких операций придём к ломаной, у которой c^2 не делится на 4, т. е. даёт остаток 1 или 2. Разберём эти варианты, предварительно заметив, что $a_1 + \ldots + a_m = b_1 + \ldots + b_m = 0$.

1. c^2 при делении на 4 даёт остаток 2. Тогда числа a_i и b_i оба нечётны, поэтому число $a_1 + \ldots + a_m$ нечётно и не может равняться нулю.

2. c^2 при делении на 4 даёт остаток 1. Тогда одно из чисел a_i и b_i нечётно, а другое чётно, поэтому число $a_1 + \ldots + a_m + b_1 + \ldots + b_m$ нечётно и не может равняться нулю.

24.5. Построим прямоугольник со сторонами, идущими по линиям клетчатой бумаги, так, чтобы вершины A, B, C лежали на его сторонах. Ни одна из вершин A, B, C не может оказаться внутри этого прямоугольника, поскольку иначе угол при этой вершине был бы тупым. По крайней мере одна из точек A, B, C лежит на стороне прямоугольника, а не в его вершине, поскольку иначе треугольник ABC был бы прямоугольным. Пусть для определённости вершина A лежит на стороне прямоугольника. Введём на плоскости координаты, выбрав точку A в качестве начала координат, а эту сторону прямоугольника — в качестве оси Ox. Ось Oy направим так, чтобы прямоугольник лежал в полуплоскости $y \geqslant 0$. Ни одна из вершин B и C не лежит на оси Ox, поскольку иначе угол при вершине A был бы тупым. Таким образом, если точки B и C имеют координаты (x_1, y_1) и (x_2, y_2), то $y_1, y_2 \geqslant 1$, а числа x_1 и x_2 имеют разные знаки. Поэтому точка с координатами $(0, 1)$ лежит внутри треугольника ABC или на его стороне BC.

24.6. Докажем, что каждая из этих сумм равна площади многоугольника. Горизонтальные линии решётки разрезают многоугольник на два треугольника с основаниями a_1 и a_n и $n-1$ трапеций с основаниями a_1 и a_2, a_2 и a_3, ..., a_{n-1} и a_n. Высоты этих треугольников и трапеций равны 1, поэтому сумма их площадей равна

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_2 + a_3}{2} + \ldots + \frac{a_{n-1} + a_n}{2} + \frac{a_n}{2} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Для вертикальных линий доказательство аналогично.

24.7. Каждому многоугольнику M с вершинами в узлах целочисленной решётки поставим в соответствие число $f(M) = \sum\limits_i \varphi_i / 2\pi$, где суммирование ведётся по всем узлам решётки, принадлежащим M, а угол φ_i определяется следующим образом: $\varphi_i = 2\pi$ для внутренней точки многоугольника, $\varphi_i = \pi$ для граничной точки, отличной от вершины, и φ_i — угол при вершине, если данный узел — вершина. Легко видеть, что $f(M) = n + \frac{(m-2)\pi}{2\pi} = n + \frac{m}{2} - 1$. Остаётся проверить, что число $f(M)$ равно площади многоугольника M.

Пусть многоугольник M разрезан на многоугольники M_1 и M_2 с вершинами в узлах решётки. Тогда $f(M) = f(M_1) + f(M_2)$, поскольку для каждого узла углы складываются. Поэтому если формула Пика верна для двух из многоугольников M, M_1 и M_2, то она верна и для третьего.

Если M — прямоугольник со сторонами p и q, направленными по линиям решётки, то

$$f(M) = (p-1)(q-1) + \frac{2(p-1)}{2} + \frac{2(q-1)}{2} + \frac{4}{4} = pq.$$

В этом случае формула Пика справедлива. Разрезав прямоугольник M диагональю на треугольники M_1 и M_2 и воспользовавшись тем, что $f(M) = f(M_1) + f(M_2)$ и $f(M_1) = f(M_2)$, легко доказать справедливость формулы Пика для любого прямоугольного треугольника с катетами, направленными по линиям решётки. Отрезав несколько таких треугольников от прямоугольника, можно получить любой треугольник (рис. 24.3).

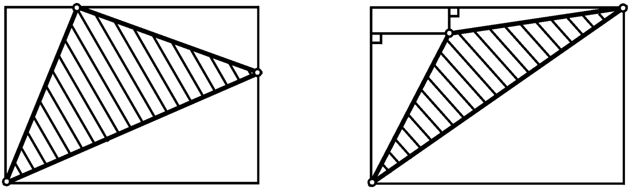


Рис. 24.3

Для завершения доказательства формулы Пика остаётся заметить, что любой многоугольник можно разрезать на треугольники непересекающимися диагоналями (задача 22.43).

24.8. Сопоставим каждой несократимой дроби a/b точку с координатами (a, b). Если a/b и c/d — соседние члены последовательности Фарея, то треугольник с вершинами $(0, 0)$, (a, b) и (c, d) не содержит целочисленных точек, отличных от вершин. Действительно, если бы целочисленная точка (p, q) принадлежала этому треугольнику, то числа p и q не превосходили бы n и дробь p/q была бы заключена между a/b и c/d. Поэтому согласно формуле Пика площадь этого треугольника равна $1/2$. С другой стороны, согласно задаче 12.78 его площадь равна $\frac{1}{2}|ad - bc|$.

24.9. Согласно формуле Пика $S_{AOB} = S_{BOC} = S_{COA} = 1/2$, а значит, O — точка пересечения медиан треугольника ABC (см. задачу 4.2).

24.10. Пусть M — выпуклая оболочка точек целочисленной решётки, покрытых квадратом со стороной n. Согласно формуле Пика её площадь равна $p + \frac{q}{2} - 1$, где p — количество целочисленных точек внутри M, q — количество целочисленных точек на границе M. Поэтому $p + \frac{q}{2} - 1 \leqslant n^2$.

Периметр M не превосходит периметра данного квадрата (задача 9.29 б). Кроме того, расстояние между соседними целочисленными точками на границе M не меньше 1. Поэтому $q \leqslant 4n$.

Сложив неравенства $p + \frac{q}{2} - 1 \leqslant n^2$ и $\frac{q}{2} \leqslant 2n$, получаем требуемое неравенство $p + q \leqslant (n+1)^2$.

24.11. Возьмём какой-нибудь достаточно большой квадрат со стороной 2^n так, чтобы все чёрные клетки лежали внутри его и составляли менее 0,2 его площади. Разрежем этот квадрат на четыре одинаковых квадрата. Каждый из них окрашен менее чем на 0,8. Те из них, которые окрашены более чем на 0,2, оставляем, а остальные режем дальше таким же образом. Полученные квадраты 2×2 будут окрашены на 1/4, 1/2, 3/4 или не будут окрашены вовсе. Из листа бумаги нужно вырезать те полученные квадраты, в которых есть окрашенные клетки.

24.12. Докажем сначала, что на окружности с центром $A = (\sqrt{2}, 1/3)$ не может лежать более одной целочисленной точки. Если m и n — целые числа, то $(m - \sqrt{2})^2 + (n - (1/3))^2 = q - 2m\sqrt{2}$, где q — рациональное число. Поэтому из равенства

$$(m_1 - \sqrt{2})^2 + (n_1 - 1/3)^2 = (m_2 - \sqrt{2})^2 + (n_2 - (1/3))^2$$

следует, что $m_1 = m_2$. По теореме Виета сумма корней уравнения $(n - (1/3))^2 = d$ равна 2/3, поэтому лишь один корень может быть целочисленным.

Расположим теперь радиусы окружностей с центром A, проходящих через целочисленные точки, в порядке возрастания: $R_1 < R_2 < R_3 < \ldots$ Если $R_n < R < R_{n+1}$, то внутри окружности радиуса R с центром A лежит ровно n целочисленных точек.

24.13. Докажем сначала, что уравнение $x^2 + y^2 = 5^k$ имеет ровно $4(k+1)$ целочисленных решений. При $k = 0$ и $k = 1$ это утверждение очевидно. Докажем, что уравнение $x^2 + y^2 = 5^k$ имеет ровно восемь таких решений (x, y), что x и y не делятся на 5; вместе с $4(k-1)$ решениями вида $(5a, 5b)$, где a и b — решение уравнения $a^2 + b^2 = 5^{k-2}$, они дают нужное количество решений. Эти решения получаются друг из друга перестановками x и y и изменениями знаков; мы будем называть их нетривиальными решениями.

Пусть $x^2 + y^2$ делится на 5. Тогда $(x + 2y)(x - 2y) = x^2 + y^2 - 5y^2$ тоже делится на 5. Поэтому одно из чисел $x + 2y$ и $x - 2y$ делится на 5. Легко проверить также, что если $x + 2y$ и $x - 2y$ делятся на 5, то x и y делятся на 5.

Если (x, y) — нетривиальное решение уравнения $x^2+y^2=5^k$, то $(x+2y, 2x-y)$ и $(x - 2y, 2x + y)$ — решения уравнения $\xi^2 + \eta^2 = 5^{k+1}$, причём ровно одно из них нетривиально. Докажем, что нетривиальное решение единственно с точностью до перестановки x и y и изменения знаков. Пусть (x, y) — нетривиальное решение уравнения $x^2 + y^2 = 5^k$. Тогда как пары $\left(\pm\frac{2x-y}{5}, \pm\frac{x+2y}{5}\right)$ и $\left(\pm\frac{x+2y}{5}, \pm\frac{2x-y}{5}\right)$, так и пары $\left(\pm\frac{2x+y}{5}, \pm\frac{x-2y}{5}\right)$ и $\left(\pm\frac{x-2y}{5}, \pm\frac{2x+y}{5}\right)$ являются решениями уравнения $\xi^2 + \eta^2 = 5^{k-1}$, но целочисленными будут пары ровно одного из этих видов, так как ровно одно из чисел $x + 2y$ и $x - 2y$ делится на 5. При этом мы получим нетривиальное решение, потому что $(x + 2y)(x - 2y) = (x^2 + y^2) - 5y^2$ при $k \geqslant 2$ делится на 5, но не делится на 25. Таким образом, каждое из восьми нетривиальных решений уравнения $x^2 + y^2 = 5^k$ даёт восемь нетривиальных решений уравнения $\xi^2 + \eta^2 = 5^{k-1}$, причём для одной половины решений нужно воспользоваться формулами первого вида, а для другой половины решений — формулами второго вида.

Перейдём теперь непосредственно к решению задачи. Пусть $n = 2k + 1$. Докажем, что на окружности радиуса $5^k/3$ с центром $(1/3, 0)$ лежит ровно n целочисленных точек. Уравнение $x^2 + y^2 = 5^{2k}$ имеет $4(2k+1)$ целочисленных решений. Кроме того, 5^{2k} при делении на 3 даёт остаток 1, поэтому одно из чисел x и y делится на 3, а другое при делении на 3 даёт остаток ± 1.

Следовательно, ровно в одной из пар (x, y), $(x, -y)$, (y, x) и $(-y, x)$ первое и второе числа дают при делении на 3 остатки -1 и 0 соответственно. Поэтому уравнение $(3z-1)^2+(3t)^2=5^{2k}$ имеет ровно $2k+1$ целочисленных решений.

Пусть $n=2k$. Докажем, что на окружности радиуса $5^{(k-1)/2}/2$ с центром $(1/2, 0)$ лежит ровно n целочисленных точек. Уравнение $x^2+y^2=5^{k-1}$ имеет ровно $4k$ целочисленных решений, причём одно из чисел x и y чётно, а другое нечётно. Поэтому уравнение $(2z-1)^2+(2t)^2=5^{k-1}$ имеет ровно $2k$ целочисленных решений.

24.14. Рассмотрим все выпуклые фигуры, получающиеся из данной переносами на векторы, обе координаты которых чётны. Докажем, что хотя бы две из этих фигур пересекаются. Исходную фигуру можно заключить в круг радиуса R с центром в начале координат, причём R можно выбрать целым числом. Возьмём те из рассматриваемых фигур, координаты центров которых являются неотрицательными числами, не превосходящими $2n$. Этих фигур ровно $(n+1)^2$ штук и все они лежат внутри квадрата со стороной $2(n+R)$. Если бы они не пересекались, то при любом n выполнялось бы неравенство $(n+1)^2S<4(n+R)^2$, где S — площадь данной фигуры. Но так как $S>4$, то n можно выбрать так, чтобы выполнялось неравенство $(n+R)/(n+1)<\sqrt{S/4}$.

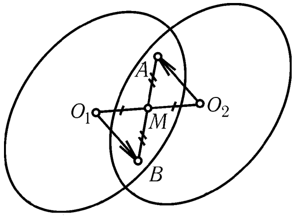


Рис. 24.4

Пусть теперь фигуры с центрами O_1 и O_2 имеют общую точку A (рис. 24.4). Докажем, что тогда середина M отрезка O_1O_2 принадлежит обеим фигурам (ясно, что точка M имеет целые координаты). Пусть $\overrightarrow{O_1B}=-\overrightarrow{O_2A}$. Так как данная фигура центрально симметрична, точка B принадлежит фигуре с центром O_1. Эта фигура выпукла, и точки A и B принадлежат ей, поэтому ей принадлежит также середина отрезка AB. Ясно, что середина отрезка AB совпадает с серединой отрезка O_1O_2.

24.15. а) Пусть охотник находится в точке O, а заяц — в точке A; A_1 — точка, симметричная A относительно O. Рассмотрим фигуру Φ, содержащую все точки, расстояние от которых до отрезка AA_1 не превосходит r (рис. 24.5). Достаточно доказать, что Φ содержит хотя бы один узел решётки (если узел попадает в заштрихованную часть, то точка A принадлежит стволу дерева).

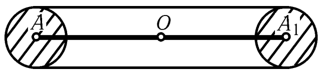


Рис. 24.5

Площадь Φ равна $4rh+\pi r^2$, где h — расстояние от охотника до зайца. Если $h>1/r$, то $4rh+\pi r^2>4$. По теореме Минковского Φ содержит целочисленную точку.

б) Рассмотрим прямоугольник с вершинами $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(n, 1)$ и $(n, 0)$. Покажем, что из начала координат можно увидеть точку $(n, 1)$. Действительно, расстояния от точек $(1, 0)$ и $(n-1, 1)$ до прямой, проходящей через точки $(0, 0)$ и $(n, 1)$, равно $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$. Поэтому деревья, растущие в этих точках, не пересекают указанную прямую. Остальные деревья её тем более не пересекают.

24.16. Прежде всего докажем, что если внутри выпуклой фигуры Φ с площадью S и полупериметром p нет точек целочисленной решётки, то существует выпуклая фигура Φ' с площадью $S'=S$ и полупериметром $p'\leqslant p$, внутри которой нет точек целочисленной решётки и которая симметрична относительно прямых $x = 1/2$ и $y = 1/2$. Затем для фигуры Φ' мы докажем, что $S' \leqslant p'$.

Фигура Φ' строится по фигуре Φ следующим образом. Сначала мы берём симметризацию по Штейнеру фигуры Φ относительно прямой $x = 1/2$, а затем для полученной фигуры рассматриваем симметризацию по Штейнеру относительно прямой $y = 1/2$. При симметризации по Штейнеру снова получается выпуклая фигура (задача 22.24), её площадь не изменяется, а периметр не увеличивается (задача 22.25). Предположим, что промежуточная фигура содержит целочисленную точку (m, n). Эта фигура симметрична относительно прямой $x = 1/2$, поэтому она содержит точку $(-m+1, n)$. Следовательно, прямая $y = n$ пересекает фигуру Φ по отрезку, длина которого не меньше $|2m-1| \geqslant 1$. Но тогда фигура Φ должна содержать целочисленную точку. Приходим к противоречию. Аналогично доказывается, что фигура Φ' не содержит целочисленных точек.

Докажем теперь, что $S' \leqslant p'$. Для этого рассмотрим два случая.

1. Фигура Φ' не содержит точек (x, y), для которых $x > 3/2$ или $y > 3/2$. Тогда фигура Φ' целиком содержится в фигуре, заштрихованной на рис. 24.6.

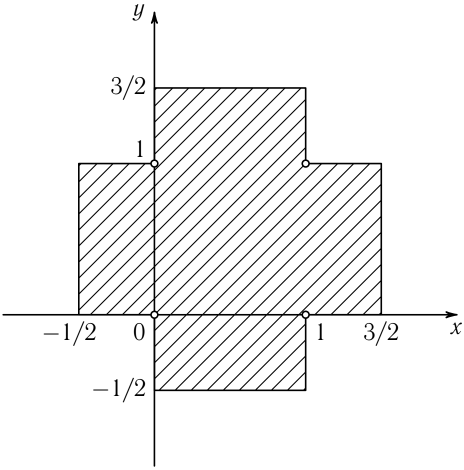


Рис. 24.6

Нужно лишь объяснить, почему от квадрата со стороной 2 отрезаны угловые квадратики со стороной 1/2. Это связано с тем, что если для любой точки углового квадратика рассмотреть ещё точки, симметричные ей относительно прямых $x = 1/2$ и $y = 1/2$ и относительно точки $(1/2, 1/2)$, то выпуклая оболочка этих четырёх точек будет содержать целочисленные точки (например, начало координат). Таким образом, $S' \leqslant 3$. Поэтому согласно изопериметрическому неравенству $S'/p' \leqslant \sqrt{S'/\pi} \leqslant \sqrt{3/\pi} < 1$.

2. Фигура Φ' содержит точку (x, y), для которой $x > 3/2$ или $y > 3/2$. Пусть для определённости наибольшая координата x точек фигуры Φ' равна $a > 3/2$. Рассмотрим точку (a, b) фигуры Φ' с наибольшей координатой y. Яс-

но, что $b < 1$, поскольку иначе прямоугольник с вершинами (a, b), $(-a+1, b)$, $(-a+1, -b+1)$, $(a, -b+1)$ содержал бы целочисленные точки. Часть фигуры Φ', состоящая из точек (x, y), для которых $x \geqslant 1/2$ и $y \geqslant 1/2$, принадлежит трапеции, заштрихованной на рис. 24.7, поэтому площадь этой части

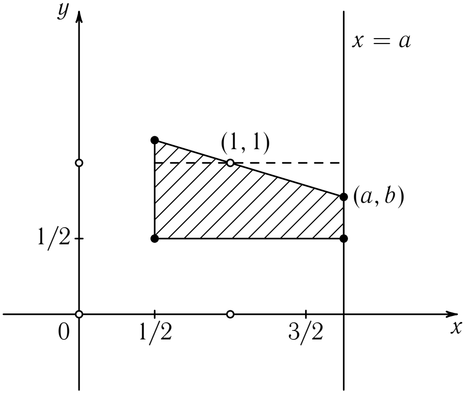


Рис. 24.7

не превосходит $\frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{2}\right)$. Следовательно, $S' \leqslant 2\left(a - \frac{1}{2}\right)$. Ясно также, что $p' \geqslant 2\left(a - \frac{1}{2}\right)$.

24.17. Согласно задаче 24.16 достаточно доказать, что если $S > np$, то Φ можно разрезать на n выпуклых фигур, у каждой из которых площадь больше полупериметра. Применим индукцию по n. Для $n = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что оно доказано для n; докажем его для $n+1$. Пусть $S > (n+1)p$ для некоторой фигуры Φ. Разрежем эту фигуру прямой на две фигуры Φ_1 и Φ_2, площади которых равны $S_1 = \frac{1}{n+1}S$ и $S_2 = \frac{n}{n+1}S$. Пусть p_1 и p_2 — полупериметры этих фигур. Ясно, что $p_1 < p$ и $p_2 < p$. Поэтому $S_1 > p > p_1$ и $S_2 > np > np_2$. Применив предположение индукции к фигуре Φ_2, получаем требуемое.

24.18. Рассмотрим решётку, заданную уравнениями $x = k + 1/2$ и $y = l + 1/2$, где k и l — целые числа. Докажем, что каждый квадрат этой решётки даёт неотрицательный вклад в величину $n - S + p$. Рассмотрим два случая.

1. Фигура содержит центр квадрата. Тогда $n' = 1$ и $S' \leqslant 1$, поэтому $n' - S' + p' \geqslant 0$.

2. Фигура пересекает квадрат, но не содержит его центр. Докажем, что в этом случае $S' \leqslant p'$. Если фигура целиком лежит в этом квадрате, то согласно изопериметрическому неравенству $S'/p' \leqslant \sqrt{S'/\pi} \leqslant \sqrt{1/\pi} < 1$. Если рассматриваемая часть фигуры ограничена стороной квадрата и некоторой кривой, то согласно задаче 22.22 $S'/p' \leqslant \sqrt{2S'/\pi} \leqslant \sqrt{2/\pi} < 1$. Поэтому остаётся рассмотреть случаи, когда рассматриваемая часть фигуры ограничена сторонами квадрата и кривой, соединяющей либо противоположные, либо смежные стороны квадрата. При этом можно считать, что центр O квадрата лежит

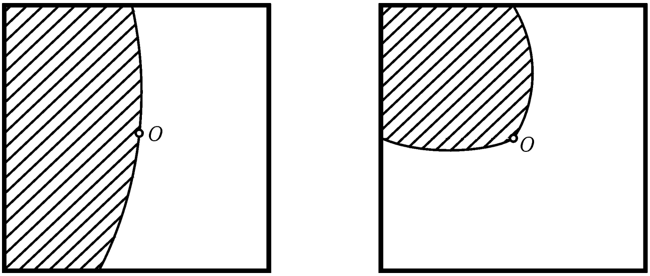


Рис. 24.8

на границе фигуры (рис. 24.8). Действительно, для кривой, соединяющей противоположные стороны, можно применить параллельный перенос, а для кривой, соединяющей смежные стороны, — гомотетию с центром в их общей вершине. В обоих случаях отношение S'/p' увеличится.

Так как расстояния от центра квадрата до его сторон равны $1/2$, то $p' \geqslant 1/2$. Проведя через точку O опорную прямую к данной фигуре, получим, что $S' \leqslant 1/2$.

Ясно также, что все вклады квадратов не могут быть одновременно нулевыми.

ГЛАВА 25

РАЗРЕЗАНИЯ, РАЗБИЕНИЯ, ПОКРЫТИЯ

Основные сведения

1. Во всех задачах этой главы рассматриваются лишь прямолинейные разрезы.

2. Две фигуры называют *равносоставленными*, если одну из них можно разрезать на части и сложить из них вторую фигуру (нетрудно убедиться, что тогда и вторую фигуру можно разрезать на части, из которых можно сложить первую фигуру). Ясно, что равносоставленные фигуры имеют равные площади. Оказывается, что для многоугольников верно и обратное, т. е. любые два равновеликих многоугольника равносоставлены (см. задачу 25.8 б).

3. Будем говорить, что фигура Φ *покрыта* фигурами $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$, если Φ содержится в объединении этих фигур, т. е. любая точка фигуры Φ принадлежит хотя бы одной из фигур $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$. Если же фигуры $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ не пересекаются (точнее говоря, не имеют общих внутренних точек) и их объединение совпадает с Φ, то будем говорить, что Φ *замощена* фигурами $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$.

§ 1. Равносоставленные фигуры

25.1. Разрежьте произвольный треугольник на 3 части и сложите из них прямоугольник.

25.2. Разрежьте произвольный треугольник на части, из которых можно составить треугольник, симметричный исходному относительно некоторой прямой (части переворачивать нельзя).

25.3. Разрежьте правильный треугольник шестью прямыми на части и сложите из них 7 одинаковых правильных треугольников.

25.4*. Разрежьте правильный шестиугольник на 5 частей и сложите из них квадрат.

* * *

25.5*. Разрежьте квадрат на 6 частей и сложите из них три одинаковых квадрата.

25.6*. Даны два параллелограмма равной площади с общей стороной. Докажите, что первый параллелограмм можно разрезать на части и сложить из них второй.

25.7*. Докажите, что любой прямоугольник можно разрезать на части и сложить из них прямоугольник со стороной 1.

25.8*. а) Докажите, что любой многоугольник можно разрезать на части и сложить из них прямоугольник со стороной 1.

б) Даны два многоугольника равной площади. Докажите, что первый многоугольник можно разрезать на части и сложить из них второй.

См. также задачу 23.18.

§ 2. Разрезания на части, обладающие специальными свойствами

25.9. Разрежьте фигуру, изображённую на рис. 25.1, на 4 равные части.

25.10. Существует ли треугольник, который можно разрезать: а) на 3; б) на 5 равных треугольников, подобных исходному?

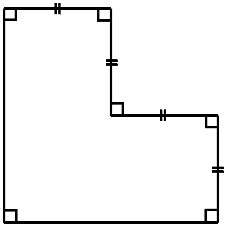


Рис. 25.1

25.11*. а) Докажите, что любой неравносторонний треугольник можно разрезать на неравные треугольники, подобные исходному.

б) Докажите, что правильный треугольник нельзя разрезать на неравные правильные треугольники.

25.12*. Разрежьте квадрат на 8 остроугольных треугольников.

25.13*. Можно ли какой-нибудь невыпуклый 5-угольник разрезать на два равных 5-угольника?

25.14*. Разрежьте произвольный тупоугольный треугольник на 7 остроугольных.

25.15*. Разрежьте разносторонний треугольник на 7 равнобедренных, три из которых равны.

См. также задачу 3.71.

§ 3. Свойства частей, полученных при разрезаниях

25.16. а) В выпуклом n-угольнике проведены все диагонали. Они разбивают его на несколько многоугольников. Докажите, что у каждого из них не более n сторон.

б)* Докажите, что если n чётно, то у каждого из полученных многоугольников не более $n-1$ сторон.

25.17. Докажите, что если n-угольник разрезан произвольным образом на k треугольников, то $k \geqslant n-2$.

25.18*. На квадратном листе бумаги нарисовано n прямоугольников со сторонами, параллельными сторонам листа. Никакие два из этих прямоугольников не имеют общих внутренних точек. Докажите, что если вырезать эти прямоугольники, то количество кусков, на которые распадается оставшаяся часть листа, не превосходит $n+1$.

25.19*. Докажите, что если выпуклый четырёхугольник $ABCD$ можно разрезать на два подобных четырёхугольника, то $ABCD$ — трапеция или параллелограмм.

25.20*. В квадрате со стороной 1 проведено конечное число отрезков, параллельных его сторонам, причём эти отрезки могут пересекать друг друга. Сумма длин отрезков равна 18. Докажите, что площадь одной из частей, на которые разбит квадрат, не меньше 0,01.

25.21*. Треугольник, все углы которого не превосходят 120°, разрезан на несколько треугольников. Докажите, что хотя бы у одного из полученных треугольников все углы не превосходят 120°.

См. также задачи 4.54, 22.45, 22.46, 23.15, 23.30, 23.40, 23.41.

§ 4. Разрезания на параллелограммы

25.22*. Докажите, что следующие свойства выпуклого многоугольника F эквивалентны: 1) F имеет центр симметрии; 2) F можно разрезать на параллелограммы.

25.23*. Докажите, что если выпуклый многоугольник можно разрезать на центрально симметричные многоугольники, то он имеет центр симметрии.

25.24*. Докажите, что любой правильный $2n$-угольник можно разрезать на ромбы.

25.25*. Правильный восьмиугольник со стороной 1 разрезан на параллелограммы. Докажите, что среди них есть по крайней мере два прямоугольника, причём сумма площадей всех прямоугольников равна 2.

§ 5. Плоскость, разрезанная прямыми

25.26. 99 прямых разбивают плоскость на n частей. Найдите все возможные значения n, меньшие 199.

Пусть на плоскости проведено n попарно непараллельных прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке. В задачах 25.27—25.31 рассматриваются свойства фигур, на которые эти прямые разбивают плоскость. При этом фигуру называют *p-звенной*, если она ограничена p звеньями (т. е. отрезками или лучами).

25.27. Докажите, что при $n = 4$ среди полученных частей есть четырёхугольник.

25.28. а) Найдите число всех полученных фигур.

б) Найдите число ограниченных фигур, т. е. многоугольников.

25.29. а) Докажите, что при $n = 2k$ среди полученных фигур не более $2k - 1$ углов.

б) Может ли при $n = 100$ среди полученных фигур быть только три угла?

25.30*. Докажите, что если среди полученных фигур есть p-звенная и q-звенная, то $p+q \leqslant n+4$.

25.31*. Докажите, что при $n \geqslant 3$ среди полученных частей не менее $(2n-2)/3$ треугольников.

Откажемся теперь от предположения, что никакие три из рассматриваемых прямых не пересекаются в одной точке. Если P — точка пересечения двух или нескольких прямых, то количество прямых данной системы, проходящих через точку P, будем обозначать $\lambda(P)$.

25.32*. Докажите, что количество отрезков, на которые данные прямые разбиты точками их пересечения, равно $-n+\sum\lambda(P)$.

25.33*. Докажите, что количество частей, на которые данные прямые разбивают плоскость, равно $1+n+\sum(\lambda(P)-1)$, причём среди этих частей $2n$ неограниченных.

25.34*. Части, на которые плоскость разрезана прямыми, раскрашены в красный и синий цвет так, что соседние части разного цвета (см. задачу 27.1). Пусть a — количество красных частей, b — количество синих частей. Докажите, что

$$a \leqslant 2b-2-\sum(\lambda(P)-2),$$

причём равенство достигается тогда и только тогда, когда красные области — треугольники и углы.

§ 6. Разные задачи на разрезания

25.35*. Можно ли невыпуклый четырёхугольник разрезать двумя прямыми на 6 частей?

25.36*. Докажите, что любой выпуклый n-угольник, где $n \geqslant 6$, можно разрезать на выпуклые пятиугольники.

25.37*. Докажите, что семиугольник нельзя разрезать на выпуклые шестиугольники.

25.38*. Докажите, что для любого натурального n, где $n \geqslant 6$, квадрат можно разрезать на n квадратов.

25.39*. Докажите, что выпуклый 22-угольник нельзя разрезать диагоналями на 7 пятиугольников.

25.40*. Можно ли разрезать правильный треугольник на 1000000 выпуклых многоугольников так, чтобы любая прямая имела общие точки не более чем с 40 из них?

25.41*. Квадратный лист бумаги разрезают прямой на две части. Одну из полученных частей разрезают на две части, и так делают несколько раз. Какое наименьшее число разрезаний нужно сделать, чтобы среди полученных частей оказалось 100 двадцатиугольников?

25.42*. а) Докажите, что из пяти попарно различных по величине квадратов нельзя сложить прямоугольник.

б) Докажите, что из шести попарно различных по величине квадратов нельзя сложить прямоугольник.

25.43*. Прямоугольник разрезан на прямоугольники, длина одной из сторон каждого из которых — целое число. Докажите, что длина одной из сторон исходного прямоугольника — целое число.

См. также задачи 23.18 и 23.19.

§ 7. Разбиение фигур на отрезки

25.44. Докажите, что четырёхугольник (с границей и внутренностью) можно разбить на отрезки, т. е. представить в виде объединения непересекающихся отрезков.

25.45*. Докажите, что треугольник можно разбить на отрезки.

25.46*. Докажите, что круг можно разбить на отрезки.

25.47*. Докажите, что плоскость можно разбить на отрезки.

§ 8. Покрытия

25.48*. На отрезке длиной 1 расположено несколько отрезков, полностью его покрывающих. Докажите, что можно выбросить некоторые из них так, чтобы оставшиеся по-прежнему покрывали отрезок и сумма их длин не превосходила 2.

25.49*. Отрезок длиной 1 покрыт несколькими лежащими на нём отрезками. Докажите, что среди них можно выбрать несколько попарно непересекающихся отрезков, сумма длин которых не меньше 0,5.

25.50*. Дан выпуклый пятиугольник, все углы которого тупые. Докажите, что в нём найдутся две такие диагонали, что круги, построенные на них как на диаметрах, полностью покроют весь пятиугольник.

25.51*. а) Квадрат со стороной 1 покрыт несколькими меньшими квадратами со сторонами, параллельными его сторонам. Докажите, что среди них можно выбрать непересекающиеся квадраты, сумма площадей которых не меньше $1/9$.

б) Площадь объединения нескольких кругов равна 1. Докажите, что из них можно выбрать несколько попарно непересекающихся кругов с общей площадью не менее $1/9$.

25.52*. Прожектор освещает угол величиной 90°. Докажите, что в любых четырёх заданных точках можно разместить 4 прожектора так, что они осветят всю плоскость.

25.53*. Длина проекции фигуры Φ на любую прямую не превосходит 1. Верно ли, что Φ можно накрыть кругом диаметра: а) 1; б) 1,5?

25.54*. Докажите, что любые n точек на плоскости всегда можно накрыть несколькими непересекающимися кругами так, что сумма их диаметров меньше n и расстояние между любыми двумя из них больше 1.

25.55*. На круглом столе радиуса R расположено без наложений n круглых монет радиуса r, причём больше нельзя положить ни одной монеты. Докажите, что $R/r \leqslant 2\sqrt{n}+1$.

См. также задачи 20.13, 20.17, 20.28, 20.34, 22.5, 22.10, 22.33, 22.35.

§ 9. Замощения костями домино и плитками

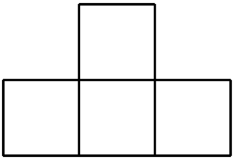


Рис. 25.2

25.56. Замостите обычную шахматную доску плитками, изображёнными на рис. 25.2.

25.57*. Из шахматной доски со стороной а) 2^n; б) $6n+1$ выброшена одна клетка. Докажите, что оставшуюся часть доски можно замостить плитками, изображёнными на рис. 25.3.

25.58*. Вырежьте из обычной шахматной доски одну клетку так, чтобы оставшуюся часть можно было замостить плитками размером 1×3.

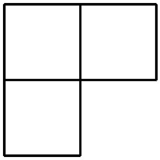


Рис. 25.3

25.59*. Прямоугольник размером $2n\times 2m$ замостили костями домино 1×2. Докажите, что на этот слой костей можно положить второй слой так, что ни одна кость второго слоя не совпадёт с костью первого слоя.

25.60*. Прямоугольник покрыт в два слоя карточками 1×2 (над каждой клеткой лежат ровно две карточки). Докажите, что карточки можно разбить на два непересекающихся множества, каждое из которых покрывает весь прямоугольник.

25.61*. а) Можно ли квадрат 6×6 замостить костями домино 1×2 так, чтобы не было «шва», т. е. прямой, не разрезающей костей?

б) Докажите, что любой прямоугольник $m\times n$, где m и n больше 6 и mn чётно, можно замостить костями домино так, чтобы не было «шва».

в) Докажите, что прямоугольник 6×8 можно замостить костями домино так, чтобы не было «шва».

25.62*. Имеется неограниченное количество плиток в форме многоугольника M. Будем говорить, что из этих плиток можно сложить паркет, если ими можно покрыть круг сколь угодно большого радиуса так, чтобы не было ни просветов, ни перекрытий.

а) Докажите, что если M — выпуклый n-угольник, где $n\geqslant 7$, то паркет сложить нельзя.

б) Приведите пример такого выпуклого пятиугольника с попарно непараллельными сторонами, что паркет сложить можно.

См. также задачу 23.22.

§ 10. Расположение фигур на плоскости

25.63*. Докажите, что к квадрату нельзя приложить более 8 не налегающих друг на друга квадратов такого же размера.

Решения

25.1. Пусть A — наибольший угол треугольника ABC. Тогда углы B и C острые. Проведя разрезы через середины сторон AB и AC перпендикулярно BC, переставим полученные части, как показано на рис. 25.4.

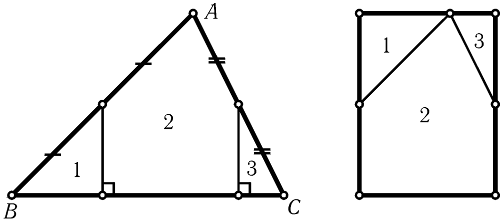


Рис. 25.4

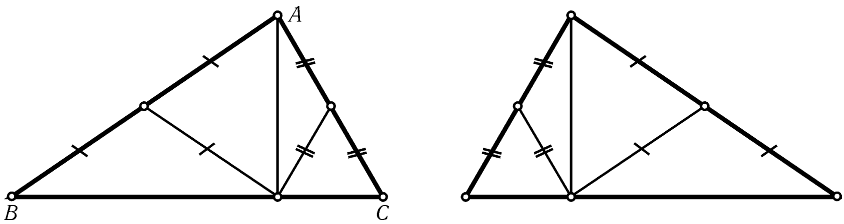


Рис. 25.5

25.2. Пусть A — наибольший угол треугольника. Разрежем треугольник ABC на равнобедренные треугольники и переставим их, как показано на рис. 25.5.

25.3. Сложим 7 одинаковых правильных треугольников, как показано на рис. 25.6. Тогда ABC — правильный треугольник. Ясно, что заштрихованные треугольники равны. Теперь легко понять, что на рис. 25.6 фактически изображено, как разрезать правильный треугольник ABC шестью прямыми на части, из которых можно сложить 7 одинаковых правильных треугольников.

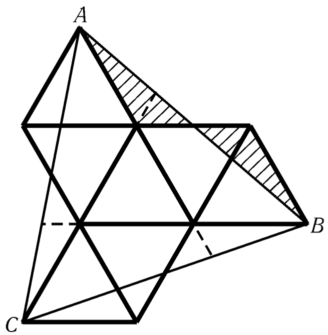


Рис. 25.6

25.4. Требуемые разрезы изображены на рис. 25.7. Отрезок AB равен стороне квадрата, площадь которого равна площади шестиугольника. Остальные разрезы проводятся очевидным образом.

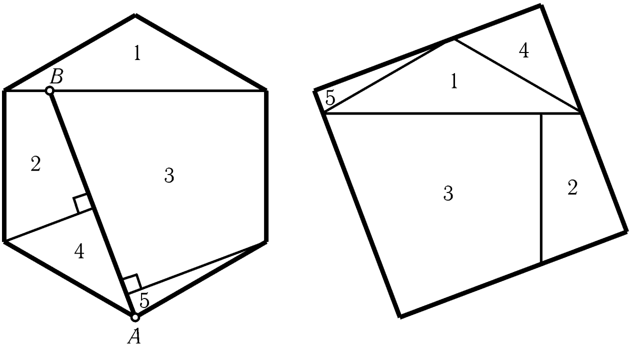
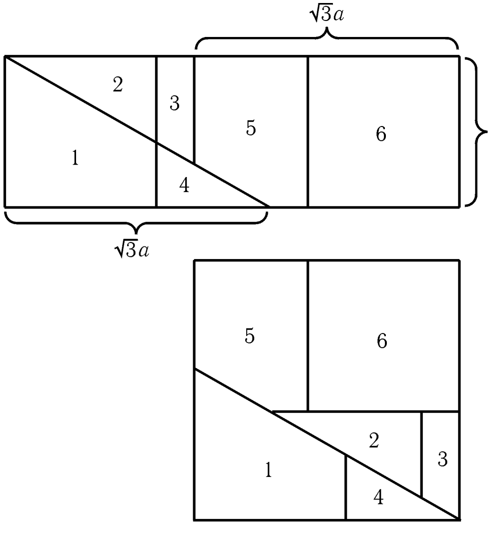


Рис. 25.7

25.5. Мы будем решать обратную задачу: разрежем три квадрата со стороной a и сложим из них квадрат со стороной $\sqrt{3}a$. Требуемые разрезы изображены на рис. 25.8.



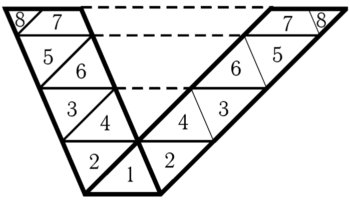


Рис. 25.8 Рис. 25.9

25.6. На рис. 25.9 показано, как это сделать.

25.7. Нужно доказать, что если есть два прямоугольника со сторонами a, b и c, d, причём $ab = cd = S$, то первый прямоугольник можно разрезать на части и сложить из них второй. Пусть для определённости $a \leqslant b$ и $c \leqslant d$. Тогда

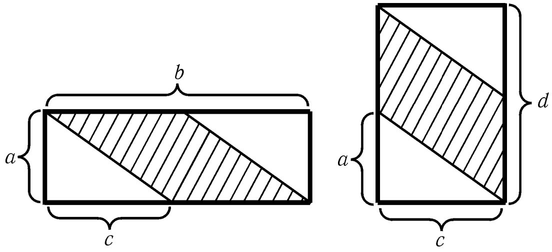


Рис. 25.10

$c \leqslant \sqrt{S} \leqslant b$ и $a \leqslant d$. Отрежем от обоих прямоугольников по два прямоугольных треугольника с катетами a и c, как показано на рис. 25.10. Заштрихованные параллелограммы равновелики и имеют сторону длиной $\sqrt{a^2+c^2}$, поэтому один параллелограмм можно разрезать на части и сложить из них второй (см. задачу 25.6).

25.8. а) Для решения этой задачи нужно воспользоваться результатами задач 22.43, 25.1 и 25.7. Сначала разрезаем многоугольник непересекающимися диагоналями на треугольники. Каждый из этих треугольников разрезаем на части и складываем из них прямоугольник. Полученные прямоугольники разрезаем на части и складываем из них прямоугольники со стороной 1. Ясно, что из нескольких прямоугольников со стороной 1 можно сложить один прямоугольник со стороной 1.

б) Разрежем первый многоугольник на части и сложим из них прямоугольник со стороной 1. Так как второй многоугольник можно разрезать на части и сложить из них этот прямоугольник, то и прямоугольник можно разрезать на части и сложить из них второй многоугольник (при этом части, на которые был разрезан первый многоугольник, будут разрезаны на более мелкие части).

25.9. Требуемые разрезы изображены на рис. 25.11.

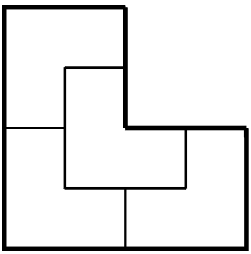


Рис. 25.11

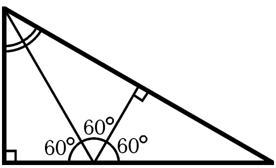


Рис. 25.12

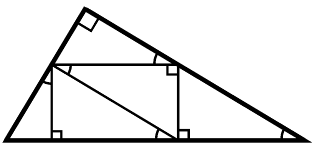


Рис. 25.13

25.10. а) Существует. Из трёх одинаковых прямоугольных треугольников с углом 60° можно сложить один прямоугольный треугольник с углом 60°, как показано на рис. 25.12.

б) Требуемым образом можно разрезать любой прямоугольный треугольник (рис. 25.13).

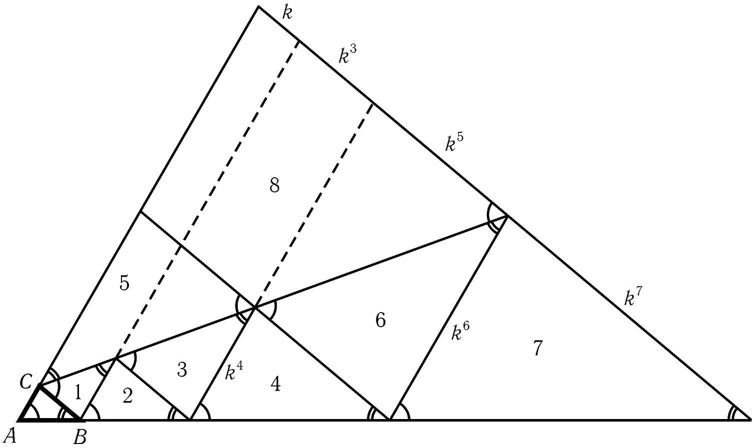


Рис. 25.14

25.11. а) Можно считать, что $BC/AC = k > 1$. Приложим к треугольнику ABC треугольники 1, 2, 3, 4 и 5 (см. рис. 25.14). Может оказаться,что треугольники 4 и 5 равны, т. е. $k + k^3 = k^4$. В этом случае дополним конструкцию треугольниками 6 и 7, а треугольник 5 заменим треугольником 8. Тогда треугольники 7 и 8 не равны, т. е. $k^6 \neq k + k^3 + k^5$. В самом деле, так как $k + k^3 = k^4$, то $k^6 = k^2(k + k^3) = k^3 + k^5 < k + k^3 + k^5$.

б) Предположим, что правильный треугольник разрезан на неравные правильные треугольники. Стороны двух треугольников разбиения не могут совпадать. Будем рассматривать только стороны треугольников разбиения, лежащие внутри (не на границе) исходного треугольника; пусть N — число таких сторон. Возникает три типа вершин треугольников разбиения (см. рис. 25.15). Из каждой вершины 1-го, 2-го и 3-го типа выходит соответственно 4, 12 и 6 сторон. Пусть n_1, n_2 и n_3 — количества точек 1-го, 2-го и 3-го типа. Тогда $N = (4n_1 + 12n_2 + 6n_3)/2 = 2n_1 + 6n_2 + 3n_3$.

Каждой точке 3-го типа можно сопоставить 3 стороны (на рис. 25.15 это стороны AB, OP и OQ). Легко проверить, что каждая сторона будет соответствовать хотя бы одной точке 3-го типа. Следовательно, $N \leqslant 3n_3$, а значит, $2n_1 + 6n_2 \leqslant 0$. В частности, $n_1 = 0$, т. е. разбиение состоит лишь из исходного треугольника.

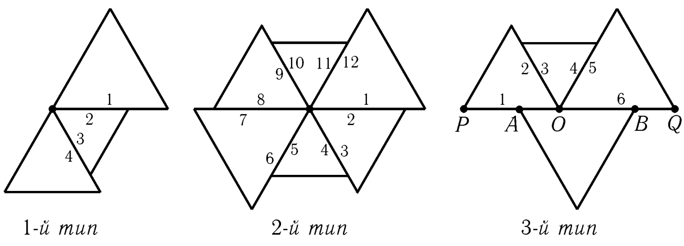


Рис. 25.15

25.12. Требуемые разрезы изображены на рис. 25.16; пунктирные полуокружности показывают, что все полученные треугольники остроугольные.

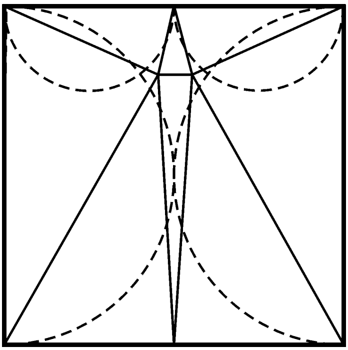


Рис. 25.16

25.13. Да, можно. См. рис. 25.17, *а* или рис. 25.17, *б*.

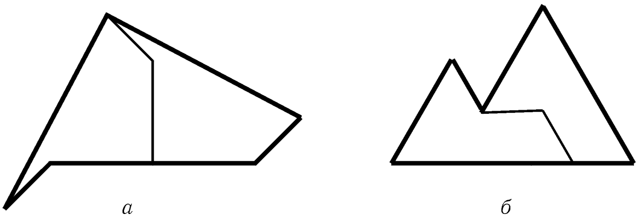


Рис. 25.17

25.14. Пусть $\angle ACB > 90^\circ$ и O — центр вписанной окружности S треугольника ABC. Проведём к S касательные через точки пересечения S с отрезками OA и OB и обозначим получившиеся углы, как показано на рис. 25.18. Последовательно вычисляя углы, получаем, что $\varphi_1 = (\pi - \alpha)/2 < \pi/2$,

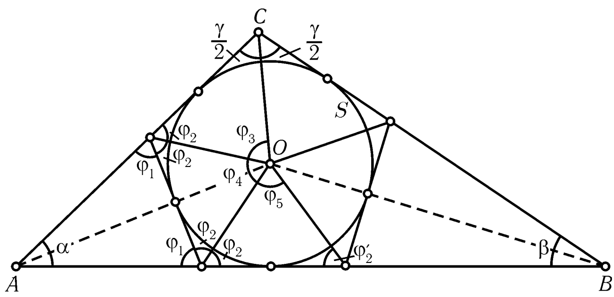


Рис. 25.18

$\varphi_2=(\pi-\varphi_1)/2=(\pi+\alpha)/4<\pi/2$ (аналогично $\varphi_2'=(\pi+\beta)/4$), $\varphi_3=\pi-\varphi_2-\gamma/2=3\pi/4-\alpha/4-\gamma/2<\pi/2+(\pi/4-\gamma/2)<\pi/2$, $\varphi_4=\pi-2\varphi_2=(\pi-\alpha)/2<\pi/2$ и $\varphi_5=\pi-\varphi_2-\varphi_2'=\pi/2-\alpha/4-\beta/4<\pi/2$. Аналогично доказывается, что и все остальные углы семи треугольников, изображённых на рис. 25.18, меньше 90°.

25.15. Пусть AB — наибольшая сторона треугольника ABC и $AC\geqslant BC$. Возьмём сначала на стороне AB точку D так, что $AD=AC$, затем на BC — точку E так, что $BE=BD$, затем на AC — точку F так, что $CF=CE$, затем на AB — точку G так, что $AG=AF$ (рис. 25.19). Тогда $GD=FC=CE$. Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC. Так как $\angle CAO=\angle DAO$ и $CA=DA$, то $\triangle CAO=\triangle DAO$, поэтому $OC=OD$. Аналогично $OF=OG$, $OC=OG$ и $OD=OE$. Поэтому $OE=OD=OC=OG=OF$, т. е. на рис. 25.19 изображено требуемое разбиение.

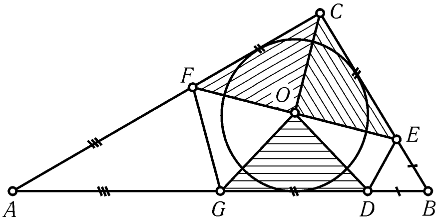


Рис. 25.19

25.16. а) Прямая, на которой лежит сторона многоугольника разбиения, проходит через две вершины исходного многоугольника, а через каждую вершину исходного многоугольника может проходить не более двух таких прямых. Поэтому число сторон многоугольника разбиения не больше числа вершин исходного многоугольника.

б) Те же самые рассуждения, что и при решении задачи а), показывают, что полученный многоугольник имеет не более n сторон, причём если число его сторон равно n, то из каждой вершины исходного многоугольника выходят ровно две диагонали, ограничивающих полученный многоугольник. Пусть из вершины A_1 выходят две диагонали A_1A_p и A_1A_q, ограничивающие полученный многоугольник. Тогда A_p и A_q — соседние вершины, поскольку иначе внутри угла $A_pA_1A_q$ была бы диагональ, разрезающая полученный многоугольник. Действительно, вершину, лежащую между A_p и A_q, нужно было бы соединить с вершиной, лежащей между A_1 и A_p или между A_1 и A_q. Изменив при необходимости направление нумерации вершин, можно считать, что $q=p+1$ и $p\leqslant n/2$. Если исключить диагональ A_1A_{p+1}, то любая другая диагональ, ограничивающая полученный многоугольник, соединяет одну из вершин с номером от 2 до p с некоторой вершиной. Поэтому всего у полученного многоугольника может быть не более $1+\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdot 2=n-1$ сторон. Чтобы получить пример n-угольника, при разрезании которого получается $(n-1)$-угольник, можно взять правильный $(n-1)$-угольник и отрезать от него маленький треугольник, т. е. вместо вершины A_1 взять две вершины A_1' и A_n, расположенные на сторонах A_1A_2 и A_1A_{n-1} вблизи вершины A_1.

25.17. Если n-угольник разрезан на k треугольников, то каждый его угол состоит из углов этих треугольников. Поэтому сумма углов многоугольника не больше суммы углов треугольников, т. е. $(n-2)\pi \leqslant k\pi$ или $n-2 \leqslant k$.

25.18. Сумма внешних углов многоугольника, прилегающих к внутренним углам, меньшим π, не меньше 2π (см. задачу 22.40). Внешние углы фигур, на которые распадается оставшаяся часть листа, являются либо внешними углами квадрата, либо внутренними углами вырезанных прямоугольников. Поэтому сумма всех внешних углов этих фигур не превосходит $2\pi(n+1)$, т. е. количество фигур не превосходит $n+1$.

25.19. Пусть отрезок MN, где точки M и N лежат на сторонах AB и CD, разрезает четырёхугольник $ABCD$ на два подобных четырёхугольника. Тогда угол AMN четырёхугольника $AMND$ равен одному из углов четырёхугольника $NMBC$. С другой стороны, $\angle NMB = 180^\circ - \angle AMN$. Поэтому если $\angle AMN = \angle NMB$, то $\angle NMB = 90^\circ$, а если угол AMN равен другому углу четырёхугольника $NMBC$, то в этом четырёхугольнике есть два угла, составляющих в сумме 180°. Проведя аналогичные рассуждения для угла MND, получаем, что либо $AB \perp MN$ и $CD \perp MN$ (и тогда $AB \parallel CD$), либо в четырёхугольнике $NMBC$ есть два угла, составляющие в сумме 180°; без ограничения общности можно считать, что один из них — угол BMN.

Если $\angle BMN + \angle MNC = 180^\circ$, то $BM \parallel CN$.

Если $\angle BMN + \angle MBC = 180^\circ$, то $MN \parallel BC$. Поэтому либо $AD \parallel MN$, либо $ND \parallel MA$.

Если $\angle BMN + \angle BCN = 180^\circ$, то четырёхугольники $NMBC$ и $AMND$ вписанные. Следовательно, $\angle BCN = 180^\circ - \angle BMN$ и $\angle ADN = 180^\circ - \angle AMN = \angle BMN$, т. е. $BC \parallel AD$.

25.20. Сумма длин границ всех фигур, на которые разбит квадрат, равна $2 \cdot 18 + 4 = 40$. В самом деле, проведённые отрезки дают двукратный вклад в эту сумму, а стороны квадрата однократный. Пусть для i-й фигуры сумма длин горизонтальных частей границы равна $2x_i$, вертикальных $2y_i$, а её площадь равна s_i. Тогда эту фигуру можно заключить в прямоугольник со сторонами x_i и y_i, поэтому $x_i y_i \geqslant s_i$, а значит, $x_i + y_i \geqslant 2\sqrt{x_i y_i} \geqslant 2\sqrt{s_i}$. Следовательно, $40 = \sum(2x_i + 2y_i) \geqslant 4\sum\sqrt{s_i}$, т. е. $\sum\sqrt{s_i} \leqslant 10$.

Предположим, что $s_i < 0{,}01$ для всех i. Тогда $\sqrt{s_i} < 0{,}1$ и $1 = \sum s_i < 0{,}1\sum\sqrt{s_i}$, т. е. $\sum\sqrt{s_i} > 10$. Получено противоречие.

25.21. Рассмотрим все точки, отличные от вершин исходного треугольника и являющиеся вершинами полученных треугольников. Пусть m из этих точек лежит внутри исходного треугольника и n на его границе. Сумма всех углов полученных треугольников равна $\pi + \pi n + 2\pi m$, т. е. число этих треугольников равно $1 + n + 2m$. С другой стороны, к внутренней точке прилегает не более двух углов, превосходящих 120°, а к точке на границе — не более одного. Поэтому число полученных треугольников больше, чем число их углов, превосходящих 120°.

25.22. Рассмотрим выпуклый многоугольник $A_1 \ldots A_n$. Докажем, что каждое из свойств 1 и 2 эквивалентно свойству 3: «Для любого вектора $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ найдётся вектор $\overrightarrow{A_jA_{j+1}} = -\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$.»

Ясно, что из свойства 1 следует свойство 3. Докажем, что из свойства 3 следует свойство 1. Если выпуклый многоугольник $A_1 \ldots A_n$ обладает свойством 3, то $n = 2m$ и $\overrightarrow{A_iA_{i+1}} = -\overrightarrow{A_{m+i}A_{m+i+1}}$. Пусть O_i — середина отрезка A_iA_{m+i}. Так как $A_iA_{i+1}A_{m+i}A_{m+i+1}$ — параллелограмм, то $O_i = O_{i+1}$. Поэтому все точки O_i совпадают, и эта точка является центром симметрии многоугольника.

Докажем, что из свойства 2 следует свойство 3. Пусть выпуклый многоугольник F разрезан на параллелограммы. Нужно доказать, что для любой стороны многоугольника F найдётся другая сторона, параллельная и равная ей. От каждой стороны многоугольника F отходит цепочка параллелограммов, т. е. эта сторона как бы перемещается по ним параллельно, причём она может разбиваться на несколько частей (рис. 25.20). Так как у выпуклого многоугольника может быть ещё только одна сторона, параллельная данной, то все разветвления цепочки упираются в одну и ту же сторону, причём её длина не меньше длины стороны, из которой цепочка выходит. Мы можем выпустить цепочку параллелограммов как из первой стороны во вторую, так и из второй в первую, поэтому длины этих сторон равны.

