Н.Х. Розов
Э. Рейхани
А.В. Боровских

Узлы в школе

Уроки развития пространственного мышления

Розов Н. Х., Рейхани Э., Боровских А. В.

УЗЛЫ В ШКОЛЕ

Уроки развития пространственного мышления

ЧеРо
МОСКВА
2005

ББК 74.262.21
Р65

The publication of this monograph is partially supported by Shahid Rajaee Teacher Training University in Tehran, Iran

Публикация этой монографии частично поддержана Педагогическим университетом Shahid Raiaee в Тегеране, Иран

Розов Н. Х., Рейхани Э., Боровских А. В.
Р65 Узлы в школе. Уроки развития пространственного мышления. — М.: ЧеРо, 2006, 120 с., ил.

ISBN 5-88711-296-4

Книга предназначена для учителей средних школ, методистов, преподавателей, ведущих внеклассные занятия со школьниками. В ней расписан цикл занятий для учеников разного возраста (первые — для 3-4, последние — для 10-11 классов), посвященных изучению узлов. Этот объект, с одной стороны, широко распространен и используется и в повседневной жизни, и в профессиональной деятельности, а с другой — является предметом изучения в одном из активно развивающихся современных направлений в математике. Детадьная проработка каждого занятия позволяет, с одной стороны, начать изучение узлов со своими учениками учителю без какой бы то ни было дополнительной подготовки, а с другой — преподавателю, всерьез заинтересовавшемуся узлами как средством развития пространственного воображения школьников, почувствовать основные принципы конструирования этих занятий и, освовываясь на этой методологии, делать уже свои собственные разработки.

ISBN 5-88711-296-4

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

В книге представлены результаты разработки цикла занятий, посвященных изучению в школе узлов. Это разработка имеет три основные цели.

Первая цель — чисто методическая: представить материал, очень интересный и полезный для изучения. Выбор именно узлов определяется тем, что они являются одним из удачных средств развития геометрического воображения учащихся, так как позволяют опереться при изучении на чрезвычайно мощный пласт ассоциированных друг с другом визуальных представлений, осязательных комплексов и активных действий (манипуляций).

Вторая цель — методологическая: мы хотели бы продемонстрировать на излагаемом материале, как строить «школьную теорию». Узлы являются здесь удачным примером потому, что, с одной стороны, это — объект, широко употребляемый и в обыденной жизни, и в профессиональной деятельности (см., напр., [1]), а с другой — предмет изучения одной из интенсивно развивающихся ветвей математики, имеющей приложения в физике, химии, биологии. Проблема состоит в том, что обыденные представления об узлах — это чисто эмпирическое знание, а, с другой стороны, научная теория (см., напр. [2—3]), даже на уровне простейших определений, совершенно недоступна для восприятия школьников. Для того, чтобы «закрыть» возникшую дыру, и приходится строить «школьную теорию» узлов. Основные функции «школьной теории» — формирование лестницы из представлений, ведущей от представлений обыденных к представлениям, характерным для научного знания. Построение, если так можно выразиться, пути от «жизни к науке». Главное требование, предъявляемое к этому пути — чтобы каждый следующий шаг учащиеся могли сделать самостоятельно: выделить свойство, сформулировать правило, задать ограничение, ввести понятие и т. п. Роль учителя же должна состоять не в изложении истин, а в формировании взгляда на проблему путем предъявления подобранных специально для этого примеров и контрпримеров.

Отметим, что дистанция между обыденными и научными представлениями имеется не только в теории узлов, она обнаруживается практически во всех школьных предметах (и в геометрии, и в арифметике, и в химии, и в литературе, и в биологии). Однако, как правило, ее преодоление осуществляется методом страуса: делается вид, что никакой дистанции нет, и детям излагается наукообразный материал, из которого выброшены наиболее сложные (и поэтому наиболее содержательные) в плане аргументации фрагменты. Узлы позволяют на материале, не засоренном традициями методик, методологий и концепций, ясно показать технику преодоления этой дистанции и построения пути, доступного для школьников и развивающего их интеллект.

Наконец, третья и самая важная цель, которую мы преследуем — это цель социально-системная. Она состоит в том, чтобы активизировать переход в школьном естественно-научном образовании от языковой компиляции (когда детей обучают не умению работать с реальными объектами материального мира, а со словами, обозначающими эти объекты, причем зачастую с полностью утраченной связью между словом и соответствующим объектом) к *материально-ориентированному* образованию. В качестве основных принципов материально-ориентированного образования, на наш взгляд, можно назвать три следующих. Первый — это формирование абстрактных, идеальных представлений в воображении ребенка на основе его чувственного опыта, путем вычленения из этого опыта наиболее важных, существенных свойств и представления этих свойств в максимально выраженной, идеальной форме. Второй — формирование представлений о воображаемых действиях с воображаемыми предметами на основе реальных действий с реальными предметами. И, наконец, третий — формирование логики (то есть принципов аргументации) путем опять же абстрагирования общих правил действий с материальными объектами, перенося их сначала в область действий воображаемых, а затем, уже в старших классах — в область понятий.

Авторы будут благодарны за любые замечания и предложения по улучшению текста и содержания книги и просят направлять их по адресу: 119992, Москва, ГСП-1, Ленинские Горы, МГУ, факультет глобальных процессов.

Глава 1. Узлы как средство развития геометрического воображения школьников

§ 1.1. Развитие геометрического воображения учащихся

В чем состоит основная цель изучения геометрии? Конечно, не в усвоении какого-то набора геометрических истин. Эти истины на 99% бесполезны в жизни, на них не сделаешь карьеру и не заработаешь много денег. Целью не может быть и освоение логической системы. Мы можем ежедневно и ежечасно наблюдать, как люди, прекрасно усвоившие логическую систему геометрии (с пятеркой в аттестате), оказываются в жизни совершенно беспомощными именно в плане логики. Оказываются неспособными ни аргументировать (послушайте, что говорят вокруг Вас, и Вы убедитесь, что в 95 случаях из 100 то, что говорится после слов «потому что» не имеет никакой логической связи с тем, что было сказано до них), ни проверять полноценность и убедительность чужой аргументации (что является благодатной почвой для многочисленных жуликов).

По-видимому, единственной и основной целью обучения геометрии может быть только развитие некоторой способности человека, связанной с его существованием и деятельностью в окружающем пространстве. Водитель автомобиля должен уметь **представить** себе, что произойдет, если он повернет направо. Пешеход должен соразмерить свое движение с движением машины и переходить дорогу только тогда, когда уверен, что водитель его «не догонит», даже если захочет, а для этого он должен **вообразить** себе и свое собственное движение, и движение машины. Выходя на улицу, мы должны **рассчитать** маршрут своего движения, чтобы попасть в нужное нам место по кратчайшему пути и с наименьшими затратами времени. Все это показывает необходимость геометрического воображения даже в обыденной жизни, не говоря уже о профессиональной деятельности: строитель должен уметь вообразить себе, как будет выглядеть дом, который он строит, инженер — что будет представлять собой самолет, который он проектирует, электрик без умения представить в пространстве разводку кабелей будет в них путаться, как котенок в нитках, а водитель электровоза без умения ориентироваться в системе железнодорожных путей будет нас привозить всегда не туда, куда надо.

Наконец, отметим, что пространственное мышление, являясь существенной составляющей и в инженерной, и в технологической, и в естественно — научной мысли, используется не только для функционирования в реальном пространстве, но и для моделирования непространственных отношений: при изучении и решении различных проблем представление информации в виде пространственных объектов оказывается чрезвычайно удобным, компактным и позволяет легко оперировать этой информацией.

Поэтому будет, наверное, правильно, если мы, так же, как и многие другие авторы, основной целью обучения геометрии назовем развитие *пространственного воображения* и *пространственного мышления*. Следует отметить, что при определении пространственного (геометрического) мышления специалисты не всегда согласуются друг с другом. Обзор литературы в этой области (см., напр., [7, 14—19]) показывает большое разнообразие терминологии. Используются, например, такие термины, как пространственная способность (spatial ability) пространственное размышление (spatial thinking), пространственная ориентация (spatial orientation), пространственное рассуждение (spatial reasoning), пространственное понимание (spatial insight), пространственный смысл (spatial sense), пространственная интуиция (spatial intuition) и пространственное восприятие (spatial perception). Однако все они имеют одну безусловную общую часть: понятие пространственного мышления используется для описания способностей, связанных с использованием пространства — способности взаимодействовать с пространственной окружающей средой и работать с пространственными образами.

Нам представляется наиболее естественным использовать три термина — пространственное восприятие, пространственное воображение и пространственное мышление в следующих смыслах. Под *пространственным восприятием* будем понимать психофизиологическую способность человека ориентироваться в окружающем пространстве, воспринимать пространственные объекты как единое целое, умение воспринимать взаимное расположение этих пространственных объектов, их размер и форму. Развитие пространственного восприятия не является предметом педагогической деятельности (нарушения пространственного восприятия относится скорее к области физиологии и психиатрии), но является основой для формирования *пространственного воображения* — способности представлять себе мысленно пространственные объекты, сначала просто как образы реальных предметов, а затем — уже как самостоятельные идеализированные объекты, и *пространственного мышления* — способности оперировать с этими сначала образами, а потом — идеальными объектами, с постепенной систематизацией геометрических действий в правила логического рассуждения.

К сожалению, школьники к моменту окончания школы не имеют зачастую даже элементарного геометрического воображения. Они могут дословно воспроизвести определение скрещивающихся прямых, но не могут не только представить эти прямые в своем воображении, но даже показать, какие ребра комнаты, в которой они находятся, являются скрещивающимися прямыми. Дети знают определение двугранного угла, но не понимают, что это — угол, например, между стеной и потолком. А уж о том, чтобы измерить величину этого угла, не может быть и речи.

Поэтому понятно, что главным условием развития геометрического воображения является работа с реальным материалом, с реальными вещами. Таким образом, мы приходим к принципу материально-ориентированного образования: освоение предметов материального мира и действий в материальном мире с постепенным переносом этих предметов и этих действий в мир воображения — единственный путь формирования настоящего геометрического мышления.

§ 1.2. Узлы в развитии геометрического воображения

Понятно, что развитие геометрического воображения можно осуществлять на различном материале, как каноническом, так и более современном: последние годы все большее место в геометрическом образовании школьников занимают графы, многогранники, мозаики, паркеты и т. п. Мы бы хотели предложить вниманию учителей и методистов еще один важный, наглядный и интересный геометрический объект — узел. Конечно, речь не идет о том, чтобы «воткнуть» в школьную программу еще один объект. Скорее всего, предлагаемый материал будет удобен и полезен именно для внеклассной работы, развивающей и расширяющей кругозор школьников. Как мы уже говорили, выбор узлов определяется тем, что он позволяет показать те проблемы, которые возникают при введении в школьную программу любого нового материала, будь то векторы, метод координат, производные, вероятность или графы, и продемонстрировать пути их решения. Отметим, что даже в таких разделах школьной геометрии как векторы или метод координат, уже ставших каноническими, эти проблемы далеки от полного решения, так что наши подходы могут оказаться полезными и при работе со стандартной программой школьного курса геометрии.

С чисто учебной же точки зрения узлы являются весьма благодатным материалом. Во-первых, дети осваивают завязывание узлов на ботинках и заплетание косичек еще до того, как научатся читать и считать. Умение шить и вязать для девочек или умение привязать канат к дереву и крючок к леске для мальчиков являются некоторыми «абсолютными» составляющими домашнего, бытового образования. С узлами мы имеем дело всю свою жизнь — от раннего детства до старости. Узлом завязываются и галстук, и нитка, узлом привязывается и коза к колышку, и буксир к автомашине. Узел как элемент человеческой культуры известен уже несколько тысяч лет. С глубокой древности те или иные традиции вязания узлов отличали один народ от другого, нередко эти традиции носили культовый характер (как, например, известный Гордиев узел) и являлись предметом профессиональных секретов: без умения вязать специальные узлы не бывает ни ткача, ни моряка, ни рыболова, ни альпиниста, ни спасателя, ни туриста. Таким образом, для изучения узлов в школе у школьников есть и вполне сформировавшаяся база навыков, и есть вполне естественные мотивации, как бытового характера, так и в плане профессиональной ориентации.

Во-вторых, узел — легко создаваемый объект. Из материалов не требуется ничего, кроме обычной веревки, карандаша и бумаги. Он может быть легко продемонстрирован и в классе, и дома, и в любом другом месте. Экспериментировать с узлом, преобразуя его собственными руками, могут школьники любого возраста и способностей, и именно это экспериментирование создает у них тот сплав осязательных и визуальных ассоциаций, из которых формируется пространственное восприятие и пространственное воображение. Для иллюстрации различных узлов имеется довольно много методических материалов с упражнениями и иллюстрациями, которые выполнены как в традиционной форме книг и брошюр, так и в виде Интернет-приложений и программных продуктов, позволяющих создавать и исследовать узлы на экране компьютера.

В-третьих, узлы легко изображаются, работа с диаграммами узлов позволяет школьникам развивать навыки перехода от плоских изображений к пространственным. Этот переход лежит в основе всего механизма пространственного воображения и умения рассуждать о пространственных объектах на плоских чертежах.

Наконец, изучение узлов дает преподавателю возможность продемонстрировать школьникам, что математическое рассмотрение любого объекта есть совершенно естественный процесс, который они вполне способны осуществлять самостоятельно, руководствуясь только соображениями здравого смысла. Несмотря на то, что еще никто не нашел способа полного и ясного описания всего многообразия узлов, и тем более невозможно сразу охватить всю запутанность и сложность, которую математики обнаружили при изучении узлов, тем не менее уже на уровне школы возможно хотя бы отчасти понять, как они изучают этот объект и в каких терминах и представлениях они формулируют своё знание.

§ 1.3. «Школьная наука»: проблемы и методология построения

Как же строить изложение естественнонаучного материала в школе? Отказаться от изложения хоть в какой-то форме этого материала, очевидно, нельзя: современный человек без каких-то базовых представлений о биологических, физических, химических процессах, без представлений о геометрических свойствах окружающего мира немыслим.

Простое изложение материала в виде набора фактов для развития интеллекта ребенка дает чрезвычайно мало, поскольку для развития интеллекта он должен не просто знать факты, а оперировать ими, размышлять, делать выводы.

Изложение современной научной системы, к сожалению, ничего, кроме догматического мышления не развивает, и от такого образования человек получает скорее вред, чем пользу. Как же тогда нам использовать результаты развития науки в школьном образовании?

По-видимому, нам необходимо отправляться не столько от *результата* развития научной мысли, сколько от *процесса* ее развития. Ведь химическая наука началась не с таблицы Менделеева, биологическая — не с системы и классификационных признаков, история — не со скрижалей, а геометрия — не с аксиом. Началом всякой науки были факты, наблюдаемые в материальном мире. Эти факты со временем анализировались, между ними обнаруживались связи, формировалась система этих связей, логика построения этой системы и т. д.

На наш взгляд, ребенок в своем освоении той или иной области знаний должен следовать тому пути, который прошла наука в целом, естественно, с сокращением несущественных петель и зигзагов, которыми изобилует история всякой науки. При этом, конечно, историческую линию приходится корректировать с учетом специфики детского восприятия и уровня развития логики (см., напр. [6]).

Путем такой «исторической» реконструкции нам и удалось построить «школьную теорию узлов». По начальному состоянию (обыденному опыту) и конечному состоянию (система научных понятий и принципов) восстанавливается тот путь, который человек должен пройти, чтобы его обыденный опыт естественным образом трансформировался в систему представлений, пусть не совпадающую с научной, но очень близкую к ней.

Понятие узла формируется постепенно, начиная от обыденного представления о материальном объекте (узел на веревке), которое сначала переносится в область воображения (узел на линии), потом под влиянием идей движения формируется представление об эквивалентности узлов, и мы вплотную приближаемся к научному понятию узла как топологического объекта.

Изображение узлов начинается тоже с простого проектирования, анализа структуры возникающих при проектировании пересечений и формирования правил изображения (что идет снизу, что сверху). Анализ таких изображений и соотнесение их с пространственной фигурой требует умения выделять на изображениях основные элементы — пересечения и дуги. Здесь эффективно используется раскрашивание. Сама идея раскрашивать разные дуги разными цветами для того, чтобы разбить изображение узла на фрагменты — тоже результат реконструкции: в науке раскрашивание используется уже на другом уровне — для классификации узлов.

Очень непростым оказался путь от нормального узла на обычной веревке, концы которой свободны, к математическому узлу на замкнутой линии. «Склеивание» концов веревки является самым нетривиальным моментом в процессе идеализации узла. И здесь понадобилась реконструкция — для того, чтобы понять, что когда мы ведем разговор об обычном узле на обычной веревке и его свойствах, то мы, вообще говоря, фиксируем его концы каким-то образом, так, чтобы узел уже невозможно было развязать, и анализу подлежит именно такой узел. При фиксации концов оказывается несущественным, где именно находятся точки фиксации, их в принципе можно сблизить, и даже совместить их. Именно тут и возникает узел на замкнутой линии. Как мы видим, математический узел на замкнутой линии возникает естественным образом как результат идеализации, а смысл такого рассмотрения узла — в том, что при изучении реальных узлов фиксацию концов можно всегда заменить их склеиванием между собой.

Введение системы движений для узлов также потребовало реконструкции, так как оказалось, что из трех основных типов движения два возникают непосредственно, естественным образом, а для введения третьего понадобилось подбирать специальные примеры, на которых видно, что первыми двумя типами движений обойтись нельзя, и необходимо использовать еще один.

И, наконец, значительная часть усилий потребовалась на реконструкцию идей инвариантов, то есть характеристик узла, не меняющихся при его преобразованиях и позволяющих поэтому доказывать, что один узел невозможно превратить в другой. Используемые в науке определения некоторых из инвариантов (индекс пересечения, число раскраски и т. п.) непригодны для непосредственного введения в школе. Путь же от обыденных, интуитивно понятных соображений, приводящий естественным образом именно к этим инвариантным характеристикам потребовал для реконструкции усилий, соизмеримых с построением самой математической теории.

Мы продемонстрировали, на уровне комментариев, как была построена «школьная теория» узлов, и какие трудности при этом пришлось преодолеть для этого, чтобы показать, что таким же образом можно строить «школьную теорию» и в биологии, и в химии, и в истории. Конечно, это требует огромных затрат труда, но эффект от такой работы, безусловно, важнее всяких затрат, так как он учит человека думать и ориентироваться в окружающем его материальном мире, а не заучивать научные термины и формулировки.

§ 1.4. Узел и геометрия

Вопрос о том, как правильно излагать геометрический материал — давнишний. Поскольку интересных вещей, которые можно включить в геометрию, слишком много, необходимо какое-то решение относительно того, что включить и что исключить в этом учебном материале.

Какого-то общего мнения о том, какие принципы можно и нужно положить в основу для принятия такого рода решений, сейчас нет, так что указанная проблема далека не только от полного, но даже и от частичного решения. Тем не менее, можно указать некоторые совершенно естественные требования к соответствующему учебному материалу геометрии. Например, изучаемый материал должен:

- Опираться не столько на текстовые определения и доказательства, сколько на представления о форме, пространстве и движении.
- Основываться на свойствах не только двухмерного, но и трехмерного мира, в котором мы живем.
- Обеспечивать минимум записывания и максимум действия.
- Развивать пространственное воображение всех учеников.
- Развивать навыки, необходимые для профессиональной деятельности.
- Развивать логическое мышление.
- Показывать связь между математикой и другими предметами.

Изучение узлов удовлетворяет большинству этих требований. Действительно, узлы представляет собой реальные формы, существующие в реальном пространстве с которыми мы осуществляем реальные движения. Они основаны на законах и трехмерного мира, и двухмерного. Кроме того, они являются предметами, при изучении которых школьникам надо не столько писать формулы, сколько работать руками, рисовать и воображать. Вообще геометрия, особенно в начальной школе, должна быть чем-то, что вы делаете и воображаете, а не чем-то что вы пишете. Изучение узлов позволяет думать и работать с формой и пространством всем ученикам, а не только талантливым, позволяет каждому выбрать направление для дальнейшего изучения этого предмета по своим вкусам и склонностям. Наконец, это изучение развивает навыки, необходимые для работы и жизни и показывает связь между математикой и другими предметами.

Изучение узлов дает преподавателям возможность помочь школьникам увидеть, что любой объект может быть рассмотрен математически, и показать им способы перехода к такому рассмотрению. Цель для школьников — понять разнообразие вопросов и проблем, которые возникают при изучении узлов, и освоить некоторые методы решения проблем, используемые математиками при попытке раскрыть тайны узла.

§ 1.5. Общая схема изучения узлов

Как уже указывалось, узлы оказались удобным объектом, так как, во-первых, они постоянно встречаются в реальной жизни, и мы можем в любой момент обратится к опыту, эксперименту, реализуя тем самым принцип *материально-ориентированного образования*. Во-вторых, это чрезвычайно удобное средство для развития геометрического воображения. И, в-третьих, при построении «школьной теории» узла мы можем опираться на достижения современного и бурно развивающегося научного направления — *математической теории узла*. Поскольку система понятий и представлений математической теории узла, как и любой другой научной теории, недоступна для непосредственного восприятия школьников, мы для изучения узлов в школе используем метод *реконструкции*, представляющий собой построение цепочки суждений, умозаключений, правил, принципов, в которой начало опирается на обыденные представления, концом являются представления, близкие к научным, и каждое звено этой цепочки может быть сформулировано школьниками самостоятельно, без подсказки со стороны учителя. Роль учителя в так построенной школьной теории состоит не в зачитывании текстов с описанием научных фактов, а в организации того исследовательского, познавательного процесса, который школьники осуществляют самостоятельно. Это организация состоит, во-первых в представлении школьникам подходящих примеров, и, во-вторых, в резюмировании тех суждений, которые школьники на основании этих примеров высказывают.

Дети начинают с простого завязывания и развязывания узлов, затем осваивают их изображение на диаграммах, тренируются в соотнесении изображения и пространственного расположения узла, с помощью раскрашивания учатся делить узел на фрагменты.

Затем круг освоенных узлов расширяется и расширяется одновременно круг изучаемых фактов. Дети изучают, как геометрические свойства узла связаны с их функциональными свойствами, значимыми для практики (легко ли узел завязывается и развязывается, ползет ли под нагрузкой, не ослабляет ли прочность веревки и т. д.). Они осваивают движения, преобразования узлов. На основе чувственного опыта и путем экспериментирования они формулируют правила таких движений, выделяют основные типы движений. Параллельно формируется представление об эквивалентности узлов, появляется потребность в классификации.