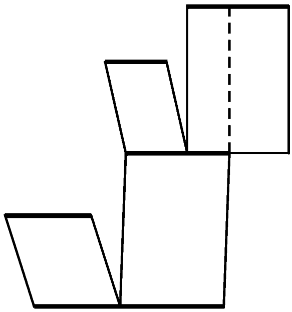


Рис. 25.20

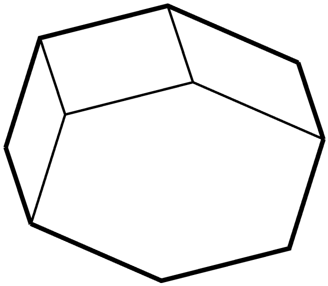


Рис. 25.21

Остаётся доказать, что из свойства 3 следует свойство 2. Способ разрезания многоугольника с равными и параллельными противоположными сторонами указан на рис. 25.21. После каждой такой операции получаем многоугольник с меньшим числом сторон, по-прежнему обладающий свойством 3, и проделываем с ним то же самое, пока не придём к параллелограмму.

25.23. Воспользуемся результатом предыдущей задачи. Если выпуклый многоугольник M разрезан на выпуклые центрально симметричные многоугольники, то их можно разрезать на параллелограммы. Поэтому M можно разрезать на параллелограммы, т. е. M имеет центр симметрии.

25.24. Докажем индукцией по n, что любой $2n$-угольник, стороны которого имеют одну и ту же длину и противоположные стороны параллельны, можно разрезать на ромбы. Для $n = 2$ это очевидно, а из рис. 25.21 ясно, как делается шаг индукции.

25.25. Выделим в правильном восьмиугольнике две взаимно перпендикулярные пары противоположных сторон и рассмотрим, как и в задаче 25.1, цепочки параллелограммов, соединяющие противоположные стороны. На пересечениях этих цепочек стоят прямоугольники. Рассмотрев две другие пары противоположных сторон, получим ещё хотя бы один прямоугольник.

Параллелограммы каждой цепочки можно дополнительно разрезать так, чтобы цепочка распалась на несколько «дорожек», причём в каждой дорожке соседние параллелограммы примыкали бы друг к другу целыми сторонами, а не частями сторон. Объединение прямоугольников нового разбиения совпадает с объединением прямоугольников исходного разбиения, поэтому доказательство достаточно провести для нового разбиения. Каждая дорожка имеет постоянную ширину; значит, длина одной стороны каждого прямоугольника, входящего в дорожку, равна ширине дорожки, а сумма длин всех других сторон равна сумме всех ширин дорожек, соответствующих второй паре сторон. Следовательно, площадь всех прямоугольников, входящих в одну дорожку, равна произведению ширины дорожки на длину стороны многоугольника, т. е. численно равна ширине дорожки. Поэтому площадь всех прямоугольников, соответствующих двум перпендикулярным парам противоположных сторон, равна 1, а площадь вообще всех прямоугольников равна 2.

25.26. Индукцией по m легко доказать, что m прямых разбивают плоскость на $1 + m + x$ частей, где x — количество точек пересечения этих прямых с учётом их кратностей (это означает, что точка пересечения k прямых считается за $k - 1$ точек пересечения).

Используя эту формулу и индукцию по m, можно доказать, что если среди данных m прямых есть три прямые, пересекающиеся в трёх различных точках, то эти m прямых разбивают плоскость по крайней мере на $2m + 1$ частей. База индукции: $m = 3$; далее мы пользуемся тем, что проведение каждой новой прямой добавляет по крайней мере две новые части.

Обращаясь к условию задачи, мы видим, что нас интересуют только конфигурации прямых, среди которых нет троек прямых, пересекающихся в трёх разных точках. Таким образом, либо все 99 прямых параллельны, либо все 99 прямых пересекаются в одной точке, либо 98 прямых параллельны и одна прямая их пересекает. Первая конфигурация разбивает плоскость на 100 частей, а обе другие — на 198 частей.

25.27. Обозначим точки пересечения одной из данных прямых с остальными через A, B и C. Для определённости будем считать, что точка B лежит между A и C. Пусть D — точка пересечения прямых, проходящих через A и C. Любая прямая, проходящая через точку B и не проходящая через точку D, разрезает треугольник ACD на треугольник и четырёхугольник.

25.28. а) Пусть n прямых разбивают плоскость на a_n частей. Проведём ещё одну прямую. При этом число частей увеличится на $n + 1$, так как новая прямая имеет n точек пересечения с уже проведёнными прямыми. Поэтому $a_{n+1} = a_n + n + 1$. Так как $a_1 = 2$, то $a_n = 2 + 2 + 3 + \ldots + n = (n^2 + n + 2)/2$.

б) Заключив все точки пересечения данных прямых в окружность, легко проверить, что количество неограниченных фигур равно $2n$. Поэтому количество ограниченных фигур равно $(n^2 + n + 2)/2 - 2n = (n^2 - 3n + 2)/2$.

25.29. а) Все точки пересечения данных прямых можно заключить в некоторую окружность. Прямые разбивают эту окружность на $4k$ дуг. Ясно, что две соседние дуги не могут одновременно принадлежать углам, поэтому число углов не превосходит $2k$, причём равенство может достигаться, только если дуги, принадлежащие углам, чередуются. Остаётся доказать, что равенство не может достигаться. Предположим, что дуги, принадлежащие углам, чередуются. Так как по обе стороны от любой из данных прямых лежит по $2k$ дуг, то противоположные дуги (заданные двумя прямыми) должны принадлежать углам (рис. 25.22), чего не может быть.

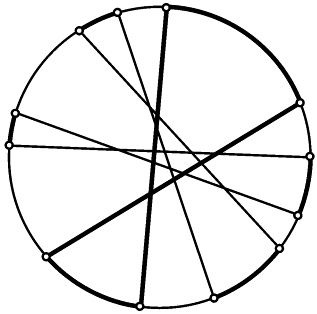


Рис. 25.22

б) Для любого n среди полученных фигур может быть три угла. На рис. 25.23 показано, как построить соответствующее разбиение плоскости.

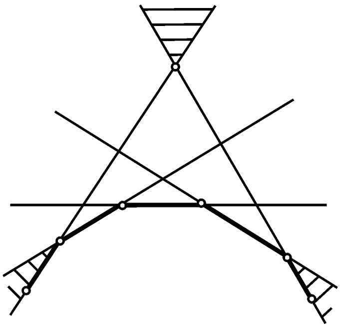


Рис. 25.23

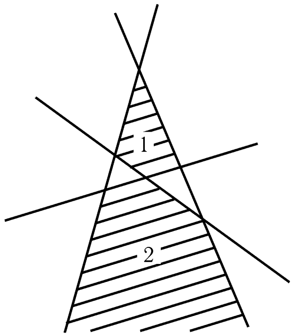


Рис. 25.24

25.30. Назовём прямую *граничной* для данной фигуры, если она является продолжением отрезка или луча, ограничивающего эту фигуру. Достаточно доказать, что две рассматриваемые фигуры не могут иметь более четырёх общих граничных прямых. Если две фигуры имеют четыре общие граничные прямые, то одна из фигур лежит в области 1, а другая лежит в области 2 (рис. 25.24). Пятая граничная прямая фигуры, лежащей в области 1, должна пересекать две соседние стороны четырёхугольника 1, но тогда она не может быть граничной прямой для фигуры, лежащей в области 2.

25.31. Рассмотрим все точки пересечения данных прямых. Докажем, что эти точки могут лежать по одну сторону не более чем от двух данных прямых. Предположим, что все точки пересечения лежат по одну сторону от трёх данных прямых. Эти прямые образуют треугольник ABC. Четвёртая прямая не может пересекать только стороны этого треугольника, т. е. она пересекает хотя бы одно продолжение стороны. Пусть для определённости она пересекает продолжение стороны AB за точку B в некоторой точке M. Тогда точки A и M лежат по разные стороны от прямой BC. Получено противоречие. Поэтому имеются по крайней мере $n-2$ прямые, по обе стороны от которых лежат точки пересечения.

Если мы выберем в полуплоскости, заданной прямой l, ближайшую к l точку пересечения, то эта точка будет вершиной треугольника, прилегающего к прямой l. Таким образом, имеется не менее $n-2$ прямых, к которым прилегает по крайней мере по два треугольника, и две прямые, к каждой из которых прилегает хотя бы один треугольник. Так как каждый треугольник прилегает ровно к трём прямым, то треугольников не менее $(2(n-2)+2)/3$.

25.32. Если P — точка пересечения данных прямых, то из P выходит $2\lambda(P)$ отрезков или лучей. Кроме того, каждый из x отрезков имеет две граничные точки, а каждый из $2n$ лучей имеет одну граничную точку. Поэтому $2x+2n=2\sum\lambda(P)$, т. е. $x=-n+\sum\lambda(P)$.

25.33. Доказательство проведём индукцией по n. Для двух прямых утверждение очевидно. Предположим, что утверждение верно для $n-1$ прямых, и рассмотрим систему, состоящую из n прямых. Пусть f — количество частей, на которые данные n прямых разбивают плоскость; $g = 1 + n + \sum(\lambda(P) - 1)$. Выбросим из данной системы одну прямую и для полученной системы прямых определим аналогичным образом числа f' и g'. Если на выброшенной прямой лежит k точек пересечения прямых, то $f' = f - k - 1$ и $g' = 1 + (n-1) + \sum(\lambda'(P) - 1)$. Легко проверить, что $\sum(\lambda(P) - 1) = -k + \sum(\lambda'(P) - 1)$. По предположению индукции $f' = g'$. Поэтому $f = f' + k + 1 = g' + k + 1 = g$. Ясно также, что количество неограниченных частей равно $2n$.

25.34. Пусть a'_k — количество красных k-угольников, a' — количество ограниченных красных областей. Количество отрезков, на которые данные прямые разбиты точками их пересечения, равно $\sum \lambda(P) - n$ (см. задачу 25.32). Каждый отрезок является стороной не более чем одного красного многоугольника, поэтому $3a' \leqslant \sum\limits_{k \geqslant 3} ka'_k \leqslant \sum \lambda(P) - n$, причём одно неравенство достигается тогда и только тогда, когда нет красных k-угольников, где $k > 3$, а другое неравенство достигается тогда и только тогда, когда любой отрезок является стороной красного k-угольника, т. е. любая неограниченная красная область является углом.

Количество ограниченных областей равно $1 - n + \sum(\lambda(P) - 1) = c$ (см. задачу 25.33), поэтому количество b' ограниченных синих областей равно $c - a' \geqslant 1 - n + \sum(\lambda(P) - 1) - (\sum \lambda(P) - n)/3 = 1 - (2n/3) + \sum(2\lambda(P)/3 - 1)$. Цвета $2n$ неограниченных областей чередуются, поэтому $b = b' + n \geqslant 1 + (n/3) + \sum(2\lambda(P)/3 - 1)$ и $a = a' + n \leqslant (2n + \sum \lambda(P))/3$, а значит, $2b - a \geqslant 2 + \sum(\lambda(P) - 2)$.

25.35. Можно. Пример изображён на рис. 25.25.

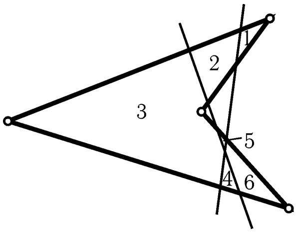


Рис. 25.25

25.36. Докажем по индукции, что любой выпуклый n-угольник, где $n \geqslant 5$, можно разрезать на пятиугольники. Для $n = 5$ это очевидно, а как это сделать для $n = 6$ и 7, показано на рис. 25.26. Предположим теперь, что $n \geqslant 8$ и любой выпуклый m-угольник, где $5 \leqslant m \leqslant n$, можно разрезать на пятиугольники. От n-угольника можно отрезать пятиугольник, образованный пятью последовательными вершинами. При этом остаётся $(n-3)$-угольник. Так как $5 \leqslant (n-3) < n$, то $(n-3)$-угольник можно разрезать на пятиугольники по предположению индукции.

25.37. Предположим, что семиугольник разрезан на f выпуклых шестиугольников. С одной стороны, сумма углов этих шестиугольников равна $4\pi f$. С другой стороны, она равна $(7-2)\pi + (m-7)\pi + 2n\pi$, где m — количество вершин шестиугольников, лежащих на сторонах (или в вершинах) семиугольника, n — количество вершин шестиугольников, лежащих внутри семиугольника. Таким образом,

$$4f = m - 2 + 2n. \tag{1}$$

Пусть k — количество сторон шестиугольников, лежащих внутри семиугольника, m_1 — количество тех из m вершин, из которых выходят ровно две стороны, $m_2 = m - m_1$. Тогда $6f = m + 2k$ и $2k \geqslant 3n + m_2$, поэтому

$$6f \geqslant 3n + m_2 + m. \tag{2}$$

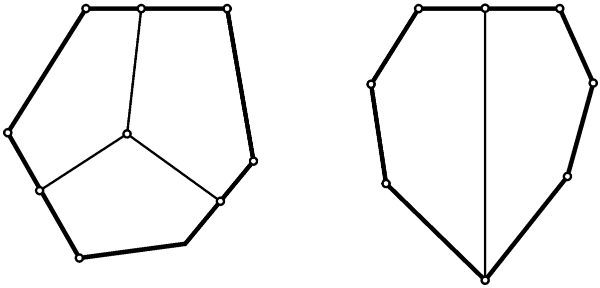


Рис. 25.26

Из (1) и (2) следует, что $m - 2m_2 \geqslant 6$, т. е. $m_1 - m_2 \geqslant 6$.

Ясно, что $m_2 \geqslant 2$, поскольку по крайней мере из двух точек на сторонах семиугольника выходят отрезки, идущие внутрь. Следовательно, $m_1 \geqslant 8$. Приходим к противоречию, поскольку ровно две стороны могут выходить только из вершин семиугольника.

25.38. Пусть квадрат разрезан на m квадратиков. Разрежем один из этих квадратиков на 4 квадратика. При этом квадрат будет разрезан на $m+3$ квадратиков. Остаётся заметить, что квадрат можно разрезать на 6, 7 и 8 квадратиков (рис. 25.27).

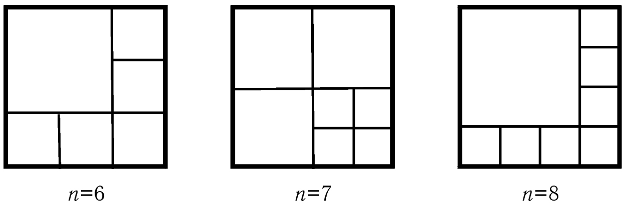


Рис. 25.27

25.39. Докажем по индукции, что $(3k+1)$-угольник нельзя разрезать по диагоналям на k пятиугольников. Для $k=1$ это утверждение очевидно. Предположим теперь, что оно доказано для всех $(3k+1)$-угольников, и докажем его для $(3k+4)$-угольника. Предположим, что $(3k+4)$-угольник разрезан по диагоналям на $k+1$ пятиугольник. Если каждый из них имеет не более трёх сторон на границе, то число сторон многоугольника не более $3k+3$. Поэтому существует пятиугольник с четырьмя сторонами на границе. Отрезав его, получим $(3k+1)$-угольник, разрезанный диагоналями на k пятиугольников. Получено противоречие.

25.40. Если провести разрезы, близкие к вершинам выпуклого n-угольника, то можно отсечь от него n треугольников и получить выпуклый $2n$-угольник. Легко проверить, что при этом любая прямая пересекает не более двух отсечённых треугольников.

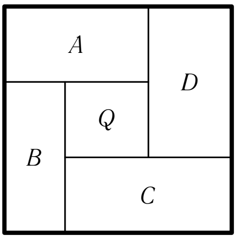
Отсечём от правильного треугольника 3 треугольника, затем от полученного шестиугольника — 6 треугольников и так далее, до тех пор, пока не получим $3 \cdot 2^{19}$-угольник. Любая прямая может пересечь не более двух треугольников, отсекаемых на каждом шаге. Поэтому всего прямая может пересечь не более $1+2\cdot 19=39$ многоугольников. Общее число многоугольников, на которые разбит правильный треугольник, равно $1+3+3\cdot 2+\ldots+3\cdot 2^{18}=1+3(2^{19}-1)>$ $>2^{20}=(2^{10})^2>1000^2$. Ясно, что можно отсекать не все треугольники, чтобы получить ровно 1000000 многоугольников.

25.41. Ясно, что после n разрезаний получится $n+1$ кусок. Так как после каждого разрезания общее число вершин полученных фигур увеличивается на 2, 3 или 4, то после n разрезаний общее число вершин не превосходит $4n+4$. Если после n разрезаний получилось сто 20-угольников, то кроме 20-угольников есть ещё $n+1-100$ кусков, так как общее число кусков равно $n+1$. Поскольку у каждого куска не менее трёх вершин, общее число вершин не меньше $100\cdot 20+(n-99)\cdot 3=1703+3n$. Следовательно, $1703+3n\leqslant 4n+4$, т. е. $n\geqslant 1699$.

Остаётся доказать, что за 1699 разрезаний можно разрезать квадрат требуемым образом. Чтобы разрезать квадрат на 100 прямоугольников, достаточно 99 разрезов, а чтобы отрезать от каждого из этих прямоугольников по 16 треугольников и превратить их в 20-угольники, достаточно 1600 разрезов.

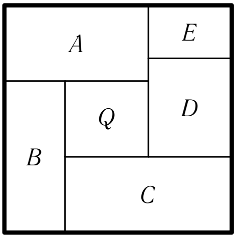
25.42. а) Предположим, что из нескольких попарно различных по величине квадратов сложен прямоугольник. Рассмотрим самый маленький квадрат Q. С одной из его сторон имеет общую часть сторона некоторого большего квадрата A. Сторона квадрата A выходит за пределы стороны квадрата Q. Образовавшийся угол должен быть заполнен некоторым квадратом B, сторона которого снова больше стороны квадрата Q. Получаем ещё один угол, который должен быть заполнен квадратом C, а затем ещё один угол, который должен быть заполнен квадратом D. При этом между квадратами A и D не может быть «колодца» (т. е. квадраты A и D должны иметь общую границу), поскольку иначе для заполнения «колодца» потребовался бы квадрат, который меньше самого маленького квадрата Q.

Итак, если из пяти попарно различных по величине квадратов можно сложить прямоугольник, то мы знаем, как они должны быть сложены: самый маленький квадрат находится в центре, а к нему примыкают четыре других квадрата, образуя следующую конфигурацию (или симметричную ей):



Пусть q, a, b, c, d — длины сторон квадратов. Тогда $a=b+q$, $b=c+q$, $c=d+q$, $d=a+q$. Сложив эти равенства, получим $5q=0$. Этого не может быть.

б) Продолжим решение задачи а), пользуясь тем, что там уже доказано. Мы уже знаем, как должны быть расположены самый маленький квадрат и прилегающие к нему квадраты. Поэтому если из шести попарно различных квадратов можно сложить прямоугольник, то они должны быть расположены так:



Но тогда у квадратов D и E есть общая стороны, поэтому они равны. А по условию все квадраты попарно различны.

25.43. Введём систему координат с началом в одной из вершин исходного прямоугольника и осями, направленными по его сторонам. Разрежем координатную плоскость прямыми $x = n/2$ и $y = m/2$, где m и n — целые числа, и раскрасим полученные части в шахматном порядке. Если стороны прямоугольника параллельны осям координат, а длина одной из его сторон равна 1, то суммы площадей его белых и чёрных частей равны. В самом деле, для каждого отрезка длины 1, параллельного одной из сторон прямоугольника, длина его белой части равна длине чёрной части. Для прямоугольника с целочисленной стороной справедливо аналогичное утверждение, потому что его можно разрезать на прямоугольники со стороной 1. Остаётся доказать, что если суммы площадей белых и чёрных частей равны, то одна из сторон прямоугольника целочисленная. Предположим, что обе стороны исходного прямоугольника не целые. Прямые $x = m$ и $y = n$ разрезают его на три прямоугольника, одна из сторон каждого из которых имеет целую длину, и прямоугольник, обе стороны которого меньше 1. Легко проверить, что в последнем прямоугольнике суммы площадей белых и чёрных частей не могут быть равны.

25.44. Возьмём на сторонах AB и DC точки M_t и N_t так, что $AM_t : M_tB = DN_t : N_tC = t : (1 - t)$, где $0 < t < 1$. Тогда семейство отрезков M_tN_t, а также отрезки AD и BC образуют искомое разбиение (рис. 25.28).

25.45. Возьмём на стороне AC треугольника ABC точку D. «Вырожденный четырёхугольник» $ABCD$ можно разбить на отрезки, как это делалось в предыдущей задаче (рис. 25.29).

25.46. Разделим диаметр AB точками C, D, E и F на 5 равных частей. Пусть точки M_t и P_t лежат на отрезках CD и EF, причём $CM_t : M_tD = FP_t : P_tE = t : (1 - t)$, где $0 < t < 1$, а точки Q_t и N_t лежат на разных дугах окружности, заданных точками A и B, и делят эти дуги в отношении $t : (1 - t)$ (рис. 25.30). Отрезки M_tN_t и P_tQ_t вместе с отрезками AC, DE и FB дают требуемое разбиение.

25.47. Разбиение плоскости на отрезки изображено на рис. 25.31. Выделенные ломаные состоят из концов отрезков разбиения; их звенья, естественно, не являются отрезками разбиения.

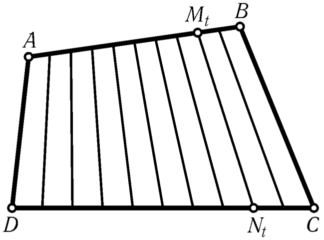


Рис. 25.28

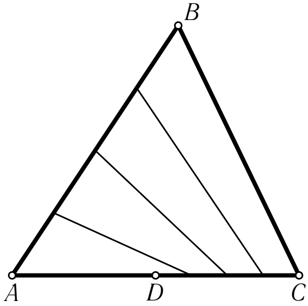


Рис. 25.29

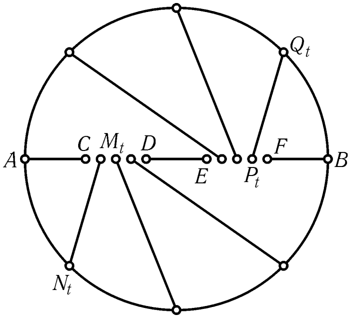


Рис. 25.30

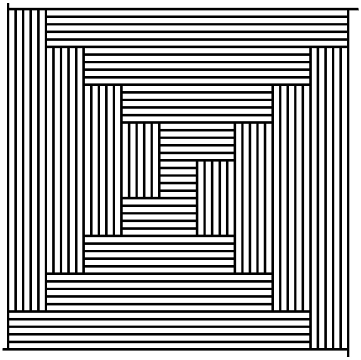


Рис. 25.31

25.48. Выберем среди всех отрезков, покрывающих левый конец исходного отрезка, тот, у которого правый конец самый правый, и обозначим этот отрезок I_1. После того как выбран отрезок I_k, выбираем среди всех отрезков, покрывающих его правый конец, тот, у которого правый конец самый правый. Таким образом выберем несколько отрезков, полностью покрывающих исходный отрезок. Остаётся доказать, что сумма их длин не превосходит 2. Отрезок I_{k+2} не имеет общих точек с I_k, так как иначе вместо I_{k+1} мы должны были бы выбрать I_{k+2}. Поэтому каждая точка исходного отрезка длиной 1 покрыта не более чем двумя отрезками I_k, т. е. сумма длин этих отрезков не превосходит 2.

25.49. Будем последовательно выбрасывать отрезки, покрытые одним или несколькими оставшимися отрезками, до тех пор, пока это возможно. Направим ось координат по данному отрезку и обозначим координаты концов оставшихся отрезков через a_k и b_k ($a_k < b_k$). Один из двух отрезков с общим левым концом всегда будет выброшен, поэтому можно считать, что $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$. Докажем, что тогда $b_k < a_{k+2}$, т. е. чётные отрезки не пересекаются и нечётные тоже. Предположим, что $b_k \geqslant a_{k+2}$. Возможны два случая.

1. $b_{k+1} \leqslant b_{k+2}$, тогда отрезок с номером $k+1$ покрыт отрезками с номерами k и $k+2$. Получено противоречие.

2. $b_{k+1} \geqslant b_{k+2}$, тогда отрезок с номером $k+2$ покрыт отрезком с номером $k+1$. Получено противоречие.

Остаётся заметить, что сумма длин либо чётных, либо нечётных отрезков не меньше 0,5.

25.50. Пусть AB — наибольшая сторона пятиугольника. Рассмотрим полосу, заданную перпендикулярами к стороне AB, проведёнными через A и B. Так как углы EAB и ABC тупые, точки E и C лежат вне этой полосы. Поэтому точка D лежит внутри полосы, так как иначе длина одного из отрезков ED и DC была бы больше длины отрезка AB. Обозначим проекцию точки D на отрезок AB через D_1 (рис. 25.32). Тогда круги с диаметрами AD и BD полностью покрывают четырёхугольники $AEDD_1$ и $BCDD_1$.

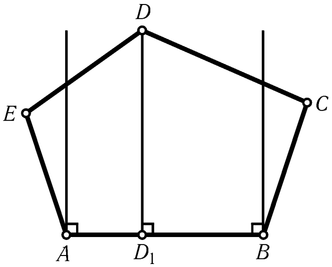


Рис. 25.32

25.51. а) Рассмотрим наибольший квадрат K покрытия и выбросим все квадраты, пересекающиеся с ним. Они лежат внутри квадрата, сторона которого в 3 раза больше стороны K, поэтому площадь, занимаемая их частями, расположенными вне K, не больше $8s$, где s — площадь K. Квадрат K относим к выбранным и в дальнейшем его уже не рассматриваем. Для остальных квадратов проделываем то же самое до тех пор, пока все квадраты будут либо выбраны, либо выброшены. Если сумма площадей выбранных квадратов равна S, то общая площадь частей выброшенных квадратов, расположенных вне выбранных квадратов, не превосходит $8S$. Поэтому $1 \leqslant S+8S$, т. е. $S \geqslant 1/9$.

б) Выберем круг наибольшего радиуса, раздуем его в три раза и выбросим все круги, целиком лежащие в этом раздутии. Оставшиеся круги не пересекаются с первым. Для них проделаем то же самое и т. д. Раздутия всех выбранных кругов содержат все данные круги, а площадь раздутия в 9 раз больше площади исходного круга, поэтому $9S \geqslant 1$, где S — общая площадь всех выбранных кругов. Следовательно, $S \geqslant 1/9$.

25.52. Проведём прямую l так, что две данные точки лежат по одну сторону от неё и две — по другую. Пусть точки A и B лежат по одну сторону от l, C и D — по другую. Пусть A_1 и B_1 — проекции точек A и B на прямую l. Поставим в точке A прожектор так, чтобы он освещал угол, заданный лучом AA_1 и лучом, параллельным l и пересекающим прямую BB_1. Прожектор в точке B поставим аналогичным образом (рис. 25.33, *а*). Эти два прожектора освещают полуплоскость, содержащую точки C и D. Аналогично в точках C и D ставим прожекторы, освещающие другую полуплоскость. (Если $AB \perp l$, то прожекторы нужно направить так, как показано на рис. 25.33, *б*.)

25.53. а) Не верно. Пусть Φ — правильный треугольник со стороной 1. Легко проверить, что длина проекции Φ на любую прямую не больше 1. С другой стороны, так как треугольник Φ остроугольный, его нельзя накрыть кругом, радиус которого меньше радиуса описанной окружности (см. задачу 9.97). Диаметр описанной окружности треугольника Φ равен $2/\sqrt{3} > 1$.

б) Верно. Если проекции фигуры Φ на две взаимно перпендикулярные прямые равны a и b, то её можно заключить в прямоугольник со сторонами a и b. Диаметр описанной окружности этого прямоугольника равен $\sqrt{a^2+b^2}$. Но $\sqrt{a^2+b^2} \leqslant \sqrt{1+1} = \sqrt{2} < 1{,}5$.

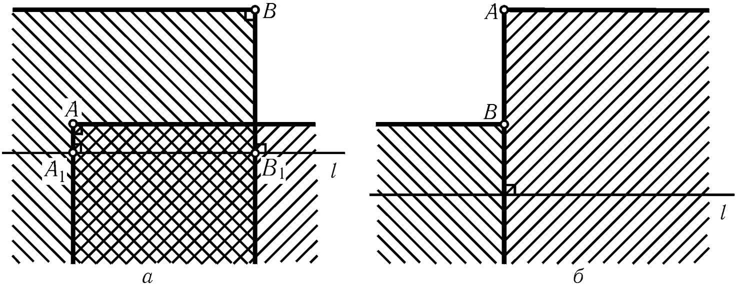


Рис. 25.33

25.54. Построим круги с центрами в данных точках радиуса $a = 1/2 + 1/2n$. Ясно, что пересекающиеся круги радиусов R_1 и R_2 можно заключить в круг радиуса не более $R_1 + R_2$. Будем так делать до тех пор, пока не получатся непересекающиеся круги. Все данные точки расположены на расстоянии не меньше a от границ этих кругов, поэтому их радиусы можно уменьшить на $b < a$, и при этом они по-прежнему будут покрывать все данные точки. Если кругов k штук, то сумма их диаметров не больше $n \cdot 2a - k \cdot 2b \leqslant 2na - 2b$. Нам нужно, чтобы выполнялись следующие условия: $2na - 2b < n$ и $b < a$. Они выполняются, если $a = 1/2 + 1/2n$ и $b = 1/2 + 1/4n$.

25.55. Раздуем все монеты в 2 раза, т. е. для каждой из них рассмотрим круг радиуса $2r$ с тем же центром. Если центр одной монеты не принадлежит раздутию второй монеты, то расстояние между их центрами больше $2r$, а значит, эти монеты не пересекаются. Кроме того, если центр монеты удалён от края стола меньше чем на r, то она лежит внутри стола. Поэтому раздутия монет полностью покрывают круг радиуса $R - r$, так как иначе можно было бы положить монету с центром в непокрытой точке. Следовательно, $4\pi r^2 n \geqslant \pi (R - r)^2$, т. е. $2\sqrt{n} \geqslant (R - r)/r$.

25.56. Требуемое замощение изображено на рис. 25.34.

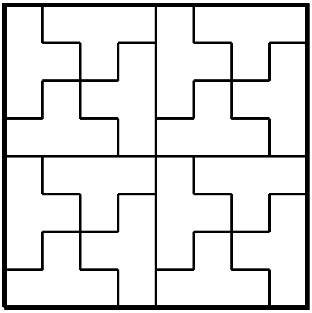


Рис. 25.34

25.57. а) Докажем это утверждение по индукции. Для квадрата со стороной 2 оно очевидно. Предположим теперь, что можно замостить любой квадрат со стороной 2^n без одной клетки, и покажем, как тогда замостить квадрат со стороной 2^{n+1} без одной клетки. Разобьём этот квадрат на 4 квадрата со стороной 2^n. Выброшенная клетка попадает в один из них, а по одной клетке в трёх остальных квадратах можно покрыть одной фигуркой (рис. 25.35). Теперь в каждом из этих

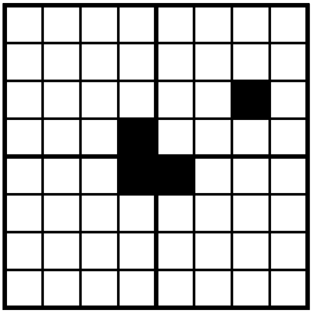


Рис. 25.35

четырёх квадратов со стороной 2^n выброшено по одной клетке, поэтому их можно замостить данными фигурками.

б) Докажем сначала требуемое утверждение для $n = 1$, т.е. для квадрата со стороной 7. Можно считать, что выброшенная клетка лежит в одном из заштрихованных на рис. 25.36 квадратиков; требуемые замощения изображены на этом же рисунке.

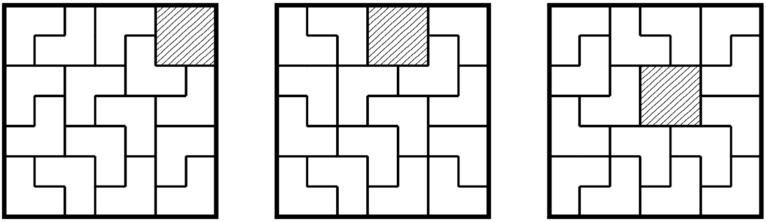


Рис. 25.36

Покажем теперь, как с помощью замощения квадрата со стороной $6n+1$ построить замощение квадрата со стороной $6n+7$. Четыре квадрата со стороной $6n+1$, Прилегающие к вершинам квадрата со стороной $6n+7$, полностью покрывают этот квадрат. Поэтому выброшенная клетка лежит в одном из этих квадратов; замостим его. Оставшуюся часть можно разрезать на квадраты со стороной 6 и прямоугольники размером 6×7. Эти квадраты и прямоугольники можно разрезать на прямоугольники размером 2×3, каждый из которых состоит из двух плиток.

25.58. Требуемое покрытие изображено на рис. 25.37.

25.59. Разрежем прямоугольник со сторонами $2n$ и $2m$ на квадратики со стороной 2 и вторым слоем будем мостить каждый квадратик по отдельности. Квадратик можно замостить либо двумя горизонтальными костями домино, либо двумя вертикальными. Ясно, что нам подойдёт одно из этих покрытий, так как в квадратике со стороной 2 не могут содержаться одновременно горизонтальная и вертикальная кости.

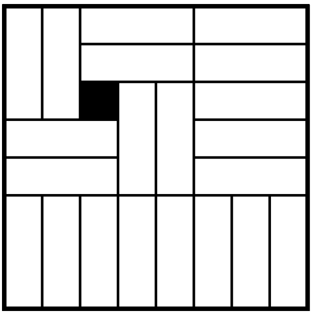


Рис. 25.37

25.60. Докажем это утверждение для любой фигуры, а не только для прямоугольника. Возьмём произвольную карточку A_0. Одна из её клеток покрыта клеткой другой карточки A_1, вторая клетка A_1 покрыта клеткой карточки A_2 и т.д. Цепочка карточек $A_0, A_1, A_2, \ldots$ замкнётся, причём именно на карточке A_0, так как иначе какая-либо клетка будет покрыта трижды (не исключено, что эта цепочка состоит только из двух карточек A_0 и A_1). Замкнутая цепочка карточек состоит из чётного числа карточек (для доказательства можно рассмотреть ломаную, каждое звено которой соединяет центры клеток одной карточки; эта ломаная имеет чётное число и горизонтальных и вертикальных звеньев). Поэтому для карточек, входящих в замкнутую цепочку, искомым разбиением является разбиение на карточки с чётными и нечётными номерами. Все эти карточки выбрасываем и для оставшихся карточек проделываем такую же операцию и т. д.

25.61. а) Нельзя. Предположим, что квадрат 6×6 замощён костями домино 1×2 так, что нет «шва». Рассмотрим 10 отрезков, которые делят квадрат на 36 клеток (стороны самого квадрата мы не рассматриваем). Каждый из этих отрезков разрезает не менее двух костей. В самом деле, если бы такой отрезок разрезал одну кость, то по обе стороны от него лежало бы целое число костей и ещё половина кости, т. е. нечётное число клеток. Этого не может быть, так как площадь каждой из частей, на которые отрезок разрезает квадрат, чётна. Ясно также, что одну кость не могут разрезать разные отрезки. Поэтому должно быть по крайней мере 20 костей, а их всего 18.

б) На рис. 25.38 показано, как замостить прямоугольники 5×6 и 8×8 (при замощении прямоугольника 8×8 использовано замощение прямоугольника 5×6).

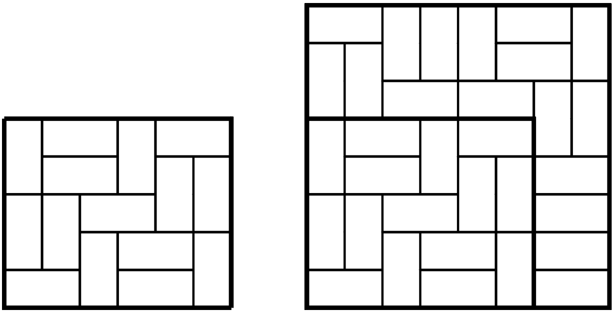


Рис. 25.38

Теперь достаточно доказать, что если можно замостить прямоугольник $m \times n$, то можно замостить и прямоугольник $m \times (n+2)$. Для этого нужно разрезать замощённый прямоугольник $m \times n$ на две части, не разрезая костей. Затем нужно правую часть сдвинуть вправо на расстояние 2 и промежуток заполнить горизонтальными костями (рис. 25.39).

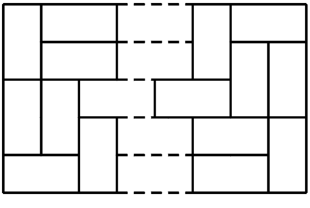


Рис. 25.39

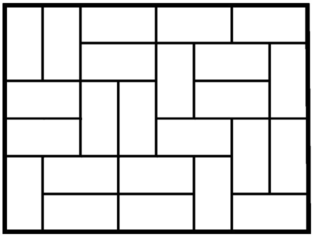


Рис. 25.40

в) Требуемое замощение изображено на рис. 25.40.

25.62. а) Предположим, что круг K радиуса R покрыт паркетом, состоящим из одинаковых выпуклых n-угольников. Рассмотрим все точки, лежащие внутри круга K и являющиеся вершинами n-угольников. Эти точки бывают двух типов: точки 1-го типа лежат на сторонах других n-угольников и сумма углов, сходящихся в них, равна 180°; в точках 2-го типа сходятся углы, сумма которых равна 360°. Пусть p и q — количества точек 1-го и 2-го типа соответственно. В каждой точке 1-го типа сходится не менее двух углов n-угольников, а в каждой точке 2-го типа — не менее трёх углов. Поэтому $2p+3q \leqslant 2nL_1$, где L_1 — количество n-угольников, пересекающихся с K. Суммы углов, сходящихся в точках 1-го и 2-го типа равны 180° и 360° соответственно. Поэтому $p+2q \geqslant (n-2)L_2$, где L_2 — количество n-угольников, лежащих внутри K. Сложив неравенства $4p+6q \leqslant 4nL_1$ и $-3p-6q \leqslant 6L_2 - 3nL_2$, получим $p \leqslant 6L_2 - n(4L_1 - 3L_2)$, т. е. $p/L_2 \leqslant 6 - n(4L_1/L_2 - 3)$. Так как $\lim_{R\to\infty} L_1/L_2 = 1$, то $\lim_{R\to\infty} p/L_2 = 6-n$. Значит, если из данных выпуклых n-угольников можно сложить паркет, то $6-n \geqslant 0$, т. е. $n \leqslant 6$.

б) См. рис. 25.41.

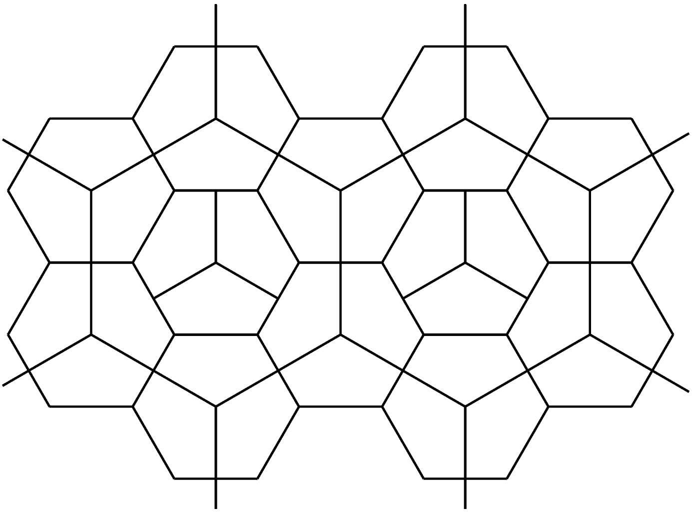


Рис. 25.41

25.63. Пусть $ABCD$ — исходный квадрат, $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат с тем же центром, стороны которого параллельны сторонам исходного квадрата и имеют вдвое большую длину. Для определённости будем считать, что сторона исходного квадрата равна 2. Тогда периметр квадрата $A_1B_1C_1D_1$ равен 16. Поэтому достаточно доказать, что длина части периметра квадрата $A_1B_1C_1D_1$, высекаемой приложенным квадратом, не может быть меньше 2. Рассмотрим два возможных варианта расположения квадрата $A_1B_1C_1D_1$ и приложенного квадрата.

1) Ни одна вершина квадрата $A_1B_1C_1D_1$ не попадает внутрь приложенного квадрата. В этом случае рассматриваемая часть периметра является отрезком PQ. Если внутри квадрата $A_1B_1C_1D_1$ лежит только одна вершина приложенного квадрата (та, которая примыкает к исходному квадрату), то

длина отрезка PQ равна $\operatorname{tg}\alpha + \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \geqslant 2$; здесь α — угол между стороной исходного квадрата и стороной приложенного квадрата. Если внутри квадрата $A_1B_1C_1D_1$ лежат две вершины приложенного квадрата, то отрезок PQ является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетом 2.

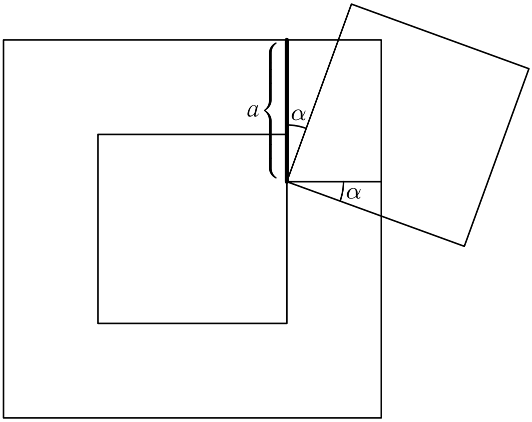


Рис. 25.42

2) Одна вершина квадрата $A_1B_1C_1D_1$ попадает внутрь приложенного квадрата. Тогда длина рассматриваемой части периметра равна $a + \operatorname{tg}\alpha + 1 - a\operatorname{tg}\alpha$ (рис. 25.42). Требуется доказать, что $a + \operatorname{tg}\alpha + 1 - a\operatorname{tg}\alpha \geqslant 2$, т. е. $(a-1)\operatorname{tg}\alpha \leqslant (a-1)$. Но $a \geqslant 1$ и $\operatorname{tg}\alpha \leqslant 1$.

ГЛАВА 26

СИСТЕМЫ ТОЧЕК И ОТРЕЗКОВ. ПРИМЕРЫ И КОНТРПРИМЕРЫ

§ 1. Системы точек

26.1. а) Архитектор хочет расположить четыре высотных здания так, что, гуляя по городу, можно увидеть их шпили в произвольном порядке (т. е. для любого набора номеров зданий i, j, k, l можно, стоя в некоторой точке и поворачиваясь в направлении «по» или «против» часовой стрелки, увидеть сначала шпиль здания i, затем j, k, l). Удастся ли ему это сделать?

б) Тот же вопрос для пяти зданий.

26.2. На плоскости дано n точек, причём из любой четвёрки этих точек можно выбросить одну точку так, что оставшиеся точки будут лежать на одной прямой. Докажите, что из данных точек можно выбросить одну точку так, что все оставшиеся точки будут лежать на одной прямой.

26.3*. На плоскости дано 400 точек. Докажите, что различных расстояний между ними не менее 15.

26.4*. На плоскости дано $n \geqslant 3$ точек. Пусть d — наибольшее расстояние между парами этих точек. Докажите, что имеется не более n пар точек, расстояние между которыми равно d.

26.5*. На плоскости дано 4000 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что существует 1000 непересекающихся четырёхугольников (возможно, невыпуклых) с вершинами в этих точках.

26.6*. На плоскости дано 22 точки, причём никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что их можно разбить на пары так, чтобы отрезки, заданные парами, пересекались по крайней мере в пяти точках.

26.7*. Докажите, что для любого натурального N существует N точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой и все попарные расстояния между которыми являются целыми числами.

См. также задачи 9.20, 9.50, 9.63, 20.3, 20.4, 20.8, 20.9, 20.14, 20.16, 20.17, 20.22, 20.23, 20.25, 20.27, 20.28, 21.2, 21.3, 21.5, 21.6, 21.8, 21.10, 21.25, 21.26, 22.1, 22.8, 22.33, 23.20, 26.16, 26.20, 27.11, 28.35, 31.75.

§ 2. Системы отрезков, прямых и окружностей

26.8. Постройте замкнутую шестизвенную ломаную, пересекающую каждое своё звено ровно один раз.

26.9. Можно ли нарисовать на плоскости шесть точек и так соединить их непересекающимися отрезками, что каждая точка будет соединена ровно с четырьмя другими?

26.10*. Точка O, лежащая внутри выпуклого многоугольника $A_1 \ldots A_n$, обладает тем свойством, что любая прямая OA_i содержит ещё одну вершину A_j. Докажите, что кроме точки O никакая другая точка не обладает этим свойством.

26.11*. На окружности отметили $4n$ точек и окрасили их через одну в красный и синий цвета. Точки каждого цвета разбили на пары, а точки каждой пары соединили отрезками того же цвета. Докажите, что если никакие три отрезка не пересекаются в одной точке, то найдётся по крайней мере n точек пересечения красных отрезков с синими.

26.12*. На плоскости расположено $n \geqslant 5$ окружностей так, что любые три из них имеют общую точку. Докажите, что тогда и все окружности имеют общую точку.

См. также задачи 20.5, 20.15, 20.30, 21.14, 21.15, 21.17—21.19, 23.42, 25.5—25.12, 28.37—28.42.

§ 3. Примеры и контрпримеры

Есть много неверных утверждений, кажущихся на первый взгляд верными. Для опровержения такого рода утверждений нужно построить соответствующий пример; такие примеры называют *контрпримерами*.

26.13. Существует ли треугольник, у которого все высоты меньше 1 см, а площадь больше 1 м^2?

26.14. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ равны стороны AB и CD и углы A и C. Обязательно ли этот четырёхугольник параллелограмм?

26.15*. Список упорядоченных в порядке возрастания длин сторон и диагоналей одного выпуклого четырёхугольника совпадает с таким же списком для другого четырёхугольника. Обязательно ли эти четырёхугольники равны?

26.16*. Пусть $n \geqslant 3$. Существуют ли n точек, не лежащих на одной прямой, попарные расстояния между которыми иррациональны, а площади всех треугольников с вершинами в них рациональны?

26.17*. Существуют ли на плоскости три такие точки A, B и C, что для любой точки X длина хотя бы одного из отрезков XA, XB и XC иррациональна?

26.18*. В остроугольном треугольнике ABC проведены медиана AM, биссектриса BK и высота CH. Может ли площадь треугольника, образованного точками пересечения этих отрезков, быть больше $0{,}499S_{ABC}$?

26.19*. На бесконечном листе клетчатой бумаги (размер клетки 1×1) укладываются кости домино размером 1×2 так, что они накрывают все клетки. Можно ли при этом добиться того, чтобы любая прямая, идущая по линиям сетки, разрезала лишь конечное число костей?

26.20*. Может ли конечный набор точек содержать для каждой своей точки ровно 100 точек, удалённых от неё на расстояние 1?

26.21*. На плоскости расположено несколько непересекающихся отрезков. Всегда ли можно соединить концы некоторых из них отрезками так, чтобы получилась замкнутая несамопересекающаяся ломаная?

26.22*. Обязательно ли треугольник равнобедренный, если центр его вписанной окружности одинаково удалён от середин двух сторон?

26.23*. Арена цирка освещается n различными прожекторами. Каждый прожектор освещает выпуклую фигуру. Известно, что если выключить любой прожектор, то арена будет по-прежнему полностью освещена, а если выключить любые два прожектора, то арена будет освещена не полностью. При каких n это возможно?

См. также задачи 6.81, 6.92—6.95, 22.37—22.39, 22.47, 22.48, 22.50, 23.38, 24.12, 24.13.

Решения

26.1. а) Легко проверить, что, построив четвёртое здание внутри треугольника, образованного тремя другими зданиями, получим требуемое расположение.

б) Расположить требуемым образом пять зданий нельзя. В самом деле, если мы видим последовательно здания $A_1, A_2, \ldots, A_n$, то $A_1A_2\ldots A_n$ — несамопересекающаяся ломаная. Поэтому если $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник, то его вершины нельзя увидеть в следующем порядке: A, C, D, B. Остаётся заметить, что из пяти точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, всегда можно выбрать четыре точки, являющиеся вершинами выпуклого четырёхугольника (задача 22.2).

26.2. Можно считать, что $n \geqslant 4$ и не все точки лежат на одной прямой. Тогда можно выбрать четыре точки A, B, C и D, не лежащие на одной прямой. По условию три из них лежат на одной прямой. Пусть для определённости точки A, B и C лежат на прямой l, а D не лежит на l. Нужно доказать, что все точки, кроме D, лежат на прямой l. Предположим, что точка E не принадлежит l. Рассмотрим четвёрку точек A, B, D, E. Тройки точек A, B, D и A, B, E не лежат на одной прямой. Поэтому на одной прямой лежит либо тройка точек A, D, E, либо тройка точек B, D, E. Пусть для определённости на одной прямой лежат точки A, D и E. Тогда никакие три из точек B, C, D, E не лежат на одной прямой. Получено противоречие.

26.3. Пусть количество различных расстояний между точками равно k. Фиксируем две точки. Тогда все остальные точки являются точками пересечения двух семейств концентрических окружностей, содержащих по k окружностей. Следовательно, общее количество точек не превосходит $2k^2 + 2$. Остаётся заметить, что $2 \cdot 14^2 + 2 = 394 < 400$.

26.4. Назовём *диаметром* отрезок длиной d, соединяющий пару данных точек. Концы всех диаметров, выходящих из точки A, лежат на окружности с центром A и радиусом d. Так как расстояние между любыми двумя точками не превосходит d, концы всех диаметров, выходящих из A, лежат на дуге, угловая величина которой не превосходит 60°. Следовательно, если из точки A выходят три диаметра AB, AC и AD, то один из концов этих диаметров лежит внутри угла, образованного двумя другими. Пусть для определённости точка C лежит внутри угла BAD. Докажем, что тогда из точки C выходит не более одного диаметра. Предположим, что есть ещё диаметр CP и точки B и P лежат по разные стороны от прямой AC (рис. 26.1). Тогда $ABCP$ — выпуклый четырёхугольник, поэтому $AB + CP < AC + BP$ (см. задачу 9.15), т. е. $d + d < d + BP$, а значит, $BP > d$, чего не может быть.

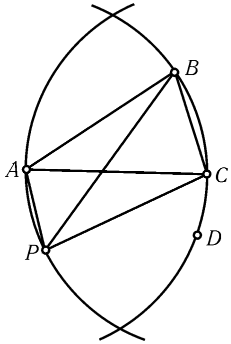


Рис. 26.1

В итоге получаем, что либо из каждой точки выходит не более двух диаметров, либо существует точка, из которой выходит не более одного диаметра. Теперь требуемое утверждение можно доказать индукцией по числу точек. Для $n = 3$ оно очевидно. Предположим, что утверждение доказано для любой системы из n точек, и докажем его для системы из $n + 1$ точки. В этой системе либо есть точка, из которой выходит не более одного диаметра, либо из каждой точки выходит не более двух диаметров. В первом случае отбрасываем эту точку и, воспользовавшись тем, что в оставшейся системе не более n диаметров, получаем требуемое. Второй случай очевиден.

26.5. Проведём все прямые, соединяющие пары данных точек, и выберем прямую l, не параллельную ни одной из них. Прямыми, параллельными l, можно разбить данные точки на четвёрки. Четырёхугольники с вершинами в этих четвёрках точек искомые (рис. 26.2).

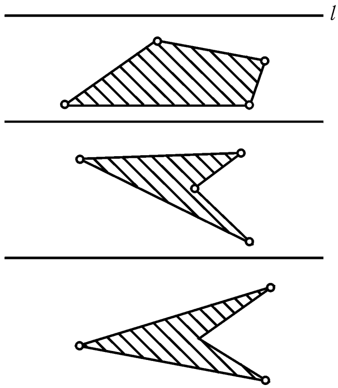


Рис. 26.2

26.6. Разобьём данные точки произвольным образом на шесть групп: четыре группы по четыре точки, группа из пяти точек и группа из одной точки. Рассмотрим группу из пяти точек. Из них можно выбрать четыре точки, являющиеся вершинами некоторого выпуклого четырёхугольника $ABCD$ (см. задачу 22.2). Объединим в пары точки A, C и B, D. Тогда отрезки AC и BD, заданные парами, пересекаются. Одна из пяти точек осталась свободной. Присоединим её к четвёрке точек и с полученной пятёркой точек проделаем то же самое и т. д. После пяти таких операций останутся две точки, и мы объединим их в пару.

26.7. Так как $\left(\dfrac{2n}{n^2+1}\right)^2 + \left(\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right)^2 = 1$, то существует угол φ, обладающий тем свойством, что $\sin\varphi = 2n/(n^2+1)$ и $\cos\varphi = (n^2-1)/(n^2+1)$, причём $0 < 2N\varphi < \pi/2$ при достаточно большом n. Рассмотрим окружность радиуса R с центром O и возьмём на ней точки $A_0, A_1, \ldots, A_{N-1}$ так, что $\angle A_0OA_k = 2k\varphi$. Тогда $A_iA_j = 2R\sin(|i-j|\varphi)$. Воспользовавшись формулами $\sin(m+1)\varphi = \sin m\varphi\cos\varphi + \sin\varphi\cos m\varphi$ и $\cos(m+1)\varphi = \cos m\varphi\cos\varphi - \sin m\varphi\sin\varphi$, легко доказать, что числа $\sin m\varphi$ и $\cos m\varphi$ рациональны для всех натуральных m. Возьмём в качестве R наибольший общий делитель всех знаменателей рациональных чисел $\sin\varphi, \ldots, \sin(N-1)\varphi$. Тогда $A_0, \ldots, A_{N-1}$ — требуемая система точек.

26.8. Требуемый пример изображён на рис. 26.3.

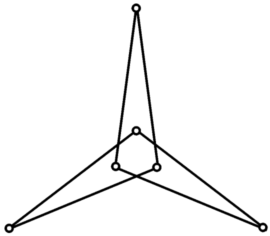


Рис. 26.3

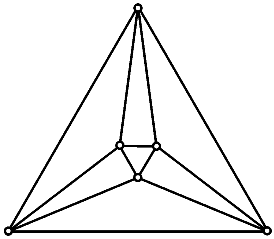


Рис. 26.4

26.9. Можно. Пример изображён на рис. 26.4.

26.10. Из условия следует, что все вершины многоугольника разбиваются на пары, задающие диагонали A_iA_j, которые проходят через точку O. Поэтому число вершин чётно и по обе стороны от каждой такой диагонали A_iA_j лежит равное число вершин. Следовательно, $j = i + m$, где m — половина числа вершин. Таким образом, точка O является точкой пересечения диагоналей, соединяющих противоположные вершины. Ясно, что точка пересечения этих диагоналей единственна.

26.11. Если AC и BD — пересекающиеся красные отрезки, то число точек пересечения любой прямой с отрезками AB и CD не превосходит числа точек пересечения этой прямой с отрезками AC и BD. Поэтому, заменив красные отрезки AC и BD на отрезки AB и CD, мы не увеличим число точек пересечения красных отрезков с синими, а число точек пересечения красных отрезков с красными уменьшим, так как исчезнет точка пересечения AC и BD. После нескольких таких операций все красные отрезки станут непересекающимися, и нам остаётся доказать, что в этом случае число точек пересечения красных отрезков с синими не меньше n. Рассмотрим произвольный красный отрезок. Так как другие красные отрезки его не пересекают, то по обе стороны от него лежит чётное число красных точек, т. е. нечётное число синих точек. Следовательно, найдётся синий отрезок, пересекающий данный красный отрезок. Поэтому числе точек пересечения красных отрезков с синими не меньше числа красных отрезков, т. е. не меньше n.

26.12. Пусть A — общая точка первых трёх окружностей S_1, S_2 и S_3. Обозначим точки пересечения окружностей S_1 и S_2, S_2 и S_3, S_3 и S_1 через B, C, D соответственно. Предположим, что существует окружность S, не проходящая через точку A. Тогда окружность S проходит через точки B, C и D. Пусть S' — пятая окружность. Каждая пара точек из набора A, B, C, D является парой точек пересечения двух из окружностей S_1, S_2, S_3, S. Поэтому окружность S' проходит через одну точку из каждой пары точек A, B, C, D. С другой стороны, окружность S' не может проходить через три точки из A, B, C, D, поскольку каждая тройка этих точек задаёт одну из окружностей S_1, S_2, S_3, S. Поэтому окружность S' не проходит через какие-то две из этих точек. Получено противоречие.

26.13. Рассмотрим прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 1$ см и $BC = 500$ м. Пусть O — точка пересечения его диагоналей. Легко проверить, что площадь треугольника AOD больше 1 м^2, а все его высоты меньше 1 см.

26.14. Нет, не обязательно. На рис. 26.5 показано, как получить нужный четырёхугольник $ABCD$.

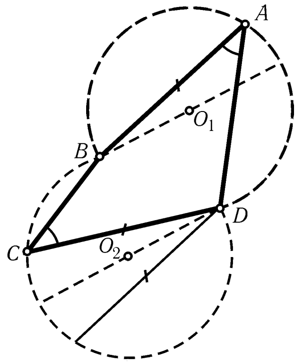


Рис. 26.5

26.15. Не обязательно. Легко проверить, что список длин сторон и диагоналей для равнобедренной трапеции с высотой 1 и основаниями 2 и 4 совпадает с таким же списком для четырёхугольника с перпендикулярными диагоналями длиной 2 и 4, делящимися точкой пересечения на отрезки длиной 1 и 1, 1 и 3 (рис. 26.6).

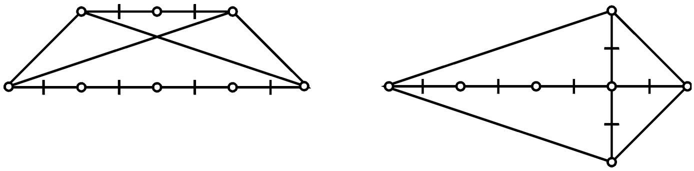


Рис. 26.6

26.16. Да, существуют. Рассмотрим точки $P_i = (i, i^2)$, где $i = 1, \ldots, n$. Площади всех треугольников с вершинами в узлах целочисленной решётки рациональны (см. задачу 24.7), а числа $P_iP_j = |i-j|\sqrt{1+(i+j)^2}$ иррациональны.

26.17. Да, существуют. Пусть C — середина отрезка AB. Тогда $XC^2 = (2XA^2 + 2XB^2 - AB^2)/2$. Если число AB^2 иррационально, то числа XA, XB и XC не могут одновременно быть рациональными.

26.18. Может. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC_1 с катетами $AB = 1$ и $BC_1 = 2n$. Проведём в нём медиану AM_1, биссектрису BK_1 и высоту C_1H_1. Площадь треугольника, образованного этими отрезками, больше $S_{ABM_1} - S_{ABK_1}$. Ясно, что $S_{ABK_1} < 1/2$ и $S_{ABM_1} = n/2$, т. е. $S_{ABM_1} - S_{ABK_1} > (S/2) - (S/2n)$, где $S = S_{ABC_1}$. Поэтому при достаточно большом n площадь треугольника, образованного отрезками AM_1, BK_1 и C_1H_1, будет больше $0{,}499S$.

Точку C_1 можно слегка сдвинуть так, чтобы прямоугольный треугольник ABC_1 превратился в остроугольный треугольник ABC, а площадь треуголь-

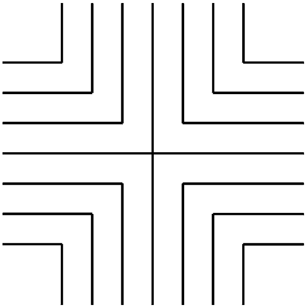


Рис. 26.7

ника, образованного точками пересечения отрезков, осталась больше 0,499 площади треугольника ABC.

26.19. Можно. Замостим, например, бесконечные уголки, изображённые на рис. 26.7.

26.20. Да, может. Докажем это утверждение индукцией, заменив 100 на n. При $n=1$ можно взять концы отрезка длиной 1. Предположим, что утверждение доказано для n и $A_1, \ldots, A_k$ — нужный набор точек. Пусть $A_1', \ldots, A_k'$ — образы точек $A_1, \ldots, A_k$ при параллельном переносе на единичный вектор $\boldsymbol{a}$. Для доказательства шага индукции единичный вектор $\boldsymbol{a}$ достаточно выбрать так, что $\boldsymbol{a} \neq \overrightarrow{A_iA_j}$ и $A_jA_i' \neq 1$ при $i \neq j$, т. е. $|\overrightarrow{A_jA_i} + \boldsymbol{a}| \neq 1$ при $i \neq j$. Каждое из этих ограничений исключает из единичной окружности не более одной точки.

26.21. Не всегда. Рассмотрим отрезки, изображённые на рис. 26.8. Концы каждого короткого отрезка можно соединить только с концами ближайшего к нему длинного отрезка. Ясно, что при этом не может получиться замкнутая несамопересекающаяся ломаная.

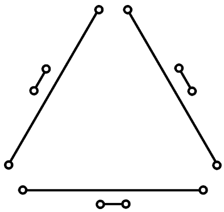


Рис. 26.8

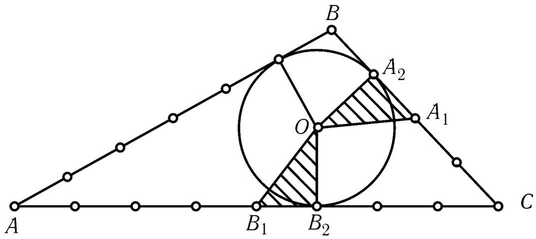


Рис. 26.9

26.22. Не обязательно. Докажем, что центр O вписанной окружности треугольника ABC со сторонами $AB=6$, $BC=4$ и $CA=8$ одинаково удалён от середин сторон AC и BC. Обозначим середины сторон AC и BC через B_1 и A_1, а основания перпендикуляров, опущенных из точки O на AC и BC, — через B_2 и A_2 (рис. 26.9). Так как $A_1A_2 = 1 = B_1B_2$ (см. задачу 3.2) и $OA_2 = OB_2$, то $\triangle OA_1A_2 = \triangle OB_1B_2$ т. е. $OA_1 = OB_1$.

26.23. Это возможно при любом $n \geqslant 3$. Впишем в арену правильный k-угольник, где k — число различных пар, которые можно составить из n прожекторов, т. е. $k = n(n-1)/2$. Тогда можно установить взаимно однозначное соответствие между сегментами, отсекаемыми сторонами k-угольника, и парами прожекторов. Пусть каждый прожектор освещает весь k-угольник и сегменты, соответствующие парам прожекторов, в которые он входит. Легко проверить, что это освещение обладает требуемыми свойствами.

ГЛАВА 27

ИНДУКЦИЯ И КОМБИНАТОРИКА

Основные сведения

При решении геометрических задач иногда используется *метод математической индукции*. Он заключается в следующем. Пусть имеется некоторое утверждение $A(n)$, где n — натуральное число. Чтобы доказать истинность этого утверждения для всех $n \geqslant k$, достаточно доказать его истинность для $n = k$ и доказать, что из истинности утверждения для $n = m$, где m — любое натуральное число, не меньшее k, следует его истинность для $n = m + 1$.

Доказательство истинности утверждения $A(n)$ при $n = k$ называют *базой индукции*, а доказательство того, что из истинности утверждения для $n = m$ следует его истинность для $n = m + 1$, называют *шагом индукции*.

§ 1. Индукция

27.1. Докажите, что если плоскость разбита на части прямыми и окружностями, то получившуюся карту можно раскрасить в два цвета так, что части, граничащие по дуге или отрезку, будут разного цвета.

27.2*. Докажите, что в выпуклом n-угольнике нельзя выбрать больше n диагоналей так, чтобы любые две из них имели общую точку.

27.3*. Пусть E — точка пересечения боковых сторон AD и BC трапеции $ABCD$, B_{n+1} — точка пересечения прямых A_nC и BD $(A_0 = A)$, A_{n+1} — точка пересечения прямых EB_{n+1} и AB. Докажите, что $A_nB = AB/(n+1)$.

27.4*. На прямой даны точки $A_1, \ldots, A_n$ и $B_1, \ldots, B_{n-1}$. Докажите, что

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1} \overline{A_iB_k}}{\prod\limits_{j\neq 1} \overline{A_iA_j}} = 1.$$

27.5*. Докажите, что если n точек не лежат на одной прямой, то среди прямых, их соединяющих, не менее n различных.

См. также задачи 2.13, 5.119, 13.26, 22.8, 22.9, 22.11—22.13, 22.32, 22.41 б), 22.43, 22.44, 22.50, 23.40—23.42, 24.17, 25.24, 25.26, 25.33, 25.36, 25.39, 25.57, 26.4, 26.20 28.37, 28.38.

§ 2. Комбинаторика

27.6. На окружности отмечено несколько точек, A — одна из них. Каких выпуклых многоугольников с вершинами в этих точках больше: содержащих точку A или не содержащих её?

27.7. На окружности отмечено десять точек. Сколько существует незамкнутых несамопересекающихся девятизвенных ломаных с вершинами в этих точках?

27.8*. В выпуклом n-угольнике ($n \geqslant 4$) проведены все диагонали, причём никакие три из них не пересекаются в одной точке. Найдите число точек пересечения диагоналей.

27.9*. В выпуклом n-угольнике ($n \geqslant 4$) проведены все диагонали. На сколько частей они делят n-угольник, если никакие три из них не пересекаются в одной точке?

27.10*. На плоскости дано n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что существует не менее $C_n^5/(n-4)$ различных выпуклых четырёхугольников с вершинами в этих точках (определение числа C_n^k см. на с. 428).

27.11*. Докажите, что число неравных треугольников с вершинами в вершинах правильного n-угольника равно ближайшему к $n^2/12$ целому числу.

См. также задачи 21.27—21.29, 25.6.

Решения

27.1. Доказательство проведём индукцией по общему числу прямых и окружностей. Для одной прямой или окружности утверждение очевидно. Предположим теперь, что можно раскрасить требуемым образом любую карту, заданную n прямыми и окружностями, и покажем, как тогда раскрасить карту, заданную $n+1$ прямыми и окружностями. Выбросим одну из этих прямых (или окружностей) и раскрасим карту, заданную оставшимися n прямыми и окружностями. Затем цвета всех частей, лежащих по одну сторону от выброшенной прямой (или окружности), сохраним, а цвета всех частей, лежащих по другую сторону, заменим на противоположные.

27.2. Докажем индукцией по n, что в выпуклом n-угольнике нельзя выбрать более n сторон или диагоналей так, чтобы любые две из них имели общую точку. При $n=3$ это очевидно. Предположим, что утверждение верно для любого выпуклого n-угольника, и докажем его для $(n+1)$-угольника. Если из каждой вершины $(n+1)$-угольника выходит не более двух выбранных сторон или диагоналей, то их всего выбрано не более $n+1$. Поэтому будем считать, что из некоторой вершины A выходят три выбранные стороны или диагонали AB_1, AB_2 и AB_3, причём AB_2 лежит между AB_1 и AB_3. Так как диагональ или сторона, выходящая из точки B_2 и отличная от AB_2 не может одновременно пересекать AB_1 и AB_3, то из B_2 выходит только одна выбранная диагональ. Поэтому можно выбросить точку B_2 вместе с диагональю AB_2 и применить предположение индукции.

27.3. Ясно, что $A_0B = AB$. Пусть C_n — точка пересечения прямых EA_n и DC, $DC:AB = k$, $AB = a$, $A_nB = a_n$ и $A_{n+1}B = x$. Так как $CC_{n+1}:A_nA_{n+1} = DC_{n+1}:BA_{n+1}$, то $kx : (a_n - x) = (ka - kx) : x$, т. е. $x = aa_n/(a + a_n)$. Если $a_n = a/(n+1)$, то $x = a/(n+2)$.

27.4. Докажем сначала требуемое утверждение при $n = 2$. Так как $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_1} = \overrightarrow{0}$, то $(\overline{A_1B_1}/\overline{A_1A_2}) + (\overline{A_2B_1}/\overline{A_2A_1}) = 1$. Для доказательства шага индукции поступим следующим образом. Фиксируем точки $A_1, \ldots, A_n$ и $B_1, \ldots, B_{n-2}$, а точку B_{n-1} будем считать переменной. Рассмотрим функцию

$$f(B_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1} \overline{A_iB_k}}{\prod\limits_{j \neq i} \overline{A_iA_j}}.$$

Эта функция линейная, причём по предположению индукции $f(B_{n-1}) = 1$, если B_{n-1} совпадает с одной из точек $A_1, \ldots, A_n$. Следовательно, эта функция тождественно равна 1.

27.5. Доказательство проведём индукцией по n. При $n = 3$ утверждение очевидно. Предположим, что мы доказали его для $n - 1$ точки и докажем его для n точек. Если на каждой прямой, проходящей через две данные точки, лежит ещё одна данная точка, то все данные точки лежат на одной прямой (см. задачу 20.14). Поэтому существует прямая, на которой лежат ровно две данные точки A и B. Выбросим точку A. Возможны два случая.

1. Все оставшиеся точки лежат на одной прямой l. Тогда будет ровно n различных прямых: $n - 1$ прямая, проходящая через A, и прямая l.

2. Оставшиеся точки не лежат на одной прямой. Тогда среди прямых, их соединяющих, по предположению индукции есть не менее $n - 1$ различных, причём все они отличны от прямой l. Вместе с прямой AB они составляют не менее n прямых.

27.6. Любому многоугольнику, не содержащему точки A, можно поставить в соответствие многоугольник, содержащий точку A, добавив её к его вершинам. А вот обратную операцию, т. е. отбрасывание вершины A, можно производить только для n-угольников с $n \geqslant 4$. Поэтому многоугольников, содержащих точку A, больше, чем многоугольников, не содержащих точки A, причём больше на число треугольников с вершиной A, т. е. на $(n-1)(n-2)/2$.

27.7. Первую точку можно выбрать десятью способами. Каждую из следующих восьми точек можно выбрать двумя способами, так как она должна быть соседней с одной из ранее выбранных точек (иначе получится самопересекающаяся ломаная). Поскольку начало и конец при таком подсчёте не различаются, результат нужно разделить на 2. Следовательно, всего имеется $10 \cdot 2^8/2 = 1280$ ломаных.

27.8. Любая точка пересечения диагоналей определяет две диагонали, пересечением которых она является, а концы этих диагоналей определяют выпуклый четырёхугольник. Обратно, любые четыре вершины многоугольника определяют одну точку пересечения диагоналей. Поэтому число точек пересечения диагоналей равно числу способов выбора четырёх точек из n, т. е. равно $\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$.

27.9. Будем поочерёдно проводить диагонали. Когда мы проводим очередную диагональ, число частей, на которые проведённые ранее диагонали делят многоугольник, увеличивается на $m+1$, где m — число точек пересечения новой диагонали с ранее проведёнными, т. е. каждая новая диагональ и каждая новая точка пересечения диагоналей увеличивают число частей на 1. Поэтому общее число частей, на которые диагонали делят n-угольник, равно $D+P+1$, где D — число диагоналей, P — число точек пересечения диагоналей. Ясно, что $D=n(n-3)/2$. Согласно предыдущей задаче $P=n(n-1)(n-2)(n-3)/24$.

27.10. Если выбрать любые пять точек, то существует выпуклый четырёхугольник с вершинами в них (задача 22.2). Остаётся заметить, что четвёрку точек можно дополнить до пятёрки $n-4$ различными способами.

27.11. Пусть всего имеется N неравных треугольников с вершинами в вершинах правильного n-угольника, причём из них N_1 правильных, N_2 неправильных равнобедренных и N_3 разносторонних. Каждый правильный треугольник равен одному треугольнику с фиксированной вершиной A, неправильный равнобедренный — трём треугольникам с вершиной A, а разносторонний — шести. Так как всего имеется $(n-1)(n-2)/2$ треугольников с вершиной A, то $(n-1)(n-2)/2=N_1+3N_2+6N_3$.

Ясно, что число неравных правильных треугольников равно 0 или 1, а число неравных равнобедренных равно $(n-1)/2$ или $(n/2)-1$, т. е. $N_1=1-c$, $N_1+N_2=(n-2+d)/2$, где c и d равны 0 или 1. Поэтому $12N=12(N_1+N_2+N_3)=2(N_1+3N_2+6N_3)+6(N_1+N_2)+4N_1=(n-1)(n-2)+3(n-2+d)+4(1-c)=n^2+3d-4c$. Так как $|3d-4c|<6$, то N совпадает с ближайшим к $n^2/12$ целым числом.

ГЛАВА 28

ИНВЕРСИЯ

Основные сведения

1. Все геометрические преобразования, с которыми нам приходилось встречаться в этой книге, переводили прямые в прямые, а окружности в окружности. Инверсия — это преобразование другого типа, которое также сохраняет класс прямых и окружностей, но может прямую перевести в окружность, а окружность — в прямую. На этом и других замечательных свойствах инверсии основывается её поразительная эффективность при решении разнообразных геометрических задач.

2. Определение. Пусть на плоскости дана окружность S с центром O и радиусом R. *Инверсией относительно окружности* S называют преобразование, переводящее произвольную точку A, отличную от O, в точку A^*, лежащую на луче OA на расстоянии $OA^* = R^2/OA$ от точки O. Инверсию относительно S будем также называть *инверсией с центром* O и *степенью* R^2, а окружность S — *окружностью инверсии*.

3. Непосредственно из определения инверсии видно, что точки окружности S она оставляет на месте, точки, лежащие внутри S, переводит наружу, а точки, лежащие вне S, — внутрь S. Если точка A переходит при инверсии в A^*, то точку A^* эта инверсия переводит в A, т. е. $(A^*)^* = A$. Образом прямой, проходящей через центр инверсии, является сама эта прямая.

В этом месте надо сделать оговорку, связанную с тем, что инверсия не является в строгом смысле слова преобразованием плоскости, так как точка O никуда не переходит. Поэтому формально мы не имеем права говорить об «образе прямой, проходящей через точку O», а должны рассматривать объединение двух лучей, получающихся из прямой выбрасыванием точки O. Аналогично обстоит дело и с окружностями, содержащими точку O. Мы, тем не менее, будем придерживаться этих нестрогих, но зато более наглядных формулировок, надеясь, что читатель легко восстановит точный смысл.

4. Всюду в этой главе образ точки A при инверсии обозначается через A^*.

5. Сформулируем важнейшие свойства инверсии, постоянно применяемые при решении задач.

При инверсии с центром O:

а) прямая l, не содержащая O, переходит в окружность, проходящую через O (задача 28.2);

б) окружность с центром C, проходящая через O, переходит в прямую, перпендикулярную OC (задача 28.3);

в) окружность, не проходящая через O, переходит в окружность, не проходящую через O (задача 28.3);

г) касание окружностей и прямых сохраняется, если только точка касания не совпадает с центром инверсии; в последнем случае получается пара параллельных прямых (задача 28.4);

д) величина угла между двумя окружностями (или между окружностью и прямой, или между двумя прямыми) сохраняется (задача 28.5); определение угла между окружностями приведено на с. 55.

§ 1. Свойства инверсии

28.1. Пусть при инверсии с центром O точка A переходит в A^*, а точка B — в B^*. Докажите, что треугольники OAB и OB^*A^* подобны.

28.2. Докажите, что при инверсии с центром O прямая l, не проходящая через O, переходит в окружность, проходящую через O.

28.3. Докажите, что при инверсии с центром O окружность, проходящая через O, переходит в прямую, а окружность, не проходящая через O, — в окружность.

28.4. Докажите, что касающиеся окружности (окружность и прямая) переходят при инверсии в касающиеся окружности или в касающиеся окружность и прямую, или в пару параллельных прямых.

28.5*. Докажите, что при инверсии сохраняется угол между окружностями (между окружностью и прямой, между прямыми).

28.6*. Докажите, что две непересекающиеся окружности S_1 и S_2 (или окружность и прямую) можно при помощи инверсии перевести в пару концентрических окружностей.

28.7*. Через точку A проведена прямая l, пересекающая окружность S с центром O в точках M и N и не проходящая через O. Пусть M' и N' — точки, симметричные M и N относительно OA, а A' — точка пересечения прямых MN' и $M'N$. Докажите, что A' совпадает с образом точки A при инверсии относительно S (и, следовательно, не зависит от выбора прямой l).

28.8*. Докажите, что при инверсии относительно описанной окружности изодинамические центры треугольника переходят друг в друга.

§ 2. Построение окружностей

При решении задач этого параграфа мы часто будем говорить «сделаем инверсию...». В переводе на более формальный язык это звучит так: «Построим при помощи циркуля и линейки образы всех данных точек, прямых и окружностей при инверсии относительно данной окружности». Выполнимость таких построений вытекает из свойств инверсии и задачи 28.9.

В задачах на построение часто используется существование инверсии, переводящей две непересекающиеся окружности в концентрические. Из решения задачи 28.6 следует, что центр и радиус такой инверсии (а значит, и образы окружностей) можно построить циркулем и линейкой.

28.9. Постройте образ точки A при инверсии относительно окружности S с центром O.

28.10. Постройте окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной окружности (или прямой).

28.11*. Через данную точку проведите окружность, касающуюся двух данных окружностей (или окружности и прямой).

28.12*. Постройте окружность, касающуюся трёх данных окружностей (*задача Аполлония*).

28.13*. Проведите через данную точку окружность, перпендикулярную двум данным окружностям.

28.14*. Постройте окружность, касающуюся данной окружности S и перпендикулярную двум данным окружностям S_1 и S_2.

28.15*. Проведите через данные точки A и B окружность, пересекающую данную окружность S под углом α.

§ 3. Построения одним циркулем

По традиции, идущей от древних греков, в геометрии обычно рассматриваются построения циркулем и линейкой. Но можно также производить построения с помощью других инструментов, а ещё можно, например, рассмотреть построения с помощью одного лишь циркуля без линейки. С помощью одного циркуля, естественно, нельзя построить сразу все точки прямой. Поэтому мы договоримся считать, что прямая построена, если построены две её точки. Оказывается, что при таком условии с помощью циркуля можно выполнить все построения, которые можно выполнить с помощью циркуля и линейки. Это следует из возможности построить одним циркулем точки пересечения прямой, заданной двумя точками, с окружностью (задача 28.22 а) и точку пересечения двух прямых (задача 28.22 б), так как любое построение циркулем и линейкой представляет собой последовательность нахождений точек пересечения окружностей и прямых.

В этом параграфе рассматриваются построения одним циркулем без помощи линейки, т. е. слово «постройте» означает «постройте пользуясь одним только циркулем». При этом отрезок считается построенным, если построены его концы.

28.16. а) Постройте отрезок, который в два раза длиннее данного отрезка.

б) Постройте отрезок, который в n раз длиннее данного отрезка.

28.17. Постройте точку, симметричную точке A относительно прямой, проходящей через данные точки B и C.

28.18*. Постройте образ точки A при инверсии относительно данной окружности S с данным центром O.

28.19*. Постройте середину отрезка с данными концами.

28.20*. Постройте окружность, в которую переходит данная прямая AB при инверсии относительно данной окружности с данным центром O.

28.21*. Постройте окружность, проходящую через три данные точки.

28.22*. а) Постройте точки пересечения данной окружности S и прямой, проходящей через данные точки A и B.

б) Постройте точку пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2, где A_1, B_1, A_2 и B_2 — данные точки.

§ 4. Сделаем инверсию

28.23. В сегмент вписываются всевозможные пары касающихся окружностей (рис. 28.1). Найдите множество их точек касания.

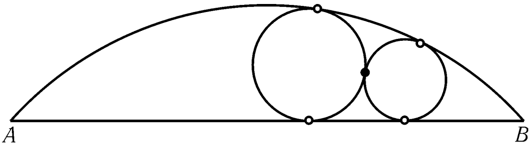


Рис. 28.1

28.24. Найдите множество точек касания пар окружностей, касающихся сторон данного угла в данных точках A и B.

28.25. Докажите, что инверсия с центром в вершине A равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) и степенью AB^2 переводит основание BC треугольника в дугу BC описанной окружности.

28.26*. В сегмент вписываются всевозможные пары пересекающихся окружностей, и для каждой пары через точки их пересечения проводится прямая. Докажите, что все эти прямые проходят через одну точку.

28.27*. Никакие три из четырёх точек A, B, C, D не лежат на одной прямой. Докажите, что угол между описанными окружностями треугольников ABC и ABD равен углу между описанными окружностями треугольников ACD и BCD.

28.28*. Через точки A и B проведены окружности S_1 и S_2, касающиеся окружности S, и окружность S_3, перпендикулярная S. Докажите, что S_3 образует равные углы с окружностями S_1 и S_2.

28.29*. Две окружности, пересекающиеся в точке A, касаются окружности (или прямой) S_1 в точках B_1 и C_1, а окружности (или прямой) S_2 в точках B_2 и C_2 (причём касание в B_2 и C_2 такое же, как в B_1 и C_1). Докажите, что окружности, описанные вокруг треугольников AB_1C_1 и AB_2C_2, касаются друг друга.

28.30*. Окружность S_A проходит через точки A и C; окружность S_B проходит через точки B и C; центры обеих окружностей лежат на прямой AB. Окружность S касается окружностей S_A и S_B, а кроме того, она касается отрезка AB в точке C_1. Докажите, что CC_1 — биссектриса треугольника ABC.

28.31*. а) Докажите, что окружность, проходящая через середины сторон треугольника, касается его вписанной и трёх вневписанных окружностей (Фейербах).

б) На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты точки C_1 и B_1 так, что $AC_1 = B_1C_1$ и вписанная окружность S треугольника ABC является вневписанной окружностью треугольника AB_1C_1. Докажите, что вписанная окружность треугольника AB_1C_1 касается окружности, проходящей через середины сторон треугольника ABC.

§ 5. Точки, лежащие на одной окружности, и окружности, проходящие через одну точку

28.32. Даны четыре окружности, причём окружности S_1 и S_3 пересекаются с обеими окружностями S_2 и S_4. Докажите, что если точки пересечения S_1 с S_2 и S_3 с S_4 лежат на одной окружности или прямой, то и точки пересечения S_1 с S_4 и S_2 с S_3 лежат на одной окружности или прямой (рис. 28.2).

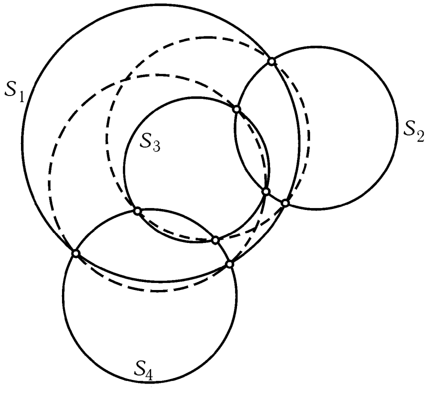


Рис. 28.2

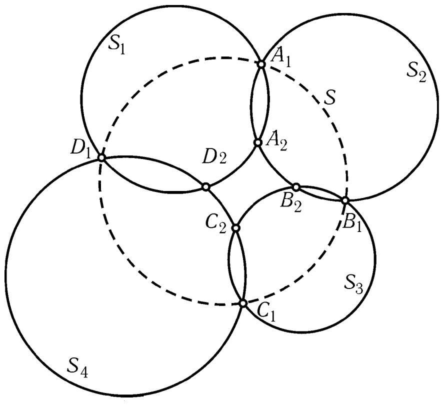


Рис. 28.3

28.33*. Даны четыре окружности S_1, S_2, S_3, S_4. Пусть S_1 и S_2 пересекаются в точках A_1 и A_2, S_2 и S_3 — в точках B_1 и B_2, S_3 и S_4 — в точках C_1 и C_2, S_4 и S_1 — в точках D_1 и D_2 (рис. 28.3). Докажите, что если точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат на одной окружности S (или прямой), то и точки A_2, B_2, C_2, D_2 лежат на одной окружности (или прямой).

28.34*. Стороны выпуклого пятиугольника $ABCDE$ продолжили так, что образовалась пятиконечная звезда $AHBKCLDMEN$ (рис. 28.4).

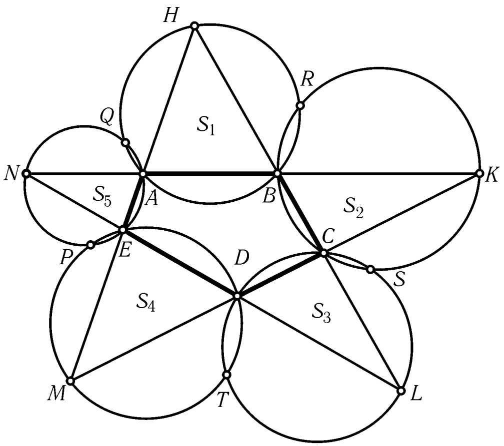


Рис. 28.4

Около треугольников — лучей звезды описали окружности. Докажите, что пять точек пересечения этих окружностей, отличных от A, B, C, D, E, лежат на одной окружности.

28.35*. На плоскости взяты шесть точек A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3. Докажите, что если описанные окружности треугольников $A_1A_2B_3$, $A_1B_2A_3$ и $B_1A_2A_3$ проходят через одну точку, то и описанные окружности треугольников $B_1B_2A_3$, $B_1A_2B_3$ и $A_1B_2B_3$ пересекаются в одной точке.

28.36*. На плоскости взяты шесть точек A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2. Докажите, что если окружности, описанные около треугольников $A_1B_1C_1$, $A_1B_2C_2$, $A_2B_1C_2$, $A_2B_2C_1$, проходят через одну точку, то и окружности, описанные около треугольников $A_2B_2C_2$, $A_2B_1C_1$, $A_1B_2C_1$, $A_1B_1C_2$, проходят через одну точку.

28.37*. В этой задаче мы будем рассматривать наборы из n прямых общего положения, т. е. наборы, в которых никакие две прямые не параллельны и никакие три не проходят через одну точку.

Набору из двух прямых общего положения поставим в соответствие их точку пересечения, а набору из трёх прямых общего положения — окружность, проходящую через три точки пересечения. Если l_1, l_2, l_3, l_4 — четыре прямые общего положения, то четыре окружности S_i, соответствующие четырём тройкам прямых, получаемых отбрасыванием прямой l_i, проходят через одну точку (см. задачу 2.88 а), которую мы и поставим в соответствие четвёрке прямых. Эту конструкцию можно продолжить.

а) Пусть l_i, $i=1, \ldots, 5$ — пять прямых общего положения. Докажите, что пять точек A_i, соответствующих четвёркам прямых, получаемых отбрасыванием прямой l_i, лежат на одной окружности.

б) Докажите, что эту цепочку можно продолжить, поставив в соответствие каждому набору из n прямых общего положения точку при чётном n и окружность при нечётном n, так, что n окружностей (точек), соответствующих наборам из $n-1$ прямых, проходят через эту точку (лежат на этой окружности).

28.38*. Пусть на двух пересекающихся прямых l_1 и l_2 выбраны точки M_1 и M_2, не совпадающие с точкой пересечения M этих прямых. Поставим в соответствие им окружность, проходящую через M_1, M_2 и M.

Если (l_1, M_1), (l_2, M_2), (l_3, M_3) — прямые с выбранными точками в общем положении, то согласно задаче 2.83 а) три окружности, соответствующие парам (l_1, M_1) и (l_2, M_2), (l_2, M_2) и (l_3, M_3), (l_3, M_3) и (l_1, M_1), пересекаются в одной точке, которую мы поставим в соответствие тройке прямых с выбранными на них точками.

а) Пусть l_1, l_2, l_3, l_4 — четыре прямые общего положения, на каждой из которых задано по точке, причём эти точки лежат на одной окружности. Докажите, что четыре точки, соответствующие тройкам, получаемым отбрасыванием одной из прямых, лежат на одной окружности.

б) Докажите, что каждому набору из n прямых общего положения с заданными на них точками, лежащими на одной окружности, можно поставить в соответствие точку (при нечётном n) или окружность (при чётном n) так, что n окружностей (точек при чётном n), соответствующих наборам из $n-1$ прямых, проходят через эту точку (лежат на этой окружности при чётном n).

§ 6. Цепочки окружностей

28.39*. Окружности $S_1, S_2, \ldots, S_n$ касаются двух окружностей R_1 и R_2 и, кроме того, S_1 касается S_2 в точке A_1, S_2 касается S_3 в точке A_2, …, S_{n-1} касается S_n в точке A_{n-1}. Докажите, что точки $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ лежат на одной окружности.

28.40*. Докажите, что если существует цепочка окружностей S_1, $S_2, \ldots, S_n$, каждая из которых касается двух соседних (S_n касается S_{n-1} и S_1) и двух данных непересекающихся окружностей R_1 и R_2, то таких цепочек бесконечно много. А именно, для любой окружности T_1, касающейся R_1 и R_2 (одинаковым образом, если R_1 и R_2 не лежат одна в другой, внешним и внутренним образом в противном случае), существует аналогичная цепочка из n касающихся окружностей $T_1, T_2, \ldots, T_n$ (*поризм Штейнера*).

28.41*. Докажите, что для двух непересекающихся окружностей R_1 и R_2 цепочка из n касающихся окружностей (см. предыдущую задачу) существует тогда и только тогда, когда угол между окружностями T_1 и T_2, касающимися R_1 и R_2 в точках их пересечения с прямой, соединяющей центры, равен целому кратному угла $360°/n$ (рис. 28.5).

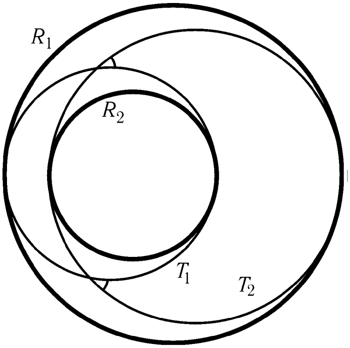


Рис. 28.5

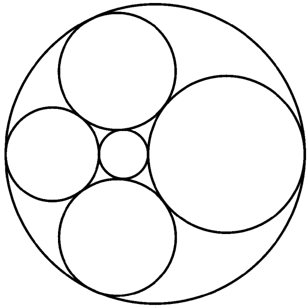


Рис. 28.6

28.42*. Каждая из шести окружностей касается четырёх из оставшихся пяти (рис. 28.6). Докажите, что для любой пары несоприкасающихся окружностей (из этих шести) их радиусы и расстояние между центрами связаны соотношением $d^2 = r_1^2 + r_2^2 \pm 6r_1r_2$ («плюс» — если окружности не лежат одна внутри другой, «минус» — в противном случае).

Решения

28.1. Пусть R^2 — степень инверсии. Тогда $OA \cdot OA^* = OB \cdot OB^* = R^2$, откуда $OA : OB = OB^* : OA^*$ и $\triangle OAB \sim \triangle OB^*A^*$, поскольку $\angle AOB = \angle B^*OA^*$.

28.2. Опустим из точки O перпендикуляр OC на прямую l и возьмём произвольную точку M на l. Из подобия треугольников OCM и OM^*C^* (задача 28.1) следует, что $\angle OM^*C^* = \angle OCM = 90°$, т. е. точка M^* лежит на окружности S с диаметром OC^*. Если X — какая-то точка S, отличная от O, то она является образом при инверсии точки Y пересечения прямых l и OX (так как образ точки Y лежит, с одной стороны, на луче OX, а с другой стороны, как уже доказано, на окружности S). Итак, инверсия переводит прямую l в окружность S (без точки O).

28.3. Случай, когда окружность S проходит через O, фактически был разобран в предыдущей задаче (и формально следует из неё, так как $(M^*)^* = M$). Предположим теперь, что точка O не принадлежит S. Пусть A и B — точки пересечения окружности S с прямой, проходящей через O и центр S, а M — произвольная точка S. Докажем, что образом S является окружность с диаметром A^*B^*. Для этого достаточно показать, что $\angle A^*M^*B^* = 90°$. Но согласно задаче 28.1 $\triangle OAM \sim \triangle OM^*A^*$ и $\triangle OBM \sim \triangle OM^*B^*$, следовательно, $\angle OMA = \angle OA^*M^*$ и $\angle OMB = \angle OB^*M^*$, точнее, $\angle(OM, MA) = -\angle(OA^*, M^*A^*)$ и $\angle(OM, MB) = -\angle(OB^*, M^*B^*)$ (чтобы не рассматривать различные случаи расположения точек, мы воспользуемся свойствами ориентированных углов между прямыми, изложенными в гл. 2). Поэтому $\angle(A^*M^*, M^*B^*) = \angle(A^*M^*, OA^*) + \angle(OB^*, M^*B^*) = \angle(OM, MA) + \angle(MB, OM) = \angle(MB, MA) = 90^\circ$.

28.4. Если точка касания не совпадает с центром инверсии, то после инверсии эти окружности (окружность и прямая) будут по-прежнему иметь одну общую точку, т. е. касание сохранится.

Если окружности с центрами A и B касаются в точке O, то при инверсии с центром O они перейдут в пару прямых, перпендикулярных AB. Наконец, если прямая l касается в точке O окружности с центром A, то при инверсии с центром O прямая l переходит в себя, а окружность — в прямую, перпендикулярную OA. В каждом из этих случаев получаем пару параллельных прямых.

28.5. Проведём через точку пересечения окружностей касательные l_1 и l_2. Так как при инверсии касающиеся окружности и прямые переходят в касающиеся (см. задачу 28.4), то угол между образами окружностей равен углу между образами касательных к ним. При инверсии с центром O прямая l_i переходит в себя или в окружность, касательная к которой в точке O параллельна l_i. Поэтому угол между образами прямых l_1 и l_2 при инверсии с центром O равен углу между этими прямыми.

28.6. Возьмём из прямой, соединяющей центры O_1 и O_2 данных окружностей, точку C так, чтобы касательные, проведённые к окружностям из точки C, были равны. Эту точку C можно построить, проведя радикальную ось окружностей (см. задачу 3.58). Пусть l — длина этих касательных. Окружность S радиуса l с центром в C перпендикулярна S_1 и S_2. Поэтому при инверсии с центром O, где O — любая из точек пересечения окружности S с прямой O_1O_2, S перейдёт в прямую, перпендикулярную окружностям S_1^* и S_2^* и, следовательно, проходящую через их центры. Но прямая O_1O_2 тоже проходит через центры S_1^* и S_2^*, поэтому окружности S_1^* и S_2^* концентричны, т. е. O — центр искомой инверсии.

В случае, когда S_2 не окружность, а прямая, роль прямой O_1O_2 играет перпендикуляр, опущенный из точки O_1 на S_2, точка C будет точкой его пересечения с S_2, а l — длиной касательной, проведённой из C к S_1.

З а м е ч а н и е. Точка O является предельной точкой пучка окружностей, заданного окружностями S_1 и S_2.

28.7. Пусть точка A лежит вне S, тогда A' лежит внутри S и $\angle MA'N = (\smile MN + \smile M'N')/2 = \smile MN = \angle MON$, т. е. четырёхугольник $MNOA'$ вписанный. Но при инверсии относительно S прямая MN перейдёт в окружность, проходящую через точки M, N, O (задача 28.2). Поэтому точка A^* (образ A при инверсии) лежит на описанной окружности четырёхугольника $MNOA'$. По тем же причинам точки A' и A^* принадлежат и окружности, проходящей через M', N' и O. Но эти две окружности не могут иметь других общих точек, кроме O и A'. Следовательно, $A^* = A'$.

В случае, когда A лежит внутри S, применим уже доказанное к прямой MN' и точке A' (она находится вне S). Получим, что $A = (A')^*$. Но тогда $A' = A^*$.

28.8. Воспользуемся обозначениями задачи 7.16. Докажем, что при инверсии относительно описанной окружности окружность S_a переходит в себя. Это эквивалентно тому, что описанная окружность ортогональна окружности S_a, т. е. при инверсии относительно окружности S_a описанная окружность переходит в себя. При инверсии относительно окружности S_a точка A переходит в себя, поэтому достаточно проверить, что точка B переходит в точку C, т. е. $OB \cdot OC = OD^2$, где O — середина отрезка DE. Пусть для определённости $b < c$. Тогда $OD = \frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c-b} + \frac{ab}{c+b}\right) = \frac{abc}{c^2-b^2}$, $OB = OD + DB = \frac{ac^2}{c^2-b^2}$ и $OC = \frac{ab^2}{c^2-b^2}$.

28.9. Пусть точка A лежит вне окружности S. Проведём через A прямую, касающуюся S в точке M. Пусть MA' — высота треугольника OMA. Прямоугольные треугольники OMA и $OA'M$ подобны, поэтому $A'O : OM = OM : OA$ и $OA' = R^2/OA$, т. е. точка A' искомая. Если же A находится внутри S, то выполним построение в обратном порядке: проводим перпендикуляр AM к OA (точка M лежит на окружности). Тогда касательная к S в точке M пересекается с лучом OA в искомой точке A^*. Доказательство повторяется дословно.

28.10. Если обе данные точки A и B лежат на данной окружности S (или прямой), то задача решений не имеет. Пусть теперь точка A не лежит на S. При инверсии с центром A искомая окружность перейдёт в прямую, проходящую через B^* и касающуюся S^*. Из этого вытекает следующее построение. Сделаем инверсию относительно произвольной окружности с центром A. Проведём через B^* касательную l к S^*. Ещё раз сделаем инверсию. Тогда l перейдёт в искомую окружность.

Если точка B^* лежит на S^*, то задача имеет единственное решение, если B^* лежит вне S^*, то решений два, а если внутри, то ни одного.

28.11. После инверсии с центром в данной точке окружности S_1 и S_2 перейдут в пару окружностей S_1^* и S_2^* (окружность S^* и прямую l; пару параллельных прямых l_1 и l_2), а касающаяся их окружность — в общую касательную к S_1^* и S_2^* (соответственно в касательную к S^*, параллельную l; прямую, параллельную l_1 и l_2). Поэтому для построения искомой окружности нужно построить прямую, касающуюся S_1^* и S_2^* (касающуюся S^* и параллельную l; параллельную l_1 и l_2), и ещё раз сделать инверсию.

28.12. Сведём эту задачу к задаче 28.11. Пусть окружность S радиуса r касается окружностей S_1, S_2, S_3 радиусов r_1, r_2, r_3 соответственно. Касание окружности S с каждой из S_i $(i = 1, 2, 3)$ может быть как внешним, так и внутренним, поэтому всего возможно восемь различных случаев касания. Пусть, например, S касается S_1 и S_3 внешним, а S_2 — внутренним образом (рис. 28.7). Заменим окружности S, S_2, S_3 на концентрические им окружности S', S_2', S_3' так, чтобы S' касалась S_2' и S_3' и проходила через центр O_1 окружности S_1. Для этого достаточно, чтобы радиусы S', S_2', S_3' равнялись $r + r_1$, $r_2 + r_1$, $|r_3 - r_1|$. Обратно, по окружности S', проходящей через O_1 и касающейся S_2' и S_3' (внешне, если $r_3 - r_1 \geqslant 0$, и внутренне, если $r_3 - r_1 < 0$), мы можем построить окружность S, дающую решение задачи, уменьшив радиус S' на r_1. Построение такой окружности S' описано в решении задачи 28.11 (если виды касания заданы, то окружность строится однозначно). Таким же способом можно выполнить построение и в остальных возможных вариантах касания.

28.13. При инверсии с центром в данной точке A искомая окружность перейдёт в прямую, перпендикулярную образам данных окружностей S_1 и S_2, т. е. в прямую, соединяющую центры S_1^* и S_2^*. Таким образом, искомая окружность — образ при этой инверсии произвольной прямой, проходящей через центры S_1^* и S_2^*.

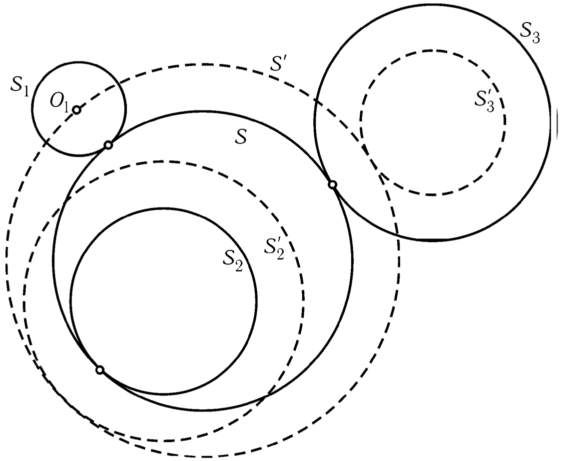


Рис. 28.7

28.14. Сделаем инверсию, переводящую окружности S_1 и S_2 в пару прямых (если они имеют общую точку) или в пару концентрических окружностей (см. задачу 28.6) с общим центром A. В последнем случае окружность, перпендикулярная им обеим, перейдёт в прямую, проходящую через A (так как не существует окружностей, перпендикулярных двум концентрическим окружностям); касательная, проведённая из A к S^*, есть образ искомой окружности при этой инверсии. Если S_1^* и S_2^* — параллельные прямые, то образ искомой окружности — любая из двух прямых, перпендикулярных S_1^* и S_2^* и касающихся S^*. Наконец, если S_1^* и S_2^* — пересекающиеся в некоторой точке B прямые, то искомая окружность — это образ при инверсии любой из двух окружностей с центром B, касающихся S^*.

28.15. После инверсии с центром в точке A задача сводится к построению прямой l, проходящей через B^*, пересекающей окружность S^* под углом α, т. е. к построению точки X на S^* такой, что $\angle B^*XO = 90^\circ \pm \alpha$, где O — центр S^*. Эта точка лежит на пересечении S^* с дугой, из которой отрезок B^*O виден под углом $90^\circ \pm \alpha$.

28.16. а) Пусть AB — данный отрезок. Проведём окружность с центром B радиуса AB. Отложив на этой окружности хорды AX, XY и YZ, равные по длине AB, мы получим равносторонние треугольники ABX, XBY и YBZ. Поэтому $\angle ABZ = 180^\circ$ и $AZ = 2AB$.

б) В решении задачи а) описано, как на прямой AB отложить отрезок BZ, равный AB. Повторив эту процедуру $n-1$ раз, получим отрезок AC, причём $AC = nAB$.

28.17. Проведём окружности с центрами B и C, проходящие через A. Тогда отличная от A точка пересечения этих окружностей и будет искомой.

28.18. Предположим сначала, что точка A лежит вне окружности S. Пусть B и C — точки пересечения S и окружности радиуса AO с центром A. Проведём окружности с центрами B и C радиуса $BO = CO$; пусть O и A' — их точки пересечения. Докажем, что A' — искомая точка. Действительно, при симметрии относительно прямой OA окружности с центрами B и C переходят друг в друга, поэтому точка A' остаётся на месте. Следовательно, точка A' лежит на прямой OA. Равнобедренные треугольники OAB и OBA' подобны, так как имеют равные углы при основании. Следовательно, $OA' : OB = OB : OA$ или $OA' = OB^2/OA$, что и требовалось.

Пусть теперь точка A лежит внутри S. Будем откладывать с помощью построения из задачи 28.16 а) на луче OA отрезки AA_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, ... длины OA до тех пор, пока одна из точек A_n не окажется вне окружности S. Применив к точке A_n описанное выше построение, получим на OA точку A_n^* такую, что $OA_n^* = R^2/nOA = OA^*/n$. Для того чтобы построить точку A^*, остаётся только увеличить в n раз отрезок OA_n^* (см. задачу 28.16 б).

28.19. Пусть A и B — данные точки. Если точка C лежит на луче AB и $AC = 2AB$, то при инверсии относительно окружности радиуса AB с центром A точка C перейдёт в середину отрезка AB. Построение сведено к задачам 28.16 а) и 28.18.

28.20. Центром этой окружности является образ при инверсии точки O', симметричной O относительно AB. Остаётся применить задачи 28.17 и 28.18.

28.21. Пусть A, B, C — данные точки. Построим (задача 28.18) образы точек B и C при инверсии с центром A и произвольной степенью. Тогда окружность, проходящая через A, B и C, будет образом прямой B^*C^* при этой инверсии, и её центр строится по предыдущей задаче.

28.22. а) Пользуясь предыдущей задачей, построим центр O окружности S. Затем построим точки A^* и B^* — образы точек A и B при инверсии относительно S. Образ прямой AB является окружностью S_1, проходящей через точки A^*, B^* и O. Воспользовавшись задачей 28.20, построим S_1. Искомые точки являются образами точек пересечения окружностей S и S_1, т. е. просто точками пересечения S и S_1.

б) Рассмотрим некоторую инверсию с центром A_1. Прямая A_2B_2 при этой инверсии переходит в окружность S, проходящую через точки A_1, A_2^* и B_2^*. Окружность S мы можем построить, воспользовавшись задачей 28.20. Затем построим точки пересечения S и прямой A_1B_1, воспользовавшись решением задачи а). Искомой точкой является образ точки пересечения, отличной от A_1, при рассматриваемой инверсии.

28.23. При инверсии с центром в вершине A сегмента конфигурация, изображённая на рис. 28.1, перейдёт в пару касающихся окружностей, вписанных в угол с вершиной B^*. Ясно, что множество точек касания таких окружностей — это биссектриса угла, а искомое множество является её образом при инверсии — дугой окружности с концами AB, делящей пополам угол между дугой сегмента и хордой AB.

28.24. Пусть C — вершина данного угла. При инверсии с центром в точке A прямая CB перейдёт в окружность S, а окружности S_1 и S_2 — в окружность S_1^* с центром O_1, касающуюся S в точке B^*, и прямую l, параллельную C^*A, касающуюся S_1^* в точке X (рис. 28.8). Проведём в окружности S радиус $OD \perp C^*A$. Точки O, B^* и O_1 лежат на одной прямой, а $OD \parallel O_1X$. Поэтому $\angle OB^*D = 90^\circ - \angle DOB^*/2 = 90^\circ - (\angle XO_1B^*/2) = \angle O_1B^*X$, следовательно, точка X лежит на прямой DB^*. Ещё раз применив инверсию, получим, что искомое множество точек касания — это дуга AB окружности, проходящей через точки A, B и D^*.

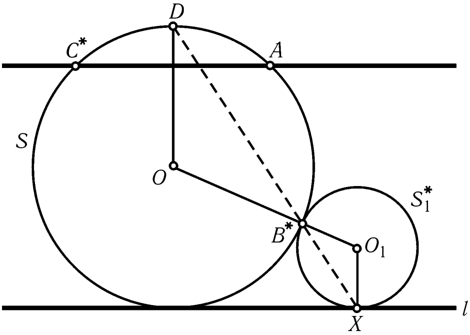


Рис. 28.8

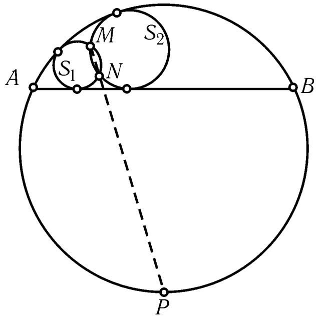


Рис. 28.9

28.25. Данная инверсия переводит прямую BC в окружность, проходящую через точки A, B и C, причём образ отрезка BC должен остаться внутри угла BAC.

28.26. Пусть S_1 и S_2 — окружности, вписанные в сегмент; M, N — их точки пересечения (рис. 28.9). Покажем, что прямая MN проходит через точку P окружности сегмента, равноудалённую от его концов A и B. Действительно, согласно задаче 28.25 инверсия с центром P и степенью PA^2 переводит отрезок AB в дугу AB, а окружности S_1 и S_2 — в окружности S_1^* и S_2^*, по-прежнему вписанные в сегмент. Но касательные к S_1, проведённые из P, касаются также и S_1^*, поэтому $S_1^* = S_1$ (так как обе эти окружности одинаковым образом касаются трёх фиксированных прямых). Аналогично $S_2^* = S_2$, следовательно, точки M и N меняются местами при инверсии, т. е. $M^* = N$ и прямая MN проходит через центр инверсии.

Замечание. По поводу другого решения см. задачу 3.45.

28.27. Сделаем инверсию с центром A. Интересующие нас углы будут равны тогда (см. задачу 28.5) соответственно углу между прямыми B^*C^* и B^*D^* и углу между прямой C^*D^* и описанной окружностью треугольника $B^*C^*D^*$. Оба этих угла равны половине дуги C^*D^*.

28.28. Сделав инверсию с центром A, мы получим три прямые, проходящие через B: прямые S_1^* и S_2^* касаются окружности S^*, а S_3^* ей перпендикулярна. Таким образом, прямая S_3^* проходит через центр S^* и является биссектрисой угла, образованного S_1^* и S_2^*. Следовательно, окружность S_3 делит пополам угол между S_1 и S_2.

28.29. Из условия на типы касания следует, что после инверсии с центром A мы получим две окружности, вписанные в один и тот же угол или в пару вертикальных углов. В любом случае окружности S_1^* и S_2^* переводятся одна в другую гомотетией с центром A. Эта гомотетия переводит один отрезок, соединяющий точки касания, в другой. Поэтому прямые $B_1^*C_1^*$ и $B_2^*C_2^*$ параллельны, а их образы при инверсии касаются в точке A.

28.30. Сделаем инверсию с центром C, при которой прямая AB переходит в окружность S', проходящую через точку пересечения окружностей S_A и S_B (отличную от точки C). При такой инверсии окружности S_A и S_B переходят

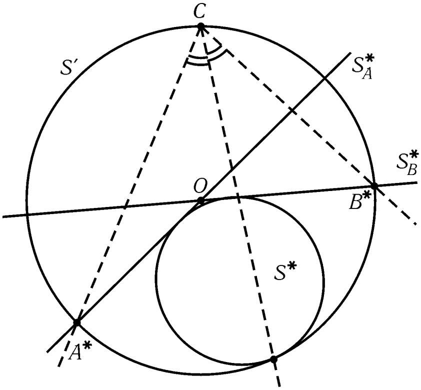


Рис. 28.10

в прямые, проходящие через центр O окружности S' (рис. 28.10). Ясно, что окружность S^* касается окружности S' в середине дуги A^*B^*.

28.31. а) Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB. Докажем, например, что описанная окружность треугольника $A_1B_1C_1$ касается вписанной окружности S и вневписанной окружности S_a, касающейся стороны BC. Пусть точки B' и C' симметричны B и C относительно биссектрисы угла A (т. е. $B'C'$ — вторая общая внутренняя касательная к S и S_a), P и Q — точки касания окружностей S и S_a со стороной BC, D и E — точки пересечения прямых A_1B_1 и A_1C_1 с прямой $B'C'$. Согласно задаче 3.2 $BQ = CP = p - c$, а значит, $A_1P = A_1Q = |b - c|/2$. Достаточно доказать, что при инверсии с центром A_1 и степенью A_1P^2 точки B_1 и C_1 переходят в D и E (при этой инверсии окружности S и S_a переходят в себя, а описанная окружность треугольника $A_1B_1C_1$ переходит в прямую $B'C'$).

Пусть K — середина отрезка CC'. Точка K лежит на прямой A_1B_1, причём $A_1K = BC'/2 = |b - c|/2 = A_1P$. Кроме того, $A_1D : A_1K = BC' : BA = A_1K : A_1B_1$, т. е. $A_1D \cdot A_1B_1 = A_1K^2 = A_1P^2$. Аналогично $A_1E \cdot A_1C_1 = A_1P^2$.

б) Окружность S', проходящая через середины сторон треугольника ABC, проходит ещё и через основания высот (задача 5.129). Пусть H — основание высоты, опущенной из вершины B, B_2 — середина стороны AC. Достаточно проверить, что инверсия с центром A и степенью $AB_2 \cdot AH = \frac{b}{2} c \cos A = pr \operatorname{ctg} A$ переводит вневписанную окружность S_a во вписанную окружность треугольника AB_1C_1. Действительно, эта инверсия переводит окружность S' в себя, а согласно задаче а) окружности S' и S_a касаются.

Пусть X — середина отрезка AB_1. Тогда $C_1X = r$ и $AX = r \operatorname{ctg} A$. Остаётся заметить, что длина касательной из точки A к окружности S_a равна p.

28.32. После инверсии с центром в точке пересечения S_1 и S_2 получим прямые l_1, l_2 и l, пересекающиеся в одной точке. Прямая l_1 пересекает окружность S_4^* в точках A и B, прямая l_2 пересекает S_3^* в точках C и D, а прямая l проходит через точки пересечения этих окружностей. Поэтому точки A, B, C, D лежат на одной окружности (задача 3.10).

28.33. Сделаем инверсию с центром в точке A_1. Тогда окружности S_1, S_2 и S перейдут в прямые $A_2^*D_1^*$, $B_1^*A_2^*$ и $D_1^*B_1^*$, окружности S_3 и S_4 — в окружности S_3^* и S_4^*, описанные около треугольников $B_2^*C_1^*B_1^*$ и $C_1^*D_1^*D_2^*$ (рис. 28.11). Проведём окружность через точки B_2^*, D_2^*, A_2^*. Согласно задаче 2.83 а) она пройдёт через точку C_2^* пересечения окружностей S_3^* и S_4^*. Таким образом, точки A_2^*, B_2^*, C_2^*, D_2^* лежат на одной окружности. Следовательно, точки A_2, B_2, C_2, D_2 лежат на одной окружности или прямой.