Третий этап в изучении узлов уже приближается к научной системе представлений. Дети, отправляясь от уже известных им характеристик, приходят к основным *инвариантам*, позволяющим отличить один узел от другого. Здесь же устанавливаются связи узлов с арифметикой, алгеброй, другими разделами геометрии.

Во второй главе мы приведем материал для преподавания, рассчитанный на младших школьников (3—5 класс). В 3—4 главах представлен цикл занятий для школьников 6—8 класса, а в 5—6 — еще один цикл для старшеклассников.

Мы надеемся, что этот материал окажется интересным и полезным и для учителей, и для методистов.

Глава 2. Знакомство с узлами и формирование основных представлений об узлах

В этой главе приводится описание цикла занятий, рассчитанных на учеников 3—5 класса. Эти занятия призваны познакомить школьников с простейшими узлами, ввести основные методы их изображения, научить выделять основные элементы узла и формулировать простейшие свойства. Поскольку в этом цикле занятий нам постоянно приходится апеллировать к чувственному опыту и реальному материалу, при их построении использованы следующие принципы:

1. при формировании геометрических образов опираться на совмещение визуального и осязательного восприятия;
2. существенное внимание обращать на пространственное расположение узлов, вырабатывать умение выбирать необходимый ракурс (например, при сравнении узлов);
3. дать возможность ученикам самостоятельно обнаружить основные свойства узлов и сформулировать закономерности, избегая изложения материала в виде готовых понятий и инструкций, которые потом заучиваются наизусть;
4. для формирования в сознании школьников ясного представления о связи между реальной жизнью и математикой обеспечивать естественный переход от обыденных представлений к математическим понятиям;
5. использовать работу в парах для развития у детей умения аргументировать свои суждения (известно, что в процессе формирования логического мышления детей в 9—11 лет необходимость аргументировать свои суждения возникает именно из потребности что-то объяснить друг другу — см., напр. [6]).

Лучший способ сделать первый шаг в изучении узлов и в формировании представлений об узле в школе — реальное действие (завязывание, развязывание, игра, фокусы и т. д.) с некоторыми узлами, которые школьники знают или где-либо видели. Мы начинаем изучение с нескольких наиболее обычных и элементарных узлов. Изучение заключается в знакомстве с узлами, завязывании и развязывании узлов, в их изображении и раскрашивании.

§ 2.1. Занятие 1. Знакомство с узлами

Предварительные замечания

На этом занятии школьники знакомятся с простейшими узлами: одинарный узел, восьмерка и двойной узел. Они учатся завязывать и развязывать узлы, сравнивать их между собой, обращают внимание на элементы узлов. Необходимые материалы — три больших макета узлов, веревки и рисунки. Занятие рассчитано на учеников 3 – 5 классов.

Ход занятия

1. Введение

Объяснение предмета изучения и раздача материалов для занятия.

2. Опрос учеников

Где и как узлы используются? Список возможных ответов:

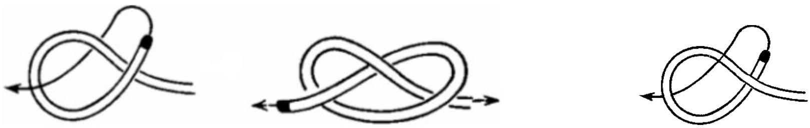
а) в мореплавании
б) в альпинизме
в) в завязывании шнурков
г) в рыбной ловле
д) в спасательных работах
е) в шитье
ж) в вязании
з) в плетении ковров
и) в завязывании галстуков
к) в медицине
л) в производстве тканой и сетей
м) в играх и фокусах
н) для причесок и при заплетении косичек

Скорее всего, ученики назовут применения узлов, указанные в а) – г), возможно назовут д) – е) скорее всего, не назовут ж) – н). Учителю необходимо будет записать ответы учеников на доске и дополнить эти ответы до полного списка.

Сколько узлов они знают? (желательно, чтобы ученики подтвердили свое «знание» демонстрацией того, как эти узлы завязываются и развязываются). Скорее всего, ученики смогут продемонстрировать завязывание одинарного узла или «бабьего узла» (которым обычно завязывают шнурки). Возможно, они покажут умение итерировать действия — сначала завяжут одинарный узел, а потом, сверху него-ещё один одинарный узел. Некоторые могут продемонстрировать просто «запутывание» веревки произвольным образом.

3. Одинарный узел

Покажите им одинарный узел, продемонстрируйте, как его завязать и попросите учеников завязать этот узел. Для удобства можно раздать ученикам рисунки (рис.1(*а*) и (*б*)), показывающие, как можно завязывать одинарный узел.



(*а*) (*б*) (*в*)

Рис. 1

Покажите, как завязать одинарный узел «в обратную сторону» (рис.1(*в*)) и попросите учеников повторить это. Затем попросите каждую пару учеников создать оба варианта одинарного узла (один делает один вариант, другой — другой) и показать друг другу. Школьникам надо сравнить эти варианты и описать их свойства. Важно чтобы они обратили внимание на такие свойства узла, как характер пересечения (что находится сверху, что снизу), на последовательность этих пересечений, чтобы, они увидели детали узла и их взаимное расположение, обратили внимание на сходство и различие этих двух узлов. Затем попросите школьников, завязать на одной и той же веревке два одинаковых и два «противоположных» одинарных узла.

4. Восьмерка

Покажите узел «восьмерка», который вы приготовили заранее. Попросите учеников завязать «восьмерку». Завязать восьмерку труднее, чем одинарный узел и учителю, возможно, придется несколько раз показать, как завязывать восьмерку. На рис. 2 (*а*) и (*б*) показано, как это можно сделать. Покажите, как завязать восьмерку «в обратную сторону» (рис. 2(*в*)) и попросите учеников повторить это. Затем попросите каждую пару учеников создать оба варианта восьмерки (один делает один вариант, другой — другой) и показать друг другу. Для того чтобы ученики хорошо изучили узел, можно, как и раньше на одной и той же веревке завязать две одинаковых и две противоположных восьмерки.

(*а*) (*б*) (*в*)

Рис. 2

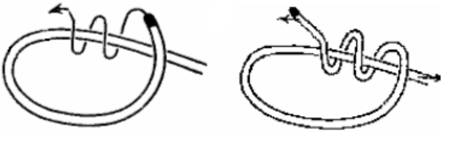
5. Объяснение

Скажите ученикам, что они уже начали изучать узлы точно так же, как это делают ученые. Когда они что-то изучают, то прежде всего берут несколько простейших случаев, смотрят и разбираются, из чего изучаемая вещь состоит, какие составляющие её элементы важны, какие свойства у них есть. Что у разных случаев есть общего и чем они отличаются. Сначала удается обнаружить самые простые свойства. Разобравшись же с простыми и легкими случаями, они обнаруживают, что и в более сложных и интересных случаях понимают их устройство. Именно это побуждает математиков, занимающихся теорией узлов, создавать новые узлы и собирать дополнительные наблюдения об известных. Попросите школьников начать собирать свои наблюдения об узлах (как узлы называются, как завязываются и развязываются, какие их свойства важны, где применяются) и записывать их.

6. Двойной узел

Сначала, как раньше, покажите школьникам двойной узел, который вы заранее приготовили. Повторите все, что вы делали для двух других узлов. Рис. 3 поможет школьникам научиться завязывать двойной узел.

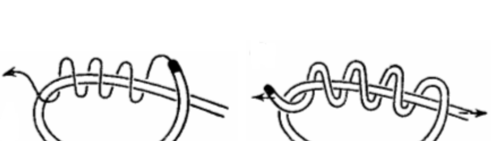
Рис. 3



(*а*) (*б*)

При завязывании этого узла можно сделать несколько оборотов и получить подобные кратные узлы (тройной, четверной и т. д.). Этот процесс показан ниже (рис. 4):

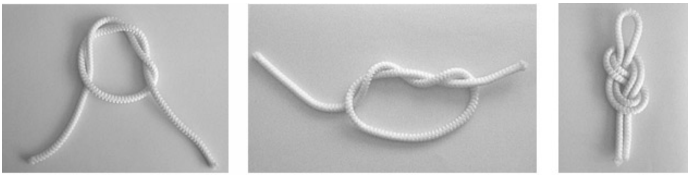
Рис. 4



(*а*) (*б*)

7. Домашнее задание

Завяжите данные узлы (рис. 5) и сравните их с узлами которые изучали на занятии. Какие из этих узлов «родственны» одинарному узлу, восьмерке, двойному, кратному узлу? Чем они похожи на родственные узлы и чем они отличаются?



(а) (б) (в)

Рис.5

8. Заключительные замечания

Ход занятия был апробирован в иранской школе в Москве. В эксперименте участвовали 20 учеников третьего-пятого класса (возраст 9—11 лет, в соответствии с системой образования Ирана [8]). Ход занятия полностью соответствовал нашему изложению. Однако обнаружились «трудности» чисто психологического характера: оказалось, что школьникам 3-его класса (9лет) трудно разобраться с ориентацией узлов (прямой — обратный). При выполнении задания на завязывание двух противоположных узлов они, как правило, завязывают два одинаковых. По- видимому, это связано с отсутствием в этом возрасте достаточно развитой пространственной ориентации (о чем писал, например, Пиаже [6]). Для преодоления этой проблемы как раз удобно использовать рисунки, на которых рядом изображены два противоположно ориентированных узла.

§ 2.2. Занятие 2. Изображение узлов

Предварительные замечания

На этом занятии школьники изучают, как изображать трехмерные узлы на бумаге. Материалом для этого будут три узла, с которыми ученики работали на первом занятии, несколько кусков веревки и бумага для рисования диаграмм.

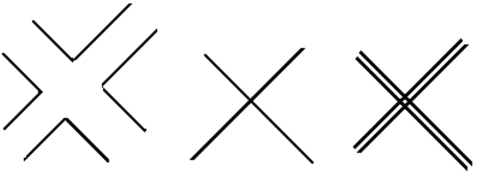
Мы обычно описываем узлы, рисуя картинки, называемые диаграммами узла. Диаграмма узла — проекция на плоскость, или «тень» узла. Направление проектирования выбирается так, чтобы каждая точка на диаграмме — была образом не более чем двух точек исходного узла. Каждая точка, которая является тенью двух точек на узле, называется пересечением, и пересечения на диаграмме узла рисуются с разрывом одной из линий, чтобы показать, какой фрагмент находится сверху, а какой снизу.

Ход занятия

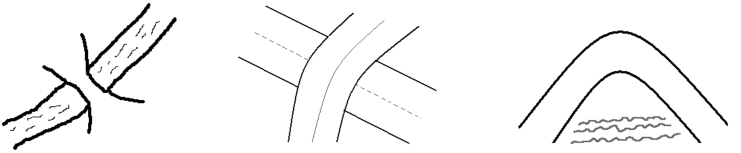
1. Изображение пересечений

Попросите школьников нарисовать две улицы, которые пересекают друг друга. Благодаря тому, что эти улицы находятся на одном уровне, изобразить их пересечение не очень трудно. Ученики, скорее всего, нарисуют диаграммы похожие на следующие (рис. 6):

Рис. 6



После этого попросите их изобразить улицу, пересекающую другую через мост. Теперь улицы находятся в разных плоскостях в трехмерном пространстве, и это надо как-то отобразить. Помогите школьникам получить ответ. Хорошим примером является и мост через реку или ручей. Однако необходимо учесть что маленькие дети рисуют реку не вдоль, а поперек, и в результате может получится рисунок вида 7 *в*). Учителю необходимо просуммировать и объяснить все ответы. Затем он может на доске изобразить диаграммы, похожие на те, что даны на рис. 7 *а*) — *б*) (Лучше приготовить эти диаграммы заранее).



(*а*) (*б*) (*в*)

Рис. 7

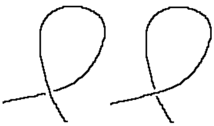
Предложите школьникам сравнить рисунки 6 и 7 *а*) — *б*). Попросите изобразить их проще (можно предложить школьникам представить, как это будет выглядеть с большой высоты или просто издалека). Желательно, чтобы они сами нашли самые простые изображения (см. рис. 8) . Попросите школьников объяснить, какова разница между рисунками 8 *б*) и 8 *в*)? Что означают эти рисунки? Эти два пересечения называются *противоположными*, их можно получить друг из друга, поменяв ролями линии идущие сверху и снизу.

(*а*) (*б*) (*в*)

Рис. 8

2. Диаграмма и узел

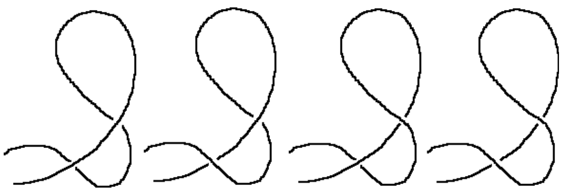
Попросите школьников сделать в парах из веревки фигуры, изображенные на рис. 9 и сравнить их (или наоборот: сначала покажите им веревочные фигуры и попросите учеников нарисовать их на бумаге).



(*а*) (*б*)

Рис. 9

Выполните это же упражнение для фигур, изображенных на рис. 10.



(*а*) (*б*) (*в*) (*г*)

Рис. 10

Очень важно, чтобы ученики научились работать с диаграммами «в обе стороны»: и выкладывать веревочные фигуры по изображению их на диаграмме, и изображать уже имеющиеся фигуры. Это позволяет им сформировать естественную связь между реальным веревочным узлом и его изображением.

Попросите школьников сравнить четыре диаграммы, изображенные на рис. 10, и объяснить их различия. Учитель может предложить ученикам еще несколько упражнений на отыскание различий с другими диаграммами.

3. Изображение одинарного узла

Предложите ученикам использовать одинарный узел (два варианта), который они сами создавали на первом занятии. Возможные изображения представлены на рис. 11. У школьников есть два варианта одинарного узла и диаграммы этих вариантов, которые дают им возможность сравнивать, находить подобия и различия.

Рис. 11

(*а*) (*б*)

Учитель должен заранее приготовить эти рисунки на большом листе и использовать на занятии. Когда школьники смотрят на такие фигуры и потом рисуют их на бумаге, они осваивают технику символического изображения узлов и их свойств, и могут повторить этот процесс, в других ситуациях. При сравнении двух одинарных узлов ученики знакомятся с представлением о зеркальном отображении, которое будет вводится на одном из следующих занятий. После рисования диаграммы одинарного узла учитель может предложить такие вопросы:

а. Какая разница между двумя диаграммами одинарного узла?

б. Как можно получить одну диаграмму из другой? Какие изменения нам нужно сделать? (ответ: заменой в диаграмме всех пересечений на противоположные.)

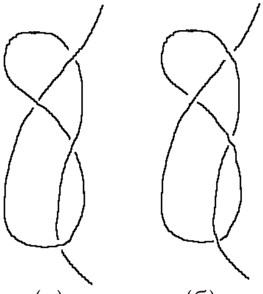
Затем попросите школьников сравнить две диаграммы, изображенные на рис. 12 и сказать чем они отличаются, и что произойдет, если потянуть за концы?

Рис. 12

(*а*) (*б*)

4. Изображение «восьмерки»

Попросите школьников изобразить узел «восьмерка», с которым они работали на первом занятии . Снова у нас имеется два варианта: (см. рис. 13).



(а) (б)

Рис. 13

Задайте, как и в п. 3, вопросы, (*а*) и (*б*) и попросите школьников изложить свою точку зрения и свои наблюдения. Кроме того, можно задать очень важный вопрос: можно ли путем манипуляций с веревкой получить одну восьмерку из другой? Как вы ответите на этот вопрос, если вместо восьмерки рассмотреть одинарный узел?

Может быть для школьников будет интересно узнать, что для восьмерки это возможно, а для одинарного узла — нет. Это дает предварительное представление для важного понятия эквивалентности узлов, которое будет обсуждаться в старших классах.

5. Домашнее задание

В каждой из нарисованных диаграмм (рис. 14) измените одно пересечение на противоположное так, чтобы получившийся узел, при натягивании веревки исчезал.

(*а*) (*б*)

Рис. 14

§ 2.3. Занятие 3. Раскрашивание узлов

Предварительные замечания

На этом занятии школьники раскрашивают диаграммы узлов для того, чтобы лучше понимать структуру узлов. Кроме того, с раскрашиванием диаграмм связан один из важнейших *инвариантов* (понятие инварианта будет вводиться в старших классах).

Ход занятия

1. Понятие дуги

Сначала мы объясним, что такое дуга. На диаграмме узел изображен так, что в каждом пересечении линия, идущая снизу, «разрезается» на две части. В результате линия, изображающая узел, разбивается на фрагменты, которые мы и будем называть дугами.

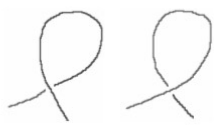
2. Задание

Попросите школьников определить количество дуг на рис. 9—11. В каждой из фигур рис. 9 имеется две дуги, в каждой из фигур рис. 10 — три, а в каждом из одинарных узлов рис. 11 — четыре. Раскрашивание каждой дуги в свой цвет позволяет наглядно увидеть разбиение диаграммы на дуги.

3. Раскраска простейших фигур

Попросите школьников раскрасить диаграммы на рис. 9 так, чтобы каждая дуга имел свой цвет. Спросите, сколько цветов нужно использовать? Как количество цветов связано с количеством дуг? Возможные варианты раскраски мы дали на рис. 15.

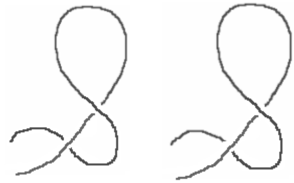
Рис.15



(*а*) (*б*)

Теперь попросите школьников раскрасить диаграммы на рис. 10. Повторите предыдущие вопросы. Один из возможных вариантов раскрашивания мы дали на рис. 16. Мы использовали раскраску в 2 и в 3 цвета. Попросите школьников сравнить эти варианты раскраски и выбрать лучший. Почему этот вариант лучше? Желательно, чтобы школьники сами указали, что на рис. 16 *а*) одна пара из стыкующихся друг с другом дуг имеют одинаковый цвет и поэтому нам трудно отличить их друг от друга.

Рис. 16



(*а*) (*б*)

4. Раскраска одинарного узла

Попросите школьников определить количество дуг на диаграмме одинарного узла и раскрасить эту диаграмму. Некоторые возможные ответы для одного из вариантов одинарного узла мы дали на рис. 17. Мы использовали раскраску в 4, 3 и 2 цвета. Может быть некоторые школьники раскрашивают немного по-другому. Но учителю надо суммировать их ответы и сократить похожие и лишние ответы и объяснить, что общие раскрашивания будут как на рис. 17.

(*а*) (*б*) (*в*)

Рис.17

Задайте вопросы: Какая раскраска дает лучшее представление о структуре узла? Чем отличаются друг от друга три варианта раскраски на рис. 17? Какой из них лучше, какой хуже? Чем плох вариант (*в*)? Существенно ли вариант (*б*) хуже, чем (*а*)? Какие требования нужно предъявлять и раскраске, чтобы она была «хорошей»? Важно, чтобы школьники сами сказали, что:

а) Раскраска должно дать хорошее представление о структуре узла.

б) Количество цветов при раскрашивании не обязательно равно количеству дуг.

в) В каждом пересечении желательно, чтобы все три дуги имели разные цвета.

Ответы школьников необходимо резюмировать в виде «1-го принципа раскраски»: *Раскраска будет хорошей, когда в каждом пересечении все три дуги, образующие пересечение, имеют разные цвета.*

Попросите школьников раскрасить другой вариант одинарного узла (зеркальное отражение одинарного узла). Как и в предыдущем случае, при раскраске тремя цветами нам придется раскрасить концевые дуги одним цветом, а две остальные — в два других цвета.

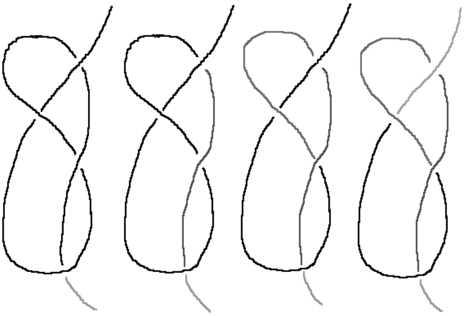
5. Раскраска узла восьмерка

Постепенно, когда количество пересечений и дуг в диаграмме узла увеличивается, возникает ряд естественных вопросов: Какая связь существует между количеством дуг и количеством цветов?

Можно ли всегда раскрашивать разные узлы так, чтобы на каждом пересечении получались три разных цвета? И т. п. Ответы на эти вопросы нетривиальны и требует уже научной системы представлений. Мы же пока даем школьникам только предварительное представление о раскрашивании узлов.

Попросите школьников раскрасить узел «восьмерку» и задайте вопросы, аналогичные предыдущим. Некоторые возможные ответы для одного варианта узла восьмерки мы дали на рис. 18. Мы использовали 2, 3, 4 и 5 цветов.

Рис. 18



(*а*) (*б*) (*в*) (*г*)

Рис. 18 *а*) не дает нам возможности увидеть структуру и особенности узла. Попросите школьников используя разные варианты раскраски выяснить возможна ли хорошая раскраска с помощью двух цветов.

Попросите школьников поменять раскраску на рис. 18 *в*) четырьмя цветами так, чтобы на каждом пересечении были три разных цвета. Это очень легко получается. Например, можно раскрасить концевые дуги зеленым цветом и получить рис. 19 *а*), который похож рис. 18 *г*). Спросите школьников можно ли считать эти раскраски «хорошими»? Рисунок 19 *а*) явно «хороший» — на нем мы использовали четыре цвета и в каждом пересечении все три дуги, образующие пересечение, имеют разные цвета. Можно ли сделать «хорошую» раскраску тремя цветами? Для того, чтобы дать точный ответ на последний вопрос, нам надо изучить рис. 18 *б*) подробнее. Спросите школьников, чем хуже 18 *б*) относительно 18 *г*)? Видно, что только на одном пересечении 18 б) у нас три разные цвета. Спросите школьников, можно ли преодолеть эту недостаток? Например, что получается, если ещё раз раскрасим концевые дуги одним цветом? Как показано на рис. 19 *б*) указанный недостаток ещё остался.