28.34. Пусть P, Q, R, S, T — точки пересечения окружностей S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, о которых говорится в условии (см. рис. 28.4). Докажем, например, что точки P, Q, R, S лежат на одной окружности. Проведём окружность Σ,

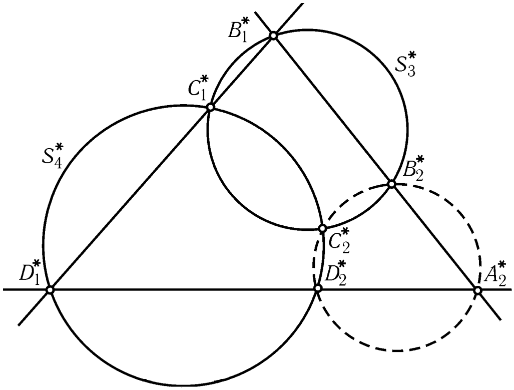


Рис. 28.11

описанную около треугольника NKD. Применяя результат задачи 2.88 а) (совпадающей с 19.46) к четырёхугольникам $AKDE$ и $BNDC$, получаем, что окружности S_4, S_5 и Σ пересекаются в одной точке (в точке P) и окружности S_2, S_3, Σ тоже пересекаются в одной точке (в точке S). Следовательно, окружность Σ проходит через точки P и S. Заметим теперь, что из восьми точек пересечения окружностей Σ, S_1, S_2, S_5 четыре, а именно N, A, B, K лежат на одной прямой. Следовательно, согласно задаче 28.33 оставшиеся четыре точки P, Q, R, S лежат на одной окружности.

28.35. После инверсии с центром в точке пересечения описанных окружностей треугольников $A_1A_2B_3$, $A_1B_2A_3$ и $B_1A_2A_3$ эти окружности перейдут в прямые, а утверждение задачи сведётся к доказательству того, что описанные окружности треугольников $B_1^*B_2^*A_3^*$, $B_1^*A_2^*B_3^*$ и $A_1^*B_2^*B_3^*$ проходят через одну точку, т. е. к утверждению задачи 2.83 а).

28.36. После инверсии с центром в точке пересечения описанных окружностей треугольников $A_1B_1C_1$, $A_1B_2C_2$, $A_2B_1C_2$ и $A_2B_2C_1$ мы получим четыре прямые и четыре окружности, описанные около образованных этими прямыми треугольников. Согласно задаче 2.88 а) эти окружности проходят через одну точку.

28.37. а) Обозначим через M_{ij} точку пересечения прямых l_i и l_j, а через S_{ij} — окружность, соответствующую трём оставшимся прямым. Тогда точка A_1 является отличной от точки M_{34} точкой пересечения окружностей S_{15} и S_{12}.

Повторив это рассуждение для всех точек A_i, получаем, что они в силу задачи 28.34 лежат на одной окружности.

б) Докажем утверждение задачи по индукции, рассматривая отдельно случай чётного и нечётного n.

Пусть n нечётно. Обозначим через A_i точку, соответствующую набору из $n-1$ прямой, получаемому отбрасыванием прямой l_i, а через A_{ijk} — точку, соответствующую набору из n данных прямых без прямых l_i, l_j и l_k. Аналогично обозначим через S_{ij} и S_{ijkm} окружности, соответствующие наборам из $n-2$ и $n-4$ прямых, получаемых отбрасыванием прямых l_i, l_j и l_i, l_j, l_k, l_m.

Для того чтобы доказать, что n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ лежат на одной окружности, достаточно доказать, что любые четыре из них лежат на одной окружности. Докажем это, например, для точек A_1, A_2, A_3 и A_4. Так как точки A_i и A_{ijk} лежат на S_{ij}, то окружности S_{12} и S_{23} пересекаются в точках A_2 и A_{123}, окружности S_{23} и S_{34} — в точках A_3 и A_{234}, окружности S_{34} и S_{41} — в точках A_4 и A_{134}, окружности S_{41} и S_{12} — в точках A_1 и A_{124}. Но точки A_{123}, A_{234}, A_{134} и A_{124} лежат на одной окружности — окружности S_{1234}, поэтому согласно задаче 28.33 точки A_1, A_2, A_3 и A_4 лежат на одной окружности.

Пусть теперь n чётно; S_i, A_{ij}, S_{ijk}, A_{ijkm} — окружности и точки, соответствующие наборам из $n-1$, $n-2$, $n-3$ и $n-4$ прямых. Для того чтобы доказать, что окружности $S_1, S_2, \ldots, S_n$ пересекаются в одной точке, покажем, что это верно для любых трёх из них. (Этого достаточно при $n \geqslant 5$; см. задачу 26.12.) Докажем, например, что S_1, S_2 и S_3 пересекаются в одной точке. По определению точек A_{ij} и окружностей S_i и S_{ijk} точки A_{12}, A_{13} и A_{14} лежат на окружности S_1; A_{12}, A_{23} и A_{24} — на S_2; A_{13}, A_{14} и A_{34} — на S_3; A_{12}, A_{14} и A_{24} — на S_{124}; A_{13}, A_{14}, A_{34} — на S_{134}; A_{23}, A_{24}, A_{34} — на S_{234}. Но три окружности S_{124}, S_{134} и S_{234} проходят через точку A_{1234} поэтому согласно задаче 28.35 и окружности S_1, S_2 и S_3 пересекаются в одной точке.

28.38. а) Обозначим через M_{ij} точку пересечения прямых l_i и l_j. Тогда точка A_1, соответствующая тройке l_2, l_3, l_4, — это точка пересечения описанных окружностей треугольников $M_2M_3M_{23}$ и $M_3M_4M_{34}$. Рассуждая аналогично для точек A_2, A_3 и A_4, мы получим, что точки A_1, A_2, A_3 и A_4 лежат на одной окружности согласно задаче 28.33, так как точки M_1, M_2, M_3, M_4 лежат на одной окружности.

б) Как и в задаче 28.37 б), докажем утверждение по индукции, рассматривая отдельно случаи чётного и нечётного n.

Пусть n чётно и A_i, S_{ij}, A_{ijk} и S_{ijkm} обозначают точки и окружности, соответствующие наборам из $n-1$, $n-2$, $n-3$ и $n-4$ прямых. Докажем, что точки A_1, A_2, A_3, A_4 лежат на одной окружности. По определению точек A_i и A_{ijk} окружности S_{12} и S_{23} пересекаются в точках A_2 и A_{123}; S_{23} и S_{34} — в точках A_3 и A_{234}; S_{34} и S_{41} — в точках A_4 и A_{134}; S_{41} и S_{12} — в точках A_1 и A_{124}. Точки A_{123}, A_{234}, A_{134} и A_{124} лежат на окружности S_{1234}, поэтому согласно задаче 28.33 точки A_1, A_2, A_3, A_4 лежат на одной окружности. Аналогично доказывается, что и любые четыре из точек A_i (и, следовательно, все они) лежат на одной окружности.

Доказательство в случае нечётного $n \geqslant 5$ дословно повторяет доказательство утверждения задачи 28.37 б) для случая чётного n.

28.39. Если окружности R_1 и R_2 пересекаются или касаются, то инверсия с центром в их точке пересечения переведёт окружности $S_1, S_2, \ldots, S_n$ в окружности, касающиеся пары прямых и друг друга в точках $A_1^*, A_2^*, \ldots$ $\ldots, A_{n-1}^*$, лежащих на биссектрисе угла, образованного прямыми R_1^* и R_2^*, если R_1^* и R_2^* пересекаются, и на прямой, параллельной R_1^* и R_2^*, если эти прямые не пересекаются. Применив инверсию ещё раз, получим, что точки $A_1^*, A_2^*, \ldots, A_{n-1}^*$ лежат на одной окружности.

Если же окружности R_1 и R_2 не пересекаются, то согласно задаче 28.6 найдётся инверсия, переводящая их в пару концентрических окружностей. В этом случае точки $A_1^*, A_2^*, \ldots, A_{n-1}^*$ лежат на окружности, концентрической с R_1^* и R_2^*, а значит, точки $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ лежат на одной окружности.

28.40. Сделаем инверсию, переводящую R_1 и R_2 в пару концентрических окружностей. Тогда окружности S_1^*, S_2^*, …, S_n^* и T_1^* равны между собой (рис. 28.12). Повернув цепочку S_1^*, …, S_n^* вокруг центра окружности R_1^* так, чтобы S_1^* перешла в T_1^*, и сделав инверсию ещё раз, получим нужную цепочку T_1, T_2, …, T_n.

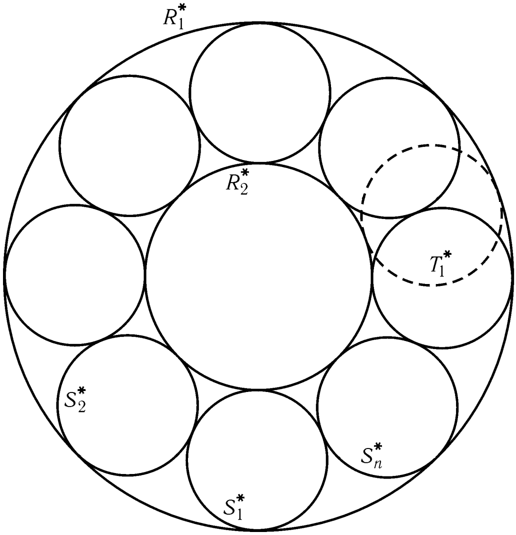


Рис. 28.12

28.41. Центр инверсии, переводящей окружности R_1 и R_2 в концентрические, лежит (см. решение задачи 28.6) на линии их центров. Поэтому, сделав эту инверсию и учтя, что угол между окружностями и касание при этом сохраняется, мы сведём доказательство к случаю концентрических окружностей R_1 и R_2 с центром O и радиусами r_1 и r_2.

Проведём окружность S с центром P радиуса $(r_1 - r_2)/2$, касающуюся R_1 изнутри и R_2 внешне, и две окружности S' и S'' радиуса $(r_1 + r_2)/2$ с центрами A и B, касающиеся R_1 и R_2 в их точках пересечения с прямой OP (рис. 28.13). Пусть OM и ON — касательные к S, проведённые из O. Очевидно, что цепочка из n окружностей, касающихся R_1 и R_2, существует тогда и только тогда, когда угол MON равен $m360^\circ/n$ (в этом случае окружности цепочки m раз обегают окружность R_2). Поэтому осталось доказать,

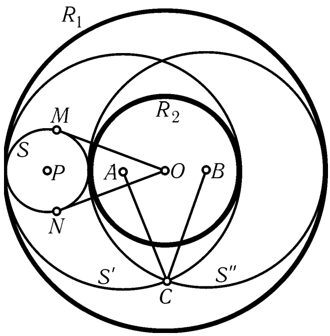


Рис. 28.13

что угол между окружностями S' и S'' равен $\angle MON$. Но угол между S' и S'' равен углу между их радиусами, проведёнными в точку пересечения C. Кроме того, $\triangle ACO = \triangle PON$ (так как $OP = r_1 - (r_1 - r_2)/2 = (r_1 + r_2)/2 = AC$,

$PN = (r_1 - r_2)/2 = r_1 - ((r_1 + r_2)/2) = OA$, $\angle PNO = \angle AOC = 90^\circ$). Поэтому $\angle ACB = 2\angle ACO = 2\angle PON = \angle NOM$.

28.42. Пусть R_1 и R_2 — какая-либо пара несоприкасающихся окружностей. Оставшиеся четыре окружности образуют цепочку, поэтому по предыдущей задаче окружности S' и S'', касающиеся R_1 и R_2 в точках их пересечения с линией центров, пересекаются под прямым углом (рис. 28.14). Если R_2 лежит внутри R_1, то радиусы r' и r'' окружностей S' и S'' равны $(r_1 + r_2 + d)/2$ и $(r_1 + r_2 - d)/2$, а расстояние между их центрами $d' = 2r_1 - r_1 - r_2 = r_1 - r_2$. Угол между S' и S'' равен углу между их радиусами, проведёнными в точку пересечения, поэтому $(d')^2 = (r')^2 + (r'')^2$ или, после преобразований, $d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 6r_1r_2$.

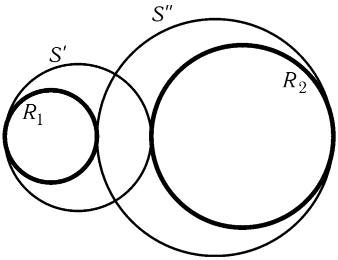


Рис. 28.14

В случае, когда R_1 и R_2 не лежат одна внутри другой, радиусы окружностей S' и S'' равны $(d + (r_1 - r_2))/2$ и $(d - (r_1 - r_2))/2$, а расстояние между центрами $d' = r_1 + r_2 + d - (r_1' + r_2') = r_1 + r_2$. В результате получаем $d^2 = r_1^2 + r_2^2 + 6r_1r_2$.

ГЛАВА 29

АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 1. Аффинные преобразования

Определение. Преобразование плоскости называется *аффинным*, если оно непрерывно, взаимно однозначно и образом любой прямой является прямая.

Замечание. В действительности требование непрерывности здесь излишне: непрерывность следует из взаимной однозначности и того, что преобразование переводит прямые в прямые. По этому поводу см. задачу 29.18.

Частным случаем аффинных преобразований являются движения и преобразования подобия.

Определение. *Растяжением* плоскости относительно оси l с коэффициентом k называется преобразование плоскости, при котором каждая точка M переходит в такую точку M', что $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$, где O — проекция точки M на прямую l. (Растяжение с коэффициентом меньше единицы называется *сжатием*.)

29.1. Докажите, что растяжение плоскости является аффинным преобразованием.

29.2. Докажите, что при аффинном преобразовании параллельные прямые переходят в параллельные.

29.3. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 — образы точек A, B, C, D при аффинном преобразовании. Докажите, что если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{C_1D_1}$.

Из предыдущей задачи вытекает, что мы можем определить образ вектора $\overrightarrow{AB}$ при аффинном отображении L как $\overrightarrow{L(A)L(B)}$, и это определение не будет зависеть от выбора точек A и B.

29.4. Докажите, что если L — аффинное преобразование, то

а) $L(\vec{0}) = \vec{0}$;

б) $L(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = L(\boldsymbol{a}) + L(\boldsymbol{b})$;

в) $L(k\boldsymbol{a}) = kL(\boldsymbol{a})$.

29.5. Пусть A', B', C' — образы точек A, B, C при аффинном преобразовании L. Докажите, что если C делит отрезок AB в отношении $AC : CB = p : q$, то C' делит отрезок $A'B'$ в том же отношении.

29.6. а) Докажите, что существует единственное аффинное преобразование, которое переводит данную точку O в данную точку O', а данный базис векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ — в данный базис $\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$.

б) Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что существует единственное аффинное преобразование, переводящее точку A в A_1, B — в B_1, C — в C_1.

в) Даны два параллелограмма. Докажите, что существует единственное аффинное преобразование, которое один из них переводит в другой.

29.7*. Каждая диагональ выпуклого пятиугольника параллельна одной из его сторон. Докажите, что аффинным преобразованием этот пятиугольник можно перевести в правильный пятиугольник.

29.8*. Докажите, что если при аффинном (не тождественном) преобразовании L каждая точка некоторой прямой l переходит в себя, то все прямые вида $ML(M)$, где в качестве M берутся произвольные точки, не лежащие на прямой l, параллельны друг другу.

29.9*. Докажите, что любое аффинное преобразование можно представить в виде композиции двух растяжений и аффинного преобразования, переводящего любой треугольник в подобный ему треугольник.

29.10*. На плоскости дан многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ и точка O внутри его. Докажите, что равенства

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_3} = 2\cos\frac{2\pi}{n}\overrightarrow{OA_2},$$
$$\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_4} = 2\cos\frac{2\pi}{n}\overrightarrow{OA_3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\overrightarrow{OA_{n-1}} + \overrightarrow{OA_1} = 2\cos\frac{2\pi}{n}\overrightarrow{OA_n}$$

необходимы и достаточны для того, чтобы существовало аффинное преобразование, переводящее данный многоугольник в правильный, а точку O — в его центр.

Многоугольник, который аффинным преобразованием можно перевести в правильный многоугольник, называют *аффинно правильным*.

29.11*. Докажите, что любое аффинное преобразование можно представить в виде композиции растяжения (сжатия) и аффинного преобразования, переводящего любой треугольник в подобный ему треугольник.

29.12*. Докажите, что если аффинное преобразование переводит некоторую окружность в себя, то оно является либо поворотом, либо симметрией.

29.13*. Докажите, что если M' и N' — образы многоугольников M и N при аффинном преобразовании, то отношение площадей M и N равно отношению площадей M' и N'.

29.14*. Докажите, что любой выпуклый четырёхугольник, кроме трапеции, аффинным преобразованием можно перевести в четырёхугольник, у которого противоположные углы прямые.

29.15*. Докажите, что любой выпуклый шестиугольник $ABCDEF$, в котором каждая сторона параллельна противоположной стороне, аффинным преобразованием можно перевести в шестиугольник с равными диагоналями AD, BE и CF.

29.16*. На плоскости даны три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, причём $\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$. Докажите, что эти векторы аффинным преобразованием можно перевести в векторы равной длины тогда и только тогда, когда из отрезков с длинами $|\alpha|$, $|\beta|$, $|\gamma|$ можно составить треугольник.

29.17*. На плоскости даны две прямые, пересекающиеся под острым углом. В направлении одной из прямых производится сжатие с коэффициентом $1/2$. Докажите, что найдётся точка, расстояние от которой до точки пересечения прямых увеличится.

29.18*. Пусть L — взаимно однозначное отображение плоскости в себя. Предположим, что оно обладает следующим свойством: если три точки лежат на одной прямой, то их образы тоже лежат на одной прямой. Докажите, что тогда L — аффинное преобразование.

29.19*. Пусть L — взаимно однозначное отображение плоскости в себя, переводящее любую окружность в некоторую окружность. Докажите, что L — аффинное преобразование.

§ 2. Решение задач при помощи аффинных преобразований

29.20. Через каждую вершину треугольника проведены две прямые, делящие противоположную сторону треугольника на три равные части. Докажите, что диагонали, соединяющие противоположные вершины шестиугольника, образованного этими прямыми, пересекаются в одной точке.

29.21. На сторонах AB, BC и CD параллелограмма $ABCD$ взяты точки K, L и M соответственно, делящие эти стороны в одинаковых отношениях. Пусть b, c, d — прямые, проходящие через B, C, D параллельно прямым KL, KM, ML соответственно. Докажите, что прямые b, c, d проходят через одну точку.

29.22. Дан треугольник ABC. Пусть O — точка пересечения его медиан, а M, N и P — точки сторон AB, BC и CA, делящие эти стороны в одинаковых отношениях (т. е. $AM:MB=BN:NC=CP:PA=p:q$). Докажите, что:

а) O — точка пересечения медиан треугольника MNP;

б) O — точка пересечения медиан треугольника, образованного прямыми AN, BP и CM.

29.23. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC через точку B проведена прямая, параллельная стороне CD и пересекающая диагональ AC в точке P, а через точку C — прямая, параллельная стороне AB и пересекающая диагональ BD в точке Q. Докажите, что прямая PQ параллельна основаниям трапеции.

29.24. В параллелограмме $ABCD$ точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD, DA. На сторонах A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1 четырёхугольника $A_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки A_2, B_2, C_2, D_2. Известно, что

$$\frac{AA_1}{BA_1} = \frac{BB_1}{CB_1} = \frac{CC_1}{DC_1} = \frac{DD_1}{AD_1} = \frac{A_1D_2}{D_1D_2} = \frac{D_1C_2}{C_1C_2} = \frac{C_1B_2}{B_1B_2} = \frac{B_1A_2}{A_1A_2}.$$

Докажите, что $A_2B_2C_2D_2$ — параллелограмм со сторонами, параллельными сторонам $ABCD$.

29.25*. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC даны точки M, N и P соответственно. Докажите:

а) если точки M_1, N_1 и P_1 симметричны точкам M, N и P относительно середин соответствующих сторон, то $S_{MNP} = S_{M_1N_1P_1}$.

б) если M_1, N_1 и P_1 — такие точки сторон AC, BA и CB, что $MM_1 \parallel BC$, $NN_1 \parallel CA$ и $PP_1 \parallel AB$, то $S_{MNP} = S_{M_1N_1P_1}$.

§ 3. Комплексные числа

Комплексным числом называют выражение вида $a + bi$, где a и b — вещественные числа, а i — символ, удовлетворяющий соотношению $i^2 = -1$. Если $z = a + bi$, то числа a и b называют соответственно *вещественной* и *мнимою* частью числа z (обозначение: $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$), а комплексное число $a - bi$ называют числом, *сопряжённым* к числу z (обозначение: $\bar{z}$). Перемножают комплексные числа по обычным правилам раскрытия скобок и приведения подобных членов, заменяя каждый раз i^2 на -1, т. е.

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Каждое вещественное число a можно рассматривать как комплексное число $a + 0i$.

Если на плоскости выбрать систему координат, то можно установить взаимно однозначное соответствие между комплексными числами и точками плоскости, при котором числу $a + bi$ соответствует точка с координатами (a, b). При этом умножение на комплексное число z приобретает следующую геометрическую интерпретацию. Пусть r — расстояние от нуля до z, φ — угол, на который нужно повернуть вокруг нуля луч, содержащий положительные вещественные числа, чтобы получить луч Oz. Тогда умножение на число z — это композиция гомотетии с коэффициентом r (с центром в нуле) и поворота на угол φ. Числа r и φ называют соответственно *модулем* и *аргументом* числа z (обозначение: $r = |z|$, $\varphi = \arg z$). По-другому геометрическую интерпретацию произведения комплексных чисел можно сформулировать так: при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Зная геометрическую интерпретацию комплексных чисел, легко научиться их делить: для этого нужно делить модули и вычитать аргументы.

Деление можно ввести также и чисто алгебраически. Для каждого комплексного числа $z=a+bi$ имеет место очевидное равенство

$$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2=|z|^2.$$

Поэтому $w/z=w\bar{z}/|z|^2$.

Тот факт, что произведение комплексных чисел, с одной стороны, вычисляется чисто алгебраически, а с другой стороны, имеет геометрическую интерпретацию, иногда бывает полезным при решении задач планиметрии. Как правило, решение, использующее комплексные числа, в действительности использует только векторы и поворот. Но иногда комплексные числа позволяют взглянуть на теоремы планиметрии с новой точки зрения и, что гораздо важнее, глубже понять их природу.

Очень простую интерпретацию на языке комплексных чисел имеет инверсия с центром в нуле: она отображает число z в число $R^2/\bar{z}$, где R^2 — степень инверсии.

29.26. Пусть a, b, c, d — комплексные числа, причём углы $a0b$ и $c0d$ равны и противоположно ориентированы. Докажите, что тогда $\operatorname{Im} a\bar{b}c\bar{d}=0$.

Будем говорить, что треугольники ABC и $A'B'C'$ *собственно подобны*, если существует поворотная гомотетия, которая переводит A в A', B в B', C в C'.

29.27. Докажите, что если треугольники abc и $a'b'c'$ на комплексной плоскости собственно подобны, то

$$\frac{b-a}{c-a}=\frac{b'-a'}{c'-a'}.$$

29.28. Докажите, что треугольники abc и $a'b'c'$ собственно подобны, тогда и только тогда, когда

$$a'(b-c)+b'(c-a)+c'(a-b)=0.$$

29.29. Пусть a и b — комплексные числа, лежащие на окружности с центром в нуле, u — точка пересечения касательных к этой окружности в точках a и b. Докажите, что $u=2ab/(a+b)$.

29.30. Пусть a — комплексное число, лежащее на единичной окружности S с центром в нуле, t — вещественное число (точка, лежащая на вещественной оси). Пусть, далее, b — отличная от a точка пересечения прямой at с окружностью S. Докажите, что $\bar{b}=(1-ta)/(t-a)$.

29.31. Пусть a, b и c — комплексные числа, лежащие на единичной окружности с центром в нуле. Докажите, что комплексное число $\frac{1}{2}(a+b+c-\bar{a}bc)$ соответствует основанию высоты, опущенной из вершины a на сторону bc.

29.32. Докажите, что прямая, проходящая через точки a_1 и a_2, задаётся уравнением

$$z(\overline{a_1}-\overline{a_2})-\bar{z}(a_1-a_2)+(a_1\overline{a_2}-\overline{a_1}a_2)=0.$$

29.33. а) Докажите, что все окружности и прямые задаются уравнениями вида
$$Az\bar{z} + cz + \bar{c}\bar{z} + D = 0,$$
где A и D — вещественные числа, а c — комплексное число. Наоборот, докажите, что любое уравнение такого вида задаёт либо окружность, либо прямую, либо точку, либо пустое множество.

б) Докажите, что при инверсии окружности и прямые переходят в окружности и прямые.

29.34. а) Пусть $\varepsilon = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$. Докажите, что точки a, b, c являются вершинами правильного треугольника тогда и только тогда, когда $a + \varepsilon^2 b + \varepsilon^4 c = 0$ или $a + \varepsilon^4 b + \varepsilon^2 c = 0$.

б) Докажите, что точки a, b, c являются вершинами правильного треугольника тогда и только тогда, когда $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$.

29.35. Пусть точки A^*, B^*, C^*, D^* являются образами точек A, B, C, D при инверсии. Докажите, что:

а) $\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{A^*C^*}{A^*D^*} : \frac{B^*C^*}{B^*D^*}$;

б) $\angle(DA, AC) - \angle(DB, BC) = \angle(D^*B^*, B^*C^*) - \angle(D^*A^*, A^*C^*)$.

29.36. а) Докажите, что точки, соответствующие комплексным числам a, b, c, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда число $\frac{a-b}{a-c}$, называемое *простым отношением* трёх комплексных чисел, вещественно.

б) Докажите, что точки, соответствующие комплексным числам a, b, c, d, лежат на одной окружности (или на одной прямой) тогда и только тогда, когда число $\frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d}$, называемое *двойным отношением* четырёх комплексных чисел, вещественно.

29.37*. а) Докажите, что если A, B, C и D — произвольные точки плоскости, то $AB \cdot CD + BC \cdot AD \geqslant AC \cdot BD$ (*неравенство Птолемея*).

б) Докажите, что если $A_1, A_2, \ldots, A_6$ — произвольные точки плоскости, то
$$A_1A_4 \cdot A_2A_5 \cdot A_3A_6 \leqslant A_1A_2 \cdot A_3A_6 \cdot A_4A_5 + A_1A_2 \cdot A_3A_4 \cdot A_5A_6 + \\ + A_2A_3 \cdot A_1A_4 \cdot A_5A_6 + A_2A_3 \cdot A_4A_5 \cdot A_1A_6 + A_3A_4 \cdot A_2A_5 \cdot A_1A_6.$$

в) Докажите, что (нестрогое) неравенство Птолемея обращается в равенство тогда и только тогда, когда $ABCD$ — (выпуклый) вписанный четырёхугольник.

г) Докажите, что неравенство из задачи б) обращается в равенство тогда и только тогда, когда $A_1 \ldots A_6$ — вписанный шестиугольник.

29.38*. Докажите, что если a, b, c и d — длины последовательных сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$, а m и n — длины его диагоналей, то $m^2n^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(A + C)$ (Бретшнейдер).

29.39*. Даны треугольник ABC и прямая l, проходящая через центр O вписанной окружности. Обозначим через A_1 (соответственно B_1, C_1) основание перпендикуляра, опущенного на прямую l из точки A (соответственно B, C), а через A_2 (соответственно B_2, C_2) обозначим точку вписанной окружности, диаметрально противоположную точке касания со стороной BC (соответственно CA, AB). Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, пересекаются в одной точке, и эта точка лежит на вписанной окружности.

29.40*. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ прямая Симсона точки A относительно треугольника BCD перпендикулярна прямой Эйлера треугольника BCD. Докажите, что прямая Симсона точки B относительно треугольника ACD перпендикулярна прямой Эйлера треугольника ACD.

29.41*. а) Даны точка X и треугольник ABC. Докажите, что

$$\frac{XB}{b} \cdot \frac{XC}{c} + \frac{XC}{c} \cdot \frac{XA}{a} + \frac{XA}{a} \cdot \frac{XB}{b} \geqslant 1,$$

где a, b, c — длины сторон треугольника.

б) На сторонах BC, CA, AB взяты точки A_1, B_1, C_1. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника ABC, a_1, b_1, c_1 — длины сторон треугольника $A_1B_1C_1$, S — площадь треугольника ABC. Докажите, что

$$4S^2 \leqslant a^2b_1c_1 + b^2a_1c_1 + c^2a_1b_1.$$

29.42*. Дан неравносторонний треугольник ABC. Точки A_1, B_1 и C_1 выбраны так, что треугольники BA_1C, CB_1A и AC_1B собственно подобны. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ равносторонний тогда и только тогда, когда указанные подобные треугольники являются равнобедренными треугольниками с углом 120° при вершинах A_1, B_1 и C_1.

29.43*. На сторонах аффинно правильного многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ с центром O внешним образом построены квадраты $A_{j+1}A_jB_jC_{j+1}$ ($j = 1, \ldots, n$). Докажите, что отрезки B_jC_j и OA_j перпендикулярны, а их отношение равно $2(1 - \cos(2\pi/n))$.

29.44*. На сторонах выпуклого n-угольника внешним образом построены правильные n-угольники. Докажите, что их центры образуют правильный n-угольник тогда и только тогда, когда исходный n-угольник аффинно правильный.

29.45*. Вершины треугольника соответствуют комплексным числам a, b и c, лежащим на единичной окружности с центром в нуле. Докажите, что если точки z и w изогонально сопряжены, то $z + w + abc\bar{z}\bar{w} = a + b + c$ (Морли).

29.46*. Точки Z и W изогонально сопряжены относительно правильного треугольника. При инверсии относительно описанной окружности точки Z и W переходят в Z^* и W^*. Докажите, что середина отрезка Z^*W^* лежит на вписанной окружности.

29.47*. Точки Z и W изогонально сопряжены относительно правильного треугольника ABC с центром O; M — середина отрезка ZW. Докажите, что $\angle AOZ + \angle AOW + \angle AOM = n\pi$ (углы ориентированы).

См. также задачи 31.43, 31.61, 31.70.

§ 4. Эллипсы Штейнера

Согласно задаче 29.6 б) для данного треугольника ABC существует единственное аффинное преобразование, которое переводит правильный треугольник в данный треугольник. Образ вписанной окружности правильного треугольника при таком преобразовании называют *вписанным эллипсом Штейнера*, а образ описанной окружности — *описанным эллипсом Штейнера*.

Вписанный эллипс Штейнера имеет наибольшую площадь среди всех эллипсов, вписанных в данный треугольник, а описанный — наименьшую среди всех описанных. Это легко доказывается, если перевести эллипс в окружность аффинным преобразованием и воспользоваться тем, что при аффинном преобразовании сохраняется отношение площадей.

29.48*. Найдите уравнения эллипсов Штейнера в барицентрических координатах.

Точкой Штейнера называют точку пересечения описанного эллипса Штейнера с описанной окружностью треугольника, отличную от вершин треугольника.

29.49*. Найдите барицентрические координаты точки Штейнера.

З а м е ч а н и е. Отметим без доказательства, что касательная в точке касания вписанной окружности и окружности девяти точек касается также и вписанного эллипса Штейнера. То же самое верно и для вневписанных окружностей.

Решения

29.1. Нам надо доказать, что если A', B', C' — образы точек A, B, C при растяжении относительно прямой l с коэффициентом k и точка C лежит на прямой AB, то точка C' лежит на прямой $A'B'$. Пусть $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$. Обозначим через A_1, B_1, C_1 проекции точек A, B, C на прямую l, и пусть $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{A_1A}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{B_1B}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{C_1C}$, $\boldsymbol{a}' = \overrightarrow{A_1A'}$, $\boldsymbol{b}' = \overrightarrow{B_1B'}$, $\boldsymbol{c}' = \overrightarrow{C_1C'}$, $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{A_1B_1}$, $\boldsymbol{y} = \overrightarrow{A_1C_1}$. Из того, что при проекции на прямую l сохраняется отношение длин пропорциональных векторов, следует, что $\boldsymbol{y} = t\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y} + (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}) = t(\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}))$. Вычитая первое равенство из второго, получаем $(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}) = t(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$. По определению растяжения $\boldsymbol{a}' = k\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}' = k\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}' = k\boldsymbol{c}$, поэтому $\overrightarrow{A'C'} = \boldsymbol{y} + k(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}) = t\boldsymbol{x} + k(t(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})) = t(\boldsymbol{x} + k(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})) = t\overrightarrow{A'B'}$.

29.2. По определению образы прямых — прямые, а из взаимной однозначности аффинного преобразования следует, что образы непересекающихся прямых не пересекаются.

29.3. Пусть $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Рассмотрим сначала случай, когда точки A, B, C, D не лежат на одной прямой. Тогда $ABDC$ — параллелограмм. Из предыдущей задачи следует, что $A_1B_1D_1C_1$ — тоже параллелограмм, поэтому $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{C_1D_1}$.

Пусть теперь точки A, B, C, D лежат на одной прямой. Возьмём такие точки E и F, не лежащие на этой прямой, что $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}$. Пусть E_1 и F_1 — их образы. Тогда $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{E_1F_1}=\overrightarrow{C_1D_1}$.

29.4. а) $L(\vec{0})=L(\overrightarrow{AA})=\overrightarrow{L(A)L(A)}=\vec{0}$.

б) $L(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=L(\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{L(A)L(C)}=\overrightarrow{L(A)L(B)}+\overrightarrow{L(B)L(C)}=L(\overrightarrow{AB})+L(\overrightarrow{BC})$.

в) Предположим сначала, что число k натуральное. Тогда

$$L(k\boldsymbol{a})=L(\underbrace{\boldsymbol{a}+\ldots+\boldsymbol{a}}_{k})=\underbrace{L(\boldsymbol{a})+\ldots+L(\boldsymbol{a})}_{k}=kL(\boldsymbol{a}).$$

и $L(k\boldsymbol{a})+L(-k\boldsymbol{a})=L(k\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{a})=L(\vec{0})=\vec{0}$, поэтому $L(-k\boldsymbol{a})=-L(k\boldsymbol{a})=-kL(\boldsymbol{a})$.

Пусть теперь $k=m/n$ — рациональное число. Тогда $nL(k\boldsymbol{a})=L(nk\boldsymbol{a})=$ $=L(m\boldsymbol{a})=mL(\boldsymbol{a})$, поэтому $L(k\boldsymbol{a})=mL(\boldsymbol{a})/n=kL(\boldsymbol{a})$. Наконец, если k — любое действительное число, то всегда найдётся последовательность k_n рациональных чисел, сходящаяся к k (например, последовательность десятичных приближений k). Поскольку L непрерывно, то

$$L(k\boldsymbol{a})=L(\lim_{n\to\infty}k_n\boldsymbol{a})=\lim_{n\to\infty}k_nL(\boldsymbol{a})=kL(\boldsymbol{a}).$$

29.5. В силу задачи 29.4 в) из условия $q\overrightarrow{AC}=p\overrightarrow{CB}$ следует, что $q\overrightarrow{A'C'}=$ $=qL(\overrightarrow{AC})=L(q\overrightarrow{AC})=L(p\overrightarrow{CB})=pL(\overrightarrow{CB})=p\overrightarrow{C'B'}$.

29.6. а) Зададим отображение L следующим образом. Пусть X — произвольная точка. Поскольку $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ — базис, существуют однозначно определённые числа x_1 и x_2 такие, что $\overrightarrow{OX}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2$. Поставим в соответствие точке X такую точку $X'=L(X)$, что $\overrightarrow{O'X'}=x_1\boldsymbol{e}_1'+x_2\boldsymbol{e}_2'$. Так как $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$ — тоже базис, полученное отображение взаимно однозначно. (Обратное отображение строится аналогично.) Докажем, что любая прямая AB при отображении L переходит в прямую. Пусть $A'=L(A)$, $B'=L(B)$ и a_1, a_2, b_1, b_2 — координаты точек A и B в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, т. е. такие числа, что $\overrightarrow{OA}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2$, $\overrightarrow{OB}=b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2$. Рассмотрим произвольную точку C прямой AB. Тогда $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ при некотором k, т. е. $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=((1-k)a_1+kb_1)\boldsymbol{e}_1+((1-k)a_2+kb_2)\boldsymbol{e}_2$. Следовательно, если $C'=L(C)$, то $\overrightarrow{O'C'}=((1-k)a_1+kb_1)\boldsymbol{e}_1'+((1-k)a_2+kb_2)\boldsymbol{e}_2'=$ $=\overrightarrow{O'A'}+k(\overrightarrow{O'B'}-\overrightarrow{O'A'})$, т. е. точка C' лежит на прямой $A'B'$.

Единственность отображения L следует из результата задачи 29.4. В самом деле, $L(\overrightarrow{OX})=x_1L(\boldsymbol{e}_1)+x_2L(\boldsymbol{e}_2)$, т. е. образ точки X однозначно определяется образами векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и точки O.

б) Для доказательства можно воспользоваться предыдущей задачей, положив $O=A$, $\boldsymbol{e}_1=\overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{e}_2=\overrightarrow{AC}$, $O'=A_1$, $\boldsymbol{e}_1'=\overrightarrow{A_1B_1}$, $\boldsymbol{e}_2'=\overrightarrow{A_1C_1}$.

в) Следует из задачи б) и из того, что параллельные прямые переходят в параллельные.

29.7. Пусть $ABCDE$ — правильный пятиугольник. Согласно задаче 29.6 б) существует аффинное преобразование, которое три последовательные вершины данного пятиугольника переводит в точки A, B, C. Пусть D' и E' — образы остальных двух вершин при этом преобразовании. Докажем, что они совпадают с D и E.

С одной стороны, $AD' \parallel BC$ и $CE' \parallel AB$, поэтому точка D' лежит на прямой AD, а точка E' — на прямой CE. С другой стороны, $E'D' \parallel AC \parallel ED$, поэтому если бы точки D' и E' не совпадали с точками D и E, то либо они обе были бы вне полосы, ограниченной прямыми AE и BD (рис. 29.1, *а*), либо обе внутри этой полосы (рис. 29.1, *б*). В обоих случаях прямые AE' и BD' не были бы параллельны.

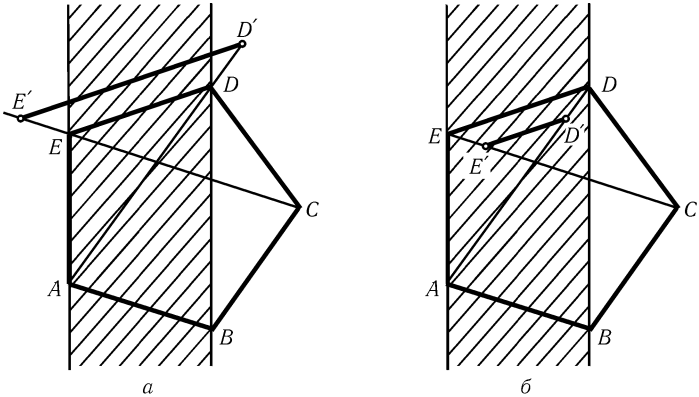


Рис. 29.1

29.8. Пусть M и N — произвольные точки, не лежащие на прямой l. Обозначим через M_0 и N_0 их проекции на прямую l, а через M' и N' — образы точек M и N при отображении L. Прямые M_0M и N_0N параллельны, так как они обе перпендикулярны l, т.е. существует такое число k, что $\overrightarrow{M_0M} = k\overrightarrow{N_0N}$. Тогда согласно задаче 29.4 в) $\overrightarrow{M_0M'} = k\overrightarrow{N_0N'}$. Поэтому образ треугольника M_0MM' при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{M_0N_0}$ гомотетичен с коэффициентом k треугольнику N_0NN', следовательно, прямые MM' и NN' параллельны.

29.9. Пусть ABC — произвольный треугольник, BN — биссектриса внешнего угла B, прилежащего к стороне BC. Тогда при растяжении относительно BN с коэффициентом $\operatorname{tg} 45^\circ / \operatorname{tg} \angle CBN$ из треугольника ABC получается треугольник $A'B'C'$ с прямым углом B'. Из прямоугольного треугольника $A'B'C'$ при помощи растяжения относительно одного из его катетов всегда можно получить равнобедренный прямоугольный треугольник $A''B''C''$.

Выберем в качестве ABC треугольник, который при данном аффинном преобразовании переходит в равнобедренный треугольник $A_1B_1C_1$ с прямым углом B_1. Равнобедренный прямоугольный треугольник $A''B''C''$, полученный из треугольника ABC композицией двух растяжений, можно перевести в треугольник $A_1B_1C_1$ аффинным преобразованием, которое переводит любой треугольник в подобный ему треугольник. В результате мы получим требуемое представление данного аффинного преобразования, поскольку согласно задаче 29.6 б) аффинное преобразование, переводящее треугольник ABC в треугольник $A_1B_1C_1$, единственно.

29.10. Докажем сначала, что если $A_1A_2 \dots A_n$ — правильный многоугольник, вписанный в единичную окружность, а O — его центр, то указанные в условии задачи равенства выполняются, т.е.

$$\overrightarrow{OA_{i-1}} + \overrightarrow{OA_{i+1}} = 2k\overrightarrow{OA_i}, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{1}$$

(мы считаем, что $A_0 = A_n$ и $A_{n+1} = A_1$; через k обозначено число $\cos(2\pi/n)$). Для этого при каждом фиксированном i выберем на плоскости систему координат с центром в точке O и осью Ox, направленной вдоль луча OA_i. Тогда точки A_{i-1}, A_i и A_{i+1} имеют координаты $\big(k, -\sin(2\pi/n)\big)$, $(1, 0)$ и $\big(k, \sin(2\pi/n)\big)$ соответственно. Равенство (1) при данном i теперь легко проверяется.

В силу задачи 29.4 равенства (1) выполняются также для образа правильного n-угольника при аффинном преобразовании.

Наоборот, пусть для многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ и точки O внутри его выполнены равенства (1). Возьмём правильный многоугольник $B_1B_2\ldots B_n$ с центром O и рассмотрим аффинное преобразование L, которое переводит треугольник OB_1B_2 в треугольник OA_1A_2. Докажем индукцией по i, что $L(B_i) = A_i$ для всех $i \geqslant 2$. При $i = 2$ это утверждение следует из определения отображения L. Предположим, что мы его доказали для всех чисел, не превосходящих i, и докажем для $i + 1$. Так как для правильных многоугольников равенства (1) уже доказаны, а для многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ они выполнены по предположению, то

$$\overrightarrow{OA_{i+1}} = 2k\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OA_{i-1}} = 2kL(\overrightarrow{OB_i}) - L(\overrightarrow{OB_{i-1}}) = L(2k\overrightarrow{OB_i} - \overrightarrow{OB_{i-1}}) = L(\overrightarrow{OB_{i+1}}).$$

29.11. Пусть L — данное аффинное преобразование, O — произвольная точка, T — сдвиг на вектор $\overrightarrow{L(O)O}$, и пусть $L_1 = T \circ L$. Тогда O — неподвижная точка преобразования L_1. Среди всех точек единичной окружности с центром O выберем точку A, для которой максимальна длина вектора $L(\overrightarrow{OA})$. Пусть H — поворотная гомотетия с центром O, которая точку $L_1(A)$ переводит в точку A, и пусть $L_2 = H \circ L_1 = H \circ T \circ L$. Тогда L_2 — аффинное преобразование, которое оставляет на месте точки O и A, а значит, согласно задаче 29.4 в), и все остальные точки прямой OA, причём, в силу выбора точки A, для всех точек M имеем неравенство $|\overrightarrow{OM}| \geqslant |L(\overrightarrow{OM})|$.

Докажем (и из этого будет следовать утверждение задачи), что L_2 — сжатие относительно прямой OA. Если преобразование L_2 тождественно, то оно является сжатием с коэффициентом 1, поэтому будем считать, что L_2 не тождественно. Согласно задаче 29.8 все прямые вида $ML_2(M)$, где M — произвольная точка, не лежащая на прямой OA, друг другу параллельны. Пусть $\overrightarrow{OB}$ — единичный вектор, перпендикулярный всем этим прямым. Тогда B — неподвижная точка преобразования L_2, так как иначе было бы

$$|\overrightarrow{OL_2(B)}| = \sqrt{OB^2 + BL_2(B)^2} > |OB|.$$

Если B не лежит на прямой OA, то согласно задаче 29.6 б) преобразование L_2 тождественно. Если B лежит на прямой OA, то все прямые вида $ML_2(M)$ перпендикулярны неподвижной прямой преобразования L_2. При помощи задачи 29.4 в) несложно показать, что отображение, обладающее этим свойством, является растяжением или сжатием.

29.12. Докажем сначала, что аффинное преобразование L, переводящее данную окружность в себя, переводит диаметрально противоположные точки в диаметрально противоположные. Для этого заметим, что касательная к окружности в точке A переходит в прямую, которая в силу взаимной однозначности преобразования L пересекается с окружностью в единственной точке $L(A)$, т. е. является касательной в точке $L(A)$. Поэтому если касательные в точках A и B параллельны (т. е. AB — диаметр), то касательные в точках $L(A)$ и $L(B)$ тоже параллельны, т. е. $L(A)L(B)$ — тоже диаметр.

Фиксируем какой-нибудь диаметр AB данной окружности. Поскольку $L(A)L(B)$ — тоже диаметр, то существует движение P, являющееся поворотом или симметрией, которое переводит A и B в $L(A)$ и $L(B)$, а каждую из дуг α и β, на которые точки A и B делят данную окружность, — в образ этой дуги при отображении L.

Докажем, что отображение $F = P^{-1} \circ L$ является тождественным. В самом деле, $F(A) = A$ и $F(B) = B$, следовательно, все точки прямой AB остаются неподвижными. Поэтому если X — произвольная точка окружности, то касательная в точке X пересекает прямую AB там же, где и касательная в точке $X' = F(X)$, так как точка пересечения остаётся неподвижной. А поскольку X и X' лежат на одной и той же из двух дуг α или β, то точка X совпадает с точкой X'. Итак, $P^{-1} \circ L$ — тождественное преобразование, т. е. $L = P$.

29.13. Пусть a_1 и a_2 — какие-нибудь две перпендикулярные прямые. Поскольку аффинное преобразование сохраняет отношение длин параллельных отрезков, то длины всех отрезков, параллельных одной прямой, умножаются на один и тот же коэффициент. Обозначим через k_1 и k_2 эти коэффициенты для прямых a_1 и a_2. Пусть φ — угол между образами этих прямых. Докажем, что данное аффинное преобразование изменяет площади всех многоугольников в k раз, где $k = k_1 k_2 \sin\varphi$.

Для прямоугольника со сторонами, параллельными a_1 и a_2, а также для прямоугольного треугольника с катетами, параллельными a_1 и a_2, это утверждение очевидно. Любой другой треугольник можно получить, отрезав от прямоугольника со сторонами, параллельными a_1 и a_2, несколько прямоугольных треугольников с катетами, параллельными a_1 и a_2 (рис. 29.2),

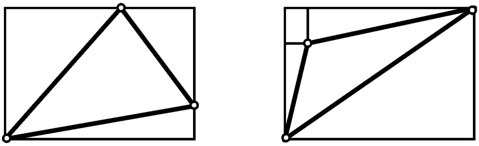


Рис. 29.2

и, наконец, согласно задаче 22.43, любой многоугольник можно разрезать на треугольники.

29.14. Случаи трапеции и параллелограмма легко разбираются, поэтому будем предполагать, что у выпуклого четырёхугольника $ABCD$ нет параллельных сторон. Для определённости будем считать, что пересекаются лучи AB и DC, BC и AD. Пусть $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{CD} = p\boldsymbol{a} + q\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{DA} = u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$. Тогда $p < 0$, $q > 0$, $u < 0$, $v < 0$.

Рассмотрим аффинное преобразование, которое переводит векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в ортогональные векторы $\boldsymbol{a}'$ и $\boldsymbol{b}'$, длины которых равны λ и μ. Нам нужно, чтобы обращалось в нуль скалярное произведение $(p\boldsymbol{a}' + q\boldsymbol{b}', u\boldsymbol{a}' + v\boldsymbol{b}') = pu\lambda^2 + qv\mu^2$. Поскольку $pu > 0$ и $qv < 0$, этого всегда можно добиться выбором чисел λ и μ.

Отметим, что при любом аффинном преобразовании образ угла при вершине C больше образа угла при вершине A; эти углы нельзя сделать равными.

29.15. Пусть $A_1, B_1, \ldots, F_1$ — середины сторон $AB, BC, \ldots, FA$. Равенство диагоналей AD и BE эквивалентно тому, что прямая A_1D_1 перпендикулярна прямым AB и DE. Пусть O — точка пересечения прямых A_1D_1 и B_1E_1. Нужно построить аффинное преобразование, которое переводит углы A_1 и B_1 четырёхугольника A_1BB_1O в прямые углы. Для этого можно воспользоваться результатом задачи 29.14. То, что точки пересечения продолжений сторон четырёхугольника A_1BB_1O расположены именно так, как нужно, следует из выпуклости шестиугольника.

29.16. Предположим, что существует аффинное преобразование, переводящее векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ в векторы $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$, $\boldsymbol{c}'$ равной длины. Из равенства $\alpha\boldsymbol{a}' + \beta\boldsymbol{b}' + \gamma\boldsymbol{c}' = 0$ следует, что из отрезков длины $|\alpha|$, $|\beta|$, $|\gamma|$ можно составить треугольник.

Предположим теперь, что из отрезков длины $|\alpha|$, $|\beta|$, $|\gamma|$ можно составить треугольник. Тогда $\alpha\boldsymbol{a}' + \beta\boldsymbol{b}' + \gamma\boldsymbol{c}' = \boldsymbol{0}$ для некоторых векторов $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$, $\boldsymbol{c}'$ единичной длины. Рассмотрим аффинное преобразование, переводящее векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в $\boldsymbol{a}'$ и $\boldsymbol{b}'$. Из равенств $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ и $\alpha\boldsymbol{a}' + \beta\boldsymbol{b}' + \gamma\boldsymbol{c}' = \boldsymbol{0}$ следует, что рассматриваемое аффинное преобразование переводит вектор $\boldsymbol{c}$ в $\boldsymbol{c}'$ (предполагается, что $\gamma \neq 0$).

29.17. Пусть e_1 и e_2 — векторы единичной длины на данных прямых l_1 и l_2. Сжатие с коэффициентом $1/2$ в направлении прямой l_1 переводит вектор $\lambda e_1 + \mu e_2$ в вектор $\lambda e_1 + \frac{\mu}{2}e_2$. Пусть φ — угол между векторами e_1 и e_2. Длина первого вектора равна $\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu\cos\varphi$, а длина второго вектора равна $\lambda^2 + \frac{\mu^2}{4} + \lambda\mu\cos\varphi$. Нужно выбрать числа λ и μ так, что $\lambda^2 + \frac{\mu^2}{4} + \lambda\mu\cos\varphi > \lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu\cos\varphi$, т. е. $\frac{3}{4}\mu^2 < -\lambda\mu\cos\varphi$. При $\mu = 1$ это неравенство эквивалентно неравенству $\frac{3}{4} < -\lambda\cos\varphi$.

29.18. Прежде всего заметим, что преобразование L взаимно однозначно отображает любую прямую на некоторую прямую. Действительно, пусть A_1 и B_1 — образы двух различных точек A и B. Тогда образ любой точки прямой AB лежит на прямой A_1B_1. Остаётся доказать, что если C_1 — точка прямой A_1B_1, то её прообраз C лежит на прямой AB. Предположим, что точка C не лежит на прямой AB. Тогда прямые AC и BC различны, а их образы лежат на прямой A_1B_1. Пусть X — произвольная точка плоскости. Проведём через X прямую, пересекающую прямые AC и BC в различных точках A' и B'. Образы точек A' и B' лежат на прямой A_1B_1, поэтому образ точки X тоже лежит на прямой A_1B_1. Это противоречит тому, что образом отображения L служит вся плоскость.

Итак, пусть L — взаимно однозначное отображение плоскости в себя, переводящее любую прямую в некоторую прямую. Будем последовательно доказывать свойства этого отображения, используя каждый раз то, что было доказано на предыдущих шагах. Доказательство первых 5 шагов уже приведено в решениях задач 29.2—29.4. Убедитесь самостоятельно, что там нигде не требуется непрерывность.

Шаг 1. Отображение L переводит параллельные прямые в параллельные прямые.

Шаг 2. Корректно определено действие L на векторах, т. е. если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{C_1D_1}$, где A_1, B_1, C_1, D_1 — образы точек A, B, C, D.

Шаг 3. $L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Шаг 4. $L(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = L(\boldsymbol{a}) + L(\boldsymbol{b})$.

Шаг 5. $L(k\boldsymbol{a}) = kL(\boldsymbol{a})$ при рациональном k.

Для непрерывного отображения L решение задачи было бы завершено, поскольку любое действительное число k можно приблизить рациональными числами. Но если не требовать непрерывности отображения L, то самая трудная часть доказательства только начинается.

Пусть $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$ — базисные векторы. При отображении L они переходят в векторы $\boldsymbol{a}_1 = \overrightarrow{O_1A_1}$ и $\boldsymbol{b}_1 = \overrightarrow{O_1B_1}$. Возьмём на прямых OA и OB точки X и Y, соответственно. Они переходят в точки X_1 и Y_1, лежащие на прямых O_1A_1 и O_1B_1, соответственно. Это означает, что $L(x\boldsymbol{a}) = \varphi(x)\boldsymbol{a}_1$ и $L(y\boldsymbol{b}) = \psi(y)\boldsymbol{b}_1$, где φ и ψ — некоторые взаимно однозначные отображения множества действительных чисел в себя.

Шаг 6. $\varphi(t) = \psi(t)$.

В самом деле, если $\overrightarrow{OX} = t\,\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OY} = t\,\overrightarrow{OB}$, то прямые XY и AB параллельны, а значит, прямые X_1Y_1 и A_1B_1 тоже параллельны, т. е. $\varphi(t) = \psi(t)$.

Мы доказали, что $L(x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}) = \varphi(x)\boldsymbol{a}_1 + \varphi(y)\boldsymbol{b}_1$. Остаётся доказать, что $\varphi(x) = x$ для всех действительных x. Напомним, что $\varphi(x) = x$ при рациональных x согласно шагу 5. Поэтому достаточно доказать, что если $x < y$, то $\varphi(x) < \varphi(y)$.

Шаг 7. $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ при всех действительных x, y.

Рассмотрим пропорциональные векторы $x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}$ и $\dfrac{x}{y}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$. Их образы $\varphi(x)\boldsymbol{a}_1 + \varphi(y)\boldsymbol{b}_1$ и $\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1$ тоже пропорциональны, поэтому $\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(y)}$. В частности,

$$\varphi\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{\varphi(1)}{\varphi(y)} = \frac{1}{\varphi(y)} \qquad \text{и} \qquad \varphi\left(\frac{x}{1/y}\right) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(1/y)} = \varphi(x)\varphi(y).$$

Шаг 8. Если $x < y$, то $\varphi(x) < \varphi(y)$.

Согласно шагу 4 получаем $\varphi(y) = \varphi(y - x + x) = \varphi(y - x) + \varphi(x)$. Поэтому достаточно проверить, что если $t = y - x > 0$, то $\varphi(t) > 0$. Положительное число t можно представить в виде $t = s^2$, где s — некоторое действительное число, поэтому $\varphi(t) = \varphi(s)^2 > 0$.

29.19. Воспользуемся задачей 29.18. Преобразование L^{-1} переводит любые три точки $L(A)$, $L(B)$, $L(C)$, лежащие на одной прямой, в три точки A, B, C, лежащие на одной прямой. Действительно, если точки A, B, C не лежат на одной прямой, то они попарно различны и через них можно провести окружность. Поэтому точки $L(A)$, $L(B)$, $L(C)$ попарно различны и лежат на одной окружности. Следовательно, эти точки не лежат на одной прямой. Таким образом, преобразование L^{-1} аффинное, а значит, преобразование L тоже аффинное.

29.20. Поскольку аффинным преобразованием любой треугольник переводится в правильный (задача 29.6 б) и при этом сохраняются отношения длин параллельных отрезков (задача 29.5), достаточно доказать утверждение задачи для правильного треугольника ABC. Пусть точки A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 делят стороны треугольника на равные части, а A', B', C' — середины сторон (рис. 29.3). При симметрии относительно AA' прямая BB_1 перейдёт в CC_2,

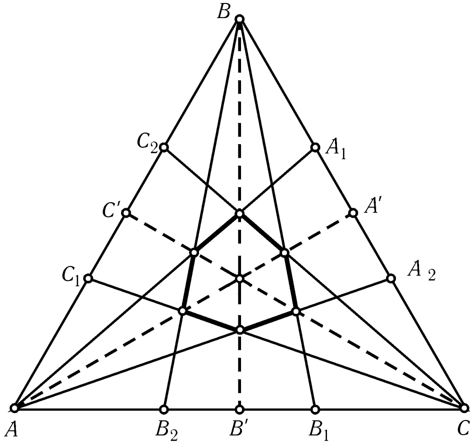


Рис. 29.3

а прямая BB_2 — в CC_1. Поскольку симметричные прямые пересекаются на оси симметрии, AA' содержит диагональ рассматриваемого шестиугольника. Аналогично оставшиеся диагонали лежат на BB' и CC'. Ясно, что медианы AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.

29.21. Согласно задаче 29.6 в) любой параллелограмм аффинным преобразованием можно перевести в квадрат. Поскольку при этом сохраняются отношения длин параллельных отрезков (задача 29.5), достаточно доказать утверждение задачи в случае, когда $ABCD$ — квадрат. Обозначим через P точку пересечения прямых b и d. Нам достаточно доказать, что $PC \parallel MK$. Отрезок KL переходит в LM при повороте на 90° вокруг центра квадрата $ABCD$, поэтому прямые b и d, которые соответственно параллельны этим отрезкам, перпендикулярны; значит, P лежит на окружности, описанной вокруг $ABCD$. Тогда $\angle CPD = \angle CBD = 45^\circ$, следовательно, угол между прямыми CP и b равен 45°, но угол между прямыми MK и KL тоже равен 45°, и $b \parallel KL$, следовательно, $CP \parallel MK$.

29.22. а) Рассмотрим аффинное преобразование, переводящее треугольник ABC в правильный треугольник $A'B'C'$. Пусть O', M', N', P' — образы точек O, M, N, P. При повороте на 120° вокруг точки O' треугольник $M'N'P'$ переходит в себя, поэтому этот треугольник правильный и O' — точка пересечения его медиан. Поскольку при аффинном преобразовании медиана переходит в медиану, O — точка пересечения медиан треугольника MNP.

б) Решение аналогично решению предыдущей задачи.

29.23. Рассмотрим аффинное преобразование, переводящее $ABCD$ в равнобедренную трапецию $A'B'C'D'$. В качестве такого преобразования можно взять аффинное преобразование, переводящее треугольник ADE в равнобедренный треугольник (E — точка пересечения прямых AB и CD). Тогда при симметрии относительно серединного перпендикуляра к $A'D'$ точка P' переходит в точку Q', поэтому прямые $P'Q'$ и $A'D'$ параллельны.

29.24. Любой параллелограмм $ABCD$ аффинным преобразованием можно перевести в квадрат (для этого нужно треугольник ABC перевести в равнобедренный прямоугольный треугольник). Поскольку в задаче идёт речь только о параллельности прямых и об отношениях отрезков, лежащих на одной прямой, можно считать, что $ABCD$ — квадрат. Рассмотрим поворот на 90°, переводящий $ABCD$ в себя. При этом повороте четырёхугольники $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ тоже переходят в себя, следовательно, они тоже являются квадратами. При этом $\operatorname{tg} BA_1B_1 = BB_1 : BA_1 = A_1D_2 : A_1A_2 = \operatorname{tg} A_1A_2D_2$, т. е. $AB \parallel A_2D_2$ (рис. 29.4).

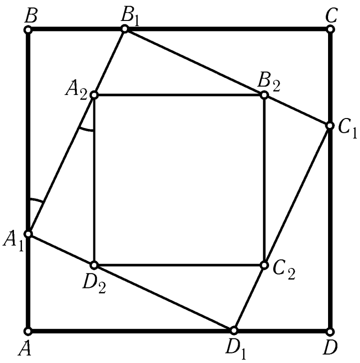


Рис. 29.4

29.25. а) Поскольку любой треугольник аффинным преобразованием переводится в правильный и при этом середины сторон переходят в середины сторон, центрально симметричные точки — в центрально симметричные, а равновеликие треугольники — в равновеликие треугольники (задача 29.13), то будем считать, что треугольник ABC равносторонний со стороной a. Обозначим длины отрезков AM, BN, CP через p, q, r соответственно. Тогда

$$S_{ABC} - S_{MNP} = S_{AMP} + S_{BMN} + S_{CNP} = \sin 60^\circ (p(a-r) + q(a-p) + r(a-q))/2 = \\ = \sin 60^\circ (a(p+q+r) - (pq+qr+rp))/2.$$

Аналогично

$$S_{ABC} - S_{M_1N_1P_1} = \sin 60^\circ (r(a-p) + p(a-q) + q(a-r))/2 = \\ = \sin 60^\circ (a(p+q+r) - (pq+qr+rp))/2.$$

б) Как и в предыдущей задаче, будем считать, что ABC — правильный треугольник. Пусть $M_2N_2P_2$ — образ треугольника $M_1N_1P_1$ при повороте вокруг центра треугольника ABC на 120° в направлении от A к B (рис. 29.5). Тогда $AM_2 = CM_1 = BM$. Аналогично, $BN_2 = CN$ и $CP_2 = AP$, т. е. точки M_2, N_2, P_2 симметричны точкам M, N, P относительно середин соответствующих сторон. Тем самым задача свелась к предыдущей.

29.26. Пусть $A = a/|a|$, $B = b/|b|$, $C = c/|c|$, $D = d/|d|$. Эти точки лежат на единичной окружности. Существует такой поворот R^α, что $B = R^\alpha(A)$ и $C = R^\alpha(D)$. Но R^α — это умножение на комплексное число $w = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Следовательно, $B/A = C/D = w$. Пусть $k = |abcd|$. Тогда $ac\bar{b}\bar{d} = kAC\bar{B}\bar{D} = kACB^{-1}D^{-1} = k$.

29.27. Сдвинем данные треугольники на векторы $-a$ и $-a'$ соответственно. В результате получатся собственно подобные треугольники с вершинами

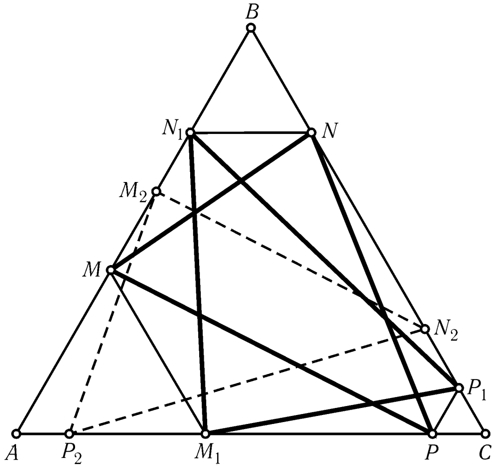


Рис. 29.5

0, $b-a$, $c-a$ и 0, $b'-a'$, $c'-a'$. При этом точка $b-a$ переводится в точку $c-a$ той же поворотной гомотетией, которой точка $b'-a'$ переводится в точку $c'-a'$. Из этого следует утверждение задачи.

29.28. Если треугольники abc и $a'b'c'$ собственно подобны, то $a'=az+w$, $b'=bz+w$, $c'=cz+w$, где z и w — некоторые комплексные числа. В таком случае

$$a'(b-c)+b'(c-a)+c'(a-b)=(az+w)(b-c)+(bz+w)(c-a)+(cz+w)(a-b)=0.$$

Предположим теперь, что

$$a'(b-c)+b'(c-a)+c'(a-b)=0. \tag{1}$$

Пусть $z=\dfrac{a'-b'}{a-b}$ и $w=\dfrac{ab'-a'b}{a-b}$. Тогда $a'=az+w$ и $b'=bz+w$. Рассмотрим комплексное число $c''=cz+w$. Треугольники abc и $a'b'c''$ собственно подобны, поэтому

$$a'(b-c)+b'(c-a)+c''(a-b)=0. \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) следует, что $c''=c'$.

29.29. Пусть $v=(a+b)/2$ — середина отрезка ab. Тогда прямоугольные треугольники $0au$ и $0vb$ собственно подобны, поскольку имеют равные углы в вершине 0. Поэтому согласно задаче 29.27 $a/u=v/b$. Значит, $u=ab/v=2ab/(a+b)$.

29.30. Прямоугольные треугольники, образованные соответственно точками 0, $(\bar a+\bar b)/2$, t и a, $(a+\bar a)/2$, t, собственно подобны. Согласно задаче 29.27

$$\frac{\bar a+\bar b}{2t}=\frac{\dfrac{a+\bar a}{2}-a}{t-a}=\frac{\bar a-a}{2(t-a)},$$

т. е. $\bar a t-1+\bar b(t-a)=t\bar a-ta$ (здесь мы воспользовались равенством $a\bar a=|a|^2=1$). Значит, $\bar b=(1-ta)/(t-a)$.

29.31. Мы воспользуемся двумя фактами: 1) ортоцентром треугольника abc служит точка $a+b+c$ (задача 13.13); 2) точка, симметричная ортоцентру относительно стороны треугольника, лежит на описанной окружности (задача 5.10).

Пусть z — точка, в которой продолжение высоты, опущенной из вершины a, пересекает описанную окружность. Тогда $z\bar{z}=1$ и число $\dfrac{a-z}{b-c}$ чисто мнимое. Поэтому

$$\frac{a-z}{b-c}=-\frac{\bar{a}-\bar{z}}{\bar{b}-\bar{c}}=-\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{z}\right)\Big/\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)=-\frac{a-z}{b-c}\cdot\frac{bc}{az}.$$

Таким образом, $z=-bc/a=-\bar{a}bc$.

Искомая точка x является серединой отрезка, соединяющего точки z и $a+b+c$, поэтому $x=\dfrac{1}{2}(a+b+c-\bar{a}bc)$.

29.32. Прямая, проходящая через точки a_1 и a_2, параметрически задаётся следующим образом: $z=a_1+t(a_2-a_1)$, где t пробегает все вещественные числа. Эквивалентная запись такова: $\bar{z}=\overline{a_1}+t(\overline{a_2}-\overline{a_1})$. Выразим t из первого уравнения и подставим во второе. В результате получим требуемое.

29.33. а) Окружности и прямые задаются уравнениями

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0.$$

с вещественными коэффициентами A, B, C, D (при $A=0$ такое уравнение задаёт прямую, а при $A\neq 0$ — окружность, точку или пустое множество). Наоборот, любое такое уравнение задаёт либо окружность, либо прямую, либо точку, либо пустое множество. Но $z=x+iy$, поэтому $x^2+y^2=z\bar{z}$ и $Bx+Cy=cz+\bar{c}\bar{z}$, где $c=(B-Ci)/2$.

б) Образом числа z при инверсии с центром в нуле и степенью 1 является число $w=1/\bar{z}$. Поделив уравнение из задачи а) на $z\bar{z}$, получим, что если w — образ точки z при этой инверсии, то

$$Dw\overline{w}+cw+\bar{c}\overline{w}+A=0,$$

т. е. число w удовлетворяет уравнению того же вида.

29.34. а) Треугольник с вершинами a, b, c правильный тогда и только тогда, когда

$$c=\frac{1}{2}(a+b)\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}(a-b)=\left(\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}\mp\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)b,$$

т. е. $c=\varepsilon a+\bar{\varepsilon}b$ или $c=\bar{\varepsilon}a+\varepsilon b$. Эти равенства эквивалентны равенствам $a+\varepsilon^2b+\varepsilon^4c=0$ и $a+\varepsilon^4b+\varepsilon^2c=0$, поскольку $\varepsilon\bar{\varepsilon}=1$ и $\varepsilon^3=-1$.

З а м е ч а н и е. Если $a+\varepsilon^2b+\varepsilon^4c=0$, то вершины abc обходятся против часовой стрелки, а если $a+\varepsilon^4b+\varepsilon^2c=0$, то по часовой стрелке.

б) Согласно задаче а) точки a, b и c являются вершинами правильного треугольника тогда и только тогда, когда

$$0=(a+\varepsilon^2b+\varepsilon^4c)(a+\varepsilon^4b+\varepsilon^2c)=a^2+b^2+c^2+(\varepsilon^2+\varepsilon^4)(ab+bc+ac).$$

Остаётся доказать, что $\varepsilon^2+\varepsilon^4=-1$. Для этого заметим, что $(1-\varepsilon^2)(1+\varepsilon^2+\varepsilon^4)=$ $=1-\varepsilon^6=0$ и $\varepsilon^2\neq 1$.

29.35. Установим соответствие между точками плоскости и комплексными числами так, чтобы центр инверсии находился в нуле. Тогда образом числа z при инверсии со степенью R является число $R/\bar{z}$. *Двойным отношением* комплексных чисел a, b, c, d называют комплексное число

$$(abcd) = \frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d}.$$

Если a^*, b^*, c^*, d^* — образы чисел a, b, c, d при инверсии, то

$$\overline{(a^*b^*c^*d^*)} = \frac{R/a - R/c}{R/a - R/d} : \frac{R/b - R/c}{R/b - R/d} = \frac{R(c-a)/ac}{R(d-a)/ad} : \frac{R(c-b)/bc}{R(d-b)/bd} = \frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d} = (abcd).$$

Задача а) следует из равенства модулей этих чисел, а задача б) — из равенства их аргументов.

29.36. а) Пусть A, B, C — точки, соответствующие числам a, b, c. Комплексное число $(a-b):(a-c)$ вещественно тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ пропорциональны.

б) Пусть S — окружность (или прямая), на которой лежат точки b, c, d. Прибавив, если нужно, ко всем четырём числам одно и то же комплексное число (это не изменяет двойное отношение), можно считать, что окружность S проходит через 0. Значит, её образ при инверсии — прямая. В решении задачи 29.35 показано, что двойное отношение сохраняется при инверсии. Поэтому остаётся решить такую задачу. Точки (т. е. комплексные числа) b, c, d лежат на одной прямой; нужно доказать, что число a лежит на той же прямой тогда и только тогда, когда число $\frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d}$ вещественно. Это следует из задачи а).

29.37. а) Утверждение задачи вытекает из следующих свойств комплексных чисел: 1) $|zw| = |z| \cdot |w|$; 2) $|z+w| \leqslant |z| + |w|$. Действительно, если a, b, c, d — произвольные комплексные числа, то

$$(a-b)(c-d) + (b-c)(a-d) = (a-c)(b-d).$$

Поэтому

$$|a-b| \cdot |c-d| + |b-c| \cdot |a-d| \geqslant |a-c| \cdot |b-d|.$$

б) Нужно лишь проверить соответствующее тождество для комплексных чисел $a_1, \ldots, a_6$ (это тождество получается из написанного в условии неравенства заменой знака $\leqslant$ на знак $=$, и заменой каждого сомножителя A_iA_j на сомножитель $(a_i - a_j)$).

в) Нестрогое неравенство $|z+w| \leqslant |z| + |w|$ обращается в равенство тогда и только тогда, когда комплексные числа z и w пропорциональны с вещественным положительным коэффициентом пропорциональности. Поэтому, как видно из решения задачи а), неравенство Птолемея обращается в равенство тогда и только тогда, когда число $\frac{(a-b)(c-d)}{(b-c)(a-d)}$ вещественно и положительно, т. е. число $q = \frac{a-b}{a-d} : \frac{c-b}{c-d}$ вещественно и отрицательно. Число q — это двойное отношение чисел a, c, b, d. Согласно задаче 29.36 б) оно вещественно тогда и только тогда, когда данные точки лежат на одной окружности. Остаётся доказать, что если данные точки лежат на одной окружности, то q отрицательно тогда и только тогда, когда ломаная $abcd$ несамопересекающаяся. Последнее условие эквивалентно тому, что точки b и d лежат на разных дугах, высекаемых точками a и c. Отобразим нашу окружность при помощи инверсии на прямую. В решении задачи 29.35 показано, что двойное отношение сохраняется при инверсии. Поэтому если a^*, c^*, b^*, d^* — комплексные числа, соответствующие образам наших точек, то их двойное отношение равно q. Рассматривая всевозможные (с точностью до порядка) способы расположения точек a^*, b^*, c^*, d^* на прямой, легко убедиться, что $q<0$ тогда и только тогда, когда на отрезке $a'c'$ лежит ровно одна из точек b' и d'.

г) Задачу б) можно следующим образом решить с помощью неравенства Птолемея:

$$\begin{aligned}
&A_1A_2\cdot A_3A_6\cdot A_4A_5+A_1A_2\cdot A_3A_4\cdot A_5A_6+\\
&\quad+A_2A_3\cdot A_1A_4\cdot A_5A_6+A_2A_3\cdot A_4A_5\cdot A_1A_6+A_3A_4\cdot A_2A_5\cdot A_1A_6=\\
&\quad=A_1A_2\cdot A_3A_6\cdot A_4A_5+(A_1A_2\cdot A_3A_4+A_2A_3\cdot A_1A_4)\cdot A_5A_6+\\
&\quad+(A_2A_3\cdot A_4A_5+A_3A_4\cdot A_2A_5)\cdot A_1A_6\geqslant\\
&\quad\geqslant A_1A_2\cdot A_3A_6\cdot A_4A_5+A_1A_3\cdot A_2A_4\cdot A_5A_6+A_2A_4\cdot A_3A_5\cdot A_1A_6=\\
&\quad=A_1A_2\cdot A_3A_6\cdot A_4A_5+(A_1A_3\cdot A_5A_6+A_3A_5\cdot A_1A_6)\cdot A_2A_4\geqslant\\
&\quad\geqslant A_1A_2\cdot A_3A_6\cdot A_4A_5+A_1A_5\cdot A_3A_6\cdot A_2A_4=\\
&\quad=(A_1A_2\cdot A_4A_5+A_1A_5\cdot A_2A_4)\cdot A_3A_6\geqslant A_1A_4\cdot A_2A_5\cdot A_3A_6.
\end{aligned}$$

Все использованные нестрогие неравенства обращаются в равенства тогда и только тогда, когда четырёхугольники $A_1A_2A_3A_4$, $A_2A_3A_4A_5$, $A_1A_3A_5A_6$ и $A_1A_2A_4A_5$ вписанные. Легко видеть, что это эквивалентно тому, что шестиугольник $A_1\dots A_6$ вписанный.

29.38. Докажем сначала, что если u, v, w, z — комплексные числа, причём $u+v+w+z=0$, то
$$|uw-vz|^2=|u+v|^2|v+w|^2.$$

В самом деле,
$$|uw-vz|=|uw+v(u+v+w)|=|u+v|\cdot|v+w|.$$

Пусть комплексные числа u, v, w, z соответствуют векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$. Тогда $|u+v|^2|v+w|^2=m^2n^2$ и
$$|uw-vz|^2=(uw-vz)(\bar u\bar w-\bar v\bar z)=|uw|^2+|vz|^2-(uw\bar v\bar z-\bar u\bar w vz).$$

Так как $|uw|^2=a^2c^2$ и $|vz|^2=b^2d^2$, то остаётся доказать, что
$$uw\bar v\bar z-\bar u\bar w vz=2abcd\cos(A+C).$$

Для этого достаточно проверить, что аргумент числа $uw\bar v\bar z$ равен $\pm(\angle A+\angle C)$. Остаётся заметить, что аргумент числа $u\bar v$ (соответственно $w\bar z$) равен $\pm\varphi$, где φ — угол между векторами u и v (соответственно w и z).

29.39. Обозначим через A_3 (соответственно B_3, C_3) отличную от A_2 (соответственно B_2, C_2) точку пересечения прямой A_1A_2 (соответственно B_1B_2, C_1C_2) со вписанной окружностью. Нужно доказать, что эти три точки совпадают.

Расположим треугольник ABC на комплексной плоскости так, чтобы вписанная окружность совпала с единичной окружностью с центром в нуле, а прямая l — с вещественной осью. Пусть a, b, c — точки касания вписанной окружности со сторонами BC, CA, AB соответственно. Тогда согласно задаче 29.29 $A=2bc/(b+c)$. Поэтому $A_1=\operatorname{Re}A=(A+\bar{A})/2=bc/(b+c)+\bar{b}\bar{c}/(\bar{b}+\bar{c})$. Но

$$\frac{\bar{b}\bar{c}}{\bar{b}+\bar{c}}=\frac{b\bar{b}\bar{c}+\bar{b}c\bar{c}}{(b+c)(\bar{b}+\bar{c})}=\frac{|b|^2\bar{c}+|c|^2\bar{b}}{(b+c)(\bar{b}+\bar{c})}=\frac{1}{b+c}.$$

Значит, $A_1=bc/(b+c)+1/(b+c)=(1+bc)/(b+c)$. Ясно, что $A_2=-a$. Поэтому согласно задаче 29.30

$$A_3=\frac{1+\dfrac{1+bc}{b+c}a}{\dfrac{1+bc}{b+c}+a}=\frac{a+b+c+abc}{1+ab+bc+ca}.$$

Аналогично доказывается, что B_3 и C_3 тоже равны этому комплексному числу.

29.40. Достаточно рассмотреть случай, когда точкам A, B, C, D соответствуют комплексные числа a, b, c, d, лежащие на единичной окружности с центром в нуле. Согласно задаче 29.31 основаниями перпендикуляров, опущенных из точки A на прямые BC и CD, являются точки $x=\dfrac{1}{2}(a+b+c-\bar{a}bc)$ и $y=\dfrac{1}{2}(a+c+d-\bar{a}cd)$. Направление прямой Симсона точки A относительно треугольника BCD задаётся числом $2(x-y)=(1-\bar{a}c)(b-d)=\bar{a}(a-c)(b-d)$. Направление прямой Эйлера треугольника BCD задаётся числом $b+c+d$. Эти две прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда число $\dfrac{\bar{a}(a-c)(b-d)}{b+c+d}$ чисто мнимое, т. е.

$$\frac{1}{a}\cdot\frac{(a-c)(b-d)}{b+c+d}=-a\frac{\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{c}\right)\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{d}\right)}{\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}}.$$

Это равенство после сокращений приводится к следующему симметричному виду: $ab+ac+ad+bc+bd+cd=0$.

29.41. а) Расположим треугольник ABC на комплексной плоскости так, чтобы точка X совпала с нулём. Пусть α, β, γ — комплексные числа, соответствующие вершинам треугольника. Требуемое неравенство следует из тождества

$$\frac{\beta}{\alpha-\gamma}\cdot\frac{\gamma}{\alpha-\beta}+\frac{\gamma}{\beta-\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta-\gamma}+\frac{\alpha}{\gamma-\beta}\cdot\frac{\beta}{\gamma-\alpha}=1.$$

б) Описанные окружности треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C пересекаются в некоторой точке X (задача 2.83 а). Пусть R_a, R_b, R_c — радиусы этих окружностей, R — радиус описанной окружности треугольника ABC. Тогда

$$a^2b_1c_1+b^2a_1c_1+c^2a_1b_1=8R\sin A\sin B\sin C(aR_bR_c+bR_cR_b+cR_aR_b)=$$
$$=\frac{4S}{R}(aR_bR_c+bR_cR_b+cR_aR_b).$$

Ясно, что $2R_a\geqslant XA$, $2R_b\geqslant XB$, $2R_c\geqslant XC$. Поэтому

$$\frac{4S}{R}(aR_bR_c+bR_cR_b+cR_aR_b)\geqslant\frac{abcS}{R}\left(\frac{XB}{b}\cdot\frac{XC}{c}+\frac{XC}{c}\cdot\frac{XA}{a}+\frac{XA}{a}\cdot\frac{XB}{b}\right)\geqslant\frac{abcS}{R}=4S^2.$$

29.42. Пусть точки A, B, C, A_1, B_1 и C_1 соответствуют комплексным числам a, b, c, a_1, b_1 и c_1. Из того, что треугольники BA_1C, CB_1A и AC_1B собственно подобны, следует, что $a_1=b+(c-b)z$, $b_1=c+(a-c)z$ и $c_1=a+(b-a)z$ для некоторого комплексного числа z. Поэтому

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2-a_1b_1-b_1c_1-a_1c_1=(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)(3z^2-3z+1).$$

Согласно задаче 29.34 б) треугольник $A_1B_1C_1$ равносторонний тогда и только тогда, когда выражение в левой части этого равенства обращается в нуль. Треугольник ABC не равносторонний, поэтому обращаться в нуль должно выражение $3z^2-3z+1$. Для равнобедренного треугольника с углом 120° имеем $z_0=\frac{1}{2}\pm\frac{i}{2\sqrt{3}}$. Легко проверить, что $z_0^2-z_0=-\frac{1}{3}$. (Разные знаки в выражении для z_0 соответствуют треугольникам, построенным на сторонах треугольника внешним и внутренним образом.)

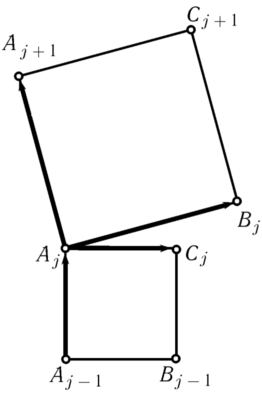


Рис. 29.6

29.43. Установим соответствие между точками плоскости и комплексными числами так, чтобы точка O совпала с нулём. Тогда $B_j-A_j=-i(A_{j+1}-A_j)$ и $C_j-A_j=-i(A_j-A_{j-1})$ (см. рис. 29.6; мы считаем, что $A_0=A_n$ и $A_{n+1}=A_1$). Вычитая второе равенство из первого, получаем $B_j-C_j=-i(A_{j-1}+A_{j+1}-2A_j)$. Но согласно задаче 29.10 $A_{j-1}+A_{j+1}=2\cos(2\pi/n)A_j$. Значит, $B_j-C_j=2i\big(1-\cos(2\pi/n)\big)A_j$.

29.44. Пусть $A_1\ldots A_n$ — исходный n-угольник, причём его вершины занумерованы против часовой стрелки; B_j — центр правильного n-угольника, построенного внешним образом на стороне A_jA_{j+1}. Будем считать, что точки плоскости отождествлены с комплексными числами. Обозначим через w комплексное число $\cos(2\pi/n)+i\sin(2\pi/n)$. Умножение на w (соответственно на $\overline{w}$) является поворотом вокруг нуля на угол $2\pi/n$ против часовой стрелки (соответственно по часовой стрелке). Точка A_j при повороте вокруг B_{j-1} на угол $2\pi/n$ против часовой стрелки переходит в точку A_{j-1}, а при повороте вокруг B_j по часовой стрелке — в точку A_{j+1}. Поэтому имеют место равенства

$$A_{j-1}-B_{j-1}=w(A_j-B_{j-1}),\qquad A_{j+1}-B_j=\overline{w}(A_j-B_j)$$

для всех $j=1,\ldots,n$ (здесь и далее мы будем считать, что $A_0=A_n$ и $A_{n+1}=A_1$). Следовательно,

$$B_{j-1}(w-1)=wA_j-A_{j-1},\qquad B_j(\overline{w}-1)=\overline{w}A_j-A_{j+1}.$$

Сложим эти равенства. Учитывая, что $w-1=-w(\overline{w}-1)$, получим

$$(B_j-wB_{j-1})(\overline{w}-1)=(w+\overline{w})A_j-A_{j-1}-A_{j+1} \tag{1}$$

для всех $j=1,\ldots,n$.

Многоугольник $B_1B_1\dots B_n$ является правильным тогда и только тогда, когда соответствие между точками плоскости и комплексными числами можно установить так, что $B_j = wB_{j-1}$ для всех $j = 1, \dots, n$, т. е. при всех j левая часть (1) равна нулю.

С другой стороны, согласно задаче 29.10 многоугольник $A_1A_2\dots A_n$ аффинно правильный тогда и только тогда, когда соответствие между точками плоскости и комплексными числами можно установить так, что $\cos(2\pi/n)A_j = A_{j-1} + A_{j+1}$ для всех $j = 1, \dots, n$. Поскольку $w + \bar{w} = \cos(2\pi/n)$, последнее условие эквивалентно тому, что правая часть (1) равна нулю.

29.45. Согласно задаче 29.26

$$\operatorname{Im}(a-z)(a-w)(\bar{a}-\bar{b})(\bar{a}-\bar{c}) = 0.$$

Обозначим $(\bar{a}-\bar{b})(\bar{a}-\bar{c})$, $(\bar{b}-\bar{a})(\bar{b}-\bar{c})$ и $(\bar{c}-\bar{a})(\bar{c}-\bar{b})$ через A, B и C соответственно. Тогда

$$\operatorname{Im} a^2A - \operatorname{Im} aA(z+w) + \operatorname{Im} Azw = 0. \tag{1}$$

Заметим, что $a(b+c)A$ — вещественное число. Действительно,

$$a(b+c)A = 2\operatorname{Re}\big(\bar{a}(b+c)\big) - |a(b+c)|^2$$

(чтобы проверить это равенство, нужно воспользоваться тем, что $\operatorname{Re}\zeta = (\zeta + \bar{\zeta})/2$, и тем, что $a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c} = 1$, поскольку точки a, b, c лежат на единичной окружности). Таким образом,

$$\operatorname{Im} a^2A = \operatorname{Im}\big((a+b+c)aA\big) - \operatorname{Im}\big(a(b+c)A\big) = \operatorname{Im}\big(aA(a+b+c)\big).$$

Далее,

$$abc \cdot aA = ab(\bar{a}-\bar{b}) \cdot ac(\bar{a}-\bar{c}) = (a-b)(a-c) = \bar{A}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Im} Azw = -\operatorname{Im}\overline{Azw} = -\operatorname{Im} aA \cdot abc \cdot \bar{z}\bar{w}.$$

Подставляя эти равенства в (1), получаем

$$\operatorname{Im} aA[a+b+c-(z+w)-abc\cdot\bar{z}\bar{w}] = \operatorname{Im} aAp = 0$$

(через p обозначено выражение в квадратных скобках).

Аналогично доказывается, что $\operatorname{Im} bBp = \operatorname{Im} cCp = 0$. Таким образом, либо $p = 0$ и тогда утверждение задачи доказано, либо числа aA, bB и cC пропорциональны с вещественным коэффициентом пропорциональности. Но второй случай невозможен, так как иначе число

$$\frac{aA}{bB} = \frac{a}{b}\cdot\frac{\bar{a}-\bar{c}}{\bar{c}-\bar{b}}$$

было бы вещественным, т. е. $\angle bOa = \angle acc_1 = \pi n$ (углы ориентированные: рис. 29.7). Однако $\angle acc_1 = \pi - \angle c$ и $\angle bOa = 2\angle c$ по теореме о вписанном угле, поэтому $\angle c = \pi(n-1)$, чего не может быть.

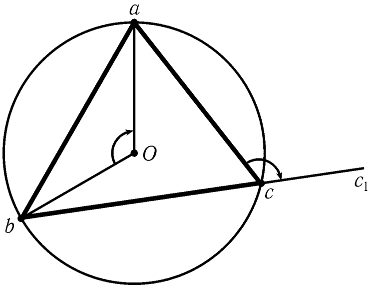


Рис. 29.7

29.46. Расположим данный правильный треугольник на комплексной плоскости так, чтобы центр его описанной окружности оказался в нуле и одной из вершин служила точка 1. Пусть z и w — комплексные числа, соответствующие точкам Z и W. Согласно задаче 29.45 $z + w + \bar{z}\bar{w} = 0$, т. е. $\bar{z} + \bar{w} = -zw$. Ясно, что $z^* = 1/\bar{z}$ и $w^* = 1/\bar{w}$. Следовательно,

$$\frac{1}{2}(z^* + w^*) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\bar{z}} + \frac{1}{\bar{w}}\right) = \frac{1}{2}\frac{\bar{z}+\bar{w}}{\bar{z}\bar{w}} = -\frac{1}{2}\frac{z}{\bar{z}}\frac{w}{\bar{w}};$$

модуль этого числа равен $\frac{1}{2}$.

29.47. Расположим данный треугольник так, чтобы центр описанной окружности оказался в нуле, а точка A — в единице. Пусть z и w — комплексные числа, соответствующие точкам Z и W. Повороты плоскости вокруг нуля на указанные углы соответствуют умножению на комплексные числа $z/\bar{z}$, $w/\bar{w}$ и $(z+w)/(\bar{z}+\bar{w})$. Но согласно задаче 29.45 $z + w = -\bar{z}\bar{w}$, значит, произведение этих трёх комплексных чисел равно 1.

29.48. Барицентрические координаты точки не изменяются при аффинном преобразовании, поэтому эллипсы Штейнера задаются такими же уравнениями, как вписанная и описанная окружности. Поэтому описанный эллипс Штейнера в барицентрических координатах $(\alpha : \beta : \gamma)$ задаётся уравнением $\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta = 0$ (задача 14.40), а вписанный — уравнением

$$2\beta\gamma + 2\alpha\gamma + 2\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

(задача 14.54 б).

29.49. Описанный эллипс Штейнера задаётся уравнением $\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta = 0$ (задача 29.48), а описанная окружность — уравнением $a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta = 0$, где a, b, c — длины сторон (задача 14.40). Из первого уравнения получаем $\gamma = -\alpha\beta/(\alpha+\beta)$. Подставив это выражение во второе уравнение, получим $\alpha : \beta = (c^2 - a^2) : (b^2 - c^2)$. Таким образом, точка Штейнера имеет барицентрические координаты

$$\left(\frac{1}{b^2 - c^2} : \frac{1}{c^2 - a^2} : \frac{1}{a^2 - b^2}\right).$$

Замечание. На с. 395 дано другое определение точки Штейнера. Задача 14.59 показывает, что эти определения эквивалентны.

ГЛАВА 30

ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 1. Проективные преобразования прямой

1. Пусть l_1 и l_2 — две прямые на плоскости, O — точка, не лежащая ни на одной из этих прямых. *Центральным проектированием* прямой l_1 на прямую l_2 с центром O называют отображение, которое точке A_1 прямой l_1 ставит в соответствие точку пересечения прямой OA_1 с прямой l_2.

2. Пусть l_1 и l_2 — две прямые на плоскости, l — прямая, не параллельная ни одной из этих прямых. *Параллельным проектированием* прямой l_1 на прямую l_2 вдоль прямой l называют отображение, которое точке A_1 прямой l_1 ставит в соответствие точку пересечения прямой l_2 с прямой, проходящей через точку A_1 параллельно прямой l.

3. Отображение P прямой a на прямую b называют *проективным*, если оно является композицией центральных или параллельных проектирований, т. е. если существуют прямые $a_0 = a$, a_1, …, $a_n = b$ и отображения P_i прямых a_i на a_{i+1}, каждое из которых является либо центральным, либо параллельным проектированием, причём P является композицией преобразований P_i. В случае, когда прямая b совпадает с прямой a, отображение P называют *проективным преобразованием* прямой a.

30.1*. Докажите, что существует проективное отображение, которое три данные точки одной прямой переводит в три данные точки другой прямой.

О п р е д е л е н и е. *Двойным отношением* четвёрки точек A, B, C, D, лежащих на одной прямой, называют число

$$(ABCD) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b},$$

где через a, b, c, d обозначены координаты точек A, B, C, D соответственно. Легко проверить, что двойное отношение не зависит от выбора координаты на прямой. Мы будем также писать

$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD},$$

подразумевая, что через AC/BC (соответственно AD/BD) обозначено отношение длин этих отрезков, если векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$ (соответственно $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BD}$) сонаправлены, или отношение длин отрезков, взятое со знаком «−», если эти векторы противоположно направлены.

Определение. *Двойным отношением* четвёрки прямых a, b, c, d, проходящих через одну точку, называют число

$$(abcd) = \pm\frac{\sin(a, c)}{\sin(b, c)} : \frac{\sin(a, d)}{\sin(b, d)},$$

знак которого выбирается следующим образом: если один из углов, образованных прямыми a и b, не пересекается ни с одной из прямых c или d (в этом случае говорят, что пара прямых a и b не разделяет пару прямых c и d), то $(abcd) > 0$; в противном случае $(abcd) < 0$.

30.2*. а) Даны прямые a, b, c, d, проходящие через одну точку, и прямая l, через эту точку не проходящая. Пусть A, B, C, D — точки пересечения прямой l с прямыми a, b, c, d соответственно. Докажите, что $(abcd) = (ABCD)$.

б) Докажите, что двойное отношение четвёрки точек сохраняется при проективных преобразованиях.

30.3*. Докажите, что если $(ABCX) = (ABCY)$, то $X = Y$ (все точки попарно различны, кроме, быть может, точек X и Y, и лежат на одной прямой).

30.4*. Докажите, что проективное преобразование прямой однозначно определяется образами трёх произвольных точек.

30.5*. Докажите, что нетождественное проективное преобразование прямой имеет не более двух неподвижных точек.

30.6*. Дано отображение прямой a на прямую b, сохраняющее двойное отношение любой четвёрки точек. Докажите, что это отображение проективно.

30.7*. Докажите, что преобразование P числовой прямой является проективным тогда и только тогда, когда оно представляется в виде

$$P(x) = \frac{ax+b}{cx+d},$$

где a, b, c, d — такие числа, что $ad - bc \neq 0$. (Такие отображения называют *дробно-линейными*.)

30.8*. Точки A, B, C, D лежат на одной прямой. Докажите, что если $(ABCD) = 1$, то либо $A = B$, либо $C = D$.

30.9*. Даны прямая l, окружность и точки M, N, лежащие на окружности и не лежащие на прямой l. Рассмотрим отображение P прямой l на себя, являющееся композицией проектирования прямой l на данную окружность из точки M и проектирования окружности на прямую l из точки N. (Если точка X лежит на прямой l, то $P(X)$ есть пересечение прямой NY с прямой l, где Y — отличная от M точка пересечения прямой MX с данной окружностью.) Докажите, что преобразование P проективно.

30.10*. Даны прямая l, окружность и точка M, лежащая на окружности и не лежащая на прямой l. Пусть P_M — проектирование прямой l на данную окружность из точки M (точка X прямой отображается в отличную от M точку пересечения прямой XM с окружностью),

R — движение плоскости, сохраняющее данную окружность (т. е. поворот плоскости вокруг центра окружности или симметрия относительно диаметра). Докажите, что композиция $P_M^{-1} \circ R \circ P_M$ является проективным преобразованием.

З а м е ч а н и е. Если считать, что данная окружность отождествлена с прямой l посредством проектирования из точки M, то утверждение последней задачи можно переформулировать следующим образом: отображение окружности на себя при помощи движения плоскости является проективным преобразованием прямой.

§ 2. Проективные преобразования плоскости

О п р е д е л е н и е. Пусть α_1 и α_2 — две плоскости в пространстве, O — точка, не лежащая ни на одной из этих плоскостей. *Центральным проектированием* плоскости α_1 на плоскость α_2 с центром O называют отображение, которое точке A_1 плоскости α_1 ставит в соответствие точку пересечения прямой OA_1 с плоскостью α_2.

30.11*. Докажите, что если плоскости α_1 и α_2 пересекаются, то центральное проектирование α_1 на α_2 с центром O задаёт взаимно однозначное отображение плоскости α_1 с выкинутой прямой l_1 на плоскость α_2 с выкинутой прямой l_2, где l_1 и l_2 — прямые пересечения плоскостей α_1 и α_2 соответственно с плоскостями, проходящими через O и параллельными α_2 и α_1. При этом на l_1 отображение не определено.

О п р е д е л е н и е. Прямую, на которой не определено центральное проектирование, называют *исключительной прямой* данной проекции.

30.12*. Докажите, что при центральном проектировании прямая, не являющаяся исключительной, проецируется в прямую.

Для того чтобы центральное проектирование было определено всюду, удобно считать, что на каждой прямой помимо обычных точек имеется ещё одна точка, называемая *бесконечно удалённой*. При этом если две прямые параллельны, то их бесконечно удалённые точки совпадают, другими словами, параллельные прямые пересекаются в бесконечно удалённой точке.

Мы также будем считать, что на каждой плоскости помимо обычных прямых имеется ещё *бесконечно удалённая прямая*, на которой лежат все бесконечно удалённые точки прямых данной плоскости. Бесконечно удалённая прямая пересекается с каждой обычной прямой l, лежащей на той же плоскости, в бесконечно удалённой точке прямой l.

Если ввести бесконечно удалённые точки и прямые, то центральное проектирование плоскости α_1 на плоскость α_2 с центром в точке O будет определено для всех точек плоскости α_1. При этом исключительная прямая будет проецироваться в бесконечно удалённую прямую плоскости α_2, а именно, образом точки M исключительной прямой будет бесконечно удалённая точка прямой OM; в этой точке пересекаются прямые на плоскости α_2, параллельные прямой OM.

30.13*. Докажите, что если наряду с обычными точками и прямыми рассматривать бесконечно удалённые, то

а) через любые две точки проходит единственная прямая;

б) любые две прямые, лежащие в одной плоскости, пересекаются в единственной точке;

в) центральное проектирование одной плоскости на другую является взаимно однозначным отображением.

Определение. Отображение P плоскости α на плоскость β называют *проективным*, если оно является композицией центральных проектирований и аффинных преобразований, т. е. если существуют плоскости $\alpha_0=\alpha$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n=\beta$ и отображения P_i плоскостей α_i на α_{i+1}, каждое из которых является либо центральным проектированием, либо аффинным преобразованием, причём P является композицией преобразований P_i. В случае, когда плоскость α совпадает с плоскостью β, отображение P называют *проективным преобразованием плоскости* α. Прообраз бесконечно удалённой прямой мы будем называть *исключительной* прямой данного проективного преобразования.

30.14*. а) Докажите, что проективное преобразование P плоскости, переводящее бесконечно удалённую прямую в бесконечно удалённую прямую, является аффинным.

б) Докажите, что если точки A, B, C, D лежат па прямой, параллельной исключительной прямой проективного преобразования P плоскости α, то $P(A)P(B):P(C)P(D)=AB:CD$.

в) Докажите, что если проективное преобразование P переводит параллельные прямые l_1 и l_2 в параллельные прямые, то либо P аффинно, либо его исключительная прямая параллельна прямым l_1 и l_2.

г) Пусть P — взаимно однозначное преобразование множества всех конечных и бесконечных точек плоскости, которое каждую прямую переводит в прямую. Докажите, что P проективно.

30.15*. Даны точки A, B, C, D, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и точки A_1, B_1, C_1, D_1, удовлетворяющие тому же условию.

а) Докажите, что существует проективное преобразование, переводящее точки A, B, C, D соответственно в точки A_1, B_1, C_1, D_1.

б) Докажите, что преобразование из задачи а) единственно, т. е. проективное преобразование плоскости определяется образами четырёх точек в общем положении (ср. с задачей 30.4).

в) Докажите утверждение задачи а), если точки A, B, C лежат на одной прямой l, а точки A_1, B_1, C_1 — на одной прямой l_1.

г) Единственно ли преобразование из задачи в)?

Рассмотрим в пространстве единичную сферу с центром в начале координат. Пусть $N(0, 0, 1)$ — её северный полюс. *Стереографической проекцией сферы на плоскость* называют отображение, которое каждой точке M сферы сопоставляет точку пересечения прямой MN с плоскостью Oxy. Известно (см. например, задачу 16.19, б) в книге: *В.В.Прасолов, И.Ф.Шарыгин.* Задачи по стереометрии. М.: Наука, 1989), что при стереографической проекции окружность на сфере переходит в окружность на плоскости (или в прямую). Воспользуйтесь этим фактом при решении задач 30.16 и 30.17.

30.16*. а) Докажите, что существует проективное преобразование, которое данную окружность переводит в окружность, а данную точку, лежащую внутри окружности, переводит в центр образа.

б) Докажите, что если проективное преобразование переводит данную окружность в окружность, а точку M — в её центр, то исключительная прямая перпендикулярна диаметру, проходящему через M.

30.17*. На плоскости дана окружность и не пересекающая её прямая. Докажите, что существует проективное преобразование, переводящее данную окружность в окружность, а данную прямую — в бесконечно удалённую прямую.

30.18*. Докажите, что существует проективное преобразование, которое данную окружность переводит в окружность, а данную хорду — в её диаметр.

30.19*. Дана окружность S и точка O внутри её. Рассмотрим все проективные преобразования, которые S отображают в окружность, а O — в её центр. Докажите, что все такие преобразования отображают на бесконечность одну и ту же прямую.

Эта прямая называется *полярой* точки O относительно окружности S.

30.20*. Проективное преобразование некоторую окружность переводит в себя, а её центр оставляет на месте. Докажите, что это — поворот или симметрия.

30.21*. Даны две параллельные прямые a, b и точка O. Тогда для каждой точки M можно выполнить следующее построение. Проведём через M произвольную прямую l, не проходящую через O и пересекающую прямые a и b. Точки пересечения обозначим соответственно через A и B, и пусть M' — точка пересечения прямой OM с прямой, параллельной OB и проходящей через A.

а) Докажите, что точка M' не зависит от выбора прямой l.

б) Докажите, что преобразование плоскости, переводящее точку M в точку M', является проективным.

30.22*. Докажите, что преобразование координатной плоскости, которое каждую точку с координатами (x, y) отображает в точку с координатами $\left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right)$, является проективным.

30.23*. Пусть O — центр линзы, π — некоторая плоскость, проходящая через её оптическую ось, a и f — прямые пересечения плоскости π с плоскостью линзы и с фокальной плоскостью соответственно ($a \parallel f$). В школьном курсе физики показано, что если пренебречь толщиной линзы, то изображение M' точки M, лежащей в плоскости π, строится

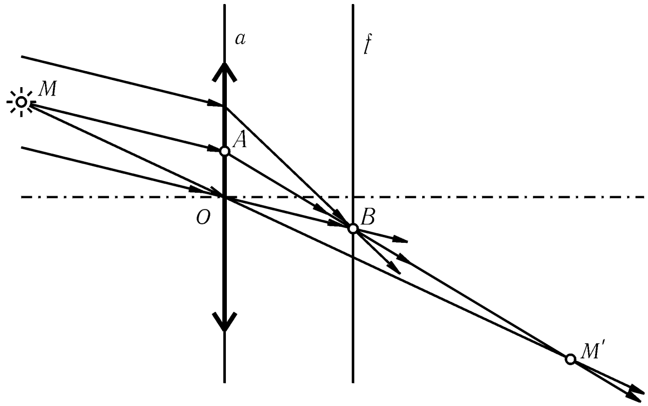


Рис. 30.1

следующим образом (рис. 30.1). Проведём через точку M произвольную прямую l; пусть A — точка пересечения прямых a и l, B — точка пересечения прямой f с прямой, проходящей через O параллельно l. Тогда M' есть точка пересечения прямых AB и OM. Докажите, что преобразование плоскости π, сопоставляющее каждой точке её изображение, является проективным.

Таким образом, через увеличительное стекло мы видим образ нашего мира при проективном преобразовании.

§ 3. Переведём данную прямую на бесконечность

30.24*. Докажите, что геометрическое место точек пересечения диагоналей четырёхугольников $ABCD$, у которых стороны AB и CD лежат на двух данных прямых l_1 и l_2, а стороны BC и AD пересекаются в данной точке P, является прямой, проходящей через точку Q пересечения прямых l_1 и l_2.

30.25*. Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$, а E, F — точки пересечения продолжений сторон AB и CD, BC и AD соответственно. Прямая EO пересекает стороны AD и BC в точках K и L, а прямая FO пересекает стороны AB и CD в точках M и N. Докажите, что точка X пересечения прямых KN и LM лежит на прямой EF.

30.26*. Прямые a, b, c пересекаются в одной точке O. В треугольниках $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ вершины A_1 и A_2 лежат на прямой a; B_1 и B_2 — на прямой b; C_1 и C_2 — на прямой c. Пусть A, B, C — точки пересечения прямых B_1C_1 и B_2C_2, C_1A_1 и C_2A_2, A_1B_1 и A_2B_2 соответственно. Докажите, что точки A, B, C лежат на одной прямой (Дезарг).

30.27*. Точки A, B, C лежат на прямой l, а точки A_1, B_1, C_1 — на прямой l_1. Докажите, что точки пересечения прямых AB_1 и BA_1, BC_1 и CB_1, CA_1 и AC_1 лежат на одной прямой (Папп).

30.28*. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Пусть E, F — точки пересечения продолжений противоположных сторон AB и CD, AD и BC соответственно, M — произвольная точка внутри четырёхугольника. Пусть S — точка пересечения прямых AD и EM, P — точка пересечения прямых AB и FM. Докажите, что прямые BS, PD и MC пересекаются в одной точке.

30.29*. Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Известно, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке O, и прямые AB_1, BC_1 и CA_1 пересекаются в одной точке O_1. Докажите, что прямые AC_1, BA_1 и CB_1 тоже пересекаются в одной точке O_2 (*теорема о дважды перспективных треугольниках*).

30.30*. Даны четырёхугольник $ABCD$ и прямая l. Обозначим через P, Q, R точки пересечения прямых AB и CD, AC и BD, BC и AD, а через P_1, Q_1, R_1 — середины отрезков, которые эти пары прямых высекают на прямой l. Докажите, что прямые PP_1, QQ_1 и RR_1 пересекаются в одной точке.

30.31*. Даны треугольник ABC и прямая l. Обозначим через A_1, B_1, C_1 середины отрезков, высекаемых на прямой l углами A, B, C, а через A_2, B_2, C_2 — точки пересечения прямых AA_1 и BC, BB_1 и AC, CC_1 и AB. Докажите, что точки A_2, B_2, C_2 лежат на одной прямой.

30.32*. Даны четыре точки A, B, C, D. Пусть P, Q, R — точки пересечения прямых AB и CD, AD и BC, AC и BD соответственно; K и L — точки пересечения прямой QR с прямыми AB и CD соответственно. Докажите, что $(QRKL) = -1$ (*теорема о полном четырёхстороннике*).

30.33*. Окружность пересекает прямые BC, CA, AB в точках A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2. Пусть l_a — прямая, соединяющая точки пересечения прямых BB_1 и CC_2, BB_2 и CC_1; прямые l_b и l_c определяются аналогично. Докажите, что прямые l_a, l_b и l_c пересекаются в одной точке (или параллельны).

30.34*. Докажите, что для любого нечётного $n \geqslant 3$ на плоскости можно указать $2n$ различных точек, не лежащих на одной прямой, и разбить их на пары так, чтобы любая прямая, проходящая через две точки из разных пар, проходила бы ещё через одну из этих $2n$ точек.

§ 4. Применение проективных преобразований, сохраняющих окружность

Основным инструментом для решения задач этого параграфа являются задачи 30.16 и 30.17.

30.35*. Докажите, что прямые, соединяющие противоположные точки касания описанного четырёхугольника, проходят через точку пересечения диагоналей.

30.36*. Докажите, что прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон с вписанной окружностью, пересекаются в одной точке.

30.37*. а) Через точку P проводятся всевозможные секущие данной окружности S. Найдите геометрическое место точек пересечения касательных к окружности S, проведённых в двух точках пересечения окружности с секущей.

б) Через точку P проводятся всевозможные пары секущих AB и CD окружности S (A, B, C, D — точки пересечения с окружностью). Найдите геометрическое место точек пересечения прямых AC и BD.

30.38*. Даны окружность S, прямая l, точка M, лежащая на S и не лежащая на l, и точка O, не лежащая на S. Рассмотрим преобразование P прямой l, являющееся композицией проектирований l на S из M, S на себя из O и S на l из M, т. е. $P(A)$ — пересечение прямых l и MC, где C — отличная от B точка пересечения S с прямой OB, а B — отличная от M точка пересечения S с прямой MA. Докажите, что преобразование P проективно.

Замечание. Если считать, что окружность S отождествлена с прямой l посредством проектирования из точки M, то утверждение последней задачи можно переформулировать следующим образом: центральное проектирование окружности на себя является проективным преобразованием.

30.39*. Даны окружность S, точка P, расположенная вне S, и прямая l, проходящая через P и пересекающая окружность в точках A и B. Точку пересечения касательных к окружности в точках A и B обозначим через K.

а) Рассмотрим всевозможные прямые, проходящие через P и пересекающие AK и BK в точках M и N. Докажите, что геометрическим местом точек пересечения отличных от AK и BK касательных к S, проведённых из точек M и N, является некоторая прямая, проходящая через K, из которой выкинуто её пересечение с внутренностью S.

б) Будем на окружности разными способами выбирать точку R и проводить прямую, соединяющую отличные от R точки пересечения прямых RK и RP с S. Докажите, что все полученные прямые проходят через одну точку, и эта точка лежит на l.

30.40*. Вневписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке D, а продолжений сторон AB и AC — в точках E и F. Пусть T — точка пересечения прямых BF и CE. Докажите, что точки A, D и T лежат на одной прямой.

30.41*. Пусть $ABCDEF$ — описанный шестиугольник. Докажите, что его диагонали AD, BE и CF пересекаются в одной точке (Брианшон).

30.42*. В окружность S вписан шестиугольник $ABCDEF$. Докажите, что точки пересечения прямых AB и DE, BC и EF, CD и FA лежат на одной прямой (Паскаль).

30.43*. Пусть O — середина хорды AB окружности S, MN и PQ — произвольные хорды, проходящие через O, причём точки P и N лежат по одну сторону от AB, E и F — точки пересечения хорды AB с хордами MP и NQ соответственно. Докажите, что O — середина отрезка EF (*задача о бабочке*).

30.44*. Точки A, B, C и D лежат на окружности, SA и SD — касательные к этой окружности, P и Q — точки пересечения прямых AB и CD, AC и BD соответственно. Докажите, что точки P, Q и S лежат на одной прямой.

§ 5. Применение проективных преобразований прямой в задачах на доказательство

30.45*. На стороне AB четырёхугольника $ABCD$ взята точка M_1. Пусть M_2 — проекция M_1 на прямую BC из D, M_3 — проекция M_2 на CD из A, M_4 — проекция M_3 на DA из B, M_5 — проекция M_4 на AB из C и т. д. Докажите, что $M_{13} = M_1$ (а значит, $M_{14} = M_2$, $M_{15} = M_3$ и т. д.).

30.46*. Используя проективные преобразования прямой, докажите теорему о полном четырёхстороннике (задача 30.32).

30.47*. Используя проективные преобразования прямой, докажите теорему Паппа (задача 30.27).

30.48*. Используя проективные преобразования прямой, решите задачу о бабочке (задача 30.43).

30.49*. Точки A, B, C, D, E, F лежат на одной окружности. Докажите, что точки пересечения прямых AB и DE, BC и EF, CD и FA лежат на одной прямой (Паскаль).

§ 6. Применение проективных преобразований прямой в задачах на построение

30.50*. Даны окружность, прямая и точки A, A', B, B', C, C', M, лежащие на этой прямой. Согласно задачам 30.1 и 30.4 существует единственное проективное преобразование данной прямой на себя, отображающее точки A, B, C соответственно в A', B', C'. Обозначим это преобразование через P. Постройте при помощи одной линейки а) точку $P(M)$; б) неподвижные точки отображения P (*задача Штейнера*).

Задача построения неподвижных точек проективного преобразования является ключевой для этого параграфа в том смысле, что остальные задачи тем или иным способом к ней сводятся (см. также замечания после задач 30.10 и 30.38).

30.51*. Даны две прямые l_1 и l_2 и две точки A и B, не лежащие на этих прямых. Циркулем и линейкой постройте на прямой l_1

точку X так, чтобы прямые AX и BX высекали на прямой l_2 отрезок, а) имеющий данную длину a; б) делящийся пополам данной точкой E прямой l_2.

30.52*. Точки A и B лежат на прямых a и b соответственно, а точка P не лежит ни на одной из этих прямых. Циркулем и линейкой проведите через P прямую, пересекающую прямые a и b в точках X и Y соответственно таких, что длины отрезков AX и BY имеют а) данное отношение; б) данное произведение.

30.53*. Циркулем и линейкой проведите через данную точку прямую, на которой три данные прямые высекают равные отрезки.

30.54*. Даны окружность S и две хорды AB и CD. Циркулем и линейкой постройте на окружности точку X так, чтобы прямые AX и BX высекали на CD отрезок а) имеющий данную длину a; б) делящийся пополам данной точкой E хорды CD.

30.55*. а) Даны прямая l и точка P вне её. Циркулем и линейкой постройте на l отрезок XY данной длины, который виден из P под данным углом α.

б) Даны две прямые l_1 и l_2 и точки P и Q, не лежащие на этих прямых. Циркулем и линейкой постройте на прямой l_1 точку X и на прямой l_2 точку Y так, что отрезок XY виден из точки P под данным углом α, а из точки Q — под данным углом β.

30.56*. а) Дана некоторая окружность. При помощи одной линейки постройте n-угольник, стороны которого проходят через данные n точек, а вершины лежат на n данных прямых.

б) При помощи одной линейки впишите в данную окружность n-угольник, стороны которого проходят через данные n точек.

в) При помощи циркуля и линейки впишите в данную окружность многоугольник, у которого некоторые стороны проходят через данные точки, некоторые другие параллельны данным прямым, а остальные имеют данные длины (о каждой стороне имеется информация одного из трёх перечисленных типов).