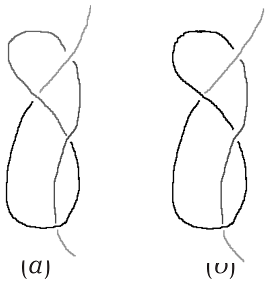


Рис. 19

Попросите школьников, используя разные варианты раскраски, выяснить, возможна ли «хорошая» раскраска с помощью трех цветов. В самом деле, можно доказать, что нельзя раскрасить восьмерку тремя цветами так, чтобы на каждом пересечении получались разные цвета. Помогите школьникам, чтобы они сами обнаружили доказательство. Мы описываем этот процесс. На рис. 20 *а*) показана диаграмма восьмерки, на которой дуги перенумерованы 1, 2, 3, 4 и 5. Удобнее всего, чтобы не пропустить какую-нибудь дугу и не занумеровать одну и ту же дугу два раза, осуществлять нумерацию вдоль линии, образующей узел. Начинаем раскрашивать восьмерку, выбирая три цвета — синий, черный и красный для дуг 1, 2 и 4. Тем самым три соседние дуги, как показано на рис. 20 *б*), можно раскрасить тремя цветами. Далее у нас осталось раскрасить две остальные дуги — 3 и 5. Для того, чтобы 1-й принцип раскраски выполнялся (разные цвета в каждом пересечении), надо выбирать один из трех цветов для раскрашивания дуги с номером 3. Поскольку в точке **А** она смыкается с дугами 2 (красная) и 4 (черная) мы можем окрасить её только в синий цвет (рис. 20 *в*)). Попросите школьников раскрасить пятую дугу. Поскольку в точке **В** она смыкается со 2-ой (красной) и 3-ей (синей) нам остается использовать для её раскрашивания только черный цвет. Теперь (как показано) на рис. 20 *г*)) в пересечении С мы получаем две разных дуги (4 и 5), окрашенных одинаковым цветом.

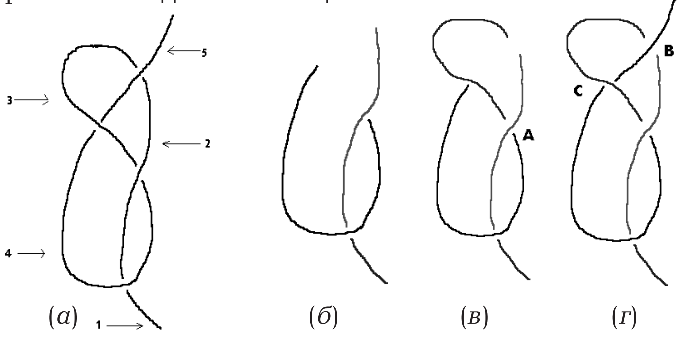


Рис.20

Таким образом, восьмерку невозможно раскрасить в три цвета так, чтобы наше условие (в каждом пересечении дуги имеет разный цвет) было выполнено.

6. Домашнее задание

Раскрасить узлы, изображенные на рис. 21. (учитель может задать разные дополнительные условия раскрашивания)

(*а*) (*б*) (*в*) (*г*)

Рис. 21

Глава 3. Простейшие операции с узлами

В этой главе излагается материал, связанный с простейшими операциями с узлами: упрощением и усложнением узлов, зеркальным отражением и обратной проекцией. Изменения в структуре узла, происходящие при этих операциях, изучаются с помощью раскраски. Здесь же происходит первоначальное знакомство с бегущим узлом.

§ 3.1. Занятие 4. Упрощение и усложнение узлов. Понятие о движениях в теории узлов

Предварительные замечания

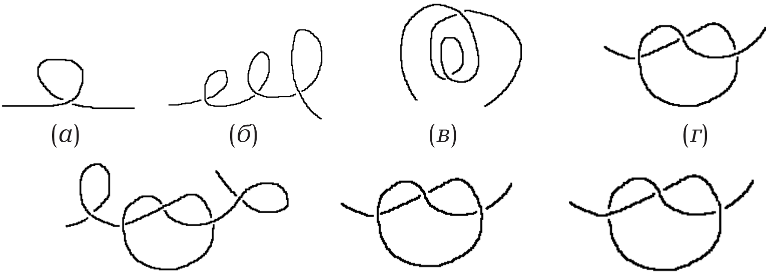
Упрощение — одно из важнейших действий, постоянно используемых и в жизни и в науке. Упрощениям уделяется значительное внимание и в школе: ученики упрощают дроби, числовые выражения, алгебраические выражения и т. д. Важность обратной операции — усложнения — менее очевидна, хотя именно эта операция лежит в основе всех нетривиальных действий, будь то приведение дробей и общему знаменателю при сложении, или раскрытие скобок для приведения подобных или дополнительные построения в геометрических задачах, делающие ответ *очевидным*.

На этом занятии ученики познакомятся с двумя правилами упрощения и усложнения узлов. При этом мы будем использовать только некоторые из преобразований, которые в теории узлов называются *движениями*. Основное свойство движений состоит в том, что они сохраняют «завязанность» узла. Это реализуется в требовании фиксации концов, что не позволяет развязать узел, последовательно вытаскивая один из концов из образованных остальной частью веревки петель. Нужные материалы включают несколько узлов и диаграммы, которые учитель приготовил к занятию.

Ход занятия

1. Узел или не узел?

Покажите ученикам фигуры, изображенные на рис. 1, попросите школьников создать эти фигуры из веревки и задайте вопросы: Завязан ли на этих кусках веревки узел? Почему? Как отличить узел от не- узла?



(*а*) (*б*) (*в*) (*г*)

(*g*) (*е*) (*ж*)

Рис. 1

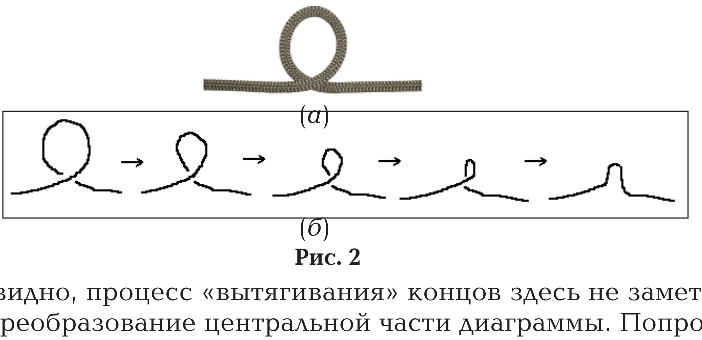
Позвольте школьникам манипулировать с этими кусками веревки. Один из возможных ответов, как «экспериментально» отличить узел от не-узла, и который школьники, скорее всего, сами получат — это взять веревку за концы и потянуть.

2. Проволока

Попросите школьников, создать фигуры, изображенные на рис. 1 из проволоки. Спросите их, как отличить узел от не-узла в этих проволоках? Потянуть проволоку за концы труднее, чем веревку. Предложите школьникам покрутить эти фигуры и посмотреть на них с разных сторон. Желательно, чтобы школьники, потренировавшись в таких манипуляциях, сами сказали, что чтобы отличить узел от не-узла, надо постараться повернуть их так , чтобы не было видно пересечений. Тогда у нас нет узла. Если же с любой стороны видно пересечение, то это, скоре всего, узел.

3. Как отличить узел от не-узла на диаграмме?

Затем попросите учеников, нарисовать диаграммы изображенные на рис. 1. спросите школьников, как отличить узел от не-узла на диаграмме? Диаграмму за «концы» не потянешь, и рисовать такой процесс сложно. Мы изобразили процесс, в случае рис. 2(*а*) на рис. 2(*б*).



(*а*)

(*б*)

Рис. 2

Как видно, процесс «вытягивания» концов здесь не заметен, а важно преобразование центральной части диаграммы. Попросите учеников выполнить в парах следующее задание: один рисует процесс «растягивания» за концы рис. 1(*g*), а другой, глядя на нарисованные диаграммы, рассказывает, как это происходило.

Попросите учеников, сформулировать правило: как нужно изображать на диаграмме процесс? Нам надо разложить процесс на простые действия, и затем каждое действие необходимо совершать с небольшим фрагментам диаграммы.

4. Простая петля. Образование петли и раскрытие петель

Фигура, изображенная на рис. 1(*а*) называется петлей. Первые простейшие действия — образование петли и раскрытие петли.

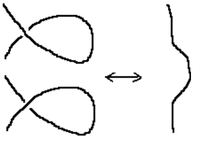
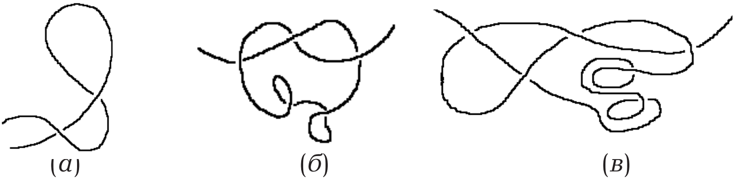


Рис. 3

Двойная стрелка показывает, что действие обратимо. Необходимо, чтобы ученики обратили внимание на то, что при образовании и при раскрытии петли ничего не завязывается и не развязывается, узлы на веревке не появляются и не исчезают, поэтому, с точки зрения узлов, у нас при таких действиях ничего не меняется.

5. Задание

Далее учитель дает разные задачи в качестве упражнений (см. рис. 4). Например, школьники могут упростить диаграмму 4(*б*) и получить одинарный узел. Будет полезно, если школьники создадут эти фигуры из веревки, а затем потянут её за концы. Попросите школьников создать конструкции, изображенные на рис. 4, из проволоки и попробовать манипулировать с ними, смотря на них с разных сторон. Это помогает школьникам, почувствовать и понять, какие из пересечений можно упростить, а какие — нельзя.



(*а*) (*б*) (*в*)

Рис. 4

6. Наложение «внахлёст»

Теперь можно перейти к изучению второго вида движения — наложению одного фрагмента веревки на другой фрагмент той же веревки и снятию такого наложения (рис. 5).

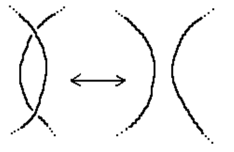


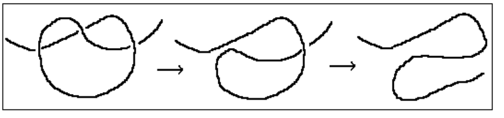
Рис. 5

(*а*) (*б*)

На рис. 5(а) один фрагмент веревки наложен на другой, как говорят, «внахлёст». Если «потянуть» за концы левого фрагмента, то он «соскользнет» с правого, и наложение исчезнет. Действие, которое мы совершили, называется «снятие наложения». Обратное действие — «создание наложения».

Попросите школьников нарисовать диаграмму (рис. 6(*а*)):

(*а*)



(*б*)

Рис. 6

Затем задайте такие вопросы:

а) Является ли этот рисунок изображением узла?

б) Является ли этот рисунок изображением одинарного узла?

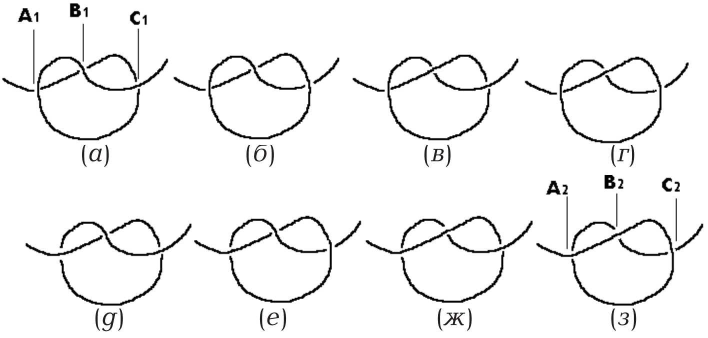
в) Можете упростить его только с помощью диаграммы?

г) Что будет в результате, и какие действия совершили?

На рис.6(*б*) мы привели ответ.

7. Задание

На диаграмме рис. 6(а) каждое из пересечений можно менять на противоположное. Какие варианты при этом можно получить? Можно ли сосчитать их количество без рисования? На рис. 7 мы дали возможные ответы.



(*а*) (*б*) (*в*) (*г*)

(*д*) (*е*) (*ж*) (*з*)

Рис. 7

Если обозначаем через $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$ и $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$ возможные варианты для пересечений, в точках **A, B, C** соответственно (на рис. 7*а* изображены пересечения $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{C_1}$, а на рис. 7*з* — пересечения $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{B_2}$, $\mathbf{C_2}$) тогда получаются следующие ответы: ($\mathbf{A_1}$, $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{C_1}$), ($\mathbf{A_1}$, $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{C_2}$), ($\mathbf{A_1}$, $\mathbf{B_2}$, $\mathbf{C_1}$), ($\mathbf{A_1}$, $\mathbf{B_2}$, $\mathbf{C_2}$) ($\mathbf{A_2}$, $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{C_1}$), ($\mathbf{A_2}$, $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{C_2}$), ($\mathbf{A_2}$, $\mathbf{B_2}$, $\mathbf{C_1}$), ($\mathbf{A_2}$, $\mathbf{B_2}$, $\mathbf{C_2}$) . Они и изображены на рис. 7(*а* – *з*).

Какие из этих рисунков является изображением одинарного узла? Какие из них можно упростить?

Учитель может задать другие задачи и подходящие вопросы (аналогичные (а) – (г) из п. 6). Надо подчеркнуть, что ученики на этом уровне только предварительно знакомятся с операциями упрощения, более подробно они будут изучаться в средних и старших классах.

8. Понятие движения

Попросите школьников, сравнить четыре треугольника на рис. 8. Одинаковы ли они? Можно ли их считать одной и той же геометрической фигурой? Чем отличаются рис. 8(*а*) – 8(*г*)? Что важно, существенно для геометрической фигуры, а что не важно?

Постарайтесь наводящими вопросами привести учащихся к ответу, состоящему в том, что для геометрических фигур важны — длины сторон, величины углов, периметр, площадь и т. п., а не важно — расположение фигуры в пространстве. Другим словами геометрическая фигура не меняется при движении, а движение — это действие, которое одинаковые геометрические фигуры совмещает друг с другом.

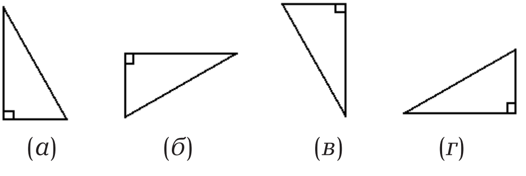


Рис. 8

Попросите школьников, завязать из веревки и сравнить узлы изображенные на рис. 9. Одинаковы ли они? Можно ли их считать одним и тем же узлом? Чем они отличаются? Что важно, существенно для узлов, а что не важно?

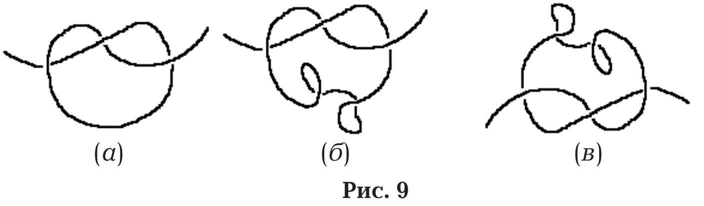


Рис. 9

На самом деле, конечно, все три узла на рис.9 одинаковы. В узлах самое важное — это структура узла, а то, что не важно — это размер, длина веревки, наличие петель, наложений "внахлёст", расположение в пространстве и т. п. Соответственно понятие движения для узлов, помимо движений, общих для всех геометрических фигур, включает ещё три типа движений, которые называются «движениями Рейдемейстера». Школьники познакомились с двумя из них (образование / раскрытие простой петли и создание /снятие наложения «внахлёст»).

В качестве ещё одного примера движения, уже арифметического характера, попросите школьников, сравнить данные дроби:

$$\frac{2}{3} \quad \frac{4}{6} \quad \frac{6}{9} \quad \frac{8}{12} \quad \frac{10}{15}$$

Одинаковы ли они? Можно ли их считать одним и тем же отношением? Чем они отличаются? Что важно, существенно для дробей, а что не важно? Школьники (после 3-ого класса) знают, что эти дроби считаются одинаковыми:

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\frac{8}{12}=\frac{10}{15}\dots$$

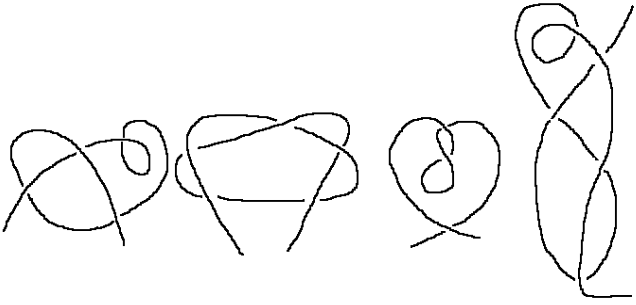
В дробях важно отношение или количество, изображаемое дробью, а не важно, какова величина числителя и знаменателя дроби. Поэтому операции *приведения* дробей, которые меняют внешний вид дроби, но не меняют того количества, которое эта дробь изображает, например:

$$\frac{12}{18}=\frac{12:6}{18:6}=\frac{2}{3} \qquad \frac{2}{3}=\frac{2\times 6}{3\times 6}=\frac{12}{18}$$

можно также считать «движениями» дробей, аналогичными движениям Рейдемейстера для узлов или обычным движениям для геометрических фигур.

Домашнее задание

(а) Упростить диаграммы, изображенные на рис.10, настолько, насколько можно (концы веревки закреплены).
(б) Создать эти фигуры из веревки и, потянув за концы, сравнить полученный результат с тем, что получилось с помощью диаграмм.



(*а*) (*б*) (*в*) (*г*)

Рис. 10

§ 3.2. Занятие 5. Изучение раскраски при движении

Предварительные замечания

На этом занятии школьники с помощью раскрашивания узлов лучше и точнее знакомится со структурой узлов. Выполняя первое и второе движение с раскрашенными узлами, изучают их влияние на структуру узлов. Кроме того, раскрашивание позволяет находить существенные различия между некоторыми узлами, которые в старших классах приведут к важным *классифицирующим признакам.*

Ход занятия

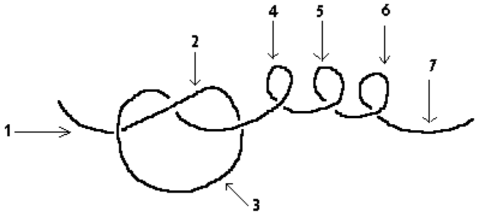
1. Первый тип движения и раскраска

Попросите школьников определить количество дуг на диаграмме одинарного узла с тремя петлями (рис. 11). Спросите их, какие из пересечений, можно упростить и какие нельзя, если концы закреплены. Ясно, что можно раскрыть три петли и получить одинарный узел.

Рис.11

На рис. 12 показана диаграмма одинарного узла с тремя петлями, на которой дуги перенумерованы 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7. Удобнее всего, чтобы не пропустить какую-нибудь дугу и не занумеровать одну и ту же дугу два раза, осуществлять нумерацию вдоль линии, образующей узел.

Рис. 12



Попросите школьников раскрасить диаграмму на рис. 12. Вспомните «первый принцип раскраски»: *Раскраска будет «хорошей», когда в каждом пересечении все три дуги, образующие пересечение, имеют разные цвета*. Затем задайте вопрос: возможно ли осуществить этот принцип при раскрашивании диаграммы на рис. 12? Что мешает его реализации?

Продемонстрируйте на доске, что, раскрашивая рис. 11(или 12), мы выбираем три цвета — (например, красный, синий, зеленый) для дуг 1,2, 3. Спросите школьников, какой из этих трех цветов нужно использовать для раскрашивания 4-й дуги, чтобы выполнялся «первый принцип раскраски»? Конечно, 4-ю дугу можно раскрасить красным цветом (рис. 13(*а*)). Если для раскрашивания 4-й дуги выбираем цвет, отличный от трех выбранных цветов (красный, синий, зеленый), например серый, то получается рис. 13(*б*). Повторите такой же вопрос, для раскрашивания пятой дуги.

(*а*) (*б*)

Рис. 13

Как видно на рис. 13(*а*) никакой из этих цветов не подходит потому, что в любом случае к точке **А** примыкает две дуги одного цвета, а точнее — одна и та же дуга, «вернувшаяся» в точку **А**. Спросите школьников, как можно решить эту проблему? Можно ли как-то «исправить» принцип раскраски?

Подсказка: Попросите школьников, нарисовать одинарный узел и затем раскрасить согласно первому принципу (рис. 14(*а*)). Далее попросите их, образовать одну петлю в этом узле, как изображено на рис. 14(*б*). Аналогично, рис. 14(*в*—*г*), показывают такой случай, когда мы используем более трех цветов.

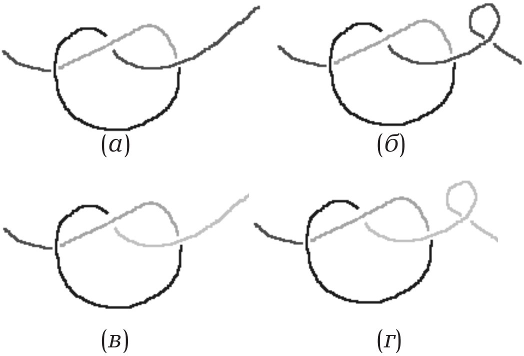


Рис.14

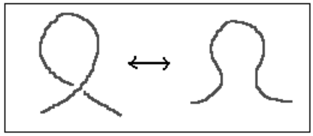
Что произойдет с раскраской? Следует ли её менять или лучше оставить её такой, какой она и была? Спросите школьников, какая идея получается из этого действия для раскрашивания рис. 12? Как можно исправить первый принцип раскраски, чтобы раскрасить узел? Можно ли раскрасить все петли одинаковым цветом? Если можно, тогда какой цвет можно выбрать для трех петель и последней дуги на рис. 12? Желательно, чтобы школьники сами ответили на эти вопросы, и указали, что для всех трех петель можно выбрать красный цвет (рис. 15 (*а*)). Другой вариант изображен на рис. 15(*б*).

Рис. 15

Теперь можно сформулировать «второй принцип раскраски»: *Раскраска будет хорошей, когда в каждом пересечении все три дуги, образующие пересечение, имеют либо разные цвета, либо один и тот же цвет и, кроме того, при раскраске используется более чем один цвет.*

Попросите школьников упростить раскрашенный узел (рис. 15 (*а* – *б*)). Спросите школьников, как можно получаемый узел раскрасить согласно нашему (второму) принципу. После раскрытия (или упрощения) рис. 15 получится узел, такой же, как узел на рис. 14(*а*) или 14(*в*). В результате этого можно догадаться что: Применение первого движения (и при образовании и при раскрытии петель) не меняет раскраску узла, если он раскрашен согласно (второму) принципу (рис. 16).

Рис. 16



2. Второй тип движения и раскраска

Изучение раскраски при усложнении.

Попросите школьников раскрасить одинарный узел (согласно первому или второму принципу). Вообще одинарный узел можно раскрасить двумя способами — тремя цветами или четырьмя цветами (рис. 17(*а*, *б*)). Затем попросите усложнить их с помощью второго типа движения. Три из возможных ответов, получаемые из рис. 17(*а*), мы дали на рис. 18(*а*, *б*, *в*). Спросите школьников можно ли раскрасить полученные узлы согласно первому или второму принципу? Какие новые дуги получаются?