§ 7. Невозможность построений при помощи одной линейки

30.57*. Докажите, что при помощи одной линейки нельзя разделить данный отрезок пополам.

30.58*. На плоскости дана окружность. Докажите, что при помощи одной линейки нельзя построить её центр.

Решения

30.1. Обозначим данные прямые через l_0 и l, данные точки на прямой l_0 — через A_0, B_0, C_0, данные точки на прямой l — через A, B, C. Пусть l_1 — произвольная прямая, не проходящая через точку A. Возьмём произвольную точку O_0, не лежащую на прямых l_0 и l_1. Обозначим через P_0 центральное проектирование прямой l_0 на прямую l_1 с центром в точке O_0, а через A_1, B_1, C_1 — проекции точек A_0, B_0, C_0. Пусть l_2 — произвольная прямая, проходящая через точку A, не совпадающая с прямой l и не проходящая через A_1. Возьмём некоторую точку O_1 на прямой AA_1 и рассмотрим центральное проектирование P_1 прямой l_1 на l_2 с центром в O_1. Обозначим через A_2, B_2, C_2 проекции точек A_1, B_1, C_1. Ясно, что A_2 совпадает с A. Наконец, пусть P_2 — проектирование прямой l_2 на прямую l, которое в том случае, когда прямые BB_2 и CC_2 не параллельны, является центральным проектированием с центром в точке пересечения этих прямых, а в том случае, когда прямые BB_2 и CC_2 параллельны, является параллельным проектированием вдоль одной из этих прямых. Композиция $P_2 \circ P_1 \circ P_0$ является требуемым проективным отображением.

30.2. а) Обозначим точку пересечения четырёх данных прямых через O; пусть H — проекция этой точки на прямую l и $h = OH$. Тогда

$$\begin{aligned}2S_{OAC} &= OA \cdot OC \sin(a, c) = h \cdot AC,\\ 2S_{OBC} &= OB \cdot OC \sin(b, c) = h \cdot BC,\\ 2S_{OAD} &= OA \cdot OD \sin(a, d) = h \cdot AD,\\ 2S_{OBD} &= OB \cdot OD \sin(b, d) = h \cdot BD.\end{aligned}$$

Поделив первое равенство на второе, а третье — на четвёртое, получаем

$$\frac{OA\sin(a, c)}{OB\sin(b, c)} = \frac{AC}{BC}, \qquad \frac{OA\sin(a, d)}{OB\sin(b, d)} = \frac{AD}{BD}.$$

Деля получившиеся равенства, получаем $|(ABCD)| = |(abcd)|$. Для доказательства того, что числа $(ABCD)$ и $(abcd)$ имеют одинаковый знак, можно, например, выписать все возможные способы расположения точек на прямой (24 способа), и в каждом случае убедиться в том, что $(ABCD)$ положительно тогда и только тогда, когда пара прямых a, b не разделяет пару прямых c, d.

б) Является непосредственным следствием задачи а).

30.3. Пусть a, b, c, x, y — координаты точек A, B, C, X, Y. Тогда

$$\frac{x-a}{x-b} : \frac{c-a}{c-b} = \frac{y-a}{y-b} : \frac{c-a}{c-b}.$$

Следовательно, поскольку все точки различны, $(x-a)(y-b) = (x-b)(y-a)$. Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем $ax - bx = ay - by$. Сокращая это равенство на $(a-b)$, получаем $x = y$.

30.4. Пусть образ каждой из трёх данных точек при одном проективном преобразовании совпадает с образом этой точки при другом проективном преобразовании. Докажем, что тогда совпадают образы любой другой точки при этих преобразованиях. Обозначим образы данных точек через A, B, C. Возьмём произвольную точку и обозначим через X и Y её образы при данных проективных преобразованиях. Тогда согласно задаче 30.2 $(ABCX) = (ABCY)$, поэтому согласно задаче 30.3 $X = Y$.

30.5. Эта задача является следствием предыдущей.

30.6. Фиксируем на прямой a три различные точки. Согласно задаче 30.1 существует проективное отображение P, которое эти точки отображает так же, как данное отображение. Но в решении задачи 30.4 фактически доказано, что любое отображение, сохраняющее двойное отношение, однозначно определяется образами трёх точек. Поэтому данное отображение совпадает с P.

30.7. Во-первых, покажем, что дробно-линейное преобразование

$$P(x)=\frac{ax+b}{cx+d}, \qquad ad-bc\neq 0,$$

сохраняет двойное отношение. Действительно, пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — произвольные числа и $y_i=P(x_i)$. Тогда

$$y_i-y_j=\frac{ax_i+b}{cx_i+d}-\frac{ax_j+b}{cx_j+d}=\frac{(ad-bc)(x_i-x_j)}{(cx_i+d)(cx_j+d)};$$

следовательно, $(y_1y_2y_3y_4)=(x_1x_2x_3x_4)$.

В решении задачи 30.4 фактически было доказано, что если преобразование прямой сохраняет двойное отношение, то оно однозначно задаётся образами трёх различных точек. Согласно задаче 30.2 б) проективные преобразования сохраняют двойное отношение. Остаётся доказать, что для любых попарно различных точек x_1, x_2, x_3 и попарно различных точек y_1, y_2, y_3 найдётся дробно-линейное преобразование P, для которого $P(x_i)=y_i$. Для этого, в свою очередь, достаточно доказать, что для любых трёх различных точек найдётся дробно-линейное преобразование, переводящее их в три фиксированные точки $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3=\infty$. Действительно, если P_1 и P_2 — дробно-линейные преобразования, для которых $P_1(x_i)=z_i$ и $P_2(y_i)=z_i$, то $P_2^{-1}(P_1(x_i))=y_i$. (Преобразование, обратное дробно-линейному, является дробно-линейным, так как если $y=(ax+b)/(cx+d)$, то $x=(dy-b)/(-cy+a)$; то, что композиция дробно-линейных преобразований дробно-линейна, проверьте самостоятельно.)

Итак, надо доказать, что если x_1, x_2, x_3 — произвольные различные числа, то найдутся такие числа a, b, c, d, что $ad-bc\neq 0$ и

$$\begin{aligned} ax_1+b&=0,\\ ax_2+b&=cx_2+d,\\ cx_3+d&=0. \end{aligned}$$

Найдя из первого и третьего уравнений b и d и подставив во второе, получаем уравнение

$$a(x_2-x_1)=c(x_2-x_3),$$

из которого находим решение $a=(x_2-x_3)$, $b=x_1(x_3-x_2)$, $c=(x_2-x_1)$, $d=x_3(x_1-x_2)$. При этом $ad-bc=(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)\neq 0$.

30.8. *Первое решение.* Пусть a, b, c, d — координаты данных точек. Тогда по условию $(c-a)(d-b)=(c-b)(d-a)$. Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем $cb+ad=ca+bd$. Перенося всё в левую часть и разлагая на множители, получаем $(d-c)(b-a)=0$, т. е. либо $a=b$, либо $c=d$.

Второе решение. Предположим, что $C\neq D$, и докажем, что в этом случае $A=B$. Рассмотрим центральное проектирование данной прямой на другую прямую, при котором точка D проецируется в бесконечно удалённую точку. Пусть A', B', C' — проекции точек A, B, C. Согласно задаче 30.2 $(ABCD)=(A'B'C'\infty)=1$, т. е. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$. Но это значит, что $A=B$.

30.9. Согласно задаче 30.6 достаточно доказать, что преобразование P сохраняет двойное отношение четвёрки точек. Пусть A, B, C, D — произвольные точки прямой l. Обозначим через A', B', C', D' их образы при преобразовании P, а через a, b, c, d и a', b', c', d' — прямые MA, MB, MC, MD и NA', NB', NC', ND' соответственно. Тогда согласно задаче 30.2 а) $(ABCD) = (abcd)$ и $(A'B'C'D') = (a'b'c'd')$, а по теореме о вписанном угле $\angle(a, c) = \angle(a', c')$, $\angle(b, c) = \angle(b', c')$ и т. д., а значит, $(abcd) = (a'b'c'd')$.

30.10. Пусть $N = R^{-1}(M)$, $m = R(l)$, P_N — проектирование прямой l на окружность из точки N, Q — проектирование прямой m на прямую l из точки M. Тогда $P_M^{-1} \circ R \circ P_M = Q \circ R \circ P_N^{-1} \circ P_M$. Но согласно предыдущей задаче отображение $P_N^{-1} \circ P_M$ проективно.

30.11. Прямые, проходящие через O и параллельные плоскости α_1 (соответственно α_2), пересекают плоскость α_2 (соответственно α_1) в точках прямой l_2 (соответственно l_1). Поэтому если точка лежит на одной из плоскостей α_1, α_2 и не лежит на прямых l_1, l_2, то определено проектирование её на другую плоскость. Ясно, что разные точки проецируются в разные.

30.12. При центральной проекции на плоскость α_2 с центром O прямая l проецируется в пересечение плоскости, проходящей через O и l, с плоскостью α_2.

30.13. Эта задача является непосредственным следствием аксиом геометрии и определения.

30.14. а) Из задачи 30.13 в) следует, что если наряду с обычными точками рассматривать бесконечно удалённые, то преобразование P взаимно однозначно. При этом бесконечно удалённая прямая отображается на бесконечно удалённую прямую. Поэтому множество конечных точек тоже взаимно однозначно отображается на множество конечных точек. А поскольку прямые при отображении P переводятся в прямые, то P аффинно.

б) Обозначим через l прямую, на которой лежат точки A, B, C, D, а через l_0 — исключительную прямую преобразования P. Возьмём произвольную точку O вне плоскости α и рассмотрим плоскость β, которая проходит через прямую l и параллельна плоскости, проходящей через прямую l_0 и точку O. Пусть Q — композиция центрального проектирования плоскости α на плоскость β с центром O и последующего поворота пространства вокруг оси l, переводящего плоскость β в плоскость α. Исключительной прямой преобразования Q является прямая l_0. Поэтому проективное преобразование $R = P \circ Q^{-1}$ плоскости α переводит бесконечно удалённую прямую в бесконечно удалённую прямую и согласно задаче а) является аффинным, в частности, сохраняет отношения отрезков, лежащих на прямой l. Остаётся заметить, что преобразование Q оставляет точки прямой l неподвижными.

в) То, что параллельные прямые l_1 и l_2 переходят в параллельные, означает, что бесконечно удалённая точка A этих прямых переходит в бесконечно удалённую точку, т. е. A лежит на прообразе l бесконечно удалённой прямой. Следовательно, либо l — бесконечно удалённая прямая, и тогда согласно задаче а) преобразование P аффинно, либо прямая l параллельна прямым l_1 и l_2.

г) Обозначим через l_∞ бесконечно удалённую прямую. Если $P(l_\infty) = l_\infty$, то P задаёт взаимно однозначное преобразование плоскости, которое каждую прямую переводит в прямую, и, значит, по определению является аффинным. В противном случае обозначим $P(l_\infty)$ через a и рассмотрим произвольное проективное преобразование Q, исключительной прямой которого является a. Обозначим $Q \circ P$ через R. Тогда $R(l_\infty) = l_\infty$, и, значит, как было показано выше, R аффинно. Следовательно, $P = Q^{-1} \circ R$ проективно.

30.15. а) Достаточно показать, что точки A, B, C, D можно перевести проективным преобразованием в вершины квадрата. Пусть E и F — точки (возможно, бесконечно удалённые) пересечения прямой AB с прямой CD и прямой BC с прямой AD соответственно. Если прямая EF конечна, то существует центральное проектирование плоскости ABC на некоторую плоскость α, для которого EF — исключительная прямая. В качестве центра проецирования можно взять произвольную точку O вне плоскости ABC, а в качестве плоскости α — произвольную плоскость, параллельную плоскости OEF и не совпадающую с ней. При этом точки A, B, C, D проецируются в вершины параллелограмма, который уже при помощи аффинного преобразования можно перевести в квадрат. Если же прямая EF бесконечно удалённая, то $ABCD$ — уже параллелограмм.

б) В силу задачи а) нам достаточно разобрать случай, когда $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — один и тот же параллелограмм. В этом случае его вершины неподвижны, а значит, неподвижны две точки бесконечно удалённой прямой, в которых пересекаются продолжения противоположных сторон. Поэтому согласно задаче 30.14 а) отображение должно быть аффинным, и, следовательно, согласно задаче 29.6, — тождественным.

в) Поскольку прямые l и l_1 мы можем спроецировать на бесконечно удалённые прямые (см. решение задачи а)), нам достаточно доказать, что существует аффинное преобразование, которое данную точку O отображает в данную точку O_1, а прямые, параллельные данным прямым a, b, c соответственно, отображает на прямые, параллельные данным прямым a_1, b_1, c_1 соответственно. Можно считать, что прямые a, b, c проходят через O, а прямые a_1, b_1, c_1 — через O_1. Выберем на c и c_1 произвольные точки C и C_1 и проведём через каждую из них по две прямые a', b' и a_1', b_1' параллельно прямым a, b и a_1, b_1 соответственно. Тогда аффинное преобразование, которое параллелограмм, ограниченный прямыми a, a', b, b', переводит в параллелограмм, ограниченный прямыми a_1, a_1', b_1, b_1' (см. задачу 29.6 в), является искомым.

г) Не обязательно. Преобразование из задачи 30.21 (как и тождественное преобразование) оставляет неподвижными точку O и прямую a.

30.16. а) Рассмотрим на координатной плоскости Oxz точки $O(0, 0)$, $N(0, 1)$, $E(1, 0)$. Для произвольной точки M, лежащей на дуге NE единичной окружности (см. рис. 30.2), обозначим через P середину отрезка EM,

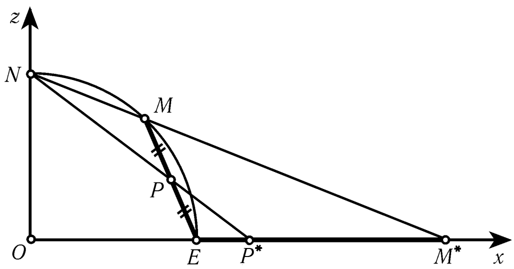


Рис. 30.2

а через M^* и P^* — точки пересечения прямых NM и NP соответственно с прямой OE.

Докажем, что для любого числа $k>2$ можно выбрать точку M таким образом, что $M^*E : P^*E = k$. Пусть $A(a,\, b)$ — произвольная точка плоскости, $A^*(t,\, 0)$ — точка пересечения прямых NA и OE, $B(0,\, b)$ — проекция точки A на прямую ON. Тогда

$$t = \frac{A^*O}{ON} = \frac{AB}{BN} = \frac{a}{1-b}.$$

Поэтому, если $(x,\, z)$ — координаты точки M, то точки P, M^*, P^* имеют соответственно координаты

$$P\left(\frac{x+1}{2},\, \frac{z}{2}\right), \quad M^*\left(\frac{x}{1-z},\, 0\right), \quad P^*\left(\frac{(x+1)/2}{1-(z/2)},\, 0\right),$$

значит,

$$M^*E : P^*E = \left(\frac{x}{1-z} - 1\right) : \left(\frac{x+1}{2-z} - 1\right) = \frac{x+z-1}{1-z} : \frac{x+z-1}{2-z} = \frac{2-z}{1-z}.$$

Ясно, что уравнение $(2-z)/(1-z) = k$ имеет решение $z = (k-2)/(k-1)$, причём если $k>2$, то $0<z<1$, и, следовательно, точка $M(\sqrt{1-z^2},\, z)$ требуемая.

Докажем теперь основное утверждение задачи. Обозначим данную окружность и точку внутри её соответственно через S и C. Если точка C является центром окружности S, то требуемым проективным преобразованием является тождественное преобразование. Поэтому будем считать, что C не центр. Обозначим через AB диаметр, содержащий точку C. Пусть для определённости $BC > CA$. Положим $k = BA : AC$. Тогда $k>2$, и, следовательно, как было доказано, на единичной окружности в плоскости Oxz можно расположить точку M так, что $M^*E : P^*E = k = BA : CA$. Поэтому преобразованием подобия окружность S можно перевести в окружность S_1, построенную в плоскости Oxy на отрезке EM^* как на диаметре, так, чтобы точки A, B, C перешли соответственно в точки E, M^*, P^*. При стереографической проекции окружность S_1 проецируется в окружность S_2 на единичной сфере, которая симметрична относительно плоскости Oxz, а значит, и относительно прямой EM. Поэтому EM — диаметр окружности S_2, а его середина — точка P — её центр. Пусть α — плоскость, содержащая окружность S_2. Ясно, что при центральном проектировании плоскости Oxy на плоскость α из северного полюса единичной сферы окружность S_1 перейдёт в S_2, а точка P^* — в её центр P.

б) Диаметр AB, проходящий через M, переходит в диаметр. Поэтому касательные в точках A и B переходят в касательные. Но если параллельные прямые переходят в параллельные, то исключительная прямая им параллельна (см. задачу 30.14 в).

30.17. Рассмотрим на координатной плоскости Oxz точки $O(0,\, 0)$, $N(0,\, 1)$, $E(1,\, 0)$. Для произвольной точки M, лежащей на дуге NE единичной окружности, обозначим через P пересечение луча EM с прямой $z=1$. Ясно, что двигая точку M по дуге NE, мы можем сделать отношение $EM : MP$ равным произвольному числу. Поэтому преобразованием подобия данную окружность S можно перевести в окружность S_1, построенную на отрезке EM как на диаметре в плоскости α, перпендикулярной Oxz, так, чтобы данная прямая l перешла в прямую, проходящую через точку P перпендикулярно плоскости Oxz. Окружность S_1 лежит на единичной сфере с центром в начале координат, следовательно, при стереографической проекции она проецируется в окружность S_2 на плоскости Oxy. Таким образом, при центральном проектировании плоскости α на плоскость Oxy из N окружность S_1 перейдёт в S_2, а прямая l — в бесконечно удалённую прямую.

30.18. Пусть M — произвольная точка на данной хорде. Согласно задаче 30.16 существует проективное преобразование, переводящее данную окружность в окружность, а точку M — в её центр. Поскольку при проективном преобразовании прямая переходит в прямую, данная хорда перейдёт в диаметр.

30.19. Проведём через точку O две произвольные хорды AC и BD. Пусть P и Q — точки пересечения продолжений противоположных сторон четырёхугольника $ABCD$. Рассмотрим произвольное проективное преобразование, которое S отображает в окружность, а O — в её центр. Ясно, что четырёхугольник $ABCD$ при этом преобразовании переходит в прямоугольник, а следовательно, прямая PQ — в бесконечно удалённую прямую.

30.20. Проективное преобразование прямую переводит в прямую, а поскольку центр окружности остаётся на месте, каждый диаметр переходит в диаметр. Поэтому каждая бесконечно удалённая точка, в которой пересекаются прямые, касающиеся окружности в диаметрально противоположных точках, переходит в бесконечно удалённую точку. Следовательно, согласно задаче 30.14 а) данное преобразование аффинно, а согласно задаче 29.12 оно является поворотом или симметрией.

30.21. а) Точка M' лежит на прямой OM, поэтому её положение однозначно определяется отношением $MO:OM'$. Но в силу того, что треугольники MBO и MAM' подобны, $MO:OM'=MB:BA$, а последнее отношение не зависит от выбора прямой l по теореме Фалеса.

б) П е р в о е р е ш е н и е. Если данное преобразование (обозначим его P) доопределить в точке O, положив $P(O)=O$, то, как легко проверить, P задаёт взаимно однозначное преобразование множества всех конечных и бесконечных точек плоскости (чтобы по точке M' построить точку M, надо взять на прямой a произвольную точку A, провести прямые AM', $OB \parallel AM'$ и AB). Ясно, что каждая прямая, проходящая через O, переходит в себя. Каждая прямая l, не проходящая через O, переходит в прямую, параллельную OB и проходящую через A. Остаётся воспользоваться задачей 30.14 г).

В т о р о е р е ш е н и е (набросок). Обозначим данную плоскость через π, и пусть $\pi'=R(\pi)$, где R — некоторый поворот пространства вокруг оси a. Обозначим $R(O)$ через O', и пусть P — проектирование плоскости π на плоскость π' из точки пересечения прямой OO' с плоскостью, проходящей через b параллельно π'. Тогда преобразование $R^{-1}\circ P$ совпадает (докажите самостоятельно) с преобразованием, о котором идёт речь в формулировке задачи.

30.22. П е р в о е р е ш е н и е. Обозначим данное преобразование через P. Доопределим его в точках прямой $x=0$ и в бесконечно удалённых точках, положив $P(0, k)=M_k$, $P(M_k)=(0, k)$, где M_k — бесконечно удалённая точка на прямой $y=kx$. Легко видеть, что доопределенное таким образом отображение P взаимно однозначно. Докажем, что каждая прямая переходит в прямую. Действительно, прямая $x=0$ и бесконечно удалённая прямая переходят одна в другую. Пусть $ax+by+c=0$ — любая другая прямая (т. е. b или c не равно нулю). Поскольку $P\circ P$ — тождественное преобразование, образ любой прямой совпадает с её прообразом. Ясно, что точка $P(x, y)$ лежит на рассматриваемой прямой тогда и только тогда, когда $\dfrac{a}{x}+\dfrac{by}{x}+c=0$, т. е. $cx+by+a=0$. Остаётся воспользоваться задачей 30.14 г).

Второе решение (набросок). Если прямые $x=1$ и $x=0$ обозначить соответственно через a и b, а точку $(-1,\ 0)$ — через O, то данное преобразование совпадает с преобразованием из предыдущей задачи.

30.23. Если прямую f обозначить через b, то преобразование из этой задачи является обратным преобразованию из задачи 30.21.

30.24. Рассмотрим проективное преобразование, для которого прямая PQ является исключительной. Образы l_1' и l_2' прямых l_1 и l_2 при этом преобразовании параллельны, а образами рассматриваемых четырёхугольников являются параллелограммы, у которых две стороны лежат на прямых l_1' и l_2', а две другие стороны параллельны некоторой фиксированной прямой (бесконечно удалённая точка этой прямой является образом точки P). Ясно, что геометрическим местом точек пересечения диагоналей таких параллелограммов является прямая, равноудалённая от прямых l_1' и l_2'.

30.25. Сделаем проективное преобразование с исключительной прямой EF. Тогда четырёхугольник $ABCD$ перейдёт в параллелограмм, а прямые KL и MN — в прямые, параллельные его сторонам и проходящие через точку пересечения диагоналей, т. е. в средние линии. Поэтому образы точек K, L, M, N являются серединами сторон параллелограмма и, следовательно, образы прямых KN и LM параллельны, т. е. точка X переходит в бесконечно удалённую точку, а значит, X лежит на исключительной прямой EF.

30.26. Сделаем проективное преобразование с исключительной прямой AB. Образы точек при этом преобразовании будем обозначать буквами со штрихом. Рассмотрим гомотетию с центром в точке O' (или параллельный перенос, если O' — бесконечно удалённая точка), переводящую точку C_1' в C_2'. При этой гомотетии отрезок $B_1'C_1'$ перейдёт в отрезок $B_2'C_2'$, поскольку $B_1'C_1' \parallel B_2'C_2'$. Аналогично $C_1'A_1'$ перейдёт в $C_2'A_2'$. Поэтому соответственные стороны треугольников $A_1'B_1'C_1'$ и $A_2'B_2'C_2'$ параллельны, т. е. все три точки A', B', C' лежат на бесконечно удалённой прямой.

30.27. Рассмотрим проективное преобразование, исключительная прямая которого проходит через точки пересечения прямых AB_1 и BA_1, BC_1 и CB_1, и обозначим через A', B', … образы точек A, B, … Тогда $A'B_1' \parallel B'A_1'$, $B'C_1' \parallel C'B_1'$, и надо доказать, что $C'A_1' \parallel A'C_1'$ (см. задачу 1.12 а).

30.28. В результате проективного преобразования с исключительной прямой PQ задача сводится к задаче 4.55.

30.29. Применив сначала проективное преобразование с исключительной прямой OO_1, а затем подходящее аффинное преобразование, можно считать, что A и C_1 — противоположные вершины квадрата, а остальные данные точки лежат на его сторонах или их продолжениях. Поэтому можно считать, что данные точки имеют следующие координаты: $C_1(0,\ 0)$, $A(1,\ 1)$, $B(b,\ 0)$, $B_1(b,\ 1)$, $C(0,\ a)$ и $A_1(1,\ a)$. Координаты $(x_0,\ y_0)$ точки пересечения прямых BA_1 и CB_1 находятся как решение системы уравнений

$$\frac{x_0-b}{y_0}=\frac{1-b}{a}, \qquad \frac{x_0}{y_0-a}=\frac{b}{1-a},$$

т. е. $ax_0+(b-1)y_0=ab$, $(a-1)x_0+by_0=ab$. Вычитая одно уравнение из другого, получаем $x_0=y_0$. Это означает, что точка $(x_0,\ y_0)$ лежит на прямой AC_1.

30.30. Сделав проективное преобразование с исключительной прямой, параллельной l и проходящей через точку пересечения прямых PP_1 и QQ_1, а затем аффинное преобразование, которое образы прямых l и PP_1 делает перпендикулярными, мы можем считать, что прямые PP_1 и QQ_1 перпендикулярны прямой l, а наша задача заключается в том, чтобы доказать, что прямая RR_1 тоже перпендикулярна l (точки P_1, Q_1, R_1 останутся серединами соответствующих отрезков, поскольку эти отрезки параллельны исключительной прямой; см. задачу 30.14 б). Отрезок PP_1 является медианой и высотой, а значит, и биссектрисой в треугольнике, образованном прямыми l, AB и CD. Аналогично, QQ_1 — биссектриса в треугольнике, образованном прямыми l, AC и BD. Из этого и из того, что $PP_1 \parallel QQ_1$, следует, что $\angle BAC = \angle BDC$. Следовательно, четырёхугольник $ABCD$ вписанный, и $\angle ADB = \angle ACB$. Обозначим точки, в которых l пересекает прямые AC и BD, через M и N (рис. 30.3).

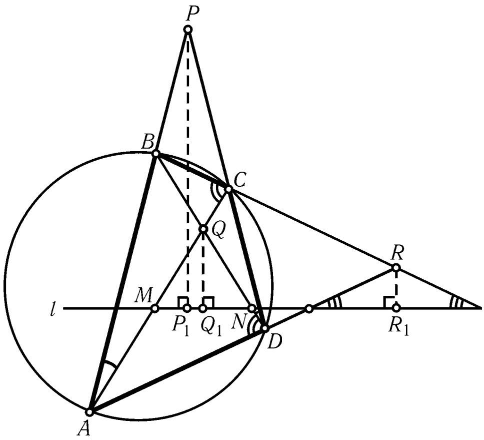


Рис. 30.3

Тогда угол между l и AD равен $\angle ADB - \angle QNM = \angle ACB - \angle QMN$, т. е. он равен углу между l и BC. Следовательно, треугольник, ограниченный прямыми l, AD и BC, равнобедренный, и отрезок RR_1, являющийся его медианой, является также его высотой, т. е. он перпендикулярен прямой l, что и требовалось доказать.

30.31. Сделав проективное преобразование с исключительной прямой, параллельной l и проходящей через точку A, мы можем считать, что точка A бесконечно удалённая, т. е. прямые AB и AC параллельны. При этом согласно задаче 30.14 б) точки A_1, B_1, C_1 по-прежнему будут серединами соответствующих отрезков, так как эти отрезки лежат на прямой, параллельной исключительной. Два треугольника, образованные прямыми l, AB, BC и l, AC, BC, гомотетичны, следовательно, прямые BB_1 и CC_1, являющиеся медианами этих треугольников, параллельны. Таким образом, четырёхугольник BB_2CC_2 является параллелограммом, поскольку у него параллельны противоположные стороны. Остаётся заметить, что точка A_2 лежит на середине диагонали BC этого параллелограмма, а значит, и на диагонали B_2C_2.

30.32. Сделаем проективное преобразование, исключительной прямой которого является прямая PQ. Через A', B', ... обозначим образы точек A, B, ... Тогда $A'B'C'D'$ — параллелограмм, R' — точка пересечения его диагоналей, Q' — бесконечно удалённая точка прямой $Q'R'$, K' и L' — точки, высекаемые сторонами параллелограмма на прямой $Q'R'$. Ясно, что точки K' и L' симметричны относительно точки R'. Следовательно,

$$(Q'R'K'L') = \frac{Q'K'}{Q'L'} : \frac{R'K'}{R'L'} = 1 : \frac{R'K'}{R'L'} = -1.$$

Остаётся заметить, что согласно задаче 30.2 б) $(QRKL) = (Q'R'K'L')$.

30.33. Согласно теореме Паскаля точки пересечения прямых A_1B_2 и C_1C_2, B_1C_2 и A_1A_2, C_1A_2 и B_1B_2 лежат на одной прямой. Переведём эту прямую на бесконечность. После этого можно воспользоваться результатом задачи 14.15.

30.34. Пусть $A_1 \ldots A_n$ — правильный n-угольник, l_i — прямая, содержащая его сторону, противоположную вершине A_i, B_i — точка пересечения прямой l_i с бесконечно удалённой прямой. Разобьём точки $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$ на пары (A_i, B_i). Покажем, что это разбиение обладает требуемым свойством. Для этого нужно рассмотреть прямые B_iB_j, A_iA_j и A_iB_j $(i \neq j)$.

1) Прямая B_iB_j содержит все точки $B_1, \ldots, B_n$. Поскольку $n \geqslant 3$, среди них есть точка, отличная от B_i и B_j.

2) Прямая A_iA_j параллельна одной из прямых l_k, поскольку число n нечётно. Следовательно, прямая A_iA_j проходит через точку B_k.

3) Если $i \neq j$, то прямая, проходящая через вершину A_i параллельно прямой l_j, содержит некоторую вершину A_k, $k \neq i$. Поэтому прямая A_iB_j проходит через точку A_k.

Применив к набору точек $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$ проективное преобразование, можно добиться, чтобы все эти точки не были бесконечно удалёнными.

30.35. Сделаем проективное преобразование, которое вписанную окружность четырёхугольника переводит в окружность, а точку пересечения прямых, соединяющих противоположные точки касания, в её центр (см. задачу 30.16 а). Утверждение задачи теперь следует из того, что получившийся четырёхугольник симметричен относительно центра окружности.

30.36. Сделаем проективное преобразование, которое вписанную окружность переводит в окружность, а точку пересечения двух из трёх рассматриваемых прямых — в её центр (см. задачу 30.16 а). Тогда образы этих двух прямых являются одновременно биссектрисами и высотами образа данного треугольника, следовательно, он является правильным. Для правильного треугольника утверждение задачи очевидно.

30.37. Рассмотрим отдельно два случая.

1. Точка P лежит вне S. Сделаем проективное преобразование, при котором окружность S перейдёт в окружность, а точка P — в бесконечно удалённую точку (см. задачу 30.17), т. е. образы всех прямых, проходящих через P, будут друг другу параллельны. Тогда в задаче б) образом искомого ГМТ является прямая l — их общий перпендикуляр, проходящий через центр окружности, а в задаче а) — прямая l, из которой выкинут диаметр окружности. (Для доказательства нужно воспользоваться симметрией относительно прямой l.) Следовательно, само искомое ГМТ для задачи б) есть прямая, проходящая через точки касания S с касательными, проведёнными через точку P, а для задачи а) — лежащая вне S часть этой прямой.

2. Точка P лежит внутри S. Сделаем проективное преобразование, при котором окружность S перейдёт в окружность, а точка P — в её центр (см. задачу 30.16 а). Тогда в обеих задачах образом искомого ГМТ является бесконечно удалённая прямая. Следовательно, само искомое ГМТ есть прямая.

Полученная прямая в обоих случаях совпадает с полярой точки P относительно S (см. задачу 30.19).

30.38. Обозначим через m поляру точки O относительно окружности S, а через N — отличную от M точку пересечения S с прямой OM. Обозначим через Q композицию проецирований l на S из M и S на m из N. Согласно задаче 30.9 это отображение является проективным. Докажем, что P есть композиция Q с проецированием m на l из M. Пусть A — произвольная точка на l, B — её проекция на S из M, C — проекция B на S из O, D — пересечение прямых BN и CM. Согласно задаче 30.37 б) точка D лежит на прямой m, т. е. $D = Q(A)$. Ясно, что $P(A)$ — это проекция D на l из M.

30.39. Обе задачи становятся очевидными после проективного преобразования, переводящего окружность S в окружность, а прямую KP — в бесконечно удалённую (см. задачу 30.17).

а) Требуемое ГМТ лежит на прямой, равноудалённой от образов прямых AK и BK.

б) Требуемая точка есть центр образа S.

30.40. Пусть A', B', … — образы точек A, B, … при проективном преобразовании, которое вневписанную окружность треугольника ABC переводит в окружность, а хорду EF — в диаметр (см. задачу 30.18). Тогда A' — бесконечно удалённая точка прямых, перпендикулярных диаметру $E'F'$, и нам нужно доказать, что прямая $D'T'$ содержит эту точку, т. е. тоже перпендикулярна $E'F'$. Так как $\triangle T'B'E' \sim \triangle T'F'C'$, то $C'T' : T'E' = C'F' : B'E'$. Но $C'D' = C'F'$ и $B'D' = B'E'$ как касательные, проведённые из одной точки, следовательно, $C'T' : T'E' = C'D' : D'B'$, т. е. $D'T' \parallel B'E'$.

30.41. Согласно задаче 30.16 а) достаточно рассмотреть случай, когда диагонали AD и BE проходят через центр окружности. Остаётся воспользоваться результатом задачи 6.88 для $n = 3$.

30.42. Рассмотрим проективное преобразование, переводящее окружность S в окружность, а точки пересечения прямых AB и DE, BC и EF — в бесконечно удалённые точки (см. задачу 30.17). Наша задача свелась к задаче 2.12.

30.43. Рассмотрим проективное преобразование, которое окружность S переводит в окружность, а точку O — в её центр O' (см. задачу 30.16 а). Пусть A', B', … — образы точек A, B, … Тогда $A'B'$, $M'N'$ и $P'Q'$ — диаметры. Поэтому при центральной симметрии относительно O' точка E' переходит в F', т. е. O' — середина отрезка $E'F'$. Так как хорда AB перпендикулярна диаметру, проходящему через O, то согласно задаче 30.16 б) она параллельна исключительной прямой. Следовательно, согласно задаче 30.14 б) отношения отрезков, лежащих на прямой AB, сохраняются, а значит, O — середина отрезка EF.

30.44. Рассмотрим проективное преобразование, переводящее данную окружность в окружность, а отрезок AD — в её диаметр (см. задачу 30.18). Пусть A', B', … — образы точек A, B, … Тогда S переходит в бесконечно удалённую точку S' прямых, перпендикулярных прямой $A'D'$. Но $A'C'$ и $B'D'$ — высоты в $\triangle A'D'P'$, следовательно, Q' — ортоцентр этого треугольника. Поэтому прямая $P'Q'$ — тоже высота, следовательно, она проходит через точку S'.

30.45. Согласно задаче 30.15 достаточно рассмотреть только тот случай, когда $ABCD$ — квадрат. Нам надо доказать, что композиция описанных в условии проектирований является тождественным преобразованием. Согласно задаче 30.4 проективное преобразование тождественно, если у него имеются три различные неподвижные точки. Несложно проверить, что точки A, B и бесконечно удалённая точка прямой AB являются неподвижными для данного преобразования.

30.46. При проецировании прямой QR из точки A на прямую CD точки Q, R, K, L проецируются в точки D, C, P, L соответственно. Следовательно, согласно задаче 30.2 б) $(QRKL) = (DCPL)$. Аналогично, проецируя из точки B прямую CD на прямую QR, получаем $(DCPL) = (RQKL)$, следовательно, $(QRKL) = (RQKL)$. С другой стороны,

$$(RQKL) = \frac{RK}{RL} : \frac{QK}{QL} = \left(\frac{QK}{QL} : \frac{RK}{RL}\right)^{-1} = (QRKL)^{-1}.$$

Из этих двух равенств следует, что $(QRKL)^2 = 1$, т. е. либо $(QRKL) = 1$, либо $(QRKL) = -1$. Но согласно задаче 30.8 двойное отношение различных точек не может равняться единице.

30.47. Обозначим точки пересечения прямых AB_1 и BA_1, BC_1 и CB_1, CA_1 и AC_1 через P, Q, R соответственно, а точку пересечения прямых PQ и CA_1 — через R_1. Нам надо доказать, что точки R и R_1 совпадают. Пусть D — точка пересечения AB_1 и CA_1. Рассмотрим композицию проектирований: прямой CA_1 на прямую l_1 из точки A, l_1 на CB_1 из B и CB_1 на CA_1 из P. Легко видеть, что получившееся проективное преобразование прямой CA_1 точки C, D и A_1 оставляет неподвижными, а точку R переводит в R_1. Но согласно задаче 30.5 проективное преобразование с тремя неподвижными точками тождественно. Следовательно $R_1 = R$.

30.48. Пусть F' — точка, симметричная F относительно O. Нам надо доказать, что $F' = E$. Согласно задаче 30.9 композиция проецирования прямой AB на окружность S из точки M, а затем S обратно на AB из Q является проективным преобразованием прямой AB. Рассмотрим композицию этого преобразования с симметрией относительно точки O. При этом точки A, B, O, E переходят соответственно в B, A, F', O. Следовательно, согласно задаче 30.2 б), $(ABOE) = (BAF'O)$. С другой стороны, ясно, что

$$(BAF'O) = \frac{BF'}{AF'} : \frac{BO}{AO} = \frac{AO}{BO} : \frac{AF'}{BF'} = (ABOF'), \qquad \text{т. е.} \quad (ABOE) = (ABOF'),$$

следовательно, согласно задаче 30.3, $E = F'$.

30.49. Обозначим точки пересечения прямых AB и DE, BC и EF, CD и FA через P, Q, R соответственно, а точку пересечения прямых PQ и CD — через R'. Нам надо доказать, что точки R и R' совпадают. Пусть G — точка пересечения AB и CD. Рассмотрим композицию проецирований прямой CD на данную окружность из точки A, а затем — окружности на прямую BC из точки E. Согласно задаче 30.9 это отображение проективно. Легко видеть, что его композиция с проецированием BC на CD из точки P оставляет на месте точки C, D и G, а точку R переводит в R'. Но согласно задаче 30.5 проективное преобразование с тремя неподвижными точками тождественно. Следовательно, $R' = R$.

30.50. Обозначим данные прямую и окружность через l и S соответственно. Пусть O — произвольная точка данной окружности, и пусть A_1, A_1', B_1, B_1', C_1, C_1' — образы точек A, A', B, B', C, C' при проецировании прямой l на окружность S из точки O, т. е. A_1 (соответственно A_1', B_1, ...) — отличная от O точка пересечения прямой AO (соответственно $A'O$, BO, ...) с окружностью S. Обозначим через B_2 точку пересечения прямых $A_1'B_1$ и A_1B_1', а через C_2 — точку пересечения прямых $A_1'C_1$ и A_1C_1'. Пусть P_1 — композиция проецирований прямой l на окружность S из точки O, а затем окружности S на прямую B_2C_2 из точки A_1'; P_2 — композиция проецирований B_2C_2 на S из точки A_1, а затем S на l из точки O. Тогда согласно задаче 30.9 преобразования P_1 и P_2 являются проективными, причём их композиция отображает точки A, B, C соответственно в A', B', C'.

Ясно, что все рассмотренные точки можно построить при помощи одной линейки (в том порядке, в котором они вводились).

а) Пусть M_1 — отличная от O точка пересечения прямой MO с окружностью S; $M_2 = P_1(M)$ — точка пересечения прямых $A_1'M_1$ и B_2C_2; M_3 — отличная от A_1 точка пересечения прямой M_2A_1 с окружностью S; $P(M) = P_2(P_1(M))$ — точка пересечения прямых l и OM_3.

б) Пусть M_1 и N_1 — точки пересечения окружности S с прямой B_2C_2. Тогда неподвижные точки преобразования P — это точки пересечения прямых OM_1 и ON_1 с прямой l.

30.51. а) Искомой точкой X является неподвижная точка композиции проецирования l_1 на l_2 из точки A, сдвига вдоль прямой l_2 на расстояние a и проецирования l_2 на l_1 из точки B. Неподвижная точка проективного преобразования строится в задаче 30.50.

б) В решении задачи а) сдвиг надо заменить на симметрию относительно точки E.

30.52. а) Обозначим через k число, которому должно равняться отношение AX/BY. Рассмотрим проективное преобразование прямой a, являющееся композицией проецирования прямой a на прямую b из точки P, движения плоскости, переводящего b в a и B в A, и, наконец, гомотетии с центром A и коэффициентом k. Искомая точка X является неподвижной точкой этого преобразования. Построение точки Y очевидно.

б) Обозначим через k число, которому должно равняться произведение $AX \cdot BY$, через Q — точку пересечения прямых, проходящих через точки A и B параллельно прямым b и a соответственно, и пусть $p = AQ \cdot BQ$. Рассмотрим проективное преобразование прямой a, являющееся композицией проецирования прямой a на прямую b из точки P, проецирования b на a из Q, и гомотетии с центром A и коэффициентом k/p. Пусть X — неподвижная точка этого преобразования, Y — её образ при первом проецировании, а X_1 — образ Y при втором проецировании. Докажем, что прямая XY искомая. Действительно, из подобия треугольников AQX_1 и BYQ следует

$$AX_1 \cdot BY = AQ \cdot BQ = p,$$

а значит,

$$AX \cdot BY = \frac{k}{p} AX_1 \cdot BY = k.$$

30.53. Пусть P — данная точка; A, B, C — попарные точки пересечения данных прямых a, b, c; X, Y, Z — точки пересечения данных прямых с ис-

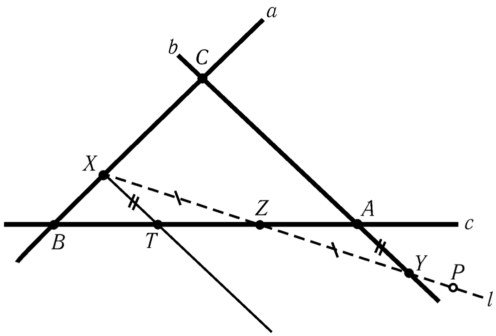


Рис. 30.4

комой прямой l (рис. 30.4). По предположению $XZ = ZY$. Пусть T — точка пересечения прямой c с прямой, проходящей через X параллельно b. Очевидно, что $XT = AY$. Из подобия треугольников XTB и CAB следует, что $XB : XT = CB : CA$, откуда $BX : YA = CB : CA$, т. е. отношение $BX : YA$ известно. Таким образом, задача сведена к задаче 30.52 а).

30.54. а) Согласно задаче 30.9 композиция проецирований CD на S из A и S на CD из B является проективным преобразованием прямой CD. Пусть M — неподвижная точка композиции этого преобразования и сдвига вдоль прямой CD на расстояние a. Тогда проекция M на S из A является искомой точкой. Неподвижная точка проективного преобразования строится в задаче 30.50.

б) В решении задачи а) сдвиг надо заменить на симметрию относительно точки E.

30.55. а) Проведём произвольную окружность S через точку P. Согласно задаче 30.10 композиция проецирования l на S из P, поворота вокруг центра окружности S на угол 2α и проецирования S на l из P является проективным преобразованием прямой l. Тогда (по теореме о вписанном угле) искомой точкой является неподвижная точка композиции этого преобразования и сдвига вдоль прямой CD на данное расстояние XY. Неподвижная точка проективного преобразования строится в задаче 30.50.

б) Проведём произвольные окружности S_1 и S_2 через точки P и Q соответственно. Рассмотрим композицию проецирования l_1 на S_1 из P, поворота вокруг центра окружности S_1 на угол 2α и проецирования S_1 на l_2 из P. Согласно задаче 30.10 это отображение является проективным. Аналогично, проективным отображением является композиция проецирования l_2 на S_2 из Q, поворота вокруг центра окружности S_2 на угол 2β и проецирования S_2 на l_1 из Q. По теореме о вписанном угле искомой точкой X является неподвижная точка композиции этих отображений, и для её построения можно воспользоваться задачей 30.50.

30.56. а) Обозначим данные точки $M_1, \ldots, M_n$, а данные прямые — $l_1, \ldots, l_n$. Вершина искомого многоугольника есть неподвижная точка проективного преобразования прямой l_1, являющегося композицией проектирований l_1 на l_2 из M_1, l_2 на l_3 из M_2, ..., l_n на l_1 из M_n. Неподвижная точка проективного преобразования строилась в задаче 30.50.

б) Выберем произвольную точку на данной окружности и посредством проецирования из выбранной точки отождествим данную окружность с некоторой прямой l. Согласно задаче 30.38 центральное проектирование окружности на себя при данном отождествлении является проективным преобразованием прямой l. Ясно, что вершина искомого многоугольника есть неподвижная точка композиции последовательных проектирований данной окружности на себя из данных точек. Неподвижная точка проективного преобразования строилась в задаче 30.50.

в) В решении задачи б) надо некоторые центральные проектирования заменить либо на повороты вокруг центра окружности, если соответствующая сторона имеет данную длину, либо на симметрии, если соответствующая сторона имеет данное направление (ось симметрии — диаметр, перпендикулярный данному направлению).

30.57. Предположим, что нам удалось найти требуемое построение, т. е. написать некоторую инструкцию, в результате выполнения которой всегда получается середина данного отрезка. Выполним это построение и рассмотрим проективное преобразование, которое концы данного отрезка оставляет неподвижными, а середину переводит в другую точку. Это преобразование можно выбрать так, чтобы исключительная прямая не проходила ни через одну из точек, получающихся в результате промежуточных построений.

Выполним нашу якобы существующую инструкцию ещё раз, но теперь всякий раз, когда нам будут встречаться слова «возьмём произвольную точку (соответственно прямую)», будем брать образ той точки (соответственно прямой), которую брали при первом выполнении построения. Поскольку при проективном преобразовании прямая переходит в прямую, а пересечение прямых — в пересечение их образов, причём в силу выбора проективного преобразования это пересечение всегда конечно, то на каждом шаге второго построения будем получать образ результата первого построения, поэтому в конце получим не середину отрезка, а её образ. Приходим к противоречию.

З а м е ч а н и е. Фактически мы доказали следующее утверждение: если существует проективное преобразование, которое каждый из объектов $A_1, \ldots, A_n$ переводит в себя, а объект B в себя не переводит, то, исходя из объектов $A_1, \ldots, A_n$, объект B невозможно построить с помощью одной линейки.

30.58. Утверждение задачи непосредственно вытекает из замечания в конце решения предыдущей задачи и из задачи 30.16 а).

ГЛАВА 31

ЭЛЛИПС, ПАРАБОЛА, ГИПЕРБОЛА

Пусть Oxy — некоторая прямоугольная система координат на плоскости, а $Q(x, y)$ — выражение вида $ax^2 + 2bxy + cy^2$, где хотя бы одно из чисел a, b, c отлично от нуля. В этой главе мы будем заниматься свойствами кривых, заданных уравнениями вида

$$Q(x, y) + 2dx + 2ey = f. \tag{1}$$

Такие кривые называют *кривыми второго порядка*.

§ 1. Классификация кривых второго порядка

Будем говорить, что одна кривая на плоскости *изометрична* другой кривой, если существует движение плоскости, переводящее первую кривую во вторую. Наша ближайшая цель — с помощью движений привести кривую (1) к простейшему виду.

31.1. Докажите, что если $ac - b^2 \neq 0$, то с помощью параллельного переноса $x' = x + x_0$, $y' = y + y_0$ уравнение (1) можно привести к виду

$$ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2 = f', \tag{2}$$

где $f' = f - Q(x_0, y_0) + 2(dx_0 + ey_0)$.

Начало системы координат, в которой уравнение кривой имеет вид (2), называют *центром* кривой второго порядка. Ясно, что центр кривой является её центром симметрии.

31.2. Докажите, что с помощью поворота

$$x' = x'' \cos\varphi + y'' \sin\varphi, \qquad y' = -x'' \sin\varphi + y'' \cos\varphi \tag{3}$$

в уравнении (2) коэффициент при $x''y''$ можно сделать равным нулю.

31.3. Докажите, что при повороте (3) выражение $ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2$ переходит в $a_1x''^2 + 2b_1x''y'' + c_1y''^2$, причём $a_1c_1 - b_1^2 = ac - b^2$.

31.4. Докажите, что если $ac - b^2 \neq 0$, то кривая (1) изометрична либо кривой $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ (называемой *эллипсом*), либо кривой $\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ (называемой *гиперболой*), либо паре пересекающихся прямых $\dfrac{x^2}{\alpha^2} = \dfrac{y^2}{\beta^2}$, либо представляет собой одну точку или пустое множество.

Оси системы координат, в которой уравнение кривой имеет такой вид, как в условии задачи 31.4, называют *осями* кривой. Ясно, что оси кривой второго порядка являются её осями симметрии.

Для гиперболы $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ прямые $\frac{x}{\alpha}=\pm\frac{y}{\beta}$ называют *асимптотами*.

31.5. Докажите, что если $ac-b^2=0$, то кривая (1) изометрична либо кривой $y^2=2px$ (называемой *параболой*), либо паре параллельных прямых $y^2=c^2$, либо паре слившихся прямых $y^2=0$, либо представляет собой пустое множество.

Ось Ox системы координат, в которой уравнение параболы имеет вид $y^2=2px$, называют *осью* параболы. Ясно, что ось параболы является её осью симметрии.

Эллипс, параболу и гиперболу называют *кониками*. Это название связано с тем, что они являются сечениями конуса плоскостями.

§ 2. Эллипс

31.6. Докажите, что множество точек, сумма расстояний от которых до двух заданных точек F_1 и F_2 — постоянная величина, есть эллипс.

Точки F_1 и F_2 называют *фокусами* эллипса.

31.7. Докажите, что середины параллельных хорд эллипса лежат на одной прямой.

Диаметром эллипса называют произвольную хорду, проходящую через его центр. *Сопряжёнными* диаметрами эллипса называют пару его диаметров, обладающих следующим свойством: середины хорд, параллельных первому диаметру, лежат на втором диаметре. Решение задачи 31.7 показывает, что тогда середины хорд, параллельных второму диаметру, лежат на первом диаметре.

Если эллипс является образом окружности при аффинном преобразовании, то его сопряжённые диаметры являются образами двух перпендикулярных диаметров этой окружности.

31.8. Докажите, что уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, проведённой в точке $X=(x_0, y_0)$, имеет вид $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

31.9. Докажите, что эллиптическое зеркало обладает тем свойством, что пучок лучей света, исходящий из одного фокуса, сходится в другом.

31.10. а) Докажите, что для любого параллелограмма существует эллипс, касающийся сторон параллелограмма в их серединах.

б) Докажите, что для любого треугольника существует эллипс, касающийся сторон треугольника в их серединах.

31.11. Пусть AA' и BB' — сопряжённые диаметры эллипса с центром O. Докажите, что:

а) площадь треугольника AOB не зависит от выбора сопряжённых диаметров;

б) величина $OA^2 + OB^2$ не зависит от выбора сопряжённых диаметров.

31.12*. а) Докажите, что проекции фокусов эллипса на все касательные лежат на одной окружности.

б) Пусть d_1 и d_2 — расстояния от фокусов эллипса до касательной. Докажите, что величина d_1d_2 не зависит от выбора касательной.

31.13*. Из точки O проведены касательные OA и OB к эллипсу с фокусами F_1 и F_2. Докажите, что $\angle AOF_1 = \angle BOF_2$ и $\angle AF_1O = \angle BF_1O$.

31.14*. В треугольник вписан эллипс. Докажите, что фокусы эллипса изогонально сопряжены относительно этого треугольника.

31.15*. В четырёхугольник $ABCD$ вписан эллипс с фокусом F. Докажите, что $\angle AFB + \angle CFD = 180°$.

31.16*. Параллелограмм описан около эллипса. Докажите, что диагонали параллелограмма содержат сопряжённые диаметры эллипса.

Для эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $a \geqslant b$, число $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ называют *эксцентриситетом*. Прямые $x = \pm a/e$ называют *директрисами*. (У эллипса две директрисы.)

31.17*. а) Докажите, что отношение расстояний от точки эллипса до фокуса и до одной из директрис равно эксцентриситету e.

б) Даны точка F и прямая l. Докажите, что множество точек X, для которых отношение расстояния от X до F к расстоянию от X до l равно постоянному числу $e < 1$, — эллипс.

31.18*. Вокруг эллипса описан прямоугольник. Докажите, что длина диагонали прямоугольника не зависит от его положения.

31.19*. Хорда PQ окружности $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ с центром O касается эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Докажите, что прямые PO и QO содержат сопряжённые диаметры эллипса.

31.20*. а) Пусть AA' и BB' — сопряжённые диаметры эллипса с центром O. Проведём через точку B перпендикуляр к прямой OA и отложим на нём отрезки BP и BQ, равные OA. Докажите, что главные оси эллипса являются биссектрисами углов между прямыми OP и OQ.

б) На плоскости нарисована пара сопряжённых диаметров эллипса. С помощью циркуля и линейки постройте его оси.

31.21*. Нормаль к эллипсу в точке A пересекает малую полуось в точке Q, P — проекция центра эллипса на нормаль. Докажите, что $AP \cdot AQ = a^2$, где a — большая полуось.

31.22*. Докажите, что все вписанные в эллипс ромбы описаны вокруг одной окружности.

31.23*. Окружность, центр которой лежит на эллипсе, касается двух сопряжённых диаметров. Докажите, что радиус окружности не зависит от выбора сопряжённых диаметров.

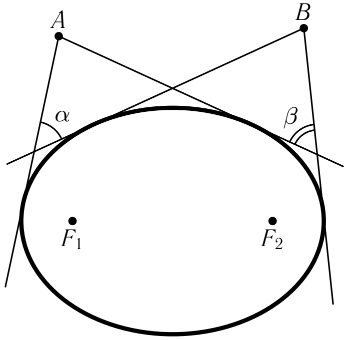


Рис. 31.1

31.24*. а) Из точки O проведены касательные OP и OQ к эллипсу с фокусами F_1 и F_2. Докажите, что

$$\angle POQ = \pi - \frac{1}{2}(\angle PF_1Q + \angle PF_2Q).$$

б) Отрезок AB виден из фокусов F_1 и F_2 под углами φ_1 и φ_2 соответственно. Докажите, что $\varphi_1 + \varphi_2 = \alpha + \beta$ (рис. 31.1).

31.25*. К эллипсу с центром O проведены две параллельные касательные l_1 и l_2. Окружность с центром O_1 касается (внешним образом) эллипса и прямых l_1 и l_2. Докажите, что длина отрезка OO_1 равна сумме полуосей эллипса.

31.26*. Окружность радиуса r с центром C, лежащим на большей полуоси эллипса, касается эллипса в двух точках; O — центр эллипса, a и b — его полуоси. Докажите, что

$$OC^2 = \frac{(a^2 - b^2)(b^2 - r^2)}{b^2}.$$

31.27*. Три окружности, центры которых лежат на большой оси эллипса, касаются эллипса. При этом окружность радиуса r_2 касается (внешним образом) окружностей радиуса r_1 и r_3. Докажите, что

$$r_1 + r_3 = \frac{2a^2(a^2 - 2b^2)}{a^4} r_2.$$

31.28*. N окружностей, центры которых лежат на большой оси эллипса, касаются эллипса. При этом окружность радиуса r_i $(2 \leqslant i \leqslant N-1)$ касается окружностей радиуса r_{i-1} и r_{i+1}. Докажите, что если $3n - 2 \leqslant N$, то

$$r_{2n-1}(r_1 + r_{2n-1}) = r_n(r_n + r_{3n-2}).$$

§ 3. Парабола

31.29. Докажите, что с помощью гомотетии с центром $(0, 0)$ параболу $2py = x^2$ можно перевести в параболу $y = x^2$.

31.30. Окружность пересекает параболу в четырёх точках. Докажите, что центр масс этих точек лежит на оси параболы.

31.31. Две параболы, оси которых перпендикулярны, пересекаются в четырёх точках. Докажите, что эти точки лежат на одной окружности.

31.32. Докажите, что середины параллельных хорд параболы лежат на одной прямой, параллельной оси параболы.

Для параболы $2py = x^2$ точку $(0, p/2)$ называют *фокусом*, а прямую $y = -p/2$ — *директрисой*.

31.33. а) Докажите, что расстояния от любой точки параболы до фокуса и до директрисы равны.

б) Докажите, что множество точек, для которых расстояния до некоторой фиксированной точки и до некоторой фиксированной прямой равны, является параболой.

31.34. Докажите, что пучок лучей света, параллельных оси параболы, после отражения от параболы сходится в её фокусе.

31.35. Докажите, что касательные к параболе $4y = x^2$ в точках $(2t_1, t_1^2)$ и $(2t_2, t_2^2)$ пересекаются в точке $(t_1 + t_2, t_1 t_2)$.