Как видно на рис. 18(*а*) ничего не надо делать, и получаемый узел уже раскрашен согласно второму принципу. Получаемый узел нельзя раскрасить тремя цветами согласно первому принципу, потому что, например, в точке **A** (рис. 18(*г*)) возникает только два цвета, а не три.

На рис. 18(*б*) возникает проблема: поскольку в точках **A** и **B** у нас оказалось два цвета, необходимо что-то перекрасить, причем это желательно сделать так, чтобы не надо было перекрашивать весь узел. Спросите школьников, можно ли перекрасить рис. 18(*б*) так, чтобы выполнялся первый или второй принцип? Как мы показали на рис. 18(*д*), надо заменить цвет дуги между точками **A** и **B** с красного на синий. Аналогичная ситуация возникает на рис. 18(*в*). Спросите школьников, можно ли раскрасить рис. 18(*в*) согласно первому принципу? Во всяком случае, в точке **C** рис. 18(*в*), не возникнет трех цветов и поэтому нам придется использовать второй принцип. На рис. 18(*е*) приведен ответ. Как школьники видят, второй принцип работает для всех вариантов 18(*а*, *б*, *в*) и далее мы будем использовать только второй принцип раскраски.

Рис.17

(а) (б)

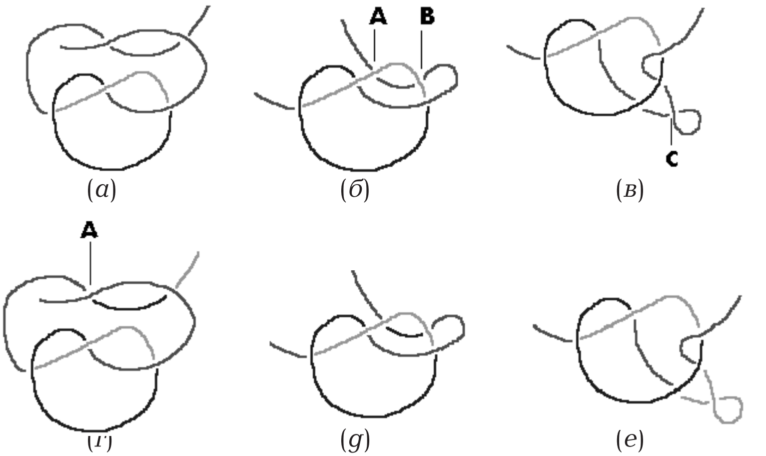


Рис. 18

На рис. 19(*а*, *б*, *в*) мы дали три из возможных ответов, получаемых из рис. 17(*б*) при усложнении с помощью второго типа движения. На рис. 19 (*г*, *д*, *е*) мы перекрасили их согласно второму принципу.

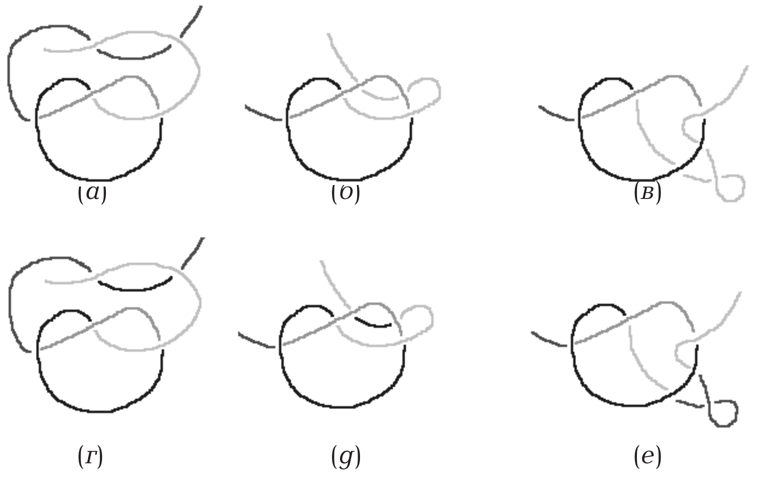


Рис. 19

Спросите школьников, что можно сказать о раскраске при применении второго типа движения при усложнении? Как школьники увидели, применение второго типа движения при усложнении не меняет возможности раскрасить узел, согласно второму принципу.

Изучение раскраски при упрощении

Попросите школьников, упростить раскрашенные узлы, изображенные на рис. 20. Все эти узлы превращаются в одинарный узел. Спросите школьников, какая разница между этими узлами? Рис. 20(*а*, *б*) раскрашен точно тремя цветами. Раскрашивание на рис. 20(*а*) удовлетворяет и первому и второму принципам, а рис. 20(*б*) раскрашен согласно второму принципу. Рис. 20(*в*, *г*) раскрашен с использованием более чем трех (а именно четырех) цветов, на рис. 20(*г*) мы применили второй принцип, а раскрашивание на рис. 20(*в*) удовлетворяет как первому, так и второму принципам.

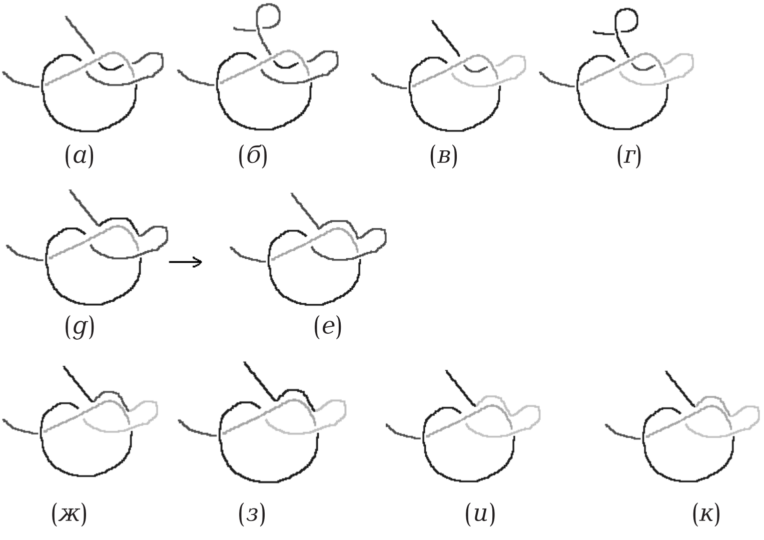


Рис. 20

Попробуем, выяснить, что произойдет в каждом случае при упрощениях. Для упрощения рис. 20(*а*), надо использовать второй тип движения. Полученный узел после упрощения (рис. 20(*g*)), можно раскрасить так же, как исходный узел (поменяв на одной дуге синий цвет на красный). Мы дали ответ на рис. 20(*е*). При упрощении рис. 20(*б*), сначала используем первый тип движения и получаемый узел уже раскрашен согласно первому принципу. Но теперь возникает такая же ситуация как на рис. 20(*а*).

Попросите школьников, повторить точно такой же процесс с рис. 20(*в*, *г*). Для упрощения рис. 20(*в*), также надо использовать второй тип движения (рис. 20(*ж*)). Какая разница между рис. 20(*в*) и рис. 20(*ж*)? На рис. 20(*в*), шесть дуг, а на рис. 20(*ж*) четыре дуги. Спросите школьников, что делать с красной частью дуги, которая находится между синей и серой частью? Можно ли поменять её раскраску, чтобы первый или второй принцип был выполнен? Как видно на рис. 20(*з, и, к*) никакой из цветов не подходит потому, что красный цвет окружен двумя разными цветами (синим и серым). Спросите школьников, можно ли решить проблему, используя 5, 6, 7 и т. д. цветов? Как показано, в такой ситуации весь полученный узел необходимо «перекрашивать» заново, при применении второго движения (при упрощении) «хорошую» раскраску нельзя сохранить перекрашиванием только того фрагмента, который двигался.

3. Анализ проблемы. Условие трех цветов. Третий (основной) принцип раскраски

Если хотим раскрасить узел так, чтобы при применении второго движения (и при упрощении, и при усложнении) каждый раз мы бы могли раскраску полученного узла и раскраску исходного узла получать друг из друга только перекрашиванием движущегося фрагмента, то нам необходимо разобраться, чем «хороший» случай (рис. 20 *а*) — *б*)) отличается от «плохого» (рис. 20 *в*) — *г*)).Для того, чтобы это сделать, мы рассмотрим отдельно только движущийся фрагмент узла (две наложенные друг на друга дуги) и возможные варианты его раскраски. Попросите школьников, нарисовать эти варианты (рис. 21). В первом случае две наложившиеся дуги имеют одинаковый цвет, тогда и при упрощении и при усложнении, раскраску этих дуг (рис. 21(*б*)), можно оставлять без изменений. Во втором и третьем случае дуги имеют разный цвет (рис. 21 *в*) — *g*)). Они отличаются тем, что при упрощении второго случая мы получаем три фрагмента одной дуги, раскрашенных так, что крайние фрагменты имеют одни и тот же цвет (рис. 21(*г*)), поэтому, перекрасив средний фрагмент в этот же цвет, как показано, на рис. 21(*g*), мы снова получаем раскраску, удовлетворяющую второму принципу. Отметим, что операция перекрашивания обратима: при усложнении, можно раскрасить новую дугу третьим цветом (рис. 21(*в*)).

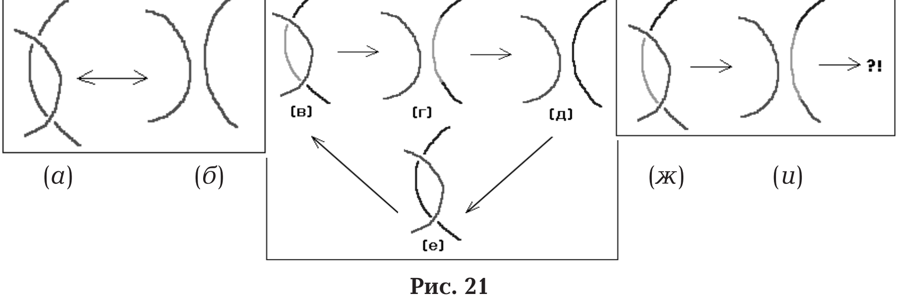


Рис. 21

В третьем же случае мы после упрощения получали три фрагмента одной дуги, раскрашенные в три разных цвета, и перекрашивание этой дуги в любой цвет потребует перекрашивания всего узла. Обратите внимание, что «плохой» случай 21(*ж*), в отличие от двух «хороших» 21(*а*) и 21(*в*), требует для раскраски как минимум четырех цветов. Можно ли его исключить с помощью ограничения количества цветов? Естественный ответ — да, если при раскраске использовать точно 3 цвета.

Как школьники увидели, узел, получаемый применением второго типа движения (и при упрощении и при усложнении) из раскрашенного согласно (второму) принципу одинарного узла, также можно раскрасить согласно (второму) принципу. И при этом надо использовать точно три цвета. Попросите школьников сформулировать этот факт.

Как вывод можно сформулировать *третий принцип* раскраски узла: *Раскраска будет хорошей, когда:*

А) Используется, ровно три цвета.

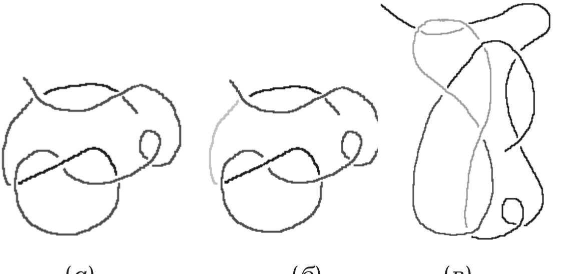
Б) В каждом пересечении все три дуги, образующие пересечение, имеют или разные цвета, или один и тот же цвет.

Домашнее задание

(а) Какие из узлов, изображенные на рис. 22, раскрашены согласно первому, второму или третьему принципу?

(б) Упростите узлы изображенные на рис. 22. Можно ли раскрасить, получаемые узлы, согласно первому, второму или третьему принципу?

Рис. 22



(*а*) (*б*) (*в*)

§ 3.3. Занятие 6. Зеркальное отражение. Обратная проекция

Предварительные замечания

На этом занятии школьники сначала знакомятся с понятием зеркального отражения. Далее они изучают, как можно нарисовать обратную проекцию данного узла.

Ход занятия

1. Зеркальное отражение

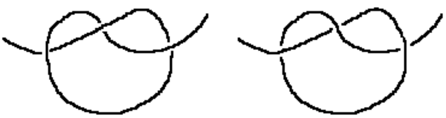
Возьмите кусок веревки и сделайте фигуру, как показано на рис. 23(*а*):

(*а*) (*б*)

Рис. 23

Спросите школьников, как эта фигура (23(*а*)) будет выглядеть, если посмотреть на её отражение в зеркале. Можно использовать зеркало для лучшего понимания. Как изменяется пересечение? Диаграммы зеркального отражения узла получаются заменой в диаграмме всех пересечений на противоположные. Диаграмма 23(*б*) является зеркальным отражением диаграммы 23(*а*) и наоборот.

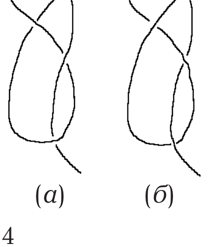
Попросите школьников, изобразить диаграмму одинарного узла и её зеркальное отражение (рис. 24(*а*, *б*)).



(*а*) (*б*)

Рис. 24

Затем задайте вопросы: «Что общего у них есть?», «Чем они различаются?» «Как они получаются друг из друга?». Попросите, чтобы школьники завязали одинарный узел и его зеркальное отражение и сравнили их. Повторите этот процесс для восьмерки (рис. 25(*а*, *б*)). Попросите, чтобы школьники изобразили восьмерку, затем создали её из проволоки, посмотрели на её отражение в зеркале и нарисовали то, что они видят в зеркале.



(*а*) (*б*)

Рис. 25

2. Обратная проекция

Попросите школьников взять кусок проволоки и сделать фигуру, как показано на рис. 26(*а*). Спросите, как эта фигура (26(*а*)) будет выглядеть, если на неё посмотреть с противоположной стороны? Затем попросите их сделать в парах этот эксперимент, т. е. нарисовать диаграммы фигуры (26(*а*)), когда один из них смотрит на неё с одной стороны, а другой — с другой? На рис. 26(*б*) изображена обратная проекция рис. 26(*а*). Для сравнения на рис. 26(*в*) изображено зеркальное отражение рис. 26(*а*).

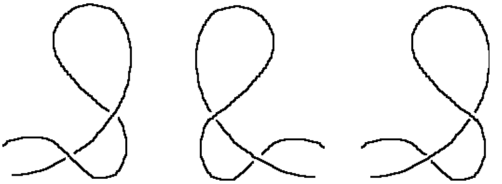
Рис. 26

(*а*) (*б*) (*в*)

Необходимо, чтобы школьники обратили внимание на различие между этими фигурами. Спросите школьников, чем отличается рис. 26(*а*) — (*б*) и 26(*а*) — (*в*)? Куда направлены длинный и короткий «хвосты» на рис. 26(*а*) и 26(*б*)?

Попросите школьников для фигуры, изображенной на рис. 27(*а*), нарисовать её обратную проекцию (рис. 27(*б*)) и её зеркальное отражение (рис. 27(*в*)). Спросите школьников, чем они отличаются? Затем попросите школьников взять кусок проволоки, сделать эту фигуру, и проверить, правильно ли они нарисовали.

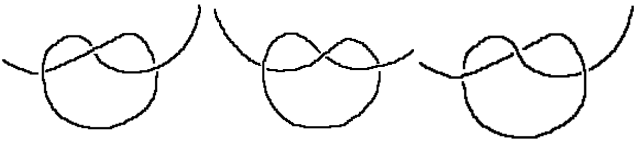
Рис. 27



(*а*) (*б*) (*в*)

3. Обратная проекция одинарного узла

Попросите школьников взять кусок проволоки, сделать одинарный узел (рис. 28(*а*)) и нарисовать его обратную проекцию (рис. 28(б)) и зеркальное отражение (рис. 28(*в*)). Мы нарисовали один из концевых «хвостов» длиннее, чем другой, чтобы была видна разница между одинарным узлом, его обратной проекцией и его зеркальным отражением.



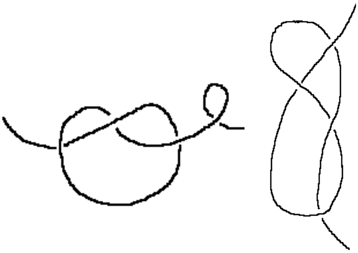
(а) (б) (в)

Рис. 28

Спросите школьников, какое различие, и какое сходство, между этими диаграммами? Какие из них являются симметричными друг другу?

Домашнее задание

(а) Изобразите зеркальное отражение и обратную проекцию узлов, данных на рис. 29.



(**а**) (**б**)

Рис. 29

(б) Можно ли раскрасить узлы изображенные на рис. 26(*а*, *б*, *в*) и рис. 28(*а*, *б*, *в*)?

§ 3.4. Занятие 7. Бегущие узлы

Предварительные замечания

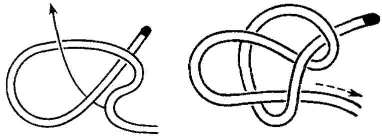
В реальности бегущие узлы (называемые иногда затяжными петлями) встречаются довольно часто. Необходимо, чтобы школьники научились завязывать эти узлы, рисовать диаграммы этих узлов и разбираться, как они завязываются и развязываются, с помощью диаграммы.

Ход занятия

1. Простейший бегущий узел

Каждый из нас почти ежедневно использует этот узел. Школьники знают, как завязывать этот узел (рис. 30).

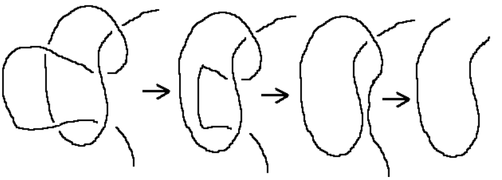
Рис. 30



(*а*) (*б*)

Сначала попросите их завязать этот узел, а затем спросите, как можно развязать его? Практически они знают, как развязывается этот узел — достаточно потянуть за концы. Но как можно это сделать через диаграмму? Ниже процесс развязывания этого узла изображен на диаграмме (рис. 31). На ней видно, что в результате упрощений получается один кусок веревки. Кроме того, рассмотрение этого процесса в противоположном направлении (*г* — *в* — *б* — *а*) показывает, как можно завязывать этот узел шаг за шагом.

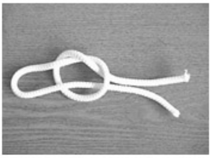
Рис. 31



(*а*) (*б*) (*в*) (*г*)

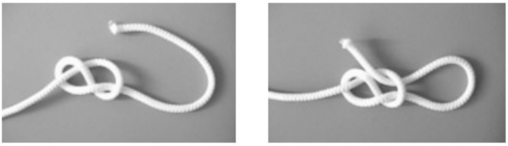
Будет очень полезно, если ученики изобразят зеркальное отражение этого узла и затем покажут, как этот узел развязывается (с помощью диаграммы). Простейший бегущий узел создается из одинарного узла. Для этого ещё раз попросите школьников завязать бегущий узел, изображенный на рис. 30, и, потянув за петлю, вытащить свободный конец. Какой узел получился? Что надо сделать, чтобы из одинарного узла получился бегущий? На рис. 32 и на самом узле видно, что это — одинарный узел, у которого один из концов продет обратно.

Рис. 32



2. Восьмерки с петлей

Попросите школьников завязать восьмерку (рис. 33(*а*)) и превратить её в бегущий узел, как показано на рис. 33(*б*). Что произойдет, если взять его за два конца и потянуть? Попросите их, выполнить упражнение в парах: один держит узел за концы, а другой манипулирует с ним. Можно ли таким образом превратить его в кусок веревки без пересечений? Далее попросите школьников нарисовать диаграмму этого бегущего узла и аналогично рис. 31 показать, как этот узел развязывается.



(*а*) (*б*)

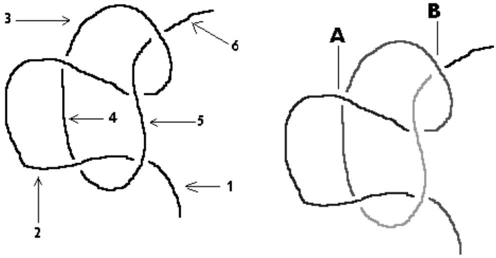
Рис.33

Примеры рис. 32—33 показывают, что на самом деле из любого узла можно создать бегущий узел. Спросите школьников, какие бегущие узлы кроме этих они знают? Или могут придумать?

3. Раскраска и бегущий узел

Попросите школьников, раскрасить диаграмму бегущего узла на рис. 31(*а*) согласно второму принципу и используя точно три цвета. Поскольку простейший бегущий узел получается из одинарного узла, на первой взгляд кажется, что это возможно. Попробуем выяснить, действительно ли это возможно?

На рис. 34 показана диаграмма бегущего узла, на котором дуги перенумерованы 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Начинаем раскрашивать рис. 34 выбирая три цвета — красный, зеленый и синий для дуг 1, 5 и 2. Спросите школьников, какие из трех цветов можно использовать для раскрашивания четвертой дуги согласно второму принципу. Для этого можно выбрать только красный цвет. Повторите такой же вопрос о третьей дуге. Спросите школьников, почему невозможно выбрать ни один из этих цветов? В самом деле, во всяком случае, в точке **A** или **B** (рис. 34(*б*)) возникает два, а не три цвета. Если раскрашиваем третью дугу красным цветом, то в точке **A** будет два цвета, а если выбираем синий цвет или зеленый, тогда в точке **B** возникает два цвета.



(*а*) (*б*)

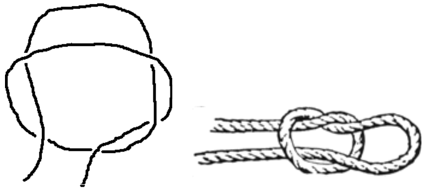
Рис. 34

Таким образом, выяснилось, что невозможно раскрасить диаграмму бегущего узла (рис. 31(*а*)) согласно второму принципу

Домашнее задание

(1) На рис. 35 (*а*) приведена диаграмма, а на 35(б) изображен бегущий узел.

Рис. 35



(*а*) (*б*)

a) Какая разница между 31(*а*) и 35(*а*)? Являются ли они совершенно одинаковыми?

b) Являются ли они зеркальным отражением или обратной проекцией друг друга?

c) Завяжите узел 35(*а*) на веревке.

d) Упростите диаграмму 35(*а*).

e) Изобразите диаграмму 35(*б*) и упростите её.

f) Является ли 35(*а*) изображением 35(*б*)?

g) Изобразите обратную проекцию диаграммы 35(*а*).

(2) Почему бегущий узел невозможно раскрасить в три цвета?

Глава 4. Движение от практики к математике (формирование абстракции)

Часто в процессе обучения математике начинают говорить о практическом применении какого-либо предмета уже после его изучения в теории. На наш взгляд, этот подход противоестественен и мы воспользуемся другим подходом, в котором изучение математического объекта неразрывно связано с его практическим использованием. Этот принцип мы проиллюстрируем на теме, имеющий большое значение для развития геометрического мышления школьников, — элементарной теории узлов. Вместе с изучением узлов мы будем постоянно показывать их применение в разных ситуациях в жизни. Кроме того, само изучение узлов мы строим так, чтобы сформировать понимание математического узла как абстрактного объекта, сохраняющего в себе главные, существенные свойства реальных узлов и лишенного свойств, второстепенных, несущественных, непринципиальных. Основная цель нашей методики — организовать естественный процесс, в котором школьник сам формирует понятие, а не заучивает его из учебника или со слов учителя.

Узлы сопровождают нас в течение тысяч лет. Человек использовал их в разных областях своей деятельности: в мореплавании, в альпинизме, в рыбной ловле, в военном деле, в спасательных работах, в медицине, при завязывании галстуков, шнурков, в различных играх и т. д. Оставляя пока за рамками обсуждения применения узлов в современной науке, мы на самом элементарном уровне хотим показать, как используются узлы на практике.

При решении каждой конкретной задачи и в обыденной жизни, и в профессиональной деятельности надо использовать наиболее подходящий узел. Существует много требований, которые могут определять выбор узла для тех или иных целей. Например, его устойчивость под постоянной или переменной нагрузкой, возможность его легко развязать, быстрота, с которой требуется его завязывать и развязывать, насколько узел ослабляет веревку, насколько он надежен, и т. п. Однако три основных свойства, характеризующих полезность узла — это возможность легко завязать, возможность легко развязать и надежность под нагрузкой — оказываются важными практически всегда.

Сколько узлов нужно знать человеку? Конечно, для некоторых профессий это число достаточно велико. Например, каждый альпинист и каждый моряк должен уметь вязать несколько десятков узлов. Однако, для общеобразовательных целей, на наш взгляд, достаточно изучить по несколько узлов различных категорий. На двух занятиях, описанных ниже, мы изучаем около 10 узлов различных типов и категорий, которые и удовлетворяют повседневным нуждам, и дают необходимый материал для создания «школьной теории узлов». Мы приведем примеры, как завязывать некоторые узлы и опишем их применение. Многие узлы могут быть завязаны более чем одним способом. Но результат будет тот же самый.

Любой узел полезен тогда, когда он может быть завязан легко и без большого усилия. Единственный способ достигнуть этого результата — тренировка, тренировка и еще раз тренировка.

§ 4.1. Занятие 8. Узлы на одной веревке

Предварительные замечания

На этом занятии мы даем несколько простых примеров, которые показывают, как узлы используются в реальной жизни. Более подробную и детальную информацию о завязывании разных узлов можно узнать, обратившись к соответствующим источникам [1, 23–24, 28–29]. Надо помнить, что навыки вязания узлов могут утрачиваться, если они не используются и не укрепляются регулярными упражнениями. В классе для демонстраций желательно использовать толстую веревку или канат, чтобы действия легко были наблюдаемы. Школьникам же для упражнений желательно выдать отрезки шнура (шпагата). Если использовать два шнура различного цвета, то школьники смогут видеть структуру узла.

Ход занятия

1. Объясним, некоторые термины, которые мы используем при работе с узлами и которые употребляются в ряде профессий. *Рабочий*, или *ходовой конец* веревки — это её незакрепленный (свободный) конец, который передвигается при завязывании узла, *коренной* же *конец* веревки при завязывании узла обычно остается неподвижным. Предположение о закреплении одного из концов связано с тем, что в реальных условиях мы имеем дело с веревками достаточно большой длины, которые либо намотаны на барабан (катушку), либо свернуты в бухту, либо просто привязаны к чему-либо. Поэтому в нашем распоряжении обычно оказывается только один конец. В нашей работе ходовой и коренной концы обозначаются следующим образом (рис. 1):

Рис. 1

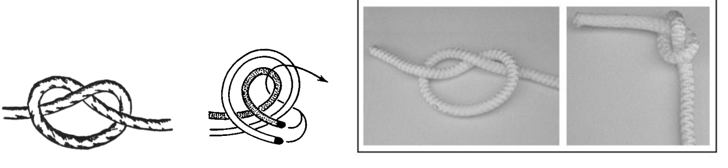
2. Стопор

Часто для безопасности необходимо иметь «стопор» на конце Вашей веревки после того, как Вы завязываете какой-то узел. Это предотвращает выскальзывание свободного конца веревки из узла под воздействием тяжелого груза (или рывков веревки). На кораблях стопоры используются для того, чтобы избежать выскальзывания веревки из блока. Есть много видов узлов стопора. Мы обсудим два примера — одинарный узел (и родственные ему) и восьмерку (тоже с различными вариантами).

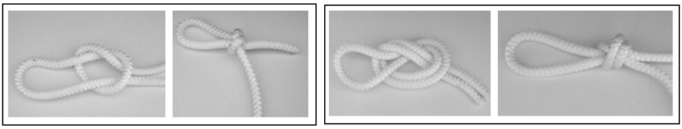
3. Одинарный узел (Overhand Knot)

Этот узел используют на обоих концах веревки, чтобы сохранить её от распутывания и как узел «стопора». Одинарным узлом можно очень легко и быстро связать две веревки (рис. 2(*б*)), этот узел называется «дубовым» поскольку при намокании он набухает и его трудно развязать. Он не очень надежен, так как в месте соединения веревка ослабевает. Одинарный узел нельзя применять для связывания синтетических веревок и лесок, так как он на них «ползет».

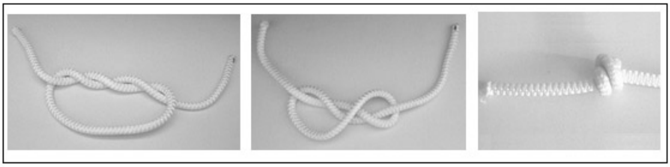
Одинарный узел получается, если скрестить руки на груди, поэтому по-английски он называется "overhand", то есть «скрещенные руки». Этим же узлом женщины завязывают узел на конце нитки. Обычно как узел стопора, используется именно одинарный узел, однако в особо ответственных ситуациях предпочитают делать его двойным. На рис. 2 изображены некоторые узлы, так или иначе родственные одинарному.



(*а*) (*б*) (*в*) (*г*)



(g) (e) ($ж$) ($з$)



($и$) ($к$) ($л$)

Рис. 2

Попросите учеников завязать узлы, показанные на рис. 2 и объяснить, чем каждый из узлов родственен одинарному. Рис. 2(a) является зеркальным отражением рис. 2($в$) и наоборот. Но на рис. 2(a) оба конца свободны, а на рис.2(в) свободен только один из концов. На рис. 2(g) после завязывания одинарного узла ходовой конец веревки продели обратно, и создали простейший бегущий узел. Затем на рис. 2(e) затянули его. На рис. 2($ж$) завязан простейший бегущий узел на двойной веревке, а на рис. 2($з$) он затянут. На рис. 2($и$) сначала завязали одинарный узел, а затем ещё раз обернули (моряки говорят «обнесли») свободный конец вокруг веревки. Этот узел называется «двойным» (double overhand knot).

Учитель может задать вопросы: Где эти узлы используются? Какие из них вы видели раньше и какие не видели? Какой из них мы используем при завязывании шнурков? Можно ли использовать несколько из них вместе? Как? И т. п. Кроме использования как узел стопора, одинарный узел используют также для предотвращения расплетания конца веревки [1]. Бегущий узел используется при завязывании шнурков и с его помощью можно затянуть мешок или привязать веревку к какому-нибудь предмету.

Попросите учеников, изобразить узлы, показанные на рис. 2., некоторые из них мы рисовали в предыдущих главах. На рис. 3 изображены диаграммы 2($ж$, $к$, $и$).

(а) (б) (в)

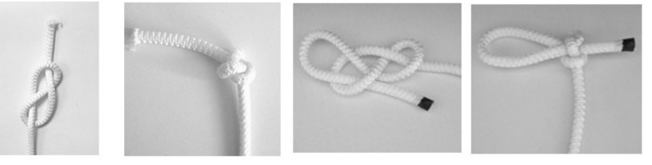
Рис. 3

4. Восьмерка

Некоторые из узлов могут использоваться для множества различных целей в разных ситуациях. Например, восьмерку используют в мореплавании, в альпинизме, в спасательных работах, на рыбной ловле и т. д. Восьмерка — один из самых прочных узлов. Благодаря этому, она обычно используется альпинистами как узел «обязательного ассортимента». Именно восьмеркой завязывают узел, который соединяет альпиниста с веревкой, это формирует безопасную нескользкую петлю в конце веревки. Восьмерку используют и как один из самых удобных узлов стопора рис. (5(*а*) и 5(*б*)). Школьники уже изучали, как завязать восьмерку. Этот процесс показан на рис. 4.

(*а*) (*б*) (*в*) (*г*) (*g*)

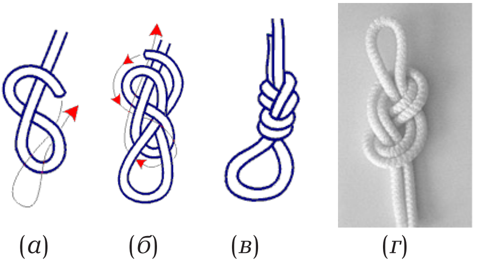
Рис. 4



(*а*) (*б*) (*в*) (*г*)

Рис. 5

Когда узел стопора должен быть развязан быстро, используют скользящую восьмерку (восьмерка с петлей рис. 5(*в*)), который может быть распущен, если потянуть за рабочий конец (он показан черным цветом на рис. 5(*в*)). Кроме того, петля полезна, когда Вы хотите что-то повесить или привязать к узлу другую веревку. На рис. 6(*а*, *б* и *в*) показано, как можно завязать, более прочную «двойную» восьмерку.

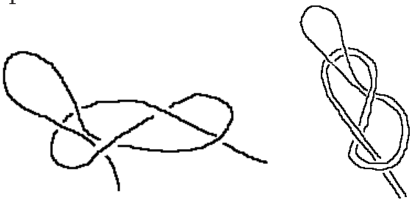


(*а*) (*б*) (*в*) (*г*)

Рис. 6

Этот узел может также быть получен связыванием фигуры на рис. 6(*а*) с удвоенной веревкой (Рис. 6(*г*)). Это быстрее, но не может использоваться для привязывания к в неподвижной опоре. Восьмерка — очень надежный узел, но, там, где требуется безопасность, существенно ещё знание прочности веревок. Попросите учеников, изобразить диаграммы узлов, приведенных на рис. 5(*в*) и 6(*г*). На рис. 7 изображены эти диаграммы.

Рис. 7



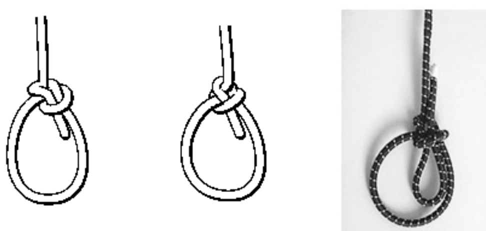
(а) (б)

5. Узел Булинь (Bowline — Король всех узлов)

Булинь, или узел Bowline — это знаменитый узел, известный египтянам и финикийцам ещё за 3000 лет до нашей эры [23]. Он очень универсален. Он используется, чтобы сформировать на веревке временную петлю. На рис. 8 и 9 показано, как нужно завязать этот узел. Обратите внимание на то, что для булиня существенно, как его затягивать (рис. 8 *е*), *ж*)). Завязывание узла Булинь способом, изображенным на рис. 8(*и*) позволяет легко развязывать его, даже если он находится под большой нагрузкой.

(*а*) (*б*) (*в*) (*г*) (*g*)

Рис. 8



(*е*) правильно (*ж*) неправильно (*и*)

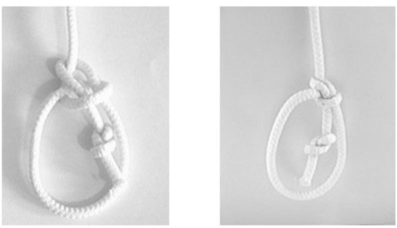
(*а*) (*б*) (*в*) (*г*)

Рис. 9

Существует краткие устные ключи, которые помогают в запоминании алгоритма завязывания узла. Например, для булиня ключ звучит как «ёжик вылез из норы, обошел вокруг дерева, и залез назад в нору». Есть многочисленные преимущества для использования этого узла, поскольку он не скользит, не развязывается, не затягивается самопроизвольно и его не трудно развязать, даже когда веревка находится под нагрузкой. Булинь обычно используется, чтобы привязать веревку к опоре или сформировать неподвижную петлю на конце веревки. Он используется в море при управлении снастями, для подъема грузов и спасения людей [28].

Булинь называется «королем» узлов. Булинь используется и рыбаками, но его недостаток заключается в том, что при завязывании на леске он несколько ослабляет её. Тем не менее, некоторые рыболовы применяют его для завязывания фиксированной (незатягивающейся) петли. Узел Булинь незаменим при буксировке или вытягивании автомобиля из кювета. Автомобилисты используют его и для привязывания вещей к багажнику[23].

Этот узел может для некоторых типов веревки использоваться вместе с узлом стопора, укрепляющего булинь (как изображено на рис. 10)



(*а*) (*б*)

Рис. 10

6. Домашнее задание

(а) Попросите школьников завязать узел Булинь. Затем попросите в парах (дома — с помощью родителей или кого-то еще) одного — взять концы узла, и другого — попробовать распустить его или преобразовать в какой-то другой узел. Покажите им диаграммы (а, б, в) узлов показанных на рис. 11. Школьникам надо определить, какая из этих диаграмм изображает Булинь.

Рис. 11

(*а*) (*б*) (*в*)

Может быть, это упражнение окажется трудным для школьников, поэтому очень важно, на следующем занятии его обсудить. Спросите школьников, как можно выполнить этот упражнение проще? Спросите их, будет ли проще, если сначала завязать узел булинь, а затем соединить концы веревки и попробовать манипулировать с ним?

(б) Попросите школьников завязать узлы, изображенные на диаграммах, на рис. 11(*в*). Изобразите зеркальное отражение и обратную проекцию узлов, изображенных на диаграммах, на рис. 11.

§ 4.2. Занятие 9. Узлы на двух веревках

1. Бабий узел

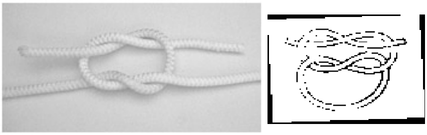
Этот узел может применяться на грубых веревках с большим трением. С давних времен женщины завязывают этим узлом концы головных платков. На рис. 12 показано, как нужно завязать «бабий узел».

Рис. 12

(*а*) (*б*) (*в*)

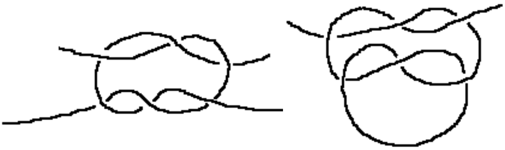
Нужно помнить, что это ненадежный узел, при натяжении веревок этот узел легко скользит. С другой стороны, если его туго затянуть, то его будет трудно развязать. Именно поэтому моряки с пренебрежением относятся к бабьему узлу. Однако и этот узел можно сделать прочным. Завяжите сначала на ходовых концах веревок простой узел или восьмерку, а потом свяжите веревки бабьим узлом. Такой узел развязываться не будет.

На рис. 13 показано, два варианта бабьего узла. Спросите школьников, чем отличаются эти узлы? Узел на рис. 13(*а*) завязан с помощью двух кусков веревки, а 13(*б*) завязан на одном куске веревки. Кроме того, эти узлы являются зеркальным отражением друг друга. Попросите школьников завязать узлы, изображенные на рис. 13 и изобразить их диаграммы. На рис. 14 мы дали эти диаграммы.



(*а*) (*б*)

Рис. 13



(*а*) (*б*)

Рис. 14

2. Рифовый узел

Рифовый узел — это превосходный общий узел для связи двух частей нити или бечевки вместе. На рис. 15 показано, как завязывать этот узел.

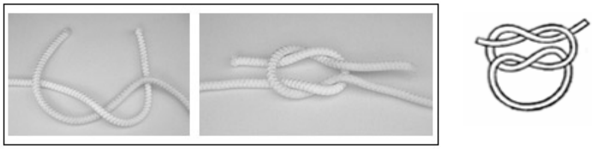
(*а*) (*б*) (*в*)

Рис. 15

Рифовый узел — возможно, наиболее часто используемый в деле узел, который легко научиться вязать. Чтобы не забыть, как связать рифовый узел, можно использовать ключ, «левый по правому, правый по левому». Рифовый узел не очень надежен на синтетических веревках.

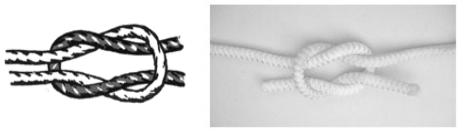
Завязывание бабьим или рифовым узлом двух концов одной веревки — это, по существу, завязывание двух одинарных узлов (позже мы увидим, что и бабий и рифовый узел можно рассматривать как сумму двух одинарных узлов).

Разделите класс на пары. Затем попросите каждую пару учеников создать оба варианта рифового узла (один делает один вариант (16(*г*), другой 16(*д*)), показать друг другу и сравнить их). Попросите школьников завязать 16(*в*) и затем нарисовать диаграммы 16(*а*, *б*).



(*а*) (*б*) (*в*)

Рис. 16



(*г*) (*д*)

Рифовый узел также называется «квадратным» узлом, этот узел в течение столетий использовался для связи пакетов и связок всех видов. Он также используется, чтобы закреплять повязки, потому что он плоский и поэтому эффективен и удобен.

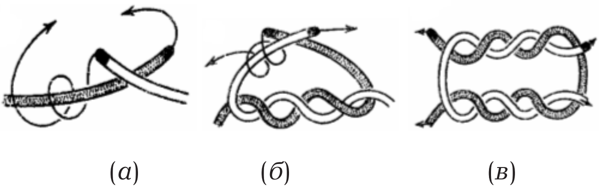
3. Домашнее задание

Попросите школьников изобразить диаграммы двух узлов (рифовый узел и бабий узел) и сравнить их. Затем задайте вопросы, аналогичные приведенным ниже:

Что общего у этих двух узлов? Чем они различаются? Являются ли они зеркальным отображением друг друга? Можете ли нарисовать их зеркальное отображение? Как получается зеркальное отображение? Какой из узлов более прочный? Эти вопросы важны, потому что ученики могут использовать на практике или в жизни те узлы, которые прочнее. Таким образом, школьники почувствуют различие между рифовым узлом и бабьим узлом.

Спросите школьников, могут ли они сделать еще более прочный «рифовый узел»? Ответ на этот вопрос дан ниже (рис. 17):

Рис. 17

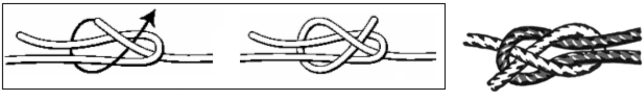


(*а*) (*б*) (*в*)

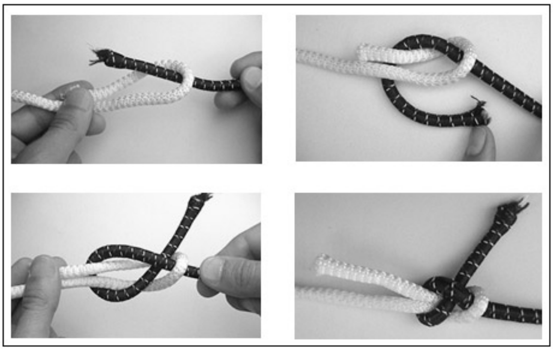
Этот узел называется «хирургическим». Попросите учеников, нарисовать его диаграмму. Ими пользуются хирурги для завязывания нитей лигатур при остановке кровотечения и для сшивания тканей кожи.

4. Ткацкий узел (Sheet Bend)

Этот узел найден в стольких местах и используется в стольких ремеслах, что имеет огромное количество названий, из которых наиболее известным является «ткацкий узел». Найденный при раскопках фрагмент рыбацкой сети, сделанной с использованием этого узла, датирован приблизительно 9,000 лет назад, что делает этот узел самым старым из известных узлов [23]. Традиция говорит, что ткацкий узел предназначен, чтобы соединять веревки различной толщины, но он работает одинаково хорошо и когда шнуры имеют одинаковую толщину. На рис. 18 показано, как завязывать этот узел.



(*а*) (*б*) (*в*)

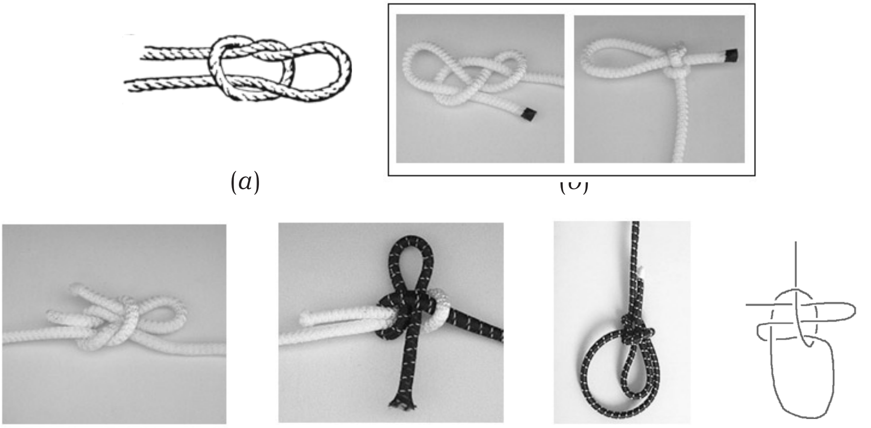


(*г*)

Рис. 18

5. Бегущие узлы

Школьники раньше познакомились с простейшим бегущим узлом (рис. 19(*а*)). Попросите школьников завязать этот узел и далее изобразить его диаграмму. Спросите их, какие другие бегущие узлы еще они знают. На самом деле для каждого узла можно использовать его бегущую версию. Например, на рис. 19(*б*) показан бегущий узел создаваемый из восьмерки (скользящая восьмерка), а на рис. 19(*в*—*г*—*д*) показаны другие бегущие узлы (создаваемые из рифового узла, ткацкого узла и булиня). На рис. 19(*е*) показан еще один бегущий узел, очень полезный во многих случаях (например, для привязывания животных). Попросите школьников завязать этот узел.