31.36. Из точки O проведены касательные OA и OB к параболе с фокусом F. Докажите, что $\angle AFB = 2\angle AOB$, причём луч OF — биссектриса угла AFB.

31.37. Докажите, что касательные OA и OB к параболе перпендикулярны тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

(1) отрезок AB проходит через фокус параболы;

(2) точка O лежит на директрисе параболы.

31.38*. Касательные к параболе в точках α, β, γ образуют треугольник ABC (рис. 31.2). Докажите, что:

а) описанная окружность треугольника ABC проходит через фокус параболы;

б) высоты треугольника ABC пересекаются в точке, лежащей на директрисе параболы;

в) $S_{\alpha\beta\gamma} = 2S_{ABC}$;

г) $\sqrt[3]{S_{\alpha\beta C}} + \sqrt[3]{S_{\beta\gamma A}} = \sqrt[3]{S_{\alpha\gamma B}}$.

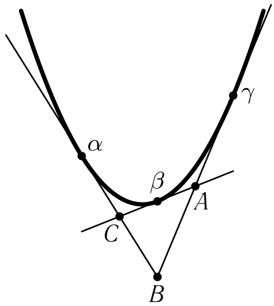


Рис. 31.2

31.39*. Прямая l получена из директрисы параболы гомотетией с центром в фокусе параболы и коэффициентом 2. Из точки O прямой l проведены касательные OA и OB к параболе. Докажите, что ортоцентром треугольника AOB служит вершина параболы.

31.40*. Пучок параллельных лучей света, отразившись от кривой C, сходится в точке F. Докажите, что C — парабола с фокусом F и осью, параллельной лучам света.

§ 4. Гипербола

Гиперболу, заданную уравнением $y = 1/x$, называют *равнобочной*.

Произвольная гипербола получается из равнобочной гиперболы аффинным преобразованием.

31.41. Точки A и B лежат на гиперболе. Прямая AB пересекает асимптоты гиперболы в точках A_1 и B_1.

а) Докажите, что $AA_1 = BB_1$ и $AB_1 = BA_1$.

б) Докажите, что если прямая A_1B_1 касается гиперболы в точке X, то X — середина отрезка A_1B_1.

31.42. Докажите, что окружность девяти точек треугольника ABC, вершины которого лежат на равнобочной гиперболе, проходит через центр O гиперболы.

31.43. Вершины треугольника лежат на гиперболе $xy = 1$. Докажите, что его ортоцентр тоже лежит на этой гиперболе.

31.44. Окружность радиуса $2\sqrt{x_0^2 + x_0^{-2}}$ с центром (x_0, x_0^{-1}) пересекает гиперболу $xy = 1$ в точке $(-x_0, -x_0^{-1})$ и в точках A, B, C. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

31.45. Докажите, что асимптоты гиперболы

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

ортогональны тогда и только тогда, когда $a + c = 0$.

31.46. Докажите, что множество точек, разность расстояний от которых до двух заданных точек F_1 и F_2 — постоянная величина, есть гипербола.

Точки F_1 и F_2 называют *фокусами* гиперболы.

31.47. Докажите, что середины параллельных хорд гиперболы лежат на одной прямой.

Диаметром гиперболы называют произвольную хорду, проходящую через её центр. *Сопряжёнными* диаметрами называют пару её диаметров, обладающих следующим свойством: середины хорд, параллельных первому диаметру, лежат на втором диаметре. Тогда середины хорд, параллельных второму диаметру, лежат на первом диаметре.

31.48. Докажите, что площадь треугольника, образованного асимптотами и касательной к гиперболе, одна и та же для всех касательных.

Для гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ число $e = \sqrt{1 + b^2/a^2}$ называют *эксцентриситетом*. Прямые $x = \pm a/e$ называют *директрисами*. (У гиперболы две директрисы.)

31.49*. а) Докажите, что отношение расстояний от точки гиперболы до фокуса и до одной из директрис равно эксцентриситету e.

б) Даны точка F и прямая l. Докажите, что множество точек X, для которых отношение расстояния от X до F к расстоянию от X до l равно постоянному числу $e > 1$, — гипербола.

31.50*. Найти множество точек пересечения всех пар перпендикулярных касательных к гиперболе.

§ 5. Пучки коник

Введём для удобства следующее обозначение. Будем считать, что прямая AB задаётся уравнением $l_{AB} = 0$; это уравнение определено с точностью до пропорциональности. В координатах x, y функция l_{AB} имеет вид $l_{AB}(x, y) = ax + by + c$, причём l_{AB} обращается в нуль в точках A и B.

31.51. Пусть точки A, B, C и D лежат на конике, заданной уравнением второй степени $f = 0$. Докажите, что

$$f = \lambda l_{AB} l_{CD} + \mu l_{BC} l_{AD},$$

где λ и μ — некоторые числа.

Пучком коник, порождённым кониками $f = 0$ и $g = 0$, называют семейство коник $\lambda f + \mu g = 0$. Результат задачи 31.51 можно интерпретировать следующим образом: пучок коник — это семейство коник, проходящих через 4 фиксированные точки.

31.52*. Докажите, что если вершины шестиугольника $ABCDEF$ лежат на одной конике, то точки пересечения продолжений его противоположных сторон (т. е. прямых AB и DE, BC и EF, CD и AF) лежат на одной прямой (Паскаль).

Будем называть *прямой Паскаля* шестиугольника, вписанного в конику, прямую, на которой лежат точки пересечения пар его противоположных сторон. При этом шестиугольником можно считать и замкнутую самопересекающуюся ломаную.

31.53*. а) Пусть точки A, B, C, D, E и F лежат на одной конике. Докажите, что тогда прямые Паскаля шестиугольников $ABCDEF$, $ADEBCF$ и $ADCFEB$ пересекаются в одной точке (Штейнер).

б) Пусть точки A, B, C, D, E и F лежат на одной окружности. Докажите, что тогда прямые Паскаля шестиугольников $ABFDCE$, $AEFBDC$ и $ABDFEC$ пересекаются в одной точке (Киркман).

31.54*. Пусть хорды KL и MN проходят через середину O хорды AB данной окружности. Докажите, что прямые KN и ML пересекают прямую AB в точках, равноудалённых от точки O (*задача о бабочке*).

31.55*. Пусть стороны самопересекающихся четырёхугольников $KLMN$ и $K'L'M'N'$, вписанных в одну и ту же окружность, пересекают хорду AB этой окружности в точках P, Q, R, S и P', Q', R', S' соответственно (сторона KL — в точке P, LM — в точке Q, и т. д.). Докажите, что если три из точек P, Q, R, S совпадают с соответственными тремя из точек P', Q', R', S', то и оставшиеся две точки тоже совпадают. (Предполагается, что хорда AB не проходит через вершины четырёхугольников.)

31.56*. Докажите, что любая гипербола, проходящая через вершины треугольника ABC и точку пересечения его высот, является гиперболой с перпендикулярными асимптотами.

31.57*. Две коники имеют 4 общих точки. Докажите, что эти точки лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда оси коник перпендикулярны.

31.58*. Докажите, что центры коник, проходящих через точки A, B, C и D, образуют конику Γ.

31.59*. Докажите следующие свойства коники Γ из задачи 31.58.

а) Γ проходит через 6 середин отрезков, соединяющих пары данных точек, и через 3 точки пересечения прямых, соединяющих пары данных точек.

б) Центр Γ совпадает с центром масс точек A, B, C и D.

в) Если D — точка пересечения высот треугольника ABC, то Γ — окружность девяти точек этого треугольника.

г) Если четырёхугольник $ABCD$ вписанный, то Γ — гипербола с перпендикулярными асимптотами. В этом случае оси всех коник пучка параллельны асимптотам Γ.

31.60*. Пусть коники Γ и Γ_1 касаются в точках A и B, а коники Γ и Γ_2 касаются в точках C и D, причём Γ_1 и Γ_2 имеют четыре общие точки. Докажите, что у коник Γ_1 и Γ_2 есть пара общих хорд, проходящих через точку пересечения прямых AB и CD.

§ 6. Коники как геометрические места точек

31.61. Пусть a и b — фиксированные комплексные числа. Докажите, что при изменении φ от 0 до 2π точки вида $ae^{i\varphi} + be^{-i\varphi}$ заметают эллипс или отрезок.

31.62. Пусть a, b, c, d — фиксированные числа. Докажите, что когда угол φ пробегает все возможные значения, точки с координатами

$$x = a\cos\varphi + b\sin\varphi, \qquad y = c\cos\varphi + d\sin\varphi$$

заметают эллипс или отрезок.

31.63. Вершины A и B треугольника ABC скользят по сторонам прямого угла. Докажите, что если угол C не прямой, то вершина C перемещается при этом по эллипсу.

31.64. Докажите, что множество точек, равноудалённых от данной точки и данной окружности, представляет собой эллипс, гиперболу или луч.

31.65. Докажите, что множество всех центров окружностей, проходящих через данную точку и касающихся данной окружности (или прямой), не содержащей данную точку, представляет собой эллипс или гиперболу (или параболу).

31.66. На плоскости даны точки $A_t = (1+t,\ 1+t)$ и $B_t = (-1+t,\ 1-t)$. Найдите ГМТ, заметаемое всеми прямыми A_tB_t для всех вещественных чисел t.

31.67. Даны точка O и прямая l. Точка X движется по прямой l. Найдите ГМТ, которое заметают перпендикуляры к прямой XO, восставленные из точки X.

31.68. По прямым l и l' с постоянными скоростями $v \neq v'$ движутся точки X и X'. Какое множество заметают прямые XX'?

31.69. Через каждую точку X, лежащую внутри данной окружности S, проводится прямая l, ортогональная прямой XO, где O — данная точка, не лежащая на окружности S. Найдите ГМТ, заметаемое всеми прямыми l.

31.70*. Докажите, что центры всех правильных треугольников, вписанных в данную конику, лежат на некоторой конике.

§ 7. Рациональная параметризация

31.71. Докажите, что для любой коники можно выбрать многочлены $A(t)$, $P(t)$ и $Q(t)$ так, что при изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ точки $\left(\frac{P(t)}{A(t)}, \frac{Q(t)}{A(t)}\right)$ заметают всю данную конику, кроме, быть может, одной точки.

Представление коники с помощью рациональных функций $\frac{P(t)}{A(t)}$ и $\frac{Q(t)}{A(t)}$ называют *рациональной параметризацией* коники.

31.72. Постройте рациональную параметризацию окружности $x^2 + y^2 = 1$, проведя прямые через точку $(1, 0)$.

31.73. Пусть $\left(\frac{P(t)}{A(t)}, \frac{Q(t)}{A(t)}\right)$ — рациональная параметризация коники, построенная при решении задачи 31.71. Докажите, что степень каждого из многочленов A, P, Q не превосходит 2.

31.74. Докажите, что две несовпадающие коники имеют не более четырёх общих точек.

31.75*. Докажите, что если бесконечное множество точек обладает тем свойством, что расстояние между любыми двумя точками является целым числом, то все эти точки лежат на одной прямой.

§ 8. Коники, связанные с треугольником

31.76. а) Докажите, что в трилинейных координатах описанная коника (т. е. коника, проходящая через все вершины треугольника) задаётся уравнением вида

$$pxy + qxz + rzy = 0.$$

б) Докажите, что в трилинейных координатах коника, касающаяся всех сторон треугольника или их продолжений, задаётся уравнением вида

$$px^2 + qy^2 + rz^2 = 2(\pm\sqrt{pq}xy \pm \sqrt{pr}xz \pm \sqrt{qr}yz).$$

31.77*. Коника задаётся в барицентрических координатах уравнением

$$p\alpha\beta + q\alpha\gamma + r\beta\gamma = 0.$$

Докажите, что её центр имеет барицентрические координаты

$$\bigl(r(p+q-r) : q(p+r-q) : p(r+q-p)\bigr).$$

31.78*. Докажите, что кривая, изогонально сопряжённая прямой, не проходящей через вершины треугольника, является коникой, проходящей через вершины треугольника.

31.79*. Дан треугольник ABC и прямая l, не проходящая через его вершины.

а) Докажите, что кривая, изогонально сопряжённая прямой l, является эллипсом, если l не пересекает описанную окружность треугольника ABC; параболой, если l касается описанной окружности; гиперболой, если l пересекает описанную окружность в двух точках.

б) Докажите, что кривая, изотомически сопряжённая прямой l, является эллипсом, если l не пересекает описанный эллипс Штейнера треугольника ABC; параболой, если l касается эллипса Штейнера; гиперболой, если l пересекает эллипс Штейнера в двух точках.

31.80*. а) Докажите, что кривая, изогонально сопряжённая прямой, проходящей через центр O описанной окружности, является равнобочной гиперболой, проходящей через вершины треугольника.

б) Докажите, что центр этой коники лежит на окружности девяти точек.

Кривую, изогонально сопряжённую прямой OK, где K — точка Лемуана, называют *гиперболой Киперта*.

Кривую, изогонально сопряжённую прямой Эйлера OH, называют *гиперболой Енжабека*.

31.81*. Найдите уравнение гиперболы Киперта: а) в трилинейных координатах; б) в барицентрических координатах.

31.82*. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC построены равнобедренные треугольники AC_1B, BA_1C, AB_1C с углом при основании φ (все три внешним или внутренним образом одновременно). Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, лежащей на гиперболе Киперта.

З а м е ч а н и е. На гиперболе Киперта лежат следующие точки: ортоцентр ($\varphi = \pi/2$), центр масс ($\varphi = 0$), точки Торричелли ($\varphi = \pm\pi/3$), вершины треугольника ($\varphi = -\alpha,\ -\beta,\ -\gamma$).

31.83*. Найдите уравнение центра гиперболы Киперта: а) в трилинейных координатах; б) в барицентрических координатах.

31.84*. Найдите уравнение гиперболы Енжабека в трилинейных координатах.

Решения

31.1. Ясно, что

$$\begin{aligned}Q(x,\,y)+2dx+2ey&=a(x'-x_0)^2+2b(x'-x_0)(y'-y_0)+c(y'-y_0)^2+\\&\quad+2d(x'-x_0)+2e(y'-y_0)=\\&=ax'^2+2bx'y'+cy'^2+2(-ax_0-by_0+d)x'+\\&\quad+2(-bx_0-cy_0+e)y'+Q(x_0,\,y_0)-2(dx_0+ey_0).\end{aligned}$$

Если $ac-b^2\neq 0$, то система уравнений $ax_0+by_0=d$, $bx_0+cy_0=e$ имеет (единственное) решение. Решив эту систему и положив $f'=f-Q(x_0,\,y_0)+2(dx_0+ey_0)$, приводим (1) к требуемому виду.

31.2. Ясно, что

$$\begin{aligned}Q(x',\,y')&=Q(x''\cos\varphi+y''\sin\varphi,\,-x''\sin\varphi+y''\cos\varphi)=\\&=x''^2(a\cos^2\varphi-2b\cos\varphi\sin\varphi+c\sin^2\varphi)+\\&\quad+2x''y''(a\sin\varphi\cos\varphi+b(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)-c\cos\varphi\sin\varphi)+\\&\quad+y''^2(a\sin^2\varphi+2b\sin\varphi\cos\varphi+c\cos^2\varphi).\end{aligned}$$

Чтобы уничтожить коэффициент при $x''y''$, нужно решить уравнение $\dfrac{a-c}{2b}=-\operatorname{ctg}2\varphi$ и найти требуемый угол φ.

31.3. При решении задачи 31.2 мы получили, что

$$\begin{aligned}a_1&=a\cos^2\varphi-2b\cos\varphi\sin\varphi+c\sin^2\varphi,\\b_1&=a\cos\varphi\sin\varphi+b(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)-c\cos\varphi\sin\varphi,\\c_1&=a\sin^2\varphi+2b\cos\varphi\sin\varphi+c\cos^2\varphi.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}a_1c_1-b_1^2&=(a^2+c^2)\sin^2\varphi\cos^2\varphi+ac(\sin^4\varphi+\cos^4\varphi)-\\&\quad-2b(a-c)\sin\varphi\cos\varphi(\sin^2\varphi-\cos^2\varphi)-4b^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi-\\&\quad-(a^2+c^2)\sin^2\varphi\cos^2\varphi+2ac\sin^2\varphi\cos^2\varphi-\\&\quad-2b(a-c)\sin\varphi\cos\varphi(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)-b^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)^2=\\&=ac-b^2.\end{aligned}$$

31.4. Если $b=0$, то требуемое представление можно получить с помощью параллельного переноса (задача 31.1). Если же $b\neq 0$, то помимо параллельного переноса нужно применить поворот (задача 31.2). После этого, произведя очевидные преобразования, получим уравнение вида

$$\frac{x''^2}{\alpha^2}\pm\frac{y''^2}{\beta^2}=0\qquad\text{или}\qquad\frac{x''^2}{\alpha^2}\pm\frac{y''^2}{\beta^2}=1.$$

Здесь оба числа α^2 и β^2 не равны нулю, поскольку согласно задаче 31.3 $\alpha^2\beta^2=\pm(ac-b^2)$.

31.5. Если $b=0$, то $a=0$ или $c=0$. Сделав при необходимости замену координат $x'=y$ и $y'=x$, можно считать, что $a=0$. Пусть теперь $b\neq 0$. При повороте

$$x=x'\cos\varphi+y'\sin\varphi,\qquad y=-x'\sin\varphi+y'\cos\varphi$$

выражение $ax^2+2bxy+cy^2$ переходит в $a_1{x'}^2+2b_1x'y'+c_1{y'}^2$, где $a_1=a\cos^2\varphi-2b\cos\varphi\sin\varphi+c\sin^2\varphi$. По условию $ac=b^2$, поэтому если $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{a/c}$, то $a_1=0$.

Итак, в обоих случаях мы приходим к уравнению вида $y^2+2dx+2ey=f$. Сделаем замену $x'=x+x_0$, $y'=y+e$. В результате получим уравнение ${y'}^2-e^2+2d(x'-x_0)=f$. Если $d=0$, то получаем уравнение вида ${y'}^2=\lambda$, а если $d\neq 0$, то при соответствующем выборе x_0 получаем уравнение ${y'}^2+2dx'=0$.

31.6. Поместим начало координат посередине между точками F_1 и F_2, ось Ox направим по отрезку F_1F_2, а ось Oy — перпендикулярно оси Ox. Пусть F_1 и F_2 имеют координаты $(c,0)$ и $(-c,0)$, соответственно, а сумма расстояний от точки $X=(x,y)$ до F_1 и F_2 равна $2a$. Тогда

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\implies$$
$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2\implies$$
$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+xc\implies$$
$$a^2(x^2+2xc+c^2)+a^2y^2=a^4+2a^2xc+x^2c^2\implies$$
$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

В итоге, обозначив $b^2=a^2-c^2$, получаем $x^2/a^2+y^2/b^2=1$.

31.7. Точки (x',y') и (x'',y'') пересечения эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ и прямой $y=px+q$ найдём, решив квадратное уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(px+q)^2}{b^2}=1.$$

По теореме Виета $(x'+x'')/2=-a^2pq/(b^2+a^2p^2)$ и, значит,

$$\frac{y'+y''}{2}=p\frac{x'+x''}{2}+q=\frac{b^2q}{b^2+a^2p^2}.$$

Таким образом, середины хорд эллипса, параллельных прямой $y=px$, лежат на прямой $y=-\dfrac{b^2}{pa^2}x$.

31.8. Это уравнение можно получить, воспользовавшись тем, что касательная к эллипсу — это прямая, пересекающая его ровно в одной точке. Действительно, если $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ и $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$, то $\dfrac{(x_0-x)^2}{a^2}+\dfrac{(y_0-y)^2}{b^2}=0$, поэтому $(x_0,y_0)=(x,y)$.

31.9. Проведём касательную в точке X, лежащей на эллипсе, и биссектрису внешнего угла при вершине X треугольника F_1XF_2. Если бы биссектриса не совпала с касательной, то она пересекла бы эллипс в другой точке $M\neq X$. Отразим F_2 относительно биссектрисы. Получим точку F_2'. Имеем

$$F_1M+F_2M=F_1M+F_2'M>F_1F_2'=F_1X+F_2X,$$

т. е. M лежит вне эллипса — противоречие. Значит, биссектриса совпадает с касательной, и следовательно, угол падения (т. е. угол между прямой F_1X и касательной) равен углу отражения (т. е. углу между прямой F_2X и касательной). Таким образом, доказано, что лучи, исходящие из F_1, соберутся в F_2.

31.10. Любой параллелограмм является образом квадрата при аффинном преобразовании, а любой треугольник — образом правильного треугольника.

31.11. а) Эллипс является образом окружности при аффинном преобразовании. Сопряжённые диаметры эллипса являются образами перпендикулярных диаметров окружности. Ясно также, что при аффинном преобразовании сохраняется отношение площадей фигур.

б) Можно считать, что точки O, A и B имеют координаты $(0, 0)$, $(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$ и $(-a\sin\varphi, b\cos\varphi)$.

31.12. Пусть O — центр эллипса, P_1 и P_2 — проекции фокусов F_1 и F_2 на касательную, A — точка касания. Тогда $\angle P_1AF_1 = \angle P_2AF_2 = \varphi$. Положим $x = F_1A$, $y = F_2A$. Величина $x + y = c$ не зависит от точки A. Поэтому

$$P_1O^2 = P_2O^2 = \left(\frac{x+y}{2}\cos\varphi\right)^2 + \left(\frac{x+y}{2}\sin\varphi\right)^2 = \frac{c^2}{4}.$$

Кроме того, $F_1F_2^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos 2\varphi = c^2 - 4xy\sin^2\varphi$, поэтому величина $xy\sin^2\varphi = d_1d_2$ постоянна.

31.13. Пусть точки G_1 и G_2 симметричны F_1 и F_2 относительно прямых OA и OB соответственно. Точки F_1, B и G_2 лежат на одной прямой и $F_1G_2 = F_1B + BG_2 = F_1B + BF_2$. Треугольники G_2F_1O и G_1F_2O имеют равные стороны. Поэтому $\angle G_1OF_1 = \angle G_2OF_2$ и $\angle AF_1O = \angle AG_1O = \angle BF_1O$.

31.14. Пусть эллипс с фокусами F_1 и F_2 вписан в угол в вершиной X. Тогда согласно задаче 31.13 прямые XF_1 и XF_2 симметричны относительно биссектрисы угла X.

31.15. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 — точки касания эллипса со сторонами AB, BC, CD, DA соответственно. Согласно задаче 31.13 $\angle A_1FB = \angle BFB_1 = \alpha$, $\angle B_1FC = \angle CFC_1 = \beta$, $\angle C_1FD = \angle DFD_1 = \gamma$, $\angle D_1FA = \angle AFA_1 = \delta$. Здесь α, β, γ, δ — некоторые углы; их сумма равна 180°. Ясно также, что $\angle AFB + \angle CFD = (\delta + \alpha) + (\beta + \gamma)$.

31.16. Рассмотрим аффинное преобразование, переводящее эллипс в окружность. Оно переводит данный параллелограмм в ромб. Диагонали ромба содержат пару перпендикулярных диаметров полученной окружности.

31.17. а) Пусть $d = \dfrac{a}{e}$. Тогда $de^2 = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \dfrac{a^2 - b^2}{a^2} = c$, при этом величина d — расстояние от начала координат до директрисы. Проверим, что множество точек $X = (x, y)$, для которых отношение расстояния до фокуса $(c, 0)$ к расстоянию до директрисы $x = d$ равно e, т. е. множество точек, задаваемых уравнением

$$\frac{(x-c)^2 + y^2}{(x-d)^2} = e^2, \tag{1}$$

есть эллипс. Равенство (1) при условии, что $c = de^2$, эквивалентно равенству

$$\frac{x^2}{d^2e^2} + \frac{y^2}{d^2e^2(1-e^2)} = 1,$$

совпадающему с каноническим уравнением эллипса, так как $d^2e^2 = a^2$ и $d^2e^2(1-e^2) = b^2$.

б) Пусть прямая l задана уравнением $x = d$, а точка F имеет координаты $(c,\,0)$. Тогда рассматриваемому множеству принадлежат две точки с координатами $(x,\,0)$, удовлетворяющими уравнению $\dfrac{x-c}{x-d} = \pm e$. Поместим начало координат посредине между этими точками. Тогда

$$\frac{de+c}{1+e} + \frac{-de+c}{1-e} = 0,$$

т. е. $c = de^2$. В таком случае уравнение (1) эквивалентно каноническому уравнению эллипса.

31.18. Пусть O — вершина данного прямоугольника, OA и OB — касательные к эллипсу. Рассматриваемый в решении задачи 31.13 треугольник F_1OG_2 в данном случае прямоугольный. Следовательно, $F_1O^2 + F_2O^2 = F_1G_2^2$ — постоянная величина. Если M — центр эллипса, то величина

$$OM^2 = \frac{1}{4}(2F_1O^2 + 2F_2O^2 - F_1F_2^2)$$

тоже постоянна.

31.19. Для рассматриваемого эллипса вершины описанного вокруг него прямоугольника со сторонами, параллельными осям эллипса, лежат на рассматриваемой окружности. Согласно задаче 31.18 вершины всех остальных прямоугольников, описанных вокруг рассматриваемого эллипса, лежат на рассматриваемой окружности. Поэтому хорда PQ является стороной прямоугольника, описанного вокруг эллипса. Согласно задаче 31.16 диагонали этого прямоугольника содержат сопряжённые диаметры эллипса.

31.20. а) Точки A и B имеют координаты

$$(a\cos\varphi,\, b\sin\varphi) \quad \text{и} \quad (a\sin\varphi,\, -b\cos\varphi).$$

Точки P и Q имеют координаты

$$((a+b)\sin\varphi,\, -(a+b)\cos\varphi) \quad \text{и} \quad ((a-b)\sin\varphi,\, (a-b)\cos\varphi).$$

б) Требуемое построение, по сути дела, описано в задаче а).

31.21. Точка Q лежит на описанной окружности треугольника AF_1F_2, где F_1 и F_2 — фокусы эллипса. При этом Q — середина дуги F_1F_2. Пусть S — середина дополнительной дуги F_1F_2, т. е. QS — диаметр. Если R — радиус описанной окружности, α и β — углы при вершинах F_1 и F_2, то

$$AQ = 2R\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad OS = 2R\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2},$$
$$AP = OS\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2R\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Поэтому

$$AP\cdot AQ = \left(2R\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 = (R\sin\alpha + R\cos\alpha)^2 = \left(\frac{AF_1+AF_2}{2}\right)^2.$$

31.22. Пусть ромб $ABCD$ вписан в эллипс с центром O. Тогда радиус r вписанной окружности ромба равен высоте прямоугольного треугольника AOB, т. е.

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}.$$

Для эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ прямые OA и OB имеют уравнения $y=kx$ и $y=-x/k$, а точки A и B имеют координаты (x_0, y_0) и (x_1, y_1), где

$$x_0^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}\right)=1, \qquad x_1^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{k^2b^2}\right)=1.$$

Поэтому

$$\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{k^2}{b^2}}{1+k^2}+\frac{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{k^2b^2}}{1+\dfrac{1}{k^2}}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2},$$

т. е. радиус r не зависит от положения ромба.

31.23. Сопряжённые диаметры можно представить посредством диагоналей параллелограмма $ABCD$, описанного вокруг эллипса с центром O. Пусть биссектрисы углов AOB, BOC, COD, DOA пересекают стороны этого параллелограмма в точках A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно, а лучи OA_1, OB_1, OC_1, OD_1 пересекают эллипс в точках A_2, B_2, C_2, D_2. Тогда точки A_2, B_2, C_2, D_2 — центры рассматриваемых окружностей.

Достаточно доказать, что $A_2B_2C_2D_2$ — параллелограмм со сторонами, параллельными прямым AC и BD. В самом деле, диагонали этого параллелограмма перпендикулярны, поэтому он — ромб. Согласно задаче 31.22 радиус вписанной окружности такого ромба зависит только от эллипса и не зависит от положения ромба. Из параллельности прямых A_2B_2 и AC следует, что радиус вписанной окружности ромба равен расстоянию от точки A_2 до прямой AC, т. е. он равен радиусу рассматриваемой окружности с центром A_2.

Докажем, например, что $A_2B_2 \parallel AC$. Сначала заметим, что $A_1B_1 \parallel AC$, так как

$$AA_1 : A_1B = AO : BO = CO : BO = CB_1 : BB_1.$$

Сделаем аффинное преобразование, переводящее рассматриваемые сопряжённые диаметры в диаметры окружности. В таком случае образы прямых A_1O и B_1O будут симметричны относительно прямой OB, поэтому образ прямой A_2B_2 будет параллелен образу прямой AC.

31.24. а) Пусть $\angle PF_1Q=2\alpha$, $\angle PF_2Q=2\beta$, $\angle POF_1=p$, $\angle F_1OF_2=q$. Согласно задаче 31.13

$$\angle PF_1O=\alpha, \quad \angle PF_2O=\beta, \quad \angle F_2OQ=p;$$

из последнего равенства следует, что $\angle POQ = 2p+q$.

Отрезки PF_1 и PF_2 образуют равные углы с касательной PO, поэтому

$$\alpha+p=\angle F_2PO=\pi-\beta-(p+q),$$

т. е. $\angle POQ=2p+q=\pi-(\alpha+\beta)=\pi-\dfrac{1}{2}(\angle PF_1Q+\angle PF_2Q)$.

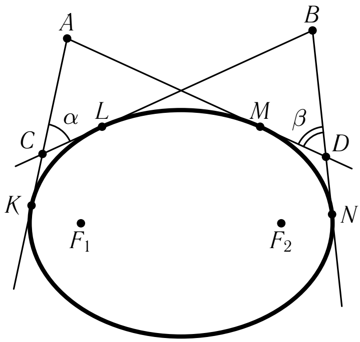


Рис. 31.3

б) Введём такие обозначения точек касания, как на рис. 31.3. Согласно задаче а)

$$\alpha=\frac{1}{2}(\angle KF_1L+\angle KF_2L), \qquad \beta=\frac{1}{2}(\angle MF_1N+\angle MF_2N).$$

Лучи F_1A и F_1B являются биссектрисами углов KF_1M и LF_1N соответственно, поэтому

$$2\varphi_1 = 2\angle AF_1B = (\angle AF_1L + \angle LF_1B) + (\angle AF_1M + \angle MF_1B) = \\ = (\angle AF_1L + \angle BF_1N) + (\angle KF_1A + \angle MF_1B) = \angle KF_1L + \angle MF_1N.$$

Аналогично

$$\varphi_2 = \angle AF_2B = \frac{1}{2}(\angle KF_2L + \angle MF_2N).$$

31.25. Пусть φ — угол между любой из рассматриваемых касательных и осью Ox. Рассмотрим окружность S с центром $((a+b)\cos\varphi,\ (a+b)\sin\varphi)$, проходящую через точку $A = (a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$.

Касательная к эллипсу в точке A задаётся уравнением

$$\frac{a\cos\varphi}{a^2}x + \frac{b\sin\varphi}{b^2}y = 1.$$

Эта прямая перпендикулярна прямой AO_1, которая задаётся уравнением

$$y = \frac{a\sin\varphi}{b\cos\varphi}x + c.$$

Поэтому окружность S касается эллипса.

Докажем теперь, что окружность S касается прямых l_1 и l_2. Пусть прямая l_1 касается эллипса в точке $(-a\cos\alpha,\ b\sin\alpha)$. Тогда она имеет уравнение

$$\frac{-x\cos\alpha}{a} + \frac{y\sin\alpha}{b} = 1.$$

Это, в частности, означает, что $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b\cos\alpha}{a\sin\alpha}$. Квадрат расстояния от начала координат до прямой l_1 равен

$$b^2\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\alpha} = b^2\cos^2\varphi\left(1 + \frac{a^2\sin^2\varphi}{b^2\cos^2\varphi}\right) = b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi.$$

Последнее выражение совпадает с квадратом радиуса окружности S. Для прямой l_2 получаем точно такое же выражение.

31.26. Нормаль к эллипсу в точке $(x_0,\ y_0)$ задаётся уравнением

$$\frac{-y_0}{b^2}x + \frac{x_0}{a^2}y = x_0y_0\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right).$$

Она пересекает большую полуось в точке с координатой

$$x_1 = b^2x_0\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) = x_0\frac{a^2-b^2}{a^2}.$$

При этом

$$r^2 = y_0^2 + (x_0 - x_1)^2 = y_0^2 + x_0^2\frac{b^4}{a^4} = b^2 - \frac{b^2x_0^2}{a^2} + x_0^2\frac{b^4}{a^4} = b^2 - b^2x_0^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{b^2}{a^4}\right).$$

Легко проверить, что

$$\frac{(a^2-b^2)(b^2-r^2)}{b^2} = x_1^2.$$

31.27. Согласно задаче 31.26

$$r_1 + r_2 = |OC_1 \pm OC_2| = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}\left|\sqrt{b^2 - r_1^2} \pm \sqrt{b^2 - r_2^2}\right|.$$

Это соотношение можно преобразовать к виду

$$a^4 r_1^2 - 2a^2(a^2 - 2b^2)r_1 r_2 + a^4 r_2^2 - 4b^4(a^2 - b^2) = 0.$$

Рассмотрим полученное выражение как квадратное уравнение относительно r_1. Оно имеет корни r_1 и r_3, поэтому

$$r_1 + r_3 = \frac{2a^2(a^2 - 2b^2)}{a^4} r_2.$$

31.28. Согласно задаче 31.27 числа r_i удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$r_{i+2} - kr_{i+1} + r_i = 0,$$

поэтому $r_p = a\lambda_1^p + b\lambda_2^p$, где λ_1 и λ_2 — корни уравнения $x^2 - kx + 1 = 0$. Ясно, что $\lambda_1\lambda_2 = 1$, т. е. $r_p = a\lambda^p + b\lambda^{-p}$. Требуемая формула теперь легко проверяется.

31.29. Пусть $x = 2pX$ и $y = 2pY$. Тогда уравнения $2py = x^2$ и $Y = X^2$ эквивалентны.

31.30. Подставив уравнение параболы $y = x^2$ в уравнение окружности $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, получим уравнение 4-й степени с нулевым коэффициентом при x^3. Сумма корней этого уравнения равна нулю.

31.31. Сложите уравнения $x^2 + py = 0$ и $(y - y_0)^2 + ax + b = 0$.

31.32. Для параболы доказательство такое же, как для эллипса (см. задачу 31.7).

31.33. а) Пусть $x^2 = 2py$. Тогда квадрат расстояния от точки (x, y) до точки $(0, p/2)$ равен

$$x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 = 2py + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = \left(y + \frac{p}{2}\right)^2,$$

а расстояние от точки (x, y) до прямой $y = -\frac{p}{2}$ равно $\left|y + \frac{p}{2}\right|$.

б) Можно считать, что фиксированная точка имеет координаты $(0, p/2)$, а фиксированная прямая задаётся уравнением $y = -p/2$. Тогда множество точек (x, y), для которых расстояние до фиксированной точки равно расстоянию до фиксированной прямой, задаётся уравнением

$$x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{p}{2}\right)^2,$$

т. е. $x^2 = 2py$.

31.34. Пусть точка X лежит на параболе с фокусом F и H — её проекция на директрису. Тогда $FX = XH$ (задача 31.33). Проведём биссектрису угла FXH. Если она не совпадает с касательной, то она пересекает параболу в точке $M \neq X$. Но тогда $FM = MH \neq MH'$, где H' — проекция на директрису. Получено противоречие. Из него следует, что угол падения луча, параллельного оси, равен углу между касательной и FX, т. е. все лучи параллельного пучка собираются в фокусе, что и требовалось.

31.35. Касательная в точке $(2t_i, t_i^2)$ задаётся уравнением $y = xt_i - t_i^2$. Легко проверить, что указанная точка лежит на обеих касательных.

31.36. Пусть A_1 и B_1 — проекции точек A и B на директрису. Тогда AO и BO — серединные перпендикуляры к отрезкам A_1F и B_1F. Поэтому $A_1O = FO = B_1O$, а значит, $\angle A_1B_1O = \angle B_1A_1O = \varphi$. Несложные вычисления с углами показывают, что $\angle OFA = \angle OFB = 90^\circ + \varphi$ и $\angle AFB = 180^\circ - 2\varphi = \angle A_1OB_1 = 2\angle AOB$.

31.37. Воспользуемся обозначениями из задачи 31.36. Согласно этой задаче $\angle AFB = \angle A_1OB_1 = 2\angle AOB$. Поэтому условие $\angle AOB = 90^\circ$ эквивалентно тому, что $\angle AFB = 180^\circ$ и $\angle A_1OB_1 = 180^\circ$.

31.38. а) Проекция фокуса F на касательную к параболе лежит на касательной к параболе, перпендикулярной оси. Поэтому проекции A', B', C' фокуса F на прямые BC, CA, AB лежат на одной прямой. Это означает, что точка F лежит на описанной окружности треугольника ABC. В самом деле, $\angle AFC' = \angle AB'C' = \angle A'B'C = \angle A'FC$, поэтому $\angle CFA = \angle A'FC' = 180^\circ - \angle B$.

б) Касательные к параболе $x^2 = 4y$ в точках $(2t_i,\ t_i^2)$ задаются уравнениями $y = t_ix - t_i^2$. Они пересекаются в точках $(t_i + t_j,\ t_it_j)$. Легко проверить, что ортоцентром треугольника с вершинами в трёх таких точках служит точка $(t_1 + t_2 + t_3 + t_1t_2t_3,\ -1)$.

в) Можно считать, что парабола задаётся уравнением $x^2 = 4y$. В таком случае точки α, β, γ имеют координаты $(2t_i,\ t_i^2)$, $i = 1,\ 2,\ 3$. Легко проверить, что

$$S_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2t_1 & t_1^2 & 1 \\ 2t_2 & t_2^2 & 1 \\ 2t_3 & t_3^2 & 1 \end{vmatrix}, \qquad S_{ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} t_2+t_3 & t_2t_3 & 1 \\ t_3+t_1 & t_3t_1 & 1 \\ t_1+t_2 & t_1t_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

г) Существует аффинное преобразование, переводящее ось параболы и прямую AC в пару перпендикулярных прямых. Поэтому можно считать, что точки α, β, γ имеют координаты $(2t_1,\ t_1^2)$, $(0,\ 0)$, $(2t_3,\ t_3^2)$, причём $t_1 < 0$ и $t_3 > 0$. В таком случае

$$S_{\alpha\beta C} = -\frac{1}{2}t_1^3, \qquad S_{\beta\gamma A} = \frac{1}{2}t_3^3, \qquad S_{\alpha\beta B} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2t_3 & t_3^2 & 1 \\ 2t_1 & t_1^2 & 1 \\ t_1+t_3 & t_1t_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{(t_3-t_1)^3}{2}.$$

31.39. Касательные к параболе $x^2 = 4y$ в точках $A = (2t_1,\ t_1^2)$ и $B = (2t_2,\ t_2^2)$ пересекаются в точке $O = (t_1 + t_2,\ t_1t_2)$. В рассматриваемом случае $t_1t_2 = -2$. Теперь уже легко проверить, что точка $(0,\ 0)$ является ортоцентром треугольника AOB.

31.40. Рассмотрим семейство всех парабол с фокусом в данной точке F и осью, параллельной лучам света. Точнее говоря, ось параболы направлена так, чтобы данный пучок лучей света после отражения от параболы сходился в точке F.

Пусть луч света отражается от точки M кривой C и попадает в точку F. Тогда касательная к C в точке M совпадает с касательной в точке M к параболе, проходящей через точку M. Такое свойство может выполняться для всех точек кривой C лишь в том случае, когда она совпадает с одной из парабол рассматриваемого семейства.

31.41. а) Доказательство достаточно провести для равнобочной гиперболы. Пусть точки A и B имеют координаты $\left(x_1,\ \dfrac{1}{x_1}\right)$ и $\left(x_2,\ \dfrac{1}{x_2}\right)$. Тогда прямая AB задаётся уравнением $x + x_1x_2y = x_1 + x_2$. Поэтому точки A_1 и B_1 имеют координаты $\left(0,\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)$ и $(x_1 + x_2,\ 0)$. Требуемое равенство теперь легко доказывается, поскольку его достаточно проверить для проекций точек на одну из осей координат.

б) Непосредственно следует из а).

31.42. Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB. Согласно задаче 31.41 точки A_1, B_1 и C_1 являются серединами гипотенуз прямоугольных треугольников, образованных осями координат и прямыми BC, CA и AB. Поэтому $\angle(C_1O,\ Oy) = \angle(Oy,\ AB)$ и $\angle(Oy,\ OB_1) = \angle(AC,\ Oy)$. Следовательно, $\angle(C_1O,\ OB_1) = \angle(AC,\ AB) = \angle(C_1A_1,\ A_1B_1)$. Это означает, что точка O лежит на описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$.

31.43. Пусть $a = \alpha + i\alpha^{-1}$, $b = \beta + i\beta^{-1}$, $c = \gamma + i\gamma^{-1}$ — вершины данного треугольника на комплексной плоскости. Проверьте, что $h = -\alpha\beta\gamma - i(\alpha\beta\gamma)^{-1}$ — его ортоцентр. Покажите, например, что число $(a-h)/(b-c)$ чисто мнимое.

31.44. Пусть $A = (a,\ a^{-1})$, $B = (b,\ b^{-1})$, $C = (c,\ c^{-1})$. Тогда при $x = -x_0,\ a,\ b,\ c$ получаем

$$(x_0 - x)^2 + (x_0^{-1} - x^{-1})^2 = 4x_0^2 + 4x_0^{-2}.$$

Таким образом, числа $-x_0$, a, b, c являются корнями многочлена вида

$$x^4 - 2x_0x^3 + \ldots$$

Поэтому $-x_0 + a + b + c = 2x_0$, т. е. $a + b + c = 3x_0$. Аналогично $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = 3x_0^{-1}$. Следовательно, точка $(x_0,\ x_0^{-1})$ служит не только центром описанной окружности треугольника ABC, но и его центром масс. Это возможно лишь в том случае, когда треугольник ABC равносторонний.

31.45. Пусть $ax^2 + bxy + cy^2 = (px + qy)(rx + sy)$. Тогда прямые $px + qy = 0$ и $rx + sy = 0$ параллельны асимптотам рассматриваемой гиперболы. Эти прямые ортогональны тогда и только тогда, когда $pr + qs = 0$, т. е. $a + c = 0$.

31.46. Для гиперболы доказательство такое же, как для эллипса (см. задачу 31.6).

31.47. Для гиперболы доказательство такое же, как для эллипса (см. задачу 31.7).

31.48. Касательная $\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$ пересекает асимптоты $y = \pm\frac{b}{a}x$ в точках с координатами $x_{1,2} = a\left(\frac{x_0}{a} \pm \frac{y_0}{b}\right)^{-1}$. Поэтому $x_1x_2 = a^2$. Ясно также, что площадь рассматриваемого треугольника пропорциональна x_1x_2.

31.49. Для гиперболы решение такое же, как для эллипса (см. задачу 31.17).

31.50. Пусть φ — величина того из углов между асимптотами, который содержит гиперболу. Тогда при $\varphi \geqslant 90^\circ$ искомое множество пусто, а при $\varphi < 90^\circ$ оно представляет собой окружность (с центром в центре гиперболы), из которой выброшены 4 точки пересечения с асимптотами. Для доказательства этого утверждения можно воспользоваться решением задачи 31.18.

31.51. П е р в о е р е ш е н и е. Пусть X — точка данной коники, отличная от точек A, B, C и D. Выберем числа λ_1 и μ_1 так, что

$$\lambda_1 l_{AB}(X) l_{CD}(X) + \mu_1 l_{BC}(X) l_{AD}(X) = 0,$$

и рассмотрим кривую, заданную уравнением $f_1=0$, где $f_1=\lambda_1 l_{AB}l_{CD}+\mu_1 l_{BC}l_{AD}$. Эта кривая задаётся уравнением второй степени и проходит через точки A, B, C, D и X. Но если кривая второй степени пересекает конику в пяти различных точках, то эта кривая совпадает с данной коникой (задача 31.74), а значит, $f=\alpha f_1$, где α — некоторое число.

Второе решение. Введём косоугольную систему координат с осями AB и AD. Тогда прямые AB и AD задаются уравнениями $y=0$ и $x=0$ соответственно, а уравнение $f=0$, задающее окружность, является уравнением второй степени относительно x и y.

Ограничения функций f и $\lambda l_{AB}l_{CD}+\mu l_{BC}l_{AD}=\lambda y l_{CD}+\mu x l_{BC}$ на любую из осей координат являются квадратными трёхчленами с двумя общими корнями (A и B, или A и D). Поэтому числа λ и μ можно подобрать так, что многочлен

$$P(x, y)=f(x, y)-\lambda y l_{CD}(x, y)-\mu x l_{BC}(x, y)$$

обращается в нуль как при $x=0$, так и при $y=0$. Это означает, что он делится на xy, т. е. $P(x, y)=qxy$, где q — константа. В точке C многочлен P обращается в нуль, а $xy\neq 0$. Поэтому $q=0$, т. е.

$$f=\lambda l_{AB}l_{CD}+\mu l_{BC}l_{AD}.$$

31.52. Рассмотрим шестиугольник $ABCDEF$, вершины которого лежат на конике $f=0$. Четырёхугольники $ABCD$, $AFED$ и $BEFC$ вписаны в эту конику, поэтому f можно представить в любом из следующих видов:

$$f=\lambda_1 l_{AB}l_{CD}+\mu_1 l_{AD}l_{BC}, \tag{1}$$

$$f=\lambda_2 l_{AF}l_{ED}+\mu_2 l_{AD}l_{EF}, \tag{2}$$

$$f=\lambda_3 l_{BE}l_{CF}+\mu_3 l_{BC}l_{EF}. \tag{3}$$

Приравнивая выражения (1) и (2), получаем

$$\lambda_1 l_{AB}l_{CD}-\lambda_2 l_{AF}l_{ED}=(\mu_1 l_{BC}-\mu_2 l_{EF})l_{AD}.$$

Пусть X — точка пересечения прямых AB и ED. В точке X обращаются в нуль функции $l_{AB}l_{CD}$ и $l_{AF}l_{ED}$, а функция l_{AD} в этой точке в нуль не обращается. Следовательно, в точке X обращается в нуль функция $\mu_1 l_{BC}-\mu_2 l_{EF}$, т. е. точка X лежит на прямой $\mu_1 l_{BC}=\mu_2 l_{EF}$. Аналогично доказывается, что точка пересечения прямых CD и AF лежит на прямой $\mu_1 l_{BC}=\mu_2 l_{EF}$. Очевидно также, что точка пересечения прямых BC и EF лежит на прямой $\mu_1 l_{BC}=\mu_2 l_{EF}$. В результате получаем требуемое утверждение.

31.53. а) Продолжим рассуждения из решение задачи 31.52 дальше. Приравнивая (2) и (3), получим, что точки пересечения прямых AF и BE, ED и CF, AD и BC лежат на прямой $\mu_2 l_{AD}=\mu_3 l_{BC}$. А приравняв (1) и (3), получим, что точки пересечения прямых AB и CF, CD и BE, AD и EF лежат на прямой $\mu_1 l_{AD}=\mu_3 l_{EF}$. Легко проверить, что полученные прямые

$$\mu_1 l_{BC}=\mu_2 l_{EF}, \qquad \mu_2 l_{AD}=\mu_3 l_{BC}, \qquad \mu_1 l_{AD}=\mu_3 l_{EF}$$

пересекаются в одной точке. В самом деле, если X — точка пересечения первых двух из этих прямых, то

$$\mu_1\mu_2 l_{BC}(X)l_{AD}(X)=\mu_2\mu_3 l_{EF}(X)l_{BC}(X).$$

Сократив на $\mu_2 l_{BC}(X)$, получим $\mu_1 l_{AD}=\mu_3 l_{EF}$ (мы не будем останавливаться на обсуждении вырожденного случая, когда $\mu_2 l_{BC}(X)=0$).

б) При доказательстве теоремы Штейнера исходными четырёхугольниками были $ABCD$, $AFED$ и $BEFC$. Можно исходить также из четырёхугольников $ABFE$, $ABDC$ и $CDFE$. Тогда получим теорему Киркмана.

31.54. Пусть $f=0$ — уравнение данной окружности. Согласно задаче 31.51 $f=\lambda l_{KL}l_{MN}+\mu l_{KN}l_{ML}$. Это равенство выполняется и для ограничений всех рассматриваемых функций на прямую AB. Введём на прямой AB координату x, приняв точку O за начало координат. Тогда можно считать, что $f=x^2-a$ и $l_{KL}l_{MN}=x^2$, поэтому $l_{KN}l_{ML}=bx^2-c$. Следовательно, корни уравнения $l_{KN}l_{ML}=0$ равноудалены от точки O.

31.55. Пусть для определённости $P=P'$, $Q=Q'$ и $R=R'$. Согласно задаче 31.51

$$\lambda l_{KL}l_{MN}+\mu l_{KN}l_{ML}=f=\lambda' l_{K'L'}l_{M'N'}+\mu' l_{K'N'}l_{M'L'}.$$

Рассмотрев ограничение этого равенства на прямую AB, получим равенство вида

$$\alpha(x-p)(x-r)+\beta(x-r)(x-s)=\alpha'(x-p)(x-r)+\beta'(x-q)(x-s'). \tag{1}$$

При этом требуется доказать, что $s=s'$.

Равенство (1) можно преобразовать к виду

$$\alpha''(x-p)(x-r)=(x-q)[\beta(x-s)-\beta'(x-s')].$$

Точка Q может совпасть только с точкой S, поэтому $Q\neq P$ и $Q\neq R$, а значит, $(x-p)(x-r)$ не делится на $(x-q)$. Поэтому $\beta(x-s)-\beta'(x-s')=0$. Следовательно, $s=s'$.

31.56. Согласно задаче 31.45 линейная комбинация уравнений гипербол с перпендикулярными асимптотами тоже является уравнением гиперболы с перпендикулярными асимптотами. В пучке же коник, проходящих через A, B, C и H, есть две вырожденные коники с перпендикулярными асимптотами: $l_{AB}l_{CH}$ и $l_{BC}l_{AH}$. Следовательно, согласно задаче 31.51 все коники этого пучка будут гиперболами с перпендикулярными асимптотами.

31.57. На направление осей коники влияют лишь квадратичные члены её уравнения, поэтому будем учитывать только их. Можно считать, что уравнение одной из коник имеет вид $ax^2+by^2+\ldots=0$. Если линейная комбинация этого уравнения и уравнения $a_1x^2+b_1y^2+c_1xy+\ldots=0$ имеет вид $x^2+y^2+\ldots=0$, то $c_1=0$, т. е. оси коник перпендикулярны. Пусть наоборот $c_1=0$. Положим $\lambda=-\dfrac{a-b}{a_1-b_1}$ (случай $a_1=b_1$ соответствует окружности). Тогда $a+\lambda a_1=b+\lambda b_1$. Остаётся заметить, что если $a+\lambda a_1=b+\lambda b_1=0$, то рассматриваемые коники имеют не более двух общих точек, так как среди линейных комбинаций их уравнений есть линейное уравнение.

31.58. Коника, проходящая через точки A, B, C и D, имеет уравнение $F=0$, где $F=\lambda l_{AB}\cdot l_{CD}+l_{BC}\cdot l_{AD}$. Как видно из решения задачи 31.1, центр этой коники задаётся системой уравнений, которые линейны по x, y и λ. Выразив λ из одного уравнения и подставив это выражение во второе уравнение, получим уравнение второго порядка, связывающее x и y.

31.59. а) Пусть точки C' и D' симметричны точкам C и D относительно середины M отрезка AB. Тогда точки A, B, C, D, C', D' лежат на одной конике с центром M, поэтому M принадлежит Г.

Пусть O — точка пересечения прямых AB и CD. Точка O служит центром вырожденной коники, состоящей из пары прямых AB и CD. Поэтому O принадлежит Γ.

б) Середины сторон четырёхугольника $ABCD$ образуют параллелограмм, центр которого совпадает с центром масс точек A, B, C, D. Этот параллелограмм вписан в конику Γ, поэтому его центр совпадает с центром коники.

в) Следует из а).

г) Фиксируем в рассматриваемом пучке коник одну конику, отличную от окружности и параболы. Из задачи 31.57 следует, что оси всех остальных коник будут перпендикулярны осям фиксированной коники. (Оси коники взаимно перпендикулярны, поэтому оси всех остальных коник параллельны осям фиксированной коники.)

Среди коник пучка есть эллипс и есть гиперболы двух разных типов: ветвь гиперболы, содержащая точку A, может содержать либо точку B, либо точку D. Поэтому среди коник пучка есть две параболы, причём их оси взаимно перпендикулярны. Центрами этих двух парабол служат бесконечно удалённые точки двух взаимно перпендикулярных направлений.

31.60. Результат задачи 31.51 можно применять и в том случае, когда некоторые пары точек сливаются, т. е. коники не только проходят через данную точку, но и касаются друг друга в этой точке.

Пусть $p_1 = 0$ и $p_2 = 0$ — уравнения общих касательных к коникам Γ и Γ_1 в точках A и B, $q = 0$ — уравнение прямой AB. Тогда уравнения коник Γ и Γ_1 можно представить в виде $f = \lambda p_1 p_2 + \mu q^2 = 0$ и $f_1 = \lambda_1 p_1 p_2 + \mu_1 q^2 = 0$. Домножив f_1 на λ/λ_1, можно считать, что $\lambda = \lambda_1$, а значит, $f_1 = f + \alpha q^2$. Аналогично $f_2 = f + \beta r^2$, где $r = 0$ — уравнение прямой CD. Рассмотрим уравнение $f_1 - f_2 = 0$, т. е. $\alpha q^2 - \beta r^2 = 0$. Ему удовлетворяют четыре общие точки коник Γ_1 и Γ_2. С другой стороны, это уравнение разлагается в произведение линейных уравнений $\sqrt{\alpha}q + \sqrt{\beta}r = 0$ и $\sqrt{\alpha}q - \sqrt{\beta}r = 0$. Следовательно, прямые $\sqrt{\alpha}q \pm \sqrt{\beta}r = 0$ содержат общие хорды коник Γ_1 и Γ_2.

Ясно также, что точка пересечения этих прямых совпадает с точкой пересечения прямых $q = 0$ и $r = 0$.

31.61. Рассмотрим отображение $z \mapsto az + b\bar{z}$. В координатах (x, y), где $x + iy = z$, это отображение аффинное, причём его определитель равен $|a|^2 - |b|^2$. Образом окружности $|z| = 1$ при невырожденном аффинном отображении будет эллипс, а при вырожденном — отрезок или точка.

31.62. Несложные вычисления показывают, что

$$(c^2 + d^2)x^2 - 2(ac + bd)xy + (a^2 + b^2)y^2 = (ad - bc)^2.$$

Ясно также, что координаты всех точек рассматриваемой кривой ограничены. Если $ad \neq bc$, то получаем эллипс, а если $ad = bc$ — отрезок.

31.63. Пусть вершина A скользит по оси Ox, а вершина B — по оси Oy. Опустим из вершины C высоту CH на сторону AB. Пусть $AH = q$, $CH = h$ и $\angle BAO = \varphi$. Тогда точка C имеет координаты

$$x = h \sin\varphi + (c - q)\cos\varphi, \qquad y = q \sin\varphi + h \cos\varphi.$$

Поэтому согласно задаче 31.62 точка C движется по кривой

$$(q^2 + h^2)x^2 - 2chxy + \big(h^2 + (c - q)^2\big)y^2 = \big(h^2 - q(c - q)\big).$$

Поэтому если $h^2 \neq q(c - q)$, то точка C движется по эллипсу.

Угол C прямой тогда и только тогда, когда $(h^2+q^2)+\left(h^2+(c-q)^2\right)=c^2$, т. е. $h^2=q(c-q)$.

Замечание. Если угол C прямой, то точка C движется по отрезку (см. задачу 2.5).

31.64. Точка X, равноудалённая от точки A и окружности радиуса R с центром O, должна удовлетворять соотношению $OX-AX=R$ в случае, когда точка A расположена вне данной окружности, и соотношению $OX+AX=R$ в случае, когда точка A расположена внутри данной окружности. В случае, когда точка A лежит на данной окружности, точка X должна лежать на луче OA.

31.65. Центр окружности, проходящей через данную точку A и касающейся данной окружности S, равноудалён от точки A и окружности S. Поэтому можно воспользоваться результатом задачи 31.64.