(*а*) (*б*)

(*в*) (*г*) (*д*) (*е*)

Рис. 19

6. Домашнее задание

(а) Попросите школьников, попробовать в завершение проанализировать способ, которым они завязывают свои шнурки. Они связывают их или рифовым узлом или бабьим узлом. Обратите внимание, что лучше завязывать шнурки «рифовым узлом», чем бабьим, так как тогда они не будут самопроизвольно развязываться.

(б) Упростите диаграмму узла, изображенную на рис. 19(е).

§ 4.3. Занятие 10. Раскраска узлов

Предварительные замечания

Это занятие посвящено раскрашиванию узлов, изученных на занятиях 9 и 10. Цель этого занятия — не только в том, чтобы школьники познакомились со структурой одного узла, но и в том, чтобы они начали понимать различие между разными узлами. Это важный шаг на пути к математическим представлениям об узлах.

Ход занятия

1. Раскраска восьмерки с петлей

Школьники раньше видели, что невозможно раскрасить простейший бегущий узел согласно второму принципу. Спросите их, возможно ли раскрасить бегущий узел, создаваемый из восьмерки (рис. 19(*б*) или 7(*а*)) согласно второму принципу? Попробуем выяснить, действительно ли это возможно. Мы используем рис. 7(*а*).

На рис. 20(*а*) показана диаграмма бегущего узла, создаваемого из восьмерки, на которой дуги перенумерованы 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7. Начиная раскрашивать рис. 20(*а*), выберем три цвета — зеленый, красный и синий — для дуг 1, 4 и 2. Спросите школьников, какие из трех цветов можно использовать для раскрашивания третьей дуги согласно второму принципу? Для этого можно выбрать только зеленый цвет рис. 20(*в*). Повторите такой же вопрос о шестой дуге. Спросите школьников, почему невозможно выбрать никаких из этих цветов? Если раскрасить шестую дугу синим цветом, то в точке **B** никогда не возникает трех цветов, а если выбираем зеленый цвет или красный тогда два цвета возникает в точке **A**. Один из таких вариантов показан на рис. 20(*г*).

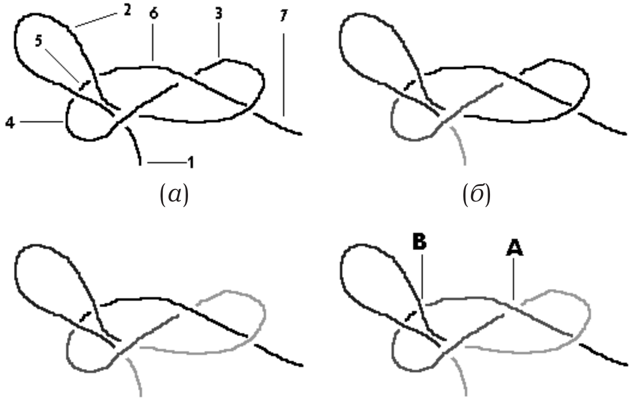


Рис. 20

2. Анализ

Попросите школьников упростить узел, изображенный на рис. 7(*а*). Мы дали ответ на рис. 21. Рассмотрение этого процесса в противоположном направлении (*д*—*г*—*в*—*б*—*а*) показывает, как можно завязывать этот узел шаг за шагом.

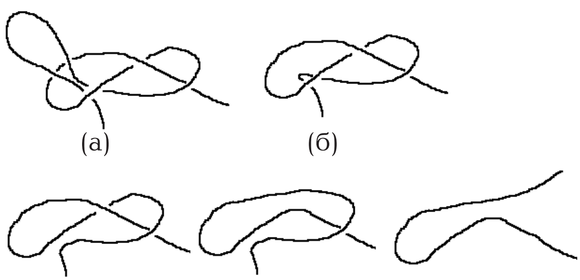


Рис. 21

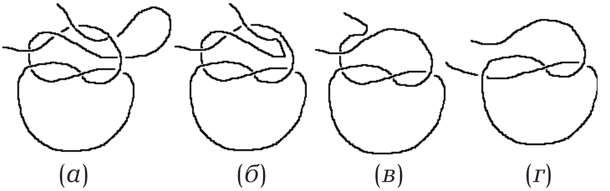
Попросите школьников объяснить, какой тип движения они использовали при упрощении на каждом шаге? Спросите школьников, смогут ли они объяснить без раскрашивания и только с помощью движения, почему невозможно раскрасить рис. 7(*а*) согласно второму принципу? Можно ли раскрасить 21(*д*)? Ясно, что это невозможно. Что можно сказать о рис. 21(*г*)? Как можно это объяснить с помощью движений? При упрощении на рис. 21 мы применяли первый и второй тип движений, а эти движения не меняют раскраски. Другими словами если мы сможем раскрасить, например, рис. 21(*в*), то, мы сможем раскрасить и рис. 21(*г*). И вообще, если бы мы смогли раскрасить один из вариантов на рис. 21, то мы смогли бы раскрасить и все другие варианты. Поскольку невозможно раскрасить рис. 21(*д*), то невозможно раскрасить и рис. 21(*а*). Таким образом, причина невозможности раскраски рис. 21 состоит в том, что нельзя раскрасить один кусок веревки 3 цветами. Спросите школьников, какое правило следует из этого рассуждения?

Если данный узел при упрощении (с помощью первого или второго движения) превращается в один кусок веревки без пересечений, то исходный узел невозможно раскрасить.

3. Раскраска рифового узла с петлей

Спросите школьников, можно ли раскрасить рифовый узел с петлей (рис. 22(*а*))? Многие из нас его используют при завязывании шнурков. Попросите школьников упростить его и объяснить, какой из двух типов движений они используют. На рис. 22(а — б — в — г) мы дали ответ.

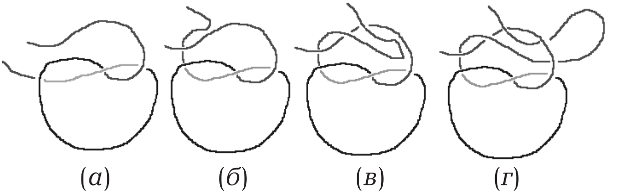
Рис. 22



(*а*) (*б*) (*в*) (*г*)

Как видно, рис. 22(*д*) изображает одинарный узел, и раньше школьники изучали, как его раскрасить. Поскольку первый и второй тип движения не меняют возможности раскрасить, можно раскрасить и рис. 22(*а*) (согласно второму принципу). Этот процесс показан на рис. 23.

Рис. 23



(*а*) (*б*) (*в*) (*г*)

4. Раскраска рифового узла и бабий узел

Попросите школьников нарисовать диаграммы рифового узла и бабьего узла и раскрасить их. На рис. 24(*а*) и 25(*а*) мы дали их диаграммы, а на рис. 24(*б*) и 25(*б*) раскрасили их.

(*а*) (*б*)

Рис. 24

(*а*) (*б*)

Рис. 25

5. Домашнее задание

Раскрасить узлы, изображенные на рис. 19(*е*), узел булинь и ткацкий узел.

§ 4.4. Занятие 11. Игры и узлы

Предварительные замечания

В реальной жизни мы встречаем много удивительных и интересных явлений и случаев, которые при их математическом изучении становится естественными и понятными. В самом деле, одна из функций математики — это описание и объяснение явлений. Если школьники получают опыт такого применения математики, они могут использовать этот опыт в будущем и в жизни и в учебе.

Мы предлагаем несколько игр, связанных с завязыванием узлов и осуществляем их теоретический разбор. В этих примерах с помощью математических узлов объясняются причины явлений, которые производят, на первый взгляд, впечатление неясных и загадочных.

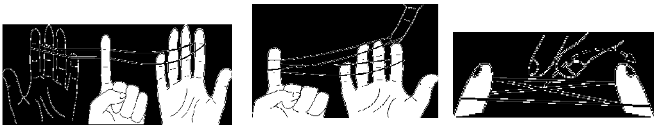
Ход занятия

1. Игры с веревкой и пальцами

Многие из учеников знакомы с игрой, в которой замкнутая нить натягивается на пальцы рук, образуя разные причудливые фигуры.

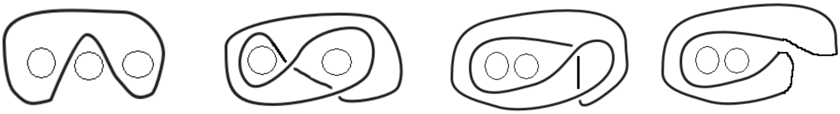
На первой взгляд они выглядят удивительно. Мы выбираем один из самых простых примеров. Попросите школьников взять нитку и в парах выполнить действия, показанные на рис. 26, т. е. взять кольцо (из веревки, резинки или нитки) и растянуть его указательными пальцами. Затем пусть один из школьников положит указательный палец другой руки на средину кольца, (рис. 26(*а*)), а указательный палец первой руки обнесет вокруг него и сбросит петлю на указательный палец первого школьника (рис. 26(*б*)). Теперь четыре части нити находятся между двумя указательными пальцами и две из них пересекают друг друга. Пусть один из школьников возьмет их за перекрестие и набросит это перекрестие на один из указательных пальцев (рис. 26(*в*)).

Рис. 26



(*а*) (*б*) (*в*)

Спросите школьников, что получается после последнего шага? Почему? Как можно это объяснить с помощью диаграммы? Мы дали ответ на рис. 27. Пальцы показаны кружочками. Рис 27. (*в*) превращается в тривиальный узел и пальцы, в самом деле, находятся вне диаграммы узла. Мы использовали второй тип движения при превращении 27(*а*) в 27(*г*).



(*а*) (*б*) (*в*) (*г*)

Рис. 27

2. Домашнее задание

На рис. 28 (*а*—*е*) изображена аналогичная задача. Спросите учеников, что получается после последнего шага (рис. 28(*е*)). Попросите школьников, показывая пальцы кружочками (как на рис. 27), изобразить диаграммы рис. 28 (*а*—*е*) (как мы сделали на рис. 27). Диаграмму рис. 28(*е*) мы дали на рис. 28(*ж*). Попросите школьников упростить рис. 28(*ж*) с помощью движения. Рис. 28 (*ж*) превращается в тривиальный узел и пальцы в самом деле находятся вне диаграммы узла (см. [36]).

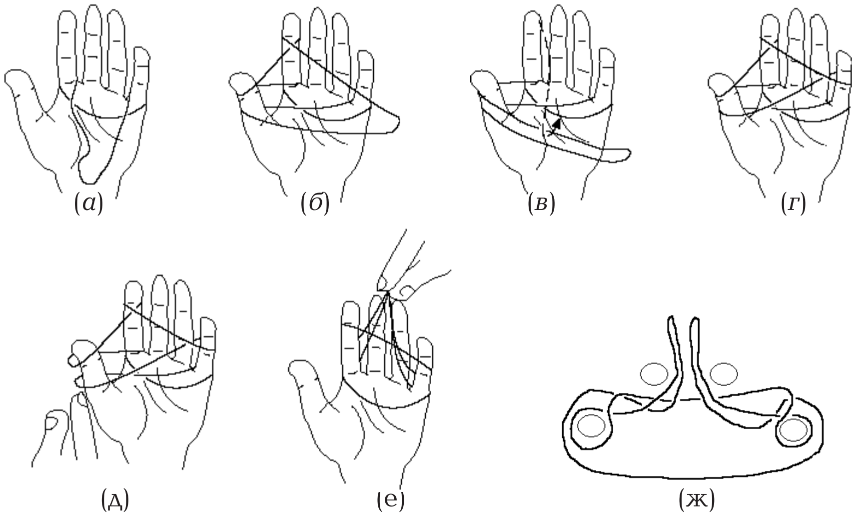


Рис. 28

3. Живые цепочки

В этих играх, которые могут выполняться разными путями, школьники (точнее, их руки) сами играют роль «веревки». Работая вместе, они приобретают навык совместного решения проблемы, которая была поставлена. Живую цепочку можно создать с любым числом людей (школьников). Мы сначала рассматриваем два узла, для создания которых достаточно трех школьников.

С помощью школьников образуйте живые цепочки, показанные на рис. 29. После формирования узлов спросите учеников, какую из них можно развязать, не отпуская рук? Для того чтобы решить проблему и развязать узел они могут двигаться вдоль цепочки, пролезать под сцепленными руками или перешагивать через них. Заканчивался игра, когда школьники, не отпуская рук, встали в круг в (или в других ситуациях, в круги). Мы хотим, чтобы сначала школьники решили проблему в реальности, а затем проанализировали её с помощью диаграммы (рис. 29).

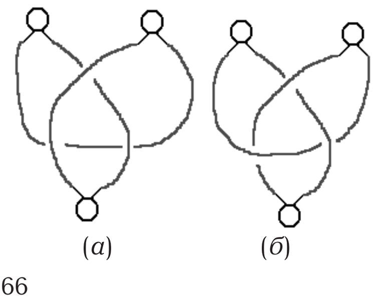
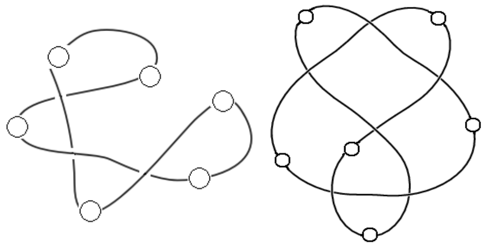


Рис. 29

Если далее хотим, чтобы они от «живых» цепочек перешли к работе с диаграммами, то в качестве промежуточного шага можно использовать «материальные модели» например, заменив руки верёвочками, а вместо каждого человека использовав пуговицу. И поэтому в диаграммах оказывается естественным использовать для обозначений вместо знака знак ○ и, в конце концов, только одну точку! Надо подчеркнуть, что для каждого учебного уровня надо выбирать удобный вариант, т. е. в то время, когда школьники растут и их мышление становится абстрактнее, используемые нами представления тоже становятся абстрактнее. Это — важный принцип, который мы используем при построении нашего пути от практики к математике.

Узел 29(*а*) можно развязать, а узел 29(*б*) — нельзя. В первом случае школьники могут убедиться, что узел развязывается, а во втором случае — что узел не развязываться. Спросите учеников, какая разница между этим ситуациями? Если можно отпустить руки, и поменять способ их пересечения и ещё раз их соединить, то удается ли решить проблему? Каково тогда будет наименьшее количество действий, необходимых для этого? Работая с этой задачей, мы осуществили предварительное знакомство с важным понятием в теории узлов — числом распутывания (unknotting number) которое представим школьникам в старших классах. Учитель может организовать разные живые цепочки с помощью школьников и изучать их на занятии. Как пример, мы дали два таких узла на рис. 30.

Рис. 30



(а) (б)

4. Загадки с узлами

Существуют много загадок об узлах. Они сначала выглядят неразрешимыми и, может быть, по этой причине школьники любят разгадывать такие загадки. Мы дадим только один пример. Нам нужны ножницы, шнур (нить) и пуговица, достаточно большая, чтобы не пролезала через ручку ножниц. Закрепите петлей шнур вокруг одной ручки как показано на рис. 31 и проденьте концы через другую ручку. Затем пропустите концы через дырки в пуговице и свяжите их. Загадка состоит в том, что найти способ вытащить шнур из ножниц без того, чтобы разрезать или развязать его. Попросите школьников показать друг другу свои решения.

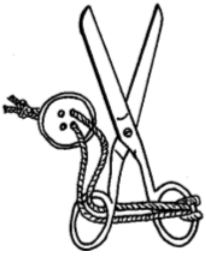


Рис. 31

§ 4.5. Занятие 1.2. Узел на замкнутой веревке

Предварительные замечания

На этом занятии мы постараемся показать, как можно двигаться от обыденного представления к математическому понятию узла. Подчеркнем, что наша задача состоит не столько в завязывании узлов (хотя мы изучали целую серию узлов), сколько в том, чтобы показать ученикам, как математика помогает нам объяснять свойства узлов. Мы хотим, чтобы у школьников сформировалось четкое представление о естественности отношения между математикой и реальной жизнью.

Игры и задачи с узлами, похожие на приведенные в предыдущих занятиях с последующим их изучением постепенно убедят школьников в необходимости использования моделей для решения задач. Если концы веревки свободны, то узел всегда можно развязать с помощью тех или иных манипуляций. По этой причине математиками часто изучается узел с концами, соединенными вместе. Как мы видели в предыдущем параграфе, при изучении человеческих узлов нам пришлось работать именно с такими узлами. Изучение узлов, когда их концы соединены, с одной стороны, упрощает работу с узлами, а с другой — помогает ученикам как введение для изучения математических узлов. Поэтому удобно соединить концы веревки некоторым способом, чтобы изучение узла сделать более легким и систематическим (например, маленькая часть резинового шланга трубки надевается на каждый конец веревки). Учителю надо постепенно, в несколько шагов, показать школьникам полезность и необходимость соединять при анализе узлов их концы. Мы опишем этот процесс.

Ход занятия

1. Введение

На первом шаге спросите школьников, какие действия можно сделать с узлами, чтобы не менялась их структура, и какие действия меняют их структуру? Например, попросите школьников завязать одинарный узел (рис. 32(*а*)). Далее задайте вопросы: важна ли с точки зрения структуры узла длина веревки или нити, которая образует узел (рис. 32(*г*))? От чего зависит структура узла? Если поменяем пересечение в точке **A** (рис. 32(*а*)), то изменится структура узла или нет (рис. 32(*б*))? Попросите их завязать одинарный узел разных размеров на веревках из разного материала, разной длины, разной толщины, и показать друг другу эти узлы.

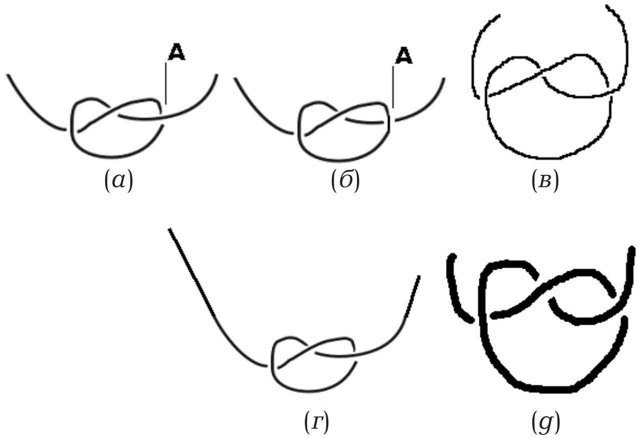


Рис. 32

Попросите школьников упростить 32(*б*). Как видим, изменение пересечения меняет структуру узла. Изменение же материала, его длины, толщины, размеров узла и т. п. не меняет его структуру.

2. Идея соединения

Попросите школьников завязать одинарный узел, у которого два конца свободны (рис. 33(*а*)). Этот узел можно легко развязать. Затем попросите (в парах) одного из них взять узел за два конца, а другого — постараться развязать его. На самом деле это узел невозможно развязать. Далее попросите их зафиксировать концы узлов, и, манипулируя с этим узлом, получить узлы на рис. 33(*б—в*). На рис. 33(*б*) один из концов свободен, а другой конец зафиксирован, на рис. 33(*в*) оба конца зафиксированы. Спросите их, какие из этих способов лучше и проще (для изучения узла)? Работа с узлом на рис. 33(*а*), на рис. 33(*б*) или 33(*в*)? Какие из них похожи друг на друга и обладают одинаковыми свойствами?

Далее попросите школьников манипулировать с узлами у которых оба концы зафиксированы, но расстояние между двумя концами, остановится постепенно меньше (рис. 33(*г*, *g*, *е*)).

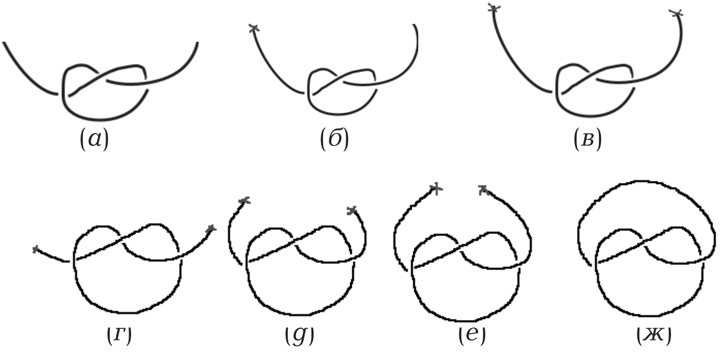


Рис. 33

Спросите школьников, различны ли структуры этих узлов? Насколько ещё можно уменьшать расстояние между двумя концами? Изменится ли структура узла если мы, в конце концов, соединим два конца узла, (рис. 33(*ж*))? На самом деле у всех узлов на рис. 33 одинаковая структура. Не важно, каким способом зафиксировать два конца узла, то ли взять эти концы в руки то ли закреплять их (с помощью чего-то) в одном месте или соединить их (с помощью клея, скотча, резиновой трубки и т. п.). Спросите школьников, как изобразить получаемый узел? Математики выбрали самый простой способ. Они используют рис. 33(*ж*) для изображения одинарного узла.

3. Манипулирование с замкнутыми узлами

Попросите школьников завязать одинарный узел. Затем попросите их соединить концы узла, как показано на рис. 34(*а*). Объясните ученикам, что для простоты изображения этого узла мы берем диаграмму на рис. 34(*б*). Далее попросите школьников осуществить различные манипуляции с этими узлами и нарисовать диаграммы полученных узлов.

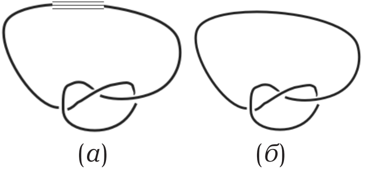


Рис. 34

На рис. 35 мы дали три возможных варианта. Все эти диаграммы имеют три пересечения и были получены из исходного одинарного узла. Учитель может задать вопросы, аналогичные следующим:

Можно ли из одинарного узла получить узел, у которого количество пересечений на диаграмме будет меньше трех?

Влияет ли длина веревки на структуру полученных узлов?

Что общего в полученных узлах?