31.66. Прямая A_tB_t задаётся уравнением

$$\frac{x-1-t}{y-1-t}=\frac{1+t+1-t}{1+t-1+t}=\frac{1}{t},$$

т. е.

$$y=1-t^2+tx=-\left(t-\frac{x}{2}\right)^2+\frac{x^2}{4}+1.$$

При фиксированном x, когда t пробегает все действительные значения, y принимает все значения, не превосходящие $(x^2/4)+1$. Таким образом, искомое множество задаётся неравенством $y\leqslant(x^2/4)+1$.

31.67. Выберем систему координат так, чтобы прямая l задавалась уравнением $x=0$, а точка O имела координаты $(1, 0)$. Точка $X=(x, y)$ принадлежит искомому множеству тогда и только тогда, когда окружность с диаметром OX пересекает прямую l. Это означает, что расстояние от центра этой окружности до прямой l не превосходит её радиуса, т. е.

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^2\leqslant\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+\frac{y^2}{4}.$$

Таким образом, искомое множество задаётся неравенством $y^2\geqslant 4x$.

31.68. Будем называть преобразованием подобия композицию собственного движения и гомотетии. Пусть X_1 и X_2 — два положения точки X; X_1' и X_2' — положения точки X' в те же моменты времени. Существует единственное преобразование подобия, переводящее X_1 в X_1', а X_2 в X_2'. Это преобразование в любой момент времени переводит точку X в соответствующую точку X'. Пусть O — центр рассматриваемого преобразования подобия, OH — высота треугольника XOX'. Точка H получается из X некоторым преобразованием подобия, поэтому H движется по некоторой прямой. Учитывая, что $XX'\perp OH$, получаем такое же множество, как и в задаче 31.67.

31.69. Можно считать, что центр окружности S расположен в начале координат, а точка O имеет координаты $(c, 0)$. Точка $A=(x, y)$ принадлежит искомому множеству тогда и только тогда, когда окружность S пересекает окружность S_1 с диаметром AO. Пусть a — радиус окружности S, R — радиус окружности S_1, d — расстояние между центрами этих окружностей. Окружности S и S_1 пересекаются тогда и только тогда, когда из отрезков a, d, R можно составить треугольник, т. е.

$$(R-a)^2\leqslant d^2\leqslant(R+a)^2.$$

Учитывая, что $4d^2 = (x+c)^2 + y^2$ и $4R^2 = (x-c)^2 + y^2$, приходим к неравенству

$$a^2 - 2Ra \leqslant cx \leqslant 2Ra + a^2,$$

которое эквивалентно неравенству $(cx - a^2)^2 \leqslant 4a^2R^2$, т. е.

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 \leqslant a^2(c^2 - a^2).$$

31.70. Можно считать, что уравнение коники имеет вид

$$A(z^2 + \bar{z}^2) + Bz\bar{z} + Cz + \bar{C}\bar{z} + D = 0. \tag{1}$$

В самом деле, эллипс и гиперболу можно задать уравнением $A(z^2+\bar{z}^2)+Bz\bar{z}=1$ (при $B < 2A$ получаем эллипс, а при $B > 2A$ получаем гиперболу); параболу можно задать уравнением

$$z^2 + \bar{z}^2 + 2z\bar{z} + 2iz - 2i\bar{z} = 0.$$

Пусть u — центр правильного треугольника с вершинами $u + v\varepsilon^k$, где $k = 1,\ 2,\ 3$ и $\varepsilon = \exp(2\pi i/3)$. Если этот треугольник вписан в конику (1), то числа $z_k = u + v\varepsilon^k$, $k = 1,\ 2,\ 3$, удовлетворяют соотношению (1). Сложив три таких равенства, получим

$$A(u^2 + \bar{u}^2) + B(u\bar{u} + v\bar{v}) + Cu + \bar{C}\bar{u} + D = 0 \tag{2}$$

(мы воспользовались тем, что $\varepsilon^1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 = 0$). Подставим в (1) значение $z = z_3 = u + v$ и вычтем из (2) полученное соотношение. В результате получим $\mathrm{Re}(Fv + A\bar{v}^2) = 0$, где $F = 2Au + B\bar{u} + C$. Проделав аналогичные вычисления для $z = z_1 = u + v\varepsilon$, получим $Fv + A\bar{v}^2 = 0$. Так как $v \neq 0$, то при $A \neq 0$

$$|v|^2 = |2Au + B\bar{u} + C|^2 A^{-2}; \tag{3}$$

случай $A = 0$ соответствует окружности. Подставив (3) в (2), получим уравнение требуемой коники.

Отметим, что вторая коника совпадает с исходной тогда и только тогда, когда $B = 0$, т. е. в случае равнобочной гиперболы.

31.71. Фиксируем на данной конике точку $(x_0,\ y_0)$. Для фиксированного t рассмотрим прямую $y = y_0 + t(x - x_0)$. Эта прямая проходит через точку $(x_0,\ y_0)$. Найдём остальные точки пересечения прямой и коники (как мы сейчас выясним, прямая почти всегда пересекает конику ещё ровно в одной точке). Подставим выражение $y = y_0 + t(x - x_0)$ в уравнение коники. В результате получим уравнение вида $A(t)x^2 + B(t)x + C(t) = 0$, где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — многочлены; например $A(t) = ct^2 + a$. Точки пересечения рассматриваемой прямой и коники соответствуют корням полученного квадратного уравнения. Одну точку пересечения мы знаем — это фиксированная точка $(x_0,\ y_0)$. Поэтому уравнение $A(t)x^2 + B(t)x + C(t) = 0$ имеет корень x_0. Второй корень мы находим по теореме Виета: $x_1 = -x_0 - \dfrac{B(t)}{A(t)} = \dfrac{P(t)}{A(t)}$; здесь $P(t)$ — снова многочлен. Далее, $y = y_0 + t\left(\dfrac{P(t)}{A(t)} - x_0\right) = \dfrac{Q(t)}{A(t)}$, где $Q(t)$ — многочлен.

Мы получили взаимно однозначное соответствие между точками коники и параметром t (тангенсом угла наклона прямой) за исключением некоторых особых случаев.

1) Вертикальная прямая может пересекать конику, но ей не соответствует никакой конечный параметр t (можно считать, что ей соответствует $t = \pm\infty$).

2) Для исключительных значений параметра t коэффициент $A(t) = ct^2 + a$ может обращаться в нуль. В таком случае квадратное уравнение превращается в линейное уравнение, у которого нет второго корня. В этом случае прямая пересекает конику лишь в одной точке (можно считать, что вторая точка пересечения бесконечно удалённая).

Отметим, что совпадение корней квадратного уравнения соответствует тому, что рассматриваемая прямая — касательная к конике.

31.72. Подставим выражение $y = t(x - 1)$ в уравнение окружности. В результате получим уравнение $(1 + t^2)x^2 + (-2t^2)x + t^2 - 1 = 0$. Произведение корней этого уравнения равно $\dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$, причём один корень равен 1. Поэтому другой корень равен $\dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$. Далее, $y = t(x - 1) = \dfrac{-2t}{t^2 + 1}$. В итоге получаем для окружности рациональную параметризацию $\left(\dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \dfrac{-2t}{t^2 + 1}\right)$.

31.73. Для многочлена $A(t) = ct^2 + a$ это видно непосредственно. Для каждого фиксированного λ прямая $x = \lambda$ пересекает конику не более чем в двух точках, поэтому уравнение $P(t) = \lambda A(t)$ имеет не более двух корней. Следовательно, степень многочлена P не превосходит 2. Для многочлена Q доказательство аналогично.

31.74. Пусть $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey = f$ — уравнение одной коники, а $\left(\dfrac{P(t)}{A(t)}, \dfrac{Q(t)}{A(t)}\right)$ — рациональная параметризация второй коники. Тогда точки их пересечения соответствуют корням уравнения

$$aP^2 + 2bPQ + cQ^2 + 2dPA + 2eQA - fA^2 = 0.$$

Согласно задаче 31.73 степень этого уравнения не превосходит 4. (Вообще говоря, мы могли бы получить уравнение вида $g = 0$, где g — некоторое число. Но это соответствует либо случаю двух совпадающих коник, либо случаю непересекающихся коник.) Остаётся заметить, что уравнение, степень которого не превосходит 4, имеет не более 4 корней.

Замечание. Если речь идёт не о кониках, а о произвольных кривых второго порядка, то несовпадающие вырожденные кривые второго порядка могут иметь общую прямую.

31.75. Пусть точки A, B, C не лежат на одной прямой. Достаточно доказать, что имеется лишь конечное число точек P, расстояния от которых до A, B и C — целые числа. Пусть k — наибольшее из чисел AB и BC. Тогда $|PA - PB| \leqslant AB \leqslant k$. Геометрическим местом точек P, для которых $|PA - PB| = d$, является гипербола с фокусами A и B. Так как $0 \leqslant d \leqslant k$, точка P расположена на одной из $k + 1$ гипербол с фокусами A и B (одна из этих гипербол вырождается в прямую). Аналогично точка P расположена на одной из $k + 1$ гипербол с фокусами B и C. Поскольку две гиперболы имеют не более четырёх общих точек (задача 31.74), а гиперболы с общими фокусами вообще не имеют общих точек, то всего имеется не более $4(k + 1)^2$ точек пересечения гипербол.

31.76. Пусть коника задана уравнением

$$px^2 + qy^2 + rz^2 + sxy + txz + uyz = 0. \qquad (1)$$

Эта коника проходит через точку $(1, 0, 0)$ тогда и только тогда, когда $p = 0$.

Коника (1) касается прямой $x=0$ тогда и только тогда, когда выражение qy^2+rz^2+uyz является полным квадратом, т. е. $u=\pm 2\sqrt{qr}$.

Замечание 1. Уравнение эллипса касающегося всех сторон треугольника, можно записать в виде

$$p_1\sqrt{x}+q_1\sqrt{y}+r_1\sqrt{z}=0,$$

где $p_1=\sqrt[4]{p}$ и т. д.

Замечание 2. В барицентрических координатах уравнения вписанной и описанной коники имеют такой же вид (хотя сами коэффициенты будут другими).

31.77. Если две точки имеют абсолютные барицентрические координаты $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ и $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, то середина отрезка с концами в этих точках имеет абсолютные барицентрические координаты $\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}, \frac{\beta_1+\beta_2}{2}, \frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}\right)$. Поэтому в абсолютных барицентрических координатах симметрия относительно точки $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ задаётся формулой

$$(\alpha, \beta, \gamma)\mapsto(2\alpha_0-\alpha, 2\beta_0-\beta, 2\gamma_0-\gamma).$$

Таким образом, нужно проверить, что если $\alpha+\beta+\gamma=1$ и $p\alpha\beta+q\alpha\gamma+r\beta\gamma=0$, то

$$p(2\alpha_0-\alpha)(2\beta_0-\beta)+q(2\alpha_0-\alpha)(2\gamma_0-\gamma)+r(2\beta_0-\beta)(2\gamma_0-\gamma)=0, \qquad (1)$$

где $\alpha_0=\dfrac{r(p+q-r)}{2pq+2pr+2qr-p^2-q^2-r^2}$ и т. д. Равенство (1) эквивалентно равенству

$$2p\alpha_0\beta_0+2q\alpha_0\gamma_0+2r\beta_0\gamma_0=\alpha(p\beta_0+q\gamma_0)+\beta(p\alpha_0+r\gamma_0)+\gamma(q\alpha_0+r\beta_0). \qquad (2)$$

Выражение в левой части равенства (2) равно

$$\frac{2pqr(2pq+2pr+2qr-p^2-q^2-r^2)}{(2pq+2pr+2qr-p^2-q^2-r^2)^2}=\frac{2pqr}{2pq+2pr+2qr-p^2-q^2-r^2}.$$

Далее, $p\beta_0+q\gamma_0=\dfrac{2pqr}{2pq+2pr+2qr-p^2-q^2-r^2}=p\alpha_0+r\gamma_0=q\alpha_0+r\beta_0$. А так как $\alpha+\beta+\gamma=1$, то выражение в правой части равенства (2) тоже равно $\dfrac{2pqr}{2pq+2pr+2qr-p^2-q^2-r^2}$.

31.78. Если прямая не проходит через вершины треугольника, то в трилинейных координатах она задаётся уравнением $px+qy+rz=0$, где числа p, q, r отличны от нуля. Её образ при изогональном сопряжении задаётся уравнением $\frac{p}{x}+\frac{q}{y}+\frac{r}{z}=0$, т. е. $pyz+qxz+rxy=0$. Это уравнение задаёт некоторую конику, проходящую через вершины треугольника.

Прямая, проходящая через вершину A, задаётся уравнением $qy+rz=0$, Её образ при изогональном сопряжении задаётся уравнением $x(ry+qz)=0$. Это уравнение задаёт две прямые: $x=0$ (прямая BC) и $ry+qz=0$ (эта прямая симметрична исходной прямой относительно биссектрисы угла A).

31.79. а) При изогональном сопряжении описанная окружность переходит в бесконечно удалённую прямую (задача 2.95). Поэтому количество точек пересечения с бесконечно удалённой прямой образа прямой l при изогональном сопряжении равно количеству точек пересечения прямой l с описанной окружностью. Ясно также, что коника является эллипсом, если она не пересекает бесконечно удалённую прямую; параболой — если касается; гиперболой — если пересекает в двух точках.

б) Рассмотрим аффинное преобразование, переводящее треугольник ABC в правильный треугольник $A'B'C'$. Для правильного треугольника изотомическое сопряжение одновременно является изогональным сопряжением. Ясно также, что изотомическое сопряжение инвариантно относительно аффинных преобразований. Поэтому задача б) следует из задачи а).

31.80. а) Согласно задаче 31.78 рассматриваемая кривая является коникой, проходящей через вершины треугольника. Нужно лишь доказать, что эта коника является равнобочной гиперболой.

Первое решение. При изогональном сопряжении точка O переходит в ортоцентр. Если коника проходит через вершины треугольника и его ортоцентр, то она — гипербола с перпендикулярными асимптотами (задача 31.56).

Второе решение. При изогональном сопряжении точки описанной окружности переходят в бесконечно удалённые точки (задача 2.95). Легко также видеть, что если точки P_1 и P_2 лежат на описанной окружности треугольника ABC и прямые, симметричные прямым AP_i, BP_i и CP_i относительно биссектрис углов A, B и C, параллельны прямой l_i, то угол между прямыми l_1 и l_2 равен углу $\angle P_1AP_2$. Поэтому диаметрально противоположным точкам P_1 и P_2 соответствуют перпендикулярные прямые l_1 и l_2.

б) Это непосредственно следует из задачи 31.59 в), поскольку рассматриваемая коника проходит через вершины треугольника и его ортоцентр.

31.81. а) Сначала найдём уравнение прямой OK в трилинейных координатах. Точка O имеет трилинейные координаты $(\cos A : \cos B : \cos C)$, а точка K имеет трилинейные координаты $(a : b : c)$. Легко проверить, что обе эти точки лежат на прямой

$$bc(b^2 - c^2)x + ac(c^2 - a^2)y + ab(a^2 - b^2)z = 0.$$

Поэтому гипербола Киперта (изогонально сопряжённая этой прямой) задаётся уравнением

$$\frac{bc(b^2 - c^2)}{x} + \frac{ac(c^2 - a^2)}{y} + \frac{ab(a^2 - b^2)}{z} = 0,$$

т. е. $bc(b^2 - c^2)yz + ac(c^2 - a^2)xz + ab(a^2 - b^2)xy = 0$.

б) В барицентрических координатах гипербола Киперта задаётся уравнением

$$(b^2 - c^2)\beta\gamma + (c^2 - a^2)\alpha\gamma + (a^2 - b^2)\alpha\beta = 0.$$

31.82. Будем считать, что $0 < \varphi < \pi/2$ в случае треугольников, построенных внешним образом, и $-\pi/2 < \varphi < 0$ в случае треугольников, построенных внутренним образом. Точка C_1 имеет трилинейные координаты $\big(\sin(\beta + \varphi) : \sin(\alpha + \varphi) : -\sin\varphi\big)$, поэтому прямая CC_1 задаётся уравнением $x\sin(\alpha + \varphi) = y\sin(\beta + \varphi)$. Таким образом, точка с трилинейными координатами

$$\big(\sin(\beta + \varphi)\sin(\gamma + \varphi) : \sin(\alpha + \varphi)\sin(\gamma + \varphi) : \sin(\alpha + \varphi)\sin(\beta + \varphi)\big)$$

является точкой пересечения прямых AA_1, BB_1 и CC_1. Нужно проверить, что изогонально сопряжённая ей точка $\big(\sin(\alpha + \varphi) : \sin(\beta + \varphi) : \sin(\gamma + \varphi)\big)$ лежит на прямой OK, т. е.

$$bc(b^2 - c^2)(\sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi) + \ldots = 0.$$

Но $bc(b^2-c^2)\sin\alpha+\ldots=0$ и $bc(b^2-c^2)\cos\alpha+\ldots=0$, поскольку точки K и O лежат на рассматриваемой прямой.

31.83. Уравнение гиперболы Киперта получено в решении задачи 31.81. Поэтому, воспользовавшись задачей 31.77, получим, что барицентрические координаты центра гиперболы Киперта равны

$$\big((b^2-c^2)^2 : (c^2-a^2)^2 : (a^2-b^2)^2\big).$$

Соответственно, его трилинейные координаты равны

$$\left(\frac{(b^2-c^2)^2}{a} : \frac{(c^2-a^2)^2}{b} : \frac{(a^2-b^2)^2}{c}\right).$$

31.84. Сначала найдём уравнение прямой Эйлера в трилинейных координатах. Точка пересечения медиан имеет трилинейные координаты $\left(\frac{1}{\sin A} : \frac{1}{\sin B} : \frac{1}{\sin C}\right)$, а точка пересечения высот имеет трилинейные координаты $\left(\frac{1}{\cos A} : \frac{1}{\cos B} : \frac{1}{\cos C}\right)$. Легко проверить, что обе эти точки лежат на прямой

$$\sin 2A\cos(B-C)x+\sin 2B\cos(C-A)y+\sin 2C\cos(A-B)z=0.$$

Поэтому гипербола Енжабека (изогонально сопряжённая этой прямой) задаётся уравнением

$$\frac{\sin 2A\cos(B-C)}{x}+\frac{\sin 2B\cos(C-A)}{y}+\frac{\sin 2C\cos(A-B)}{z}=0.$$

ДОПОЛНЕНИЕ

Кубические уравнения, связанные с треугольником

Для любого треугольника несложно доказать соотношение

$$p - a = r \operatorname{ctg} \frac{A}{2},$$

где p — полупериметр, r — радиус вписанной окружности. В самом деле, пусть $u = AC_1 = AB_1$, $v = BC_1 = BA_1$, $w = CA_1 = CB_1$ (рис. Д1). Тогда $u + v = c$, $v + w = a$, $w + u = b$. Поэтому $u = \dfrac{b + c - a}{2} = p - a$. Остаётся заметить, что $AB_1 = r \operatorname{ctg} \dfrac{A}{2}$.

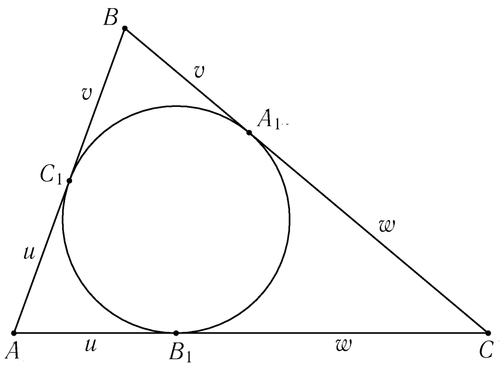


Рис. Д1

Воспользуемся теоремой синусов и заменим a на $2R \sin A$, где R — радиус описанной окружности. В результате получим

$$p = 2R \sin A + r \operatorname{ctg} \frac{A}{2}.$$

Рассмотрим для треугольника с некоторыми значениями p, R и r уравнение

$$p = 2R \sin \varphi + r \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}. \qquad (1)$$

Это уравнение имеет корни $\varphi_1 = A$, $\varphi_2 = B$, $\varphi_3 = C$ — величины углов треугольника. Можно ожидать, что уравнение (1) в каком-то смысле является кубическим уравнением.

В уравнение (1) входят $\sin\varphi$ и $\operatorname{ctg}(\varphi/2)$. Их можно выразить через какую-нибудь одну тригонометрическую функцию. Например,

$$\sin\varphi = \frac{2\operatorname{tg}(\varphi/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\varphi/2)}, \qquad \operatorname{ctg}(\varphi/2) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\varphi/2)}.$$

Поэтому при $x = \operatorname{tg}(\varphi/2)$ уравнение (1) принимает вид

$$p = \frac{4Rx}{1+x^2} + \frac{r}{x},$$

т. е.

$$x^3 - \frac{4R+r}{p}x^2 + x - \frac{r}{p} = 0. \tag{2}$$

Уравнение (2) имеет корни $x_1 = \operatorname{tg}(A/2)$, $x_2 = \operatorname{tg}(B/2)$, $x_3 = \operatorname{tg}(C/2)$. В том случае, когда эти числа различны, по теореме Виета получаем

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{4R+r}{p},$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 1,$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{r}{p}.$$

С помощью предельного перехода легко убедиться, что эти формулы остаются справедливыми и в том случае, когда среди чисел $\operatorname{tg}(A/2)$, $\operatorname{tg}(B/2)$, $\operatorname{tg}(C/2)$ есть равные.

Выразим теперь $\sin\varphi$ и $\operatorname{ctg}(\varphi/2)$ через $x = \cos\varphi$:

$$\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{1-x^2}, \qquad \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} = \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}.$$

Подставив эти выражения в уравнение (1), получим

$$p = \sqrt{1-x^2}\left(2R + \frac{r}{1-x}\right).$$

При $x \neq 1$ это уравнение приводится к виду

$$x^3 - \left(1+\frac{r}{R}\right)x^2 + \left(\frac{p^2+r^2-4R^2}{4R^2}\right)x - \frac{p^2-(2R+r)^2}{4R^2} = 0.$$

Следовательно,

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R},$$

$$\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A = \frac{p^2+r^2-4R^2}{4R^2},$$

$$\cos A\cos B\cos C = \frac{p^2-(2R+r)^2}{4R^2}.$$

Легко проверить, что при $x = 2R\sin\varphi$ уравнение (1) принимает вид

$$x^3 - 2px^2 + (p^2 + 4Rr + r^2)x - 4Rrp = 0.$$

Поэтому

$$a + b + c = 2p, \qquad ab + bc + ca = p^2 + 4Rr + r^2, \qquad abc = 4Rrp.$$

Аналогичным образом $\sin\varphi$ и $\operatorname{tg}(\varphi/2)$ можно выражать через другие тригонометрические функции и подставлять эти выражения в уравнение (1).

При $x = \operatorname{tg}\varphi$ получаем уравнение

$$(p^2 - (2R + r)^2)x^3 - 2prx^2 + (p^2 - 4Rr - r^2)x - 2pr = 0.$$

При $x = \sin^2(\varphi/2)$ получаем уравнение

$$16R^2x^3 - 8R(2R - r)x^2 + (p^2 + r^2 - 8Rr)x - r^2 = 0.$$

При $x = \cos^2(\varphi/2)$ получаем уравнение

$$16R^2x^3 - 8R(4R + r)x^2 + (p^2 + (4R + r)^2)x - p^2 = 0.$$

Точки пересечения диагоналей правильных многоугольников

Известно довольно много задач про треугольники с целочисленными углами. Вот два примера таких задач.

Задача 1. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC угол при вершине A равен 80°. Внутри треугольника взята точка M так, что $\angle MBC = 30^\circ$ и $\angle MCB = 10^\circ$ (рис. Д2, *а*). Докажите, что $\angle AMC = 70^\circ$.

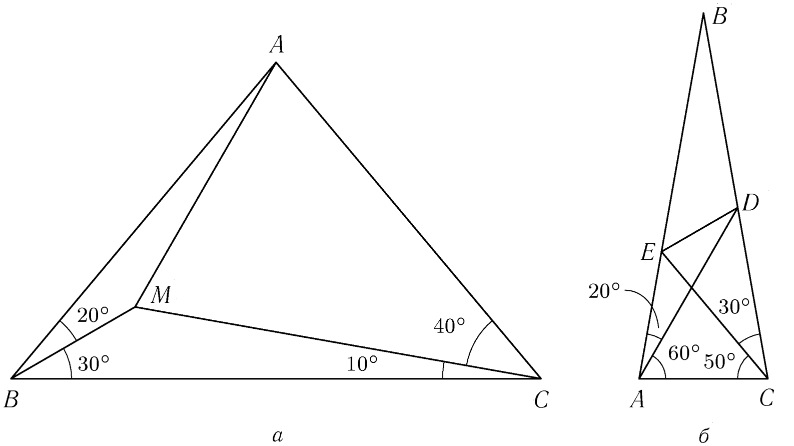


Рис. Д2

З а д а ч а 2. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC угол при вершине B равен $20°$. На сторонах BC и AB взяты точки D и E соответственно так, что $\angle DAC = 60°$ и $\angle ECA = 50°$ (рис. Д2, *б*). Докажите, что $\angle ADE = 30°$.

Задачи такого типа обычно бывают связаны с точками пересечения троек диагоналей правильных многоугольников, в данном случае — правильного восемнадцатиугольника.

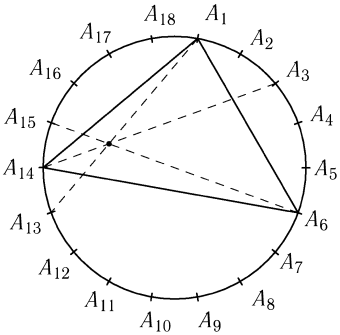


Рис. Д3

Обратимся к рис. Д3. Этот рисунок показывает, что задача 1 эквивалентна следующему утверждению:

в правильном восемнадцатиугольнике диагонали A_1A_{13}, A_3A_{14} и A_6A_{15} пересекаются в одной точке.

В самом деле, если эти диагонали пересекаются в некоторой точке M, то

$$\angle A_1MA_6 = \frac{1}{2}(\smile A_1A_6 + \smile A_{13}A_{15}) = \\ = 50° + 20° = 70°.$$

Ясно также, что углы треугольника $A_1A_6A_{14}$ равны $80°$, $50°$, $50°$ и $\angle MA_{14}A_6 = 30°$, $\angle MA_6A_{14} = 10°$.

Что же касается задачи 2, то она эквивалентна следующему утверждению: в правильном восемнадцатиугольнике диагонали A_1A_{14}, A_7A_{16} и $A_{11}A_{17}$ пересекаются в одной точке (рис. Д4).

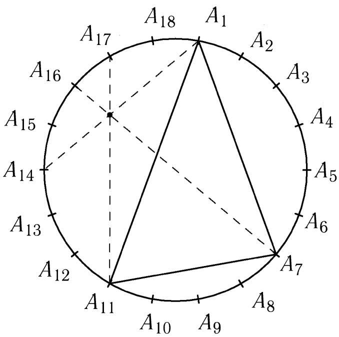


Рис. Д4

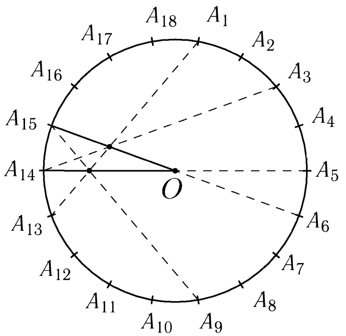


Рис. Д5

Но задачу 2 можно решить и с помощью совсем другой тройки пересекающихся диагоналей, а именно, диагоналей A_1A_{13}, A_3A_{14} и A_6A_{15} (рис. Д5). В качестве треугольника ABC мы берём треугольник $A_{14}OA_{15}$. Диагонали A_1A_{13} и A_9A_{15} симметричны относительно диаметра A_5A_{14}, поэтому обе диагонали пересекают диаметр в одной точке.

Но мы пока не доказали, что тройки диагоналей на рис. Д3—Д5 действительно пересекаются в одной точке. Проверять, пересекаются ли тройки диагоналей в одной точке, удобно с помощью следующего утверждения.

Теорема. *На сторонах треугольника ABC взяты точки A_1, B_1, C_1 (A_1 на BC и т.д.). Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда*

$$\frac{\sin BAA_1}{\sin CAA_1}\cdot\frac{\sin ACC_1}{\sin BCC_1}\cdot\frac{\sin CBB_1}{\sin ABB_1}=1.$$

Доказательство. Предположим сначала, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O (рис. Д6). Тогда

$$2S_{AOB}:2S_{AOC}=(AB\cdot AO\sin BAO):(AC\cdot AO\sin CAO).$$

Следовательно,

$$1=\frac{S_{AOB}}{S_{AOC}}\cdot\frac{S_{COA}}{S_{COB}}\cdot\frac{S_{BOC}}{S_{BOA}}=\left(\frac{AB}{AC}\cdot\frac{CA}{CB}\cdot\frac{BC}{BA}\right)\frac{\sin BAO}{\sin CAO}\cdot\frac{\sin ACO}{\sin BCO}\cdot\frac{\sin CBO}{\sin ABO},$$

т. е.

$$\frac{\sin BAA_1}{\sin CAA_1}\cdot\frac{\sin ACC_1}{\sin BCC_1}\cdot\frac{\sin CBB_1}{\sin ABB_1}=1.$$

Предположим теперь, что для точек A_1, B_1 и C_1 выполняется указанное соотношение. Пусть O — точка пересечения отрезков AA_1 и BB_1. Нужно доказать, что отрезок CC_1 проходит через точку O. Иными словами, если C_1' — точка пересечения прямых CO и AB, то $C_1'=C_1$. Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1' пересекаются в одной точке, поэтому, как только что было доказано,

$$\frac{\sin BAA_1}{\sin CAA_1}\cdot\frac{\sin CBB_1}{\sin ABB_1}\cdot\frac{\sin ACC_1'}{\sin BCC_1'}=1.$$

Сравнив эту формулу с условием теоремы, получим

$$\sin ACC_1:\sin BCC_1=\sin ACC_1':\sin BCC_1'.$$

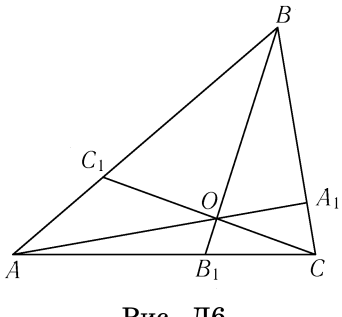


Рис. Д6

Остаётся доказать, что при движении точки X по отрезку AB величина $\sin ACX:\sin BCX$ изменяется монотонно. Сами углы $\angle ACX$ и $\angle BCX$ изменяются монотонно, но их синусы могут быть не монотонными в случае тупого угла C. Это не беда. В любом треугольнике есть острый угол, и мы с самого начала могли бы взять в качестве угла C острый угол треугольника. Доказательство теоремы завершено. □

Теперь проверка того, что тройка диагоналей, изображённая на рис. Д3, пересекается в одной точке, сводится к проверке тождества

$$\frac{\sin 10^\circ}{\sin 70^\circ}\cdot\frac{\sin 30^\circ}{\sin 20^\circ}\cdot\frac{\sin 40^\circ}{\sin 10^\circ}=1.$$

Доказать его несложно:

$$\sin 30^\circ \sin 40^\circ = \frac{1}{2}\sin 40^\circ = \sin 20^\circ \cos 20^\circ = \sin 20^\circ \sin 70^\circ.$$

Тройка диагоналей, изображённая на рис. Д3, соответствует тождеству

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 20^\circ = \sin 30^\circ \sin 60^\circ \sin 10^\circ.$$

Есть ещё три тождества, приводящих к тройкам пересекающихся диагоналей:

$$\sin 10^\circ \sin 20^\circ \sin 80^\circ = \sin 20^\circ \sin 20^\circ \sin 30^\circ,$$
$$\sin 20^\circ \sin 30^\circ \sin 30^\circ = \sin 10^\circ \sin 40^\circ \sin 50^\circ,$$
$$\sin 10^\circ \sin 20^\circ \sin 30^\circ = \sin 10^\circ \sin 10^\circ \sin 100^\circ.$$

Проверку этих тождеств мы оставляем читателю.

Обратите внимание, что перестановка сомножителей в таких тождествах приводит к совсем другим тройкам пересекающихся диагоналей.

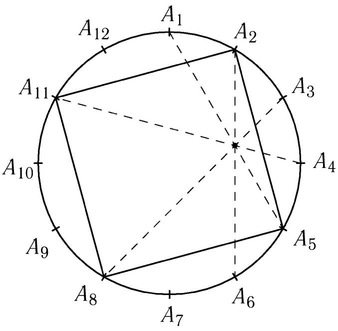


Рис. Д7

Наш интерес к восемнадцатиугольнику, а не к какому-либо другому правильному многоугольнику, связан с тем, что именно к нему приводят треугольники с углами, кратными 10°. Среди всех правильных многоугольников, число вершин которых меньше 18, интересные наборы пересекающихся диагоналей есть лишь у двенадцатиугольника. Например, диагонали A_1A_5, A_2A_6, A_3A_8 и A_4A_{11} правильного двенадцатиугольника пересекаются в одной точке (рис. Д7). Это утверждение эквивалентно следующей хорошо известной задаче.

Задача 3. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка P так, что треугольник ABP равносторонний. Докажите, что $\angle PCD = 15^\circ$.

Упражнения

1. Дан треугольник ABC с углами $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 70^\circ$.

а) На сторонах BA и AC взяты точки D и E так, что $\angle DCB = \angle EBC = 40^\circ$. Докажите, что $\angle AED = 30^\circ$.

б) На сторонах BA и BC взяты точки D и E так, что $\angle DCA = 50^\circ$ и $\angle EAC = 40^\circ$. Докажите, что $\angle AED = 30^\circ$.

2. В треугольнике ABC углы A, B и C равны 14°, 62° и 104°. На сторонах AC и AB взяты точки D и E соответственно так, что $\angle DBC = 50^\circ$ и $\angle ECB = 94^\circ$. Докажите, что $\angle CED = 34^\circ$.

3. Докажите, что диагонали A_1A_{n+2}, $A_{2n-1}A_3$ и $A_{2n}A_5$ правильного $2n$-угольника пересекаются в одной точке.

4. Докажите, что диагонали A_1A_7, A_3A_{11} и A_5A_{21} правильного 24-угольника пересекаются в точке, лежащей на диаметре A_4A_{16}.

5. Докажите, что в правильном тридцатиугольнике семь диагоналей

$$A_1A_{13},\ A_2A_{17},\ A_3A_{21},\ A_4A_{24},\ A_5A_{26},\ A_8A_{29},\ A_{10}A_{30}$$

пересекаются в одной точке.

Кубические кривые, связанные с треугольником

Каждому треугольнику можно многими разными способами сопоставить кубическую кривую, т. е. кривую, заданную уравнением вида

$$\sum_{i+j\leqslant 3} a_{ij}x^iy^j = 0.$$

Некоторые из таких кубических кривых обладают интересными геометрическими свойствами. Эти кубические кривые, или *кубики*, обычно называют по именам геометров, впервые их исследовавших: кубика Дарбу, кубика Томсона, кубика Нейберга, кубика Мак-Кэя.

Наиболее интересные свойства кубик, связанных с треугольником, так или иначе используют изогональное сопряжение относительно этого треугольника. Поэтому наше изложение будет опираться на свойства изогонального сопряжения. Мы будем также пользоваться трилинейными координатами. Несложно понять, что в трилинейных координатах $(x : y : z)$ кубическая кривая задаётся уравнением вида

$$\sum_{i+j+k=3} c_{ijk}x^iy^jz^k = 0.$$

Первоначально кубики, связанные с треугольником, определялись посредством разнообразных геометрических конструкций. Но наиболее известные из этих кубик можно получить единой конструкцией[1].

Эта конструкция основывается на следующем утверждении.

Теорема 1. *Пусть на плоскости задана точка F. Для данного треугольника ABC рассмотрим всевозможные пары изогонально сопряжённых точек P и Q, для которых прямая PQ проходит через*

[1] *Cundy H.M., Parry C.F.* Some cubic curves associated with a triangle // Journal of Geometry. 1995. V. 53. P. 41—66.

точку F. Тогда точки P и Q заметают кубическую кривую, которая проходит через вершины треугольника, через центры вписанной и трёх вневписанных окружностей, а также через саму точку F.

Доказательство. Пусть точка F имеет трилинейные координаты $(f_1 : f_2 : f_3)$. Если точка P имеет трилинейные координаты $(x : y : z)$, то точка Q, изогонально сопряжённая с ней, имеет трилинейные координаты $(x^{-1} : y^{-1} : z^{-1})$, т. е. $(yz : zx : xy)$. Поэтому условие, что точки P, Q, F лежат на одной прямой, запишется в виде

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ x & y & z \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} = 0,$$

т. е.

$$f_1 x(y^2 - z^2) + f_2 y(z^2 - x^2) + f_3 z(x^2 - y^2) = 0. \qquad (1)$$

Легко проверить, что точка $F = (f_1 : f_2 : f_3)$, точки $A = (1 : 0 : 0)$, $B = (0 : 1 : 0)$, $C = (0 : 0 : 1)$ и точки $I = (1 : 1 : 1)$, $I_a = (-1 : 1 : 1)$, $I_b = (1 : -1 : 1)$, $I_c = (1 : 1 : -1)$ лежат на кривой, заданной уравнением (1), т. е. координаты указанных точек удовлетворяют этому уравнению. □

Непосредственно из геометрического определения кривой (1) видно, что она переходит сама в себя при изогональном сопряжении. В самом деле, если точка P лежит на кривой (1), то изогонально сопряжённая с ней точка Q тоже лежит на кривой (1).

Точку F, с помощью которой строится кубическая кривая (1), будем называть *центром вращения* для этой кривой.

Кубика Дарбу

Центром вращения для этой кривой служит точка $\mathcal{H}$, симметричная точке пересечения высот H относительно центра описанной окружности O. Легко проверить, что точка $\mathcal{H}$ имеет трилинейные координаты

$$(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma : \cos\beta - \cos\gamma\cos\alpha : \cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta),$$

где α, β, γ — углы треугольника.

В трилинейных координатах кубика Дарбу задаётся уравнением

$$(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma)x(y^2 - z^2) + \ldots = 0.$$

(Мы написали только коэффициент при $x(y^2 - z^2)$; коэффициенты при $y(z^2 - x^2)$ и при $z(x^2 - y^2)$ записываются очевидным образом.)

Кубика Дарбу проходит через следующие точки: ортоцентр и центр описанной окружности.

Кубика Дарбу допускает следующее геометрическое описание.

Теорема 2. *Пусть A_1, B_1, C_1 — проекции точки D на прямые BC, CA, AB. Точка D лежит на кубике Дарбу тогда и только тогда, когда прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Согласно теореме Чевы прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 = C_1B \cdot A_1C \cdot B_1A,$$

где AC_1 и т. д. — ориентированные длины отрезков (т. е. числа AC_1 и C_1B имеют один и тот же знак, если точка C_1 лежит на отрезке AB, а если точка C_1 лежит вне отрезка AB, то эти числа имеют противоположные знаки).

Пусть (x, y, z) — абсолютные трилинейные координаты точки D, т. е. x, y, z — расстояния от точки D до прямых BC, CA, AB с учётом знака. Легко проверить, что $AC_1 = \dfrac{z\cos\alpha + y}{\sin\alpha}$ и т. д. Поэтому прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$(z\cos\alpha + y)(y\cos\gamma + x)(x\cos\beta + z) = (z\cos\beta + x)(x\cos\gamma + y)(y\cos\alpha + z).$$

Полученное уравнение легко преобразуется в уравнение кубики Дарбу. □

Замечание 1. Если равенство

$$AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 = C_1B \cdot A_1C \cdot B_1A$$

выполняется для некоторой точки D, то такое же равенство выполняется и для точки D', симметричной точке D относительно центра описанной окружности. Поэтому кубика Дарбу симметрична относительно центра описанной окружности.

Замечание 2. Несложно доказать, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда существует кривая второго порядка, касающаяся сторон треугольника (или их продолжений) в точках A_1, B_1, C_1.

Кубика Томсона

Центром вращения для этой кривой служит центр масс M. Напомним, что центр масс треугольника имеет трилинейные координаты (bc, ca, ab).

В трилинейных координатах кубика Томсона задаётся уравнением

$$bcx(y^2 - z^2) + cay(z^2 - x^2) + abz(x^2 - y^2) = 0.$$

По-другому это уравнение можно записать в виде

$$(\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma)x(y^2 - z^2) + \ldots = 0.$$

Кубика Томсона проходит через следующие точки: ортоцентр и центр описанной окружности, середины сторон, середины высот.

Из замечания 2 к теореме 2 видно, что кубика Дарбу допускает следующее геометрическое описание. Рассмотрим всевозможные кривые второго порядка, касающиеся сторон данного треугольника или их продолжений. Выделим среди них те кривые второго порядка, для которых перпендикуляры к сторонам треугольника в точках касания пересекаются в одной точке. Тогда точки пересечения этих перпендикуляров заметают кубику Дарбу. Можно доказать, что центры выделенных таким образом кривых второго порядка заметают кубику Томсона.

Кубика Мак-Кэя

Центром вращения для этой кривой служит центр описанной окружности O. Напомним, что центр описанной окружности имеет трилинейные координаты $(\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma)$.

В трилинейных координатах кубика Мак-Кэя задаётся уравнением

$$\cos\alpha x(y^2 - z^2) + \cos\beta y(z^2 - x^2) + \cos\gamma z(x^2 - y^2) = 0.$$

Кубика Мак-Кэя проходит через следующие точки: ортоцентр и центр описанной окружности.

Теорема 3. *Пусть вершины треугольника расположены в точках a, b, c единичной окружности на комплексной плоскости. Точка, соответствующая комплексному числу z, лежит на кубике Мак-Кэя тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$(z-a)(z-b)(z-c) = abc(a\bar{z}-1)(b\bar{z}-1)(c\bar{z}-1).$$

Доказательство. Пусть точки z и w изогонально сопряжены относительно данного треугольника. Тогда согласно теореме Морли (задача 29.45) точки z и w связаны соотношением

$$z + w + abc\bar{z}\bar{w} = a + b + c. \tag{2}$$

Следовательно,

$$\bar{z} + \bar{w} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}zw = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}. \tag{3}$$

Умножим обе части соотношения (3) на $abcz̄$ и вычтем из полученного выражение соотношение (2). В результате получим

$$w = \frac{a+b+c-z-(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}-\bar{z})abc\bar{z}}{1-|abcz|^2}. \tag{4}$$

По определению кубики Мак-Кэя прямая zw проходит через центр описанной окружности, т. е. через начало координат. Это означает, что $w/\bar{w} = z/\bar{z}$. Выразив $w/\bar{w}$ с помощью соотношения (4), после несложных преобразований получим требуемое уравнение. □

Следствие. *Кубика Мак-Кэя пересекает описанную окружность треугольника в трёх точках, являющихся вершинами правильного треугольника. (Мы учитываем только точки пересечения, отличные от вершин исходного треугольника.)*

Доказательство. Будем считать, что вершины треугольника расположены в точках единичной окружности на комплексной плоскости. Тогда для точки z, лежащей на описанной окружности треугольника, выполняется равенство $\bar{z} = z^{-1}$. Поэтому точки пересечения кубики Мак-Кэя с описанной окружностью удовлетворяют уравнению

$$(z-a)(z-b)(z-c) = -z^{-3}abc(z-a)(z-b)(z-c).$$

Если исключить вершины треугольника, то останутся точки, удовлетворяющие соотношению $z^3 = -abc$. Эти точки образуют правильный треугольник. □

Будем считать, что $\angle PQR$ — величина угла, на который нужно повернуть против часовой стрелки вектор $\overrightarrow{QP}$ так, чтобы он стал сонаправлен с вектором $\overrightarrow{QR}$.

Теорема 4. *Точка M лежит на кубике Мак-Кэя тогда и только тогда, когда*

$$\angle MAB + \angle MBC + \angle MCA = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Доказательство. Снова будем считать, что вершины треугольника расположены на единичной окружности на комплексной плоскости. Положим $\alpha = \angle MAB$, $\beta = \angle MBC$, $\gamma = \angle MCA$. Пусть z — комплексное число, соответствующее точке M. Тогда

$$\frac{b-a}{z-a} \cdot \frac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}} = e^{2i\alpha}, \quad \text{т. е.} \quad e^{2i\alpha} = -b\frac{a\bar{z}-1}{z-a}.$$

Поэтому

$$e^{2i(\alpha+\beta+\gamma)} = -abc\frac{(a\bar{z}-1)(b\bar{z}-1)(c\bar{z}-1)}{(z-a)(z-b)(z-c)}.$$

Таким образом, точка z лежит на кубике Мак-Кэя тогда и только тогда, когда $e^{2i(\alpha+\beta+\gamma)} = -1$, т. е. $\alpha+\beta+\gamma = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. □

Легко проверить, что

$$\angle MAB + \angle MBC + \angle MCA + \angle MAC + \angle MCB + \angle MBA = (2n+1)\pi.$$

Поэтому точка M лежит на кубике Мак-Кэя тогда и только тогда, когда

$$\angle MAB + \angle MBC + \angle MCA = \angle MAC + \angle MCB + \angle MBA + 2l\pi.$$

Отметим без доказательства следующее свойство кубики Мак-Кэя, которое обобщает теорему Фейербаха: описанная окружность треугольника, вершинами которого служат основания перпендикуляров, опущенных из любой точки кубики Мак-Кэя на стороны треугольника ABC (или на их продолжения), касается окружности девяти точек треугольника ABC.

Кубика Нейберга

Центром вращения для этой кривой служит бесконечно удалённая точка прямой OH. Иными словами, кубика Нейберга состоит из таких пар изогонально сопряжённых точек P и Q, что прямая PQ параллельна прямой OH.

В трилинейных координатах кубика Нейберга задаётся уравнением

$$(\cos\alpha - 2\cos\beta\cos\gamma)x(y^2 - z^2) + \ldots = 0.$$

Кубика Нейберга является бесспорным лидером по количеству замечательных точек треугольника, через которые она проходит. Действительно, эта кривая проходит через следующие точки: центр описанной окружности; ортоцентр; вершины правильных треугольников, построенных на сторонах треугольника ABC (как внешним, так и внутренним образом); точки, симметричные вершинам треугольника ABC относительно его сторон; две точки, из которых стороны треугольника ABC видны под углом 60° или 120° (изогональные центры треугольника); две точки, для которых выполняется соотношение $AX \cdot BC = BX \cdot CA = CX \cdot AB$ (изодинамические центры треугольника).

Другое описание кубик

Для рассмотренных выше кубик Дарбу, Томсона, Мак-Кэя и Нейберга центр вращения лежит на прямой Эйлера OH. Кубики, центры вращения которых лежат на прямой Эйлера, можно построить и посредством другой геометрической конструкции[2]. Эта конструкция основывается на следующем утверждении.

Т е о р е м а 5. *Пусть A_1, B_1, C_1 — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые BC, CA, AB, а треугольник $A_2B_2C_2$ получен из треугольника $A_1B_1C_1$ гомотетией с центром P и коэффициентом k. Тогда при фиксированном $k \neq 0$ точки P, для которых прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке, заметают кубическую кривую.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(x:y:z)$ — трилинейные координаты точки P. Тогда точка A_2 имеет трилинейные координаты

$$\big((1-k)x : y + kx\cos\gamma : z + kx\cos\beta\big).$$

Поэтому прямая AA_2 задаётся линейным уравнением с коэффициентами $(0, -z - kx\cos\beta, y + kx\cos\gamma)$. Следовательно, прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

[2] *Pinkernell G.M.* Cubic curves in the triangle plane // Journal of Geometry. 1996. V. 55. P. 141—161.

обращается в нуль определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & -z-kx\cos\beta & y+kx\cos\gamma \\ z+ky\cos\alpha & 0 & -x-ky\cos\gamma \\ -y-kz\cos\alpha & x+kz\cos\beta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= k(\cos\alpha - k\cos\beta\cos\gamma)x(y^2-z^2)+\ldots \quad \square$$

При $k=1$ получаем кубику Дарбу, при $k=-1$ — кубику Томсона, а при $k=2$ — кубику Нейберга. Если подходить формально, то кубика Мак-Кэя этой конструкцией не охватывается. Но естественно считать, что она относится к случаю $k=0$.

Посмотрим теперь по-другому на конструкцию, изложенную в формулировке теоремы. А именно, фиксируем точку P и будем считать число k переменным. Для каких точек P прямые AA_2, BB_2, CC_2 будут пересекаться в одной точке при всех k? И какие кривые будут заметать точки пересечения этих прямых?

Прямые AA_2, BB_2, CC_2 при всех k пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда точка P при всех k лежит на кубике

$$(\cos\alpha - k\cos\beta\cos\gamma)x(y^2-z^2)+\ldots = 0.$$

Девять таких точек нам известны: A, B, C, I, I_a, I_b, I_c, H, O. Две кубические кривые, пересекающиеся в конечном числе точек, не могут иметь более девяти общих точек. Поэтому какие-то другие точки P могут обладать требуемым свойством лишь в исключительных случаях. Например, в случае правильного треугольника этим свойством обладают все точки, лежащие на высотах или их продолжениях.

Если $P=A$, B, C или H, то прямые AA_2, BB_2, CC_2 при всех k пересекаются в точке P. Интересные случаи соответствуют только центрам окружностей — описанной, вписанной и вневписанных.

Теорема 6. а) *Если $P=O$, то точки пересечения прямых AA_2, BB_2, CC_2 заметают прямую Эйлера OH.*

б) *Если $P=I$ $(P=I_a)$, то точки пересечения прямых AA_2, BB_2, CC_2 заметают гиперболу, изогонально сопряжённую прямой OI (прямой OI_a).*

Доказательство. а) Пусть прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в точке с трилинейными координатами $(x':y':z')$. Уравнение прямой AA_2 показывает, что

$$\frac{y'}{z'} = \frac{y+kx\cos\gamma}{z+kx\cos\beta} = \frac{\cos\beta + k\cos\alpha\cos\gamma}{\cos\gamma + k\cos\alpha\cos\beta},$$

поскольку точка O имеет трилинейные координаты $(x:y:z) = (\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma)$. Поэтому

$$(x':y':z') = (\cos\alpha + k\cos\beta\cos\gamma : \cos\beta + k\cos\alpha\cos\gamma : \cos\gamma + k\cos\alpha\cos\beta).$$

Все такие точки лежат на прямой OH.

б) Ограничимся разбором случая $P = I$. В этом случае $(x : y : z) = (1 : 1 : 1)$, поэтому

$$\frac{y'}{z'} = \frac{y + kx\cos\gamma}{z + kx\cos\beta} = \frac{1 + k\cos\gamma}{1 + k\cos\beta}.$$

Таким образом, точка, изогонально сопряжённая точке $(x' : y' : z')$, имеет трилинейные координаты

$$(1 + \cos\alpha : 1 + k\cos\beta : 1 + k\cos\gamma).$$

Все такие точки лежат на прямой OI.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРОГРАММЫ ЭЛЕКТИВНЫХ КУРСОВ ПО ГЕОМЕТРИИ

Для элективных занятий по геометрии предлагаются следующие почасовые программы. Отметим, что списки задач приведены с некоторым запасом; на каждом занятии не обязательно разбирать все задачи.

Тема занятий: избранные задачи планиметрии (18 часов)

Занятие 1. 1.1—1.6.
Занятие 2. 1.7—1.11.
Занятие 3. 1.17—1.22.
Занятие 4. 1.34—1.38.
Занятие 5. 1.40—1.44.
Занятие 6. 1.46—1.50.
Занятие 7. 1.53—1.57.
Занятие 8. 1.61—1.65.
Занятие 9. 2.1—2.5, 2.8.
Занятие 10. 2.22—2.26.
Занятие 11. 2.32—2.37.
Занятие 12. 2.32—2.37.
Занятие 13. 2.41—2.45.
Занятие 14. 2.53—2.57.
Занятие 15. 2.68—2.72.
Занятие 16. 4.1—4.5.
Занятие 17. 4.8—4.10, 4.14, 4.15.
Занятие 18. 4.47—4.51.

Тема занятий: геометрия окружностей (12 часов)

Занятие 1. Вводные задачи 1–4 к главе 3; 3.1—3.5.
Занятие 2. 3.10—3.15.
Занятие 3. 3.16—3.20.
Занятие 4. 3.21—3.23, 3.25.
Занятие 5. 3.28—3.30, 3.33.
Занятие 6. 3.35—3.37, 3.39, 3.40.
Занятие 7. 3.43—3.45, 3.51—3.53.

Занятие 8. 3.54—3.58.
Занятие 9. 3.59—3.63.
Занятие 10. 28.1—28.5.
Занятие 11. 28.9, 28.10, 28.16, 28.17.
Занятие 12. 28.18, 28.19, 28.23, 28.24.

Тема занятий: геометрические места точек и построения (18 часов)

Занятие 1. 7.1—7.4.
Занятие 2. 7.6—7.9.
Занятие 3. 7.11—7.15.
Занятие 4. 7.19—7.21, 7.27, 7.28.
Занятие 5. 7.31—7.36.
Занятие 6. 7.41—7.45, 7.49.
Занятие 7. 8.1—8.5.
Занятие 8. 8.7—8.10.
Занятие 9. 8.12—8.16.
Занятие 10. 8.17—8.23.
Занятие 11. 8.27—8.32.
Занятие 12. 8.36—8.40.
Занятие 13. 8.45—8.50.
Занятие 14. 8.55—8.57, 8.63, 8.64.
Занятие 15. 8.72—8.77.
Занятие 16. 8.78—8.82.
Занятие 17. 8.83—8.86.
Занятие 18. 8.91—8.96.

Тема занятий: треугольники и многоугольники (18 часов)

Занятие 1. 5.1—5.5.
Занятие 2. 5.10—5.14.
Занятие 3. 5.18—5.23.
Занятие 4. 5.28—5.32.
Занятие 5. 5.35—5.39.
Занятие 6. 5.42—5.46.
Занятие 7. 5.48—5.53.
Занятие 8. 5.69—5.71, 5.78, 5.79.
Занятие 9. 5.85—5.89.
Занятие 10. 5.93—5.97.
Занятие 11. 5.105—5.109.
Занятие 12. 5.120—5.123.
Занятие 13. 5.128—5.132.
Занятие 14. 5.138—5.141.
Занятие 15. 5.149—5.153.
Занятие 16. 6.1—6.3, 6.37, 6.38.

Занятие 17. 6.69—6.74.
Занятие 18. 6.83, 6.89, 6.90, 6.97.

Тема занятий: геометрические преобразования (18 часов)

Занятие 1. 15.1—15.5.
Занятие 2. 15.9—15.13.
Занятие 3. 16.1—16.5.
Занятие 4. 16.9—16.12.
Занятие 5. 16.13—16.18.
Занятие 6. 17.1—17.5.
Занятие 7. 17.6—17.11.
Занятие 8. 17.16—17.20.
Занятие 9. 17.22—17.26.
Занятие 10. 17.31—17.34.
Занятие 11. 17.37—17.40.
Занятие 12. 18.1—18.5.
Занятие 13. 18.9—18.14.
Занятие 14. 18.26—18.31.
Занятие 15. 18.37—18.41.
Занятие 16. 19.1—19.5.
Занятие 17. 19.10, 19.11, 19.16—19.18.
Занятие 18. 19.23—19.28.

Тема занятий: векторы и центр масс (12 часов)

Занятие 1. 13.1—13.5.
Занятие 2. 13.11—13.16.
Занятие 3. 13.21—13.25.
Занятие 4. 13.29—13.33.
Занятие 5. 13.37—13.40.
Занятие 6. 13.42—13.45, 13.48.
Занятие 7. 13.50—13.54.
Занятие 8. 14.1—14.5.
Занятие 9. 14.6—14.10.
Занятие 10. 14.19—14.23.
Занятие 11. 14.28—14.31.
Занятие 12. 14.32—14.35, 14.40.

Тема занятий: задачи на разрезания (12 часов)

Занятие 1. 25.1—25.4.
Занятие 2. 25.5—25.8.
Занятие 3. 25.9—25.13.
Занятие 4. 25.16—25.19.

Занятие 5. 25.22—25.25.
Занятие 6. 25.26—25.30.
Занятие 7. 25.31—25.34.
Занятие 8. 25.35—25.39.
Занятие 9. 25.40—25.43.
Занятие 10. 25.44—25.47.
Занятие 11. 25.48—25.52.
Занятие 12. 25.56—25.59.

Учебное издание

Виктор Васильевич Прасолов

ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

Подписано к печати 20.02.2006 г. Формат $70 \times 90/16$. Печать офсетная. Объем 40 печ. л. Тираж 62 000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра непрерывного математического образования. 119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11. Тел.: (495) 241-74-83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ОАО «Московские учебники и Картолитография». 125252, Москва, ул. Зорге, 15.