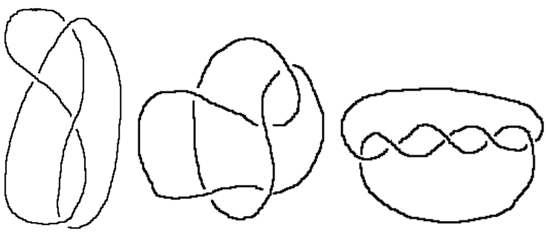
Рис. 35

(*а*) (*б*) (*в*)

У этих узлов (рис. 35) три пересечения и они никогда без разрезания не развязываются. Кроме того, никак невозможно получить из них узел, у которого количество пересечений на диаграмме меньше трех.

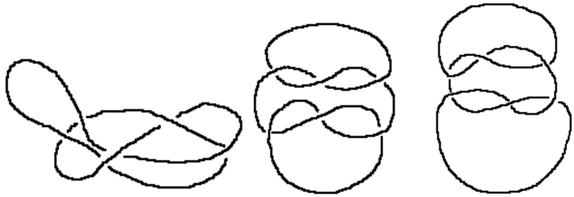
4. Другие узлы на замкнутых линиях

Попросите школьников завязать узлы, которые они уже изучали и затем соединить их концы и нарисовать их диаграммы. На рис. 36 изображены диаграммы: восьмерки, простейшего бегущего узла, двойного узла, скользящей восьмерки, бабьего узла и рифового узла.



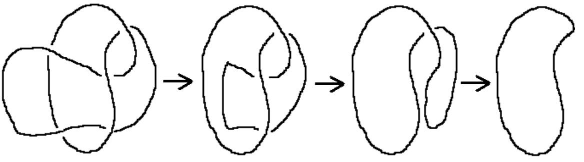
(*а*) (*б*) (*в*)

Рис. 36



(*г*) (*g*) (*е*)

Спросите школьников, сколько пересечений на каждой из диаграмм? Какие из этих пересечений можно сократить? Какие из этих диаграмм можно упростить? На рис. 37 изображен процесс упрощения простейшего бегущего узла. Что получается в результате упрощения? Какой тип движения мы использовали?



(*а*) (*б*) (*в*) (*г*)

Рис. 37

Глава 5. Элементарная теория математического узла в школе

Математический узел — это абстрактный объект. Некоторые авторы для представления математических узлов дают определения, аналогичные следующему: «математический узел лишь слегка отличается от узлов, которые мы видим и используем каждый день. Если взять часть нити или веревки и на ней завязать узел, а затем склеить, т. е. соединить концы нити, то получиться математический узел. Соединение концов нити (веревки), — это, что отличает математические узлы от обычных узлов». На наш взгляд, понятие математического узла как абстрактного объекта не может быть сразу (и непосредственно) получено школьниками. Это сложный процесс, который происходит постепенно, путем образования нескольких слоев представлений и прохождения нескольких стадий в формировании этого понятия. На каждом шаге этот процесс становится все более абстрактным, но при этом каждый шаг для школьников естественнен. Дадим краткий обзор этого пути. Он начинается с реальных узлов и их применений. Изображение диаграмм этих узлов — это первый важный шаг, поскольку математический узел — это на самом деле не узел, а схема, изображающая способ завязывания, структуру узла. Эта схема — чрезвычайно абстрактный объект и наша педагогическая задача — освоить логику и геометрию этого абстрактного объекта. Упрощение и усложнение диаграмм узлов, освоение понятия движения для узлов — это очередной шаг на пути формирования представления о математических узлах. Необходимость использовать модели для решения задач (например, игры с веревкой и пальцами, живые цепочки и т. п.) и анализировать эти модели позволяет школьникам освоить общую идею изображения структуры узла. Одновременно школьники понимают, что изменение материала (веревка/проволока), его длины, толщины, размеров узла и т.п. не меняет его структуру. Затем осуществляется очень важный переход — демонстрация школьникам необходимости соединения концов веревки некоторым способом, чтобы изучение узла сделать более легким и систематическим.

В этой главе мы продолжаем этот путь, работая с узлами с соединенными концами (замкнутые узлы) так, чтобы, в конце концов, придти к понятию математического узла.

Сначала мы покажем, что все узлы с одним и двумя пересечениями превращаются в тривиальный узел, т. е. классифицируем узлы с одним и двумя пересечениями. Далее речь пойдет о таком важном понятии, как «индекс пересечения». Мы также продолжим работу и с движениями Рейдемейстера, которые позволят нам упрощать диаграммы сложных узлов. Затем мы представим модель изучения нескольких математических узлов. Наконец, обсудим понятие эквивалентности, то есть когда два узла можно считать «одинаковыми».

§ 5.1. Занятие 13. Узлы с одним и двумя пересечениями

Здесь покажем способ классификации узлов с одним и двумя пересечениями. Наш способ основан на использовании *проекции*. Научить детей связывать 3-мерный объект с 2-мерным изображением (представлением) — одна из фундаментальных целей в обучении геометрии, так как именно это связь лежит в основе механизма, обеспечивающего геометрическое воображение. Для двумерного изображения узлов возможно два варианта. Эти варианты отличаются различным способом изображения пересечений — с учетом и без учета того, какой фрагмент линии находится сверху, а какой — снизу. Это различие не учитывается в *проекции* узла, но оно существенно на *диаграмме* узла. На рис. 1 мы дали диаграмму и проекцию узла «трилистник».

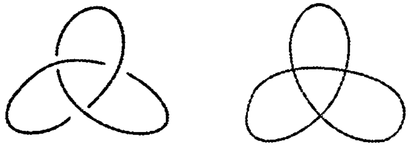


диаграмма узла «трилистник» проекция узла «трилистник»

Рис. 1

Спросите учеников, какие возможны проекции узлов с одним пересечением, если рассматривать узлы на линии со свободными концами. Можно увидеть, что ответ только один (см. рис. 2(*а*)). Затем спросите школьников, как может выглядеть диаграмма такого узла. Можно дать два разных ответа на этот вопрос, используя одну и ту же проекцию узла (см. рис. 2(*б*)). Наконец попросите школьников изобразить узел с одним пересечением на линии с соединенными концами. Все возможные узлы с одним пересечением даны на рис. 2(*в*). Этот рисунок показывает, как можно на каждом шаге использовать варианты из предыдущего шага и как связаны разные понятия (узел, диаграмма, проекция) друг с другом.

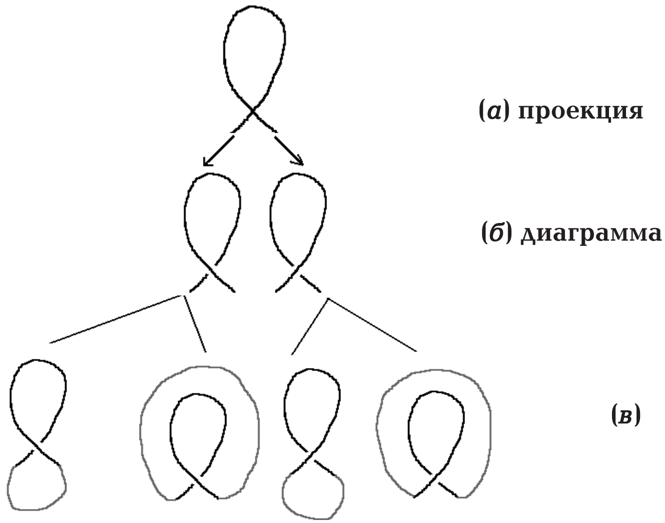


Рис. 2

Все узлы на рис. 2(*в*) превращаются в тривиальный. Как было сказано на первом занятии, *тривиальным* называется узел, в котором нет пересечений (рис. 3).

Рис. 3

Учитель может показать, что любой другой узел с одним пересечением (например, узлы на рис. 4) похож на один из нарисованных на рис. 2(*в*).

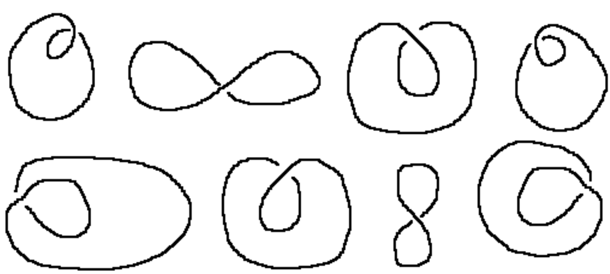
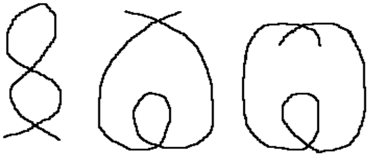


Рис. 4

Спросите учеников, возможны ли в реальности такие узлы (рис. 2(*в*)). Школьникам надо создать узлы изображенные на рис. 2(*в*), чтобы убедиться, что все эти узлы движениями превращаются в тривиальный (они, собственно говоря, и представляют собой один и тот же тривиальный «математический» узел).

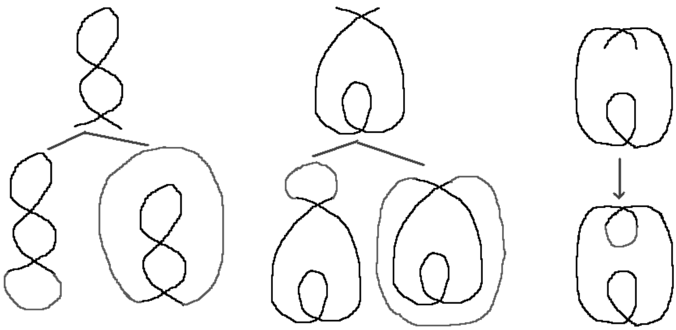
Затем предложите школьникам создать узел с двумя пересечениями. Попросите учеников, чтобы они изобразили сначала проекцию узла с двумя пересечениями. Мы изобразили все возможные варианты на рис. 5.



(*а*) (*б*) (*в*)

Рис. 5

На следующем этапе попросите школьников соединить концы этих узлов (сохраняя их пересечения). Для рис. 5(*а*) и 5(*б*) имеется два варианта соединения, а для 5(*в*) — только один вариант. Все возможные проекции даны на рис. 6, красными цветом выделена соединяющая концы дуга.



(*а*) (*б*) (*в*) (*г*) (*д*)

Рис. 6

Учитель может собрать все ответы, которые дают школьники, и систематизировать их. Что же касается диаграмм для узлов с двумя пересечениями, то некоторые из возможных вариантов даны на рис. 7 (изображение всех возможных вариантов можно дать в качестве домашнего задания).

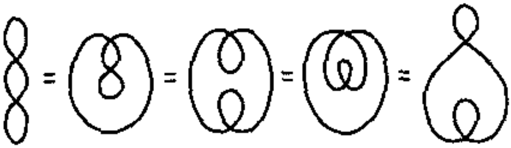
(*а*) (*б*) (*в*) (*г*) (*д*)

Рис. 7

Еще раз школьники могут сделать такие узлы и убедиться, что все эти узлы превращаются в тривиальный. На этом занятии самое важное — показать ученикам, что любой узел с одним или двумя пересечениями превращается в тривиальный.

Домашнее задание

Рис. 8



Попросите учеников сделать все узлы, и изобразить их диаграммы, соответствующие проекциям на рис. 8. Сколько вариантов диаграмм получается? Обратите внимание детей на то, что при изображении диаграмм узлов и их создании необходимо учитывать, что на рис. 8 каждое пересечение может быть двух типов:

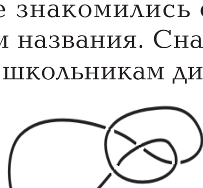
 или  Поэтому для каждой проекции с двумя пересечениями у нас возможно $2 \times 2 = 4$ варианта диаграмм.

На самом деле работать с такими узлами (и руками и через диаграммы) на первых шагах очень важно, потому что далее, когда школьники работают с более сложными узлами, бывает много ситуаций, приводящих при упрощении или преобразовании именно к таким узлам.

§ 5.2. Занятие 14. Движения Рейдемейстера

Поскольку можно создать узел с любым количеством пересечений (например, создать любое число петель в нем), необходим простой набор правил для работы с узлами. Немецкому математику Курту Рейдемейстеру (1893—1971) удалось доказать, что все различные преобразования на узлах могут быть описаны в терминах трех простых шагов. Эти три действия называются *движениями Рейдемейстера*. Напомним, что ученики раньше знакомились с двумя типами движений, но тогда мы не давали им названия. Сначала вспомним эти два типа движений. Покажите школьникам диаграмму на рис. 9.

Рис. 9



Мы предлагаем, для примера, ряд вопросов, которые учитель может задать:

Сколько пересечений в этом узле?

Является ли этот узел восьмеркой?

Является ли этот узел трилистником?

Можно ли превратить этот узел в узел с двумя пересечениями? С одним?

Один из нескольких вариантов для упрощения этой диаграммы дан на рис. 10.

Рис. 10

Мы выполнили сначала движение второго типа, а затем два раза движение первого типа (см. рис. 13.). Теперь можно обсудить и третий тип движения. Попросите учеников нарисовать диаграмму, данную на рис. 11.

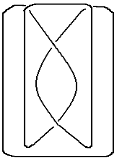


Рис. 11

Учитель может задать подходящие вопросы. Например, есть ли здесь петли? Есть ли здесь наложения? Можно ли упростить узел? Для представления третьего типа движения наиболее удачным наверное, является следующий вопрос: можно ли превратить этот узел в тривиальный узел с помощью нескольких движений? Ответ на этот вопрос дан на рис.12.

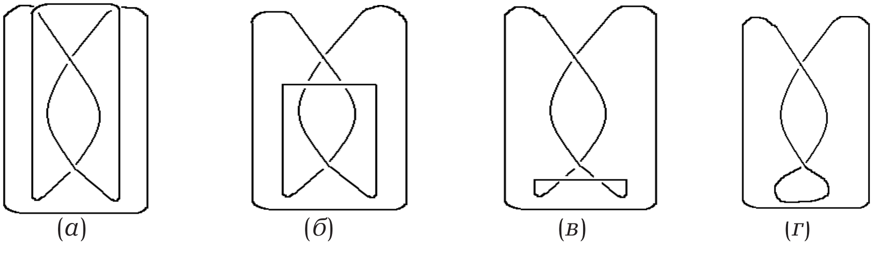


Рис. 12

Новое движение, которое мы применили на первом и втором шаге, относится третьему типу движений Рейдемейстера. Лучше если школьники повторят это упражнение на реальном узле. Три типа движения Рейдемейстера даны на рис. 13.

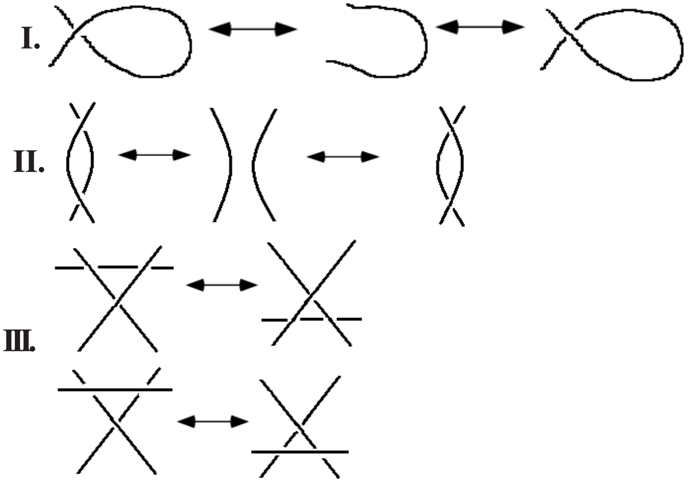


Рис. 13 (движения Рейдемейстера)

Первое движение Рейдемейстера добавляет или удаляет одно пересечение путем образования или раскрытия простой петли.

Второе движение Рейдемейстера добавляет или удаляет два смежных пересечения, которые образуются при наложении одного фрагмента веревки, не имеющего самопересечений на другой, также не имеющий самопересечений.

Третье движение Рейдемейстера не добавляет и не удаляет никаких самопересечений, а только меняет взаимное расположение трех смежных пересечений трех различных фрагментов веревки друг с другом. Для любой такой тройки пересечений одна из веревок всегда будет проходить над двумя другими, другая — под двумя другими, а третья — под верхней, но над нижней. Само движение состоит в «параллельном» переносе верхней или нижней веревок соответственно под или над пересечением остальных двух.

Домашнее задание

С помощью движений Рейдемейстера, упростите узел изображенный на рис. 26:

а) Начиная с первого движения Рейдемейстера

б) Начиная с третьего типа движения Рейдемейстера

в) Сравните результаты. Одинаковы ли они?

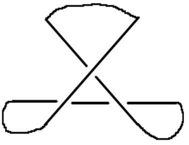


Рис. 14

§ 5.3. Занятие 15. Изучение раскраски при применении третьего типа движения

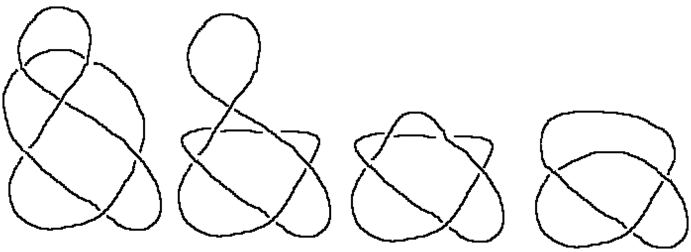
Предварительные замечания

Напомним что понятие движения для узлов, помимо движений, общих для всех геометрических фигур, включает ещё три типа движений, которые называются «движениями Рейдемейстера».

Школьники раньше изучали, что применение первого и второго движения не меняет раскраску узла, если он раскрашен согласно третьему принципу раскраски. На этом занятии школьники, выполняя третий (а также первый и второй) тип движения с раскрашенными узлами, изучают его влияние на структуру узлов.

Ход занятия

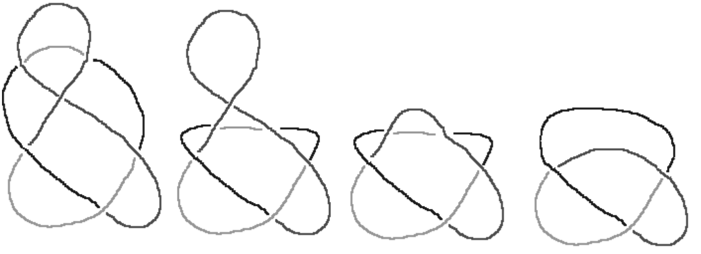
Попросите школьников, упростить диаграмму, изображенную на рис. 15(*а*). Спросите, какой тип движения они используют на каждом шаге. Какой узел получается? Ответ дан на рис. 15(*б, в, г*). Мы применили третий, первый и второй тип движения соответственно.



(*а*) (*б*) (*в*) (*г*)

Рис. 15

Затем попросите школьников раскрасить рис. 15(*а*). Один из возможных ответов мы дали на рис. 16(*а*). Далее попросите школьников упростить рис. 16(*а*). Можно ли раскрасить полученный узел после применения третьего движения? Как видно на рис. 16(*б*) ничего не надо делать, и получаемый узел уже раскрашен согласно третьему принципу. Попросите школьников продолжать этот процесс (рис. 16(*в*, *г*)).

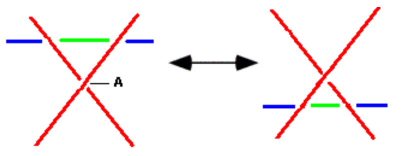


(*а*) (*б*) (*в*) (*г*)

Рис. 16

Как описать процесс, перехода от рис. 16(*а*) к рис. 16(*б*) и сформулировать правило такого перехода? На рис. 17 изображено, как этот процесс происходит вблизи точки пересечения. Как видно на рис. 17, применение третьего типа движения в этом случае не меняет раскраску узла.

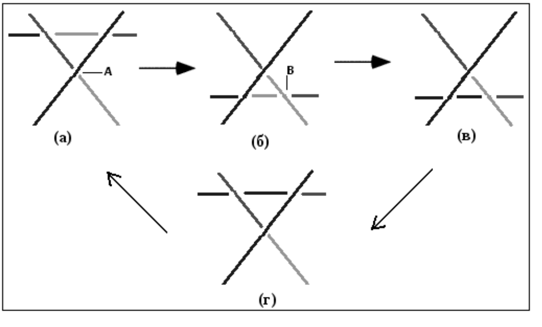
Рис. 17



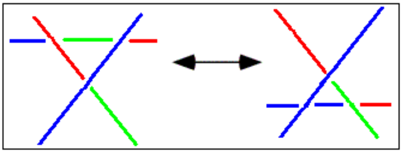
(*а*) (*б*)

Теперь попросите школьников рассмотреть остальные случаи. Сколько случаев существует? На рис. 17(*а*) в точке **A** возникал один цвет. На рис. 18(*а*) в точке **A** разные цвета. После применения третьего движения в точке **B** (рис. 18(*б*)) возникает два цвета, и как мы показали на рис. 18(*в*) для решения этой проблемы надо перекрасить только зеленую дугу (между синей и красной дугами) синим цветом. Рис. 18(*в*, *г*, *а*) показывают обратный процесс.

Рис. 18



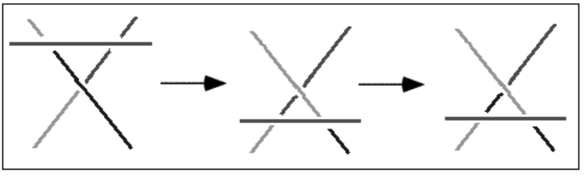
Можно суммировать все действия, изображенные на рис.18, как показано на рис. 19.



(*а*) (*б*)

Рис. 19

На рис. 20 изображен ещё один вариант. Попросите школьников изобразить обратный процесс. Остальные случаи похожи на один из тех, которые мы рассмотрели.



(*а*) (*б*) (*в*)

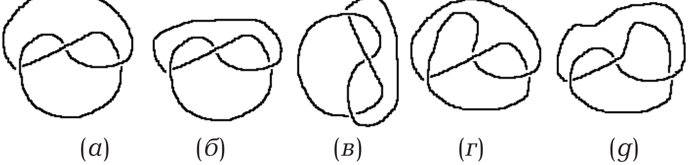
Рис. 20

Попросите школьников, чтобы они проанализировали остальные случаи. После выполнения этого действия попросите их сформулировать получаемый результат.

Узел, получаемый из раскрашенного согласно третьему принципу узла применением третьего типа движения (и при упрощении и при усложнении), также можно раскрасить согласно третьему принципу.

Трилистник и раскраска его диаграммы

Вообще все диаграммы трилистника (и любого другого узла), получаются из одной из них применением движений двух видов. Первый — это использование только геометрических движений, при которых не возникает новых дуг или не исчезает дуг и второй — это применение движений Рейдемейстера трех типов. На рис. 15 мы использовали оба способа, а на рис.21 использованы только геометрические движения.



(*а*) (*б*) (*в*) (*г*) (*g*)

Рис.21

Попросите школьников раскрасить рис. 21(*а*). Затем спросите их, надо ли перекрашивать какие-нибудь дуги для раскрашивания рис. 21(*б*) и других диаграмм, изображенных на рис. 21? Как видно на рис. 22, ничего не надо делать, и эти узлы уже раскрашены согласно третьему принципу. Поэтому применение геометрических движений не меняет раскраску трилистника (и другого узла), если он раскрашен согласно *третьему принципу* раскраски узла.

(*а*) (*б*) (*в*) (*г*) (*д*)

Рис. 22

Теперь задайте важный вопрос: можно ли всегда раскрасить каждую диаграмму трилистника, т. е. любую диаграмму, получаемую из диаграммы трилистника? Поскольку возможно раскрасить диаграмму трилистника и, кроме того, узел, получаемый применением движений из раскрашенного согласно третьему принципу узла, также можно раскрасить согласно третьему принципу, поэтому можно дать положительный ответ на этот вопрос. На самом деле если возможно раскрасить какую-то диаграмму данного узла, то всегда возможно раскрасить любую диаграмму любого узла, получаемого из исходного.

Спросите школьников, что можно сказать о раскрашивании диаграмм узлов, получаемых из восьмерки? Поскольку невозможно раскрасить диаграмму восьмерки, значит невозможно раскрасить никакую диаграмму, получаемую из этой диаграммы восьмерки. Как вывод можно сформулировать следующую альтернативу:

Либо каждую диаграмму данного узла можно раскрасить, либо никакую диаграмму этого узла невозможно раскрасить.

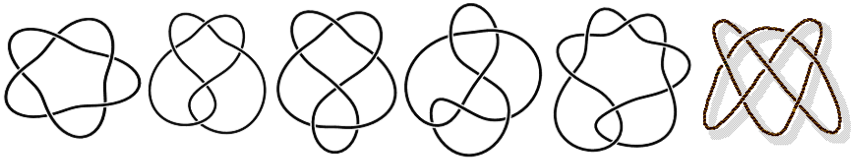
Трилистник, восьмерка и тривиальный узел

Попросите школьников создать трилистник. Затем спросите их, можно ли получить из трилистника тривиальный узел? На начальном уровне они могут убедиться на опыте (интуитивно), без математических доказательств, что превратить трилистник в тривиальный узел невозможно. Спросите их, смогут ли они с помощью раскрашивания доказать свое утверждение? Поскольку трилистник можно раскрасить, а тривиальный узел — невозможно, их диаграммы невозможно превратить друг друга. В результате этого можно точно утверждать, что превратить трилистник в тривиальный узел невозможно. Попросите школьников сформулировать аналогичный вывод о восьмерке и трилистнике. Трилистник можно раскрасить, а восьмерку — невозможно, поэтому превратить трилистник в восьмерку также невозможно.

Спросите школьников, могут ли они сделать какой-то вывод о восьмерке и тривиальном узле? Они знают, что никакой из них невозможно раскрасить. Однако ничего из этого не следует. Хотя школьники интуитивно могут убедиться, что невозможно превратить восьмерку в тривиальный узел, но для получения математического доказательства (если оно их интересует) им надо подождать, когда они изучат теорию узлов.

Домашнее задание

Какую из диаграмм, изображенных на рис.23, можно раскрасить согласно третьему принципу?



(*а*) (*б*) (*в*) (*г*) (*д*) (*е*)

Рис. 23

§ 5.4. Занятие 16. Применение движений Рейдемейстера — упрощение узлов

Предварительные замечания

На этом занятии ученики изучают, как можно упрощать узлы (особенно узлы, которые на первой взгляд нам кажутся очень сложными) с помощью движений Рейдемейстера. Наверное, школьники такие упрощения на фигурах или диаграммах раньше не делали. Для освоения этих действий им придется использовать свое геометрическое воображение. Кроме того, они изучат способы упрощения сложных объектов, освоят разные пути упрощения.

Ход занятия

Покажите школьникам узел на рис. 24.

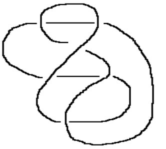


Рис. 24

Затем задайте вопросы, аналогичные приведенным ниже:

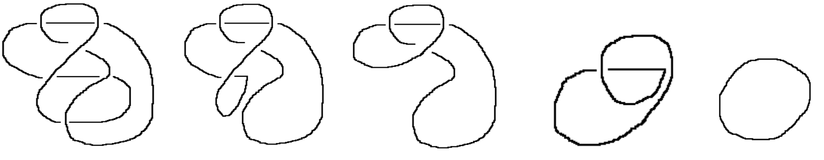
а) Является ли этот рисунок изображением восьмерки? Трилистника?

б) Сколько пересечений у этого узла? Можно уменьшить их количество?

в) Каково количество пересечений в диаграмме этого узла?
Попросите школьников, упростить этот узел с помощью движений Рейдемейстера.

г) Какие движения они применяли?

е) Какой узел получается в конце концов? На рис. 25 мы дали ответ.

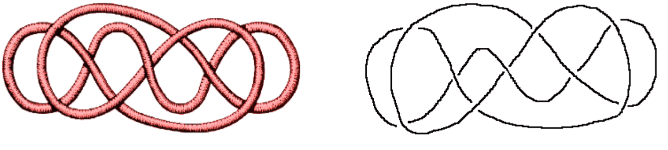


(*а*) (*б*) (*в*) (*г*) (*g*)

Рис. 25

Нужно сказать, что можно упростить и по другому, но получаемый результат будет тем же самым.

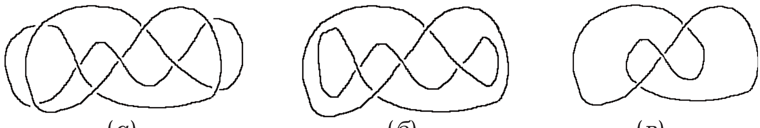
Объясните ученикам, что часто нарисовать диаграмму какого-нибудь узла легче, чем создать сам узел. Поэтому им надо научиться рисовать диаграммы и затем упрощать диаграммы, если это возможно. Покажите школьникам узел на рис. 26(*а*) и попросите нарисовать его диаграмму. Мы дали диаграмму на рис. 26(*б*).



(*а*) (*б*)

Рис. 26

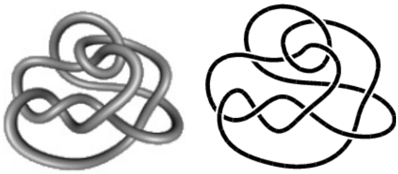
Задайте школьникам подходящие вопросы и попросите их упростить диаграмму. Какой узел получается? На рис. 27 мы показали, как можно упростить этот узел.



(*а*) (*б*) (*в*)

Рис. 27

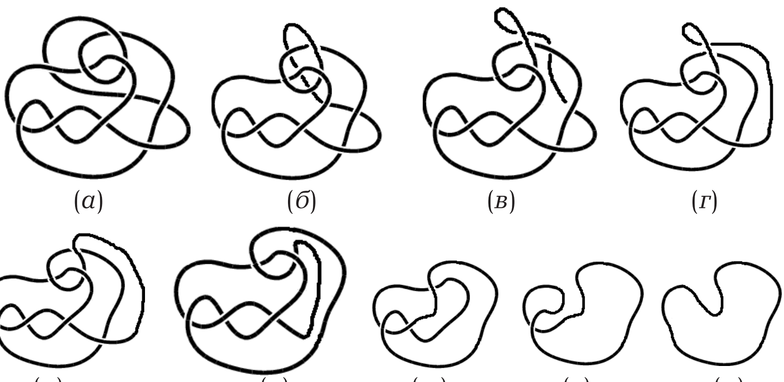
В следующем примере мы применяем три типа движения Рейдемейстера. На рис. 28 даны узел и его диаграмма. Такие упражнения помогают школьникам, изображая реальные фигуры на бумаге и осуществляя различные операции с образами этих фигур, развивать их геометрическое воображение.



(*а*) (*б*)

Рис. 28

После изображения этого узла попросите школьников, упростить этот узел. Спросите их, какое движение они используют на первом шаге? Диаграммы, данные на рис. 29, показывают процесс упрощения этого узла. При упрощении диаграммы школьникам надо на каждом шаге объяснять, какой тип движения Рейдемейстера они используют.



(*а*) (*б*) (*в*) (*г*)

(*д*) (*е*) (*ж*) (*з*) (*и*)

Рис. 29

Попросите школьников взять кусок проволоки и сделать фигуру, показанную на рис.28(а), и повторить процесс упрощения этого узла руками.

Задание

Попросите школьников упростить узел, изображенный на рис. 30 (*а*). Как видно на рис. 30(*б, в*), с помощью третьего и первого движения можно упростить этот узел и получить трилистник.

Рис. 30

(*а*) (*б*) (*в*)

Домашнее задание

Упростите узлы, изображенные на рис. 31.

Рис. 31

(*а*) (*б*) (*в*)

§ 5.5. Занятие 17. Представление некоторых математических узлов

Попросите школьников завязать одинарный узел и соединить его концы. Затем попросите их манипулировать (свободно, т. е создать петлю, наложение и т. д.) с ним и далее нарисовать то, что видят. Конечно, каждый из них нарисует свое наблюдение, и поэтому получается разные диаграммы. На рис. 32 изображено только несколько из возможных вариантов. В некоторых из этих диаграмм возникает более трех пересечений (*а, б, з*). Попросите школьников упростить их. Затем попросите их одновременно проследить, что произойдет при этом с веревочной фигурой, которую они сами создали. После того как они убедились, что у всех этих узлов три пересечения, задайте школьникам вопрос: какая из этих диаграмм лучше, удобнее, какую из них надо выбрать как представитель всех диаграмм на рис. 32? Обратите внимание школьников, на то, что в этих диаграммах для нас важны структура и свойства узла, а не важны его применение, его физический вид и т. п. В этой ситуации узел выступает уже как абстрактный объект, как схема, а не как материальная конструкция.

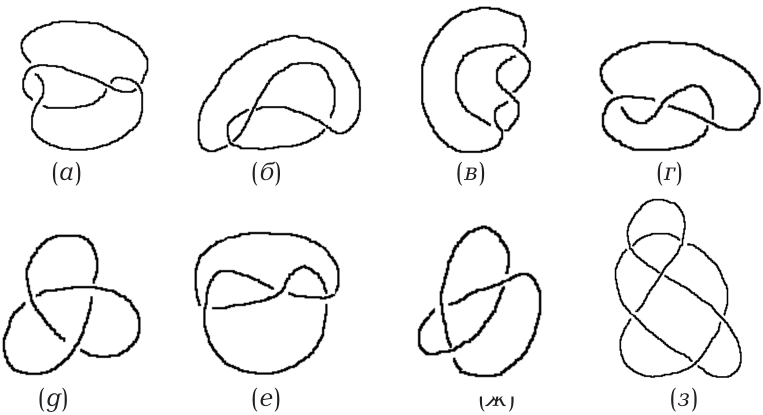


Рис. 32

Школьники раньше поняли, что для изучения узлов удобнее работать с узлами, концы которых соединены. Мы можем выбрать любую диаграмму, как представителя всех диаграмм на рис. 32, потому что у всех одинаковая структура. Однако лучше выбрать ту диаграмму, которая является более простой и более симметричной и более красивой. Поэтому обычно выбирают рис. 32(*g*) или его зеркальное отражение как «основную» диаграмму. Она имеет форму трилистника и собственно название узла «трилистник» именно так и появилось. При изучении узлов сам узел и его зеркальное отражение считают обычно «одинаковыми», и в качестве представляющей эти узлы диаграммы выбирают одну из двух. У трилистника есть другое название, согласно правилу, которое используют при назывании узлов: узел 3_1. Число три показывает, что у узла точно три пересечения и индекс 1 показывает номер этого узла среди всех узлов с данным количеством пересечений. Среди всех математических узлов, три пересечения имеет только один узел.

Математические узлы «трилистник» и «восьмерка», показаны на рис.33 и рис.34 вместе с их зеркальным отражением. Такие «красивые» и запоминающиеся названия на самом деле есть только у нескольких простейших узлов. Все остальные узлы «называются» с помощью нумерации (мы уже сказали, что трилистник имеет номер 3_1).

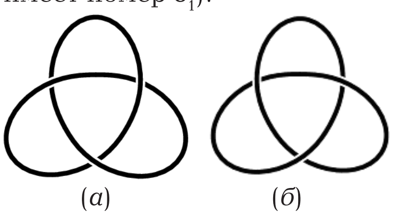
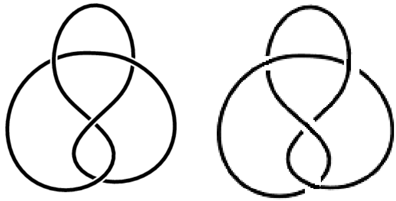


Рис. 33

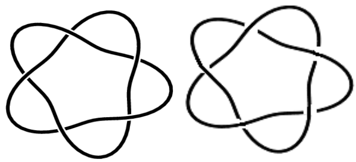
Рис. 34



(*а*) (*б*)

На этом занятии ученики изучают еще несколько математических узлов. Для начала покажите школьникам математический узел, приведенный на рис. 35(*а*) и называемый «пентаграммой». Лучше, если учитель заранее сделает этот узел из веревки или из проволоки.

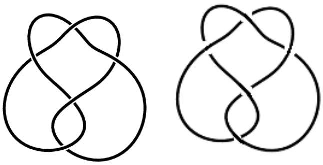
Рис. 35



(*а*) (*б*)

Попросите школьников сделать этот узел из веревки, глядя на рис. 35(а). Затем (и в том случае если они не смогли создать этого узла) напомните им двойной узел, который они завязывали на первом занятии (см. вторую часть). Учителю необходимо дать время учащимся для работы. На самом деле узел, показанный на рис. 35, получается из двойного узла простым соединением концов и манипулированием с ним. Поэтому узел, изображенный на рис. 35, мы временно называем «двойным» узлом. По-видимому, школьники уже могут сделать узел, изображение которого дано на рис. 35(*б*) (сначала с помощью рис. 35(*б*), а затем как обычный двойной узел). Узел, показанный на рис. 35(*б*), является зеркальным отражением узла, показанного на рис. 35(*а*).

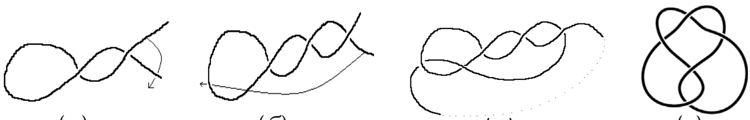
Попросите учеников сравнить все математические узлы, которые они изучали — трилистник, восьмерку и двойной узел. Чем они отличаются? С какой точки зрения можно сравнивать эти узлы между собой? Каково у них число пересечений веревки с собой? Ответ на эту просьбу помогает учителю далее, когда он хочет представить понятие «индекс пересечений» в теории узлов. У трилистника индекс пересечений равен трем, у восьмерки — четырем, а у двойного узла — пяти. В качестве последнего примера на этом занятии мы предлагаем узел, показанный на рис. 36(*а*).



(а) (б)

Рис. 36

Если вы сами не смогли сделать такой узел, обратитесь к ответу (рис. 37) и затем используйте этот узел на занятии. Как можно завязать его зеркальное отражение, т. е. узел, показанный на рис. 36(*б*)?



(*а*) (*б*) (*в*) (*г*)

Рис. 37

Узел, в котором нет пересечений, называется «тривиальным». Спросите учеников сколько пересечений в узлах, которые они изучали?

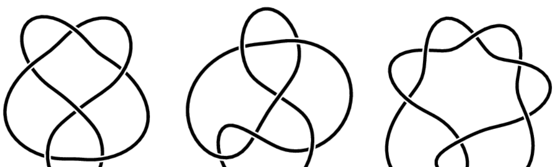
На рис. 38 показан другой способ для завязывания узла на рис. 36. В самом деле, нам надо сначала завязать трилистник, а затем добавить два пересечения. Один вариант мы дали ниже. Попросите школьников дополнить этот процесс и получить узел, на рис. 36 .

(*а*) (*б*)

Рис. 38

Домашнее задание

1. Попросите учеников завязать узлы, данные на рис. 39 (мы хотим, чтобы они осуществили процесс, аналогичный тому, который показан на рис. 37.) и сравнить их. Делая узел, изображенный на рис.39(б), школьники могут вспомнить домашнее задание к занятию 8.



(*а*) (*б*) (*в*)

Рис. 39

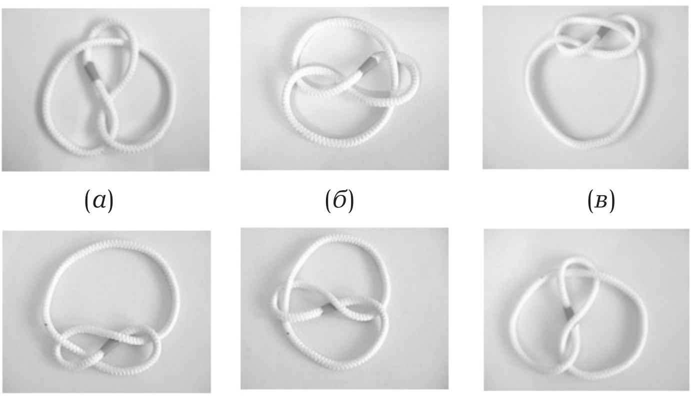
§ 5.6. Занятие 18. Понятие эквивалентности узлов

Предварительные замечания

На этом занятии школьники знакомятся с фундаментальным вопросом, который математиков всегда интересует: как можно определить, являются ли два узла одинаковыми или они различаются? Ответ на этот вопрос не очень легок, особенно когда они сильно не похожи друг на друга. В школе изучается, когда будут одинаковы две дроби, два многочлена, два алгебраических выражения, два вектора, два треугольника, две окружности и т. д. Поэтому для школьников этот вопрос не будет неожиданным. Кроме того, на этом занятии ученики работают с разнообразными узлами и исследуют «руками» идею эквивалентности. Другими словами, они исследуют понятие равенства (эквивалентности) практически.

Ход занятия

Для начала попросите учеников завязать восьмерку и её зеркальное отображение. Затем спросите их, как можно превратить восьмерку в её зеркальное отображение без разрезания узла (а только с помощью перемещений)? На рис. 40 показан этот процесс.



(*а*) (*б*) (*в*)

(*г*) (*д*) (*е*)

Рис. 40

Поэтому восьмерка и её зеркальное отображение эквивалентны (одинаковы).

Теперь спросите их можно ли повторить это с трилистником? То есть совпадает ли трилистник со своим зеркальным отображением? На самом деле трилистник превратить в зеркальное отображение невозможно, но учителю надо дать школьникам время чтобы они сами убедились (интуитивно), что это невозможно. В этом примере, хотя два трилистника имели одинаковое количество пересечений, они различны. Надо объяснить, что, хотя мы не смогли превратить трилистник в его зеркальное отображение, из этого не следует, что это невозможно, например, может быть, кто-то другой догадается, как этого сделать. Один из известных способов — соотнести каждому узлу некоторый многочлен. На этом уровне мы не будем говорить о связи многочленов и узлов, но если учителю нужна дополнительная информация, он может обратиться к [26], [47].

Далее попросите школьников завязать узел на рис. 41 и превратить его в восьмерку, с которой он на самом деле совпадает.

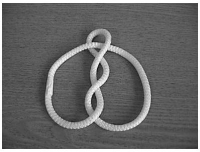
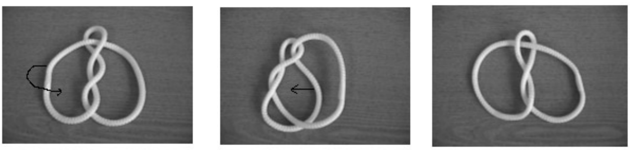


Рис. 41

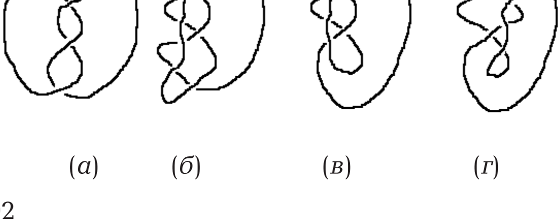
На рис. 42 мы изобразили этот процесс. В этом примере, хотя две фигуры имели различные количества пересечений, они изображают одинаковые узлы.



(*а*) (*б*) (*в*)

Рис. 42

Теперь попросите школьников, повторить этот процесс с диаграммой этого узла. Нам надо использовать движение Рейдемейстера на каждом шаге (*а*) и (*б*). На рис. 45 мы показали, как можно дойти от рис. 42(*а*) к рис. 43(*б*).



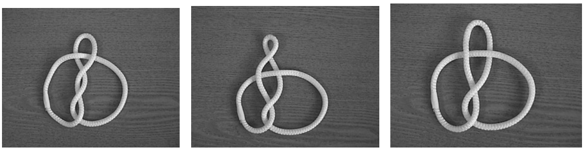
(*а*) (*б*) (*в*) (*г*)

Рис. 43

(*д*) (*е*) (*ж*) (*з*)

На рис. 44 мы дали другой способ для превращения фигуры, изображенной на рис. 41, в восьмерку.

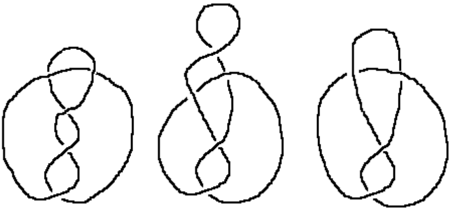
Рис. 44



(*а*) (*б*) (**в**)

Ещё раз попросите школьников повторить этот процесс с диаграммой этого узла. Как мы показали на рис. 45, этот способ короче и проще, чем предыдущий.

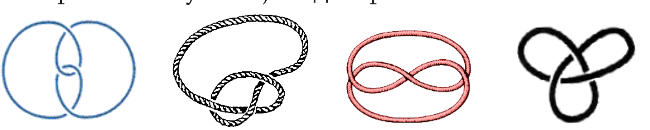
Рис. 45



(*а*) (*б*) (*в*)

Домашнее задание

На рис. 46 мы дали разные диаграммы трилистника и восьмерки. Школьникам надо определить, какие диаграммы изображают трилистник, а — какие восьмерку. При выполнении этого упражнения можно обращать внимание учеников на топологические свойства. Например, учитель спрашивает учеников, что общего среди всех трилистников (или что в них не меняется?). Попросите учеников, чтобы сделали это упражнение двумя путями:
а) руками на реальном узле б) на диаграмме



(*а*) (*б*) (*в*) (*г*)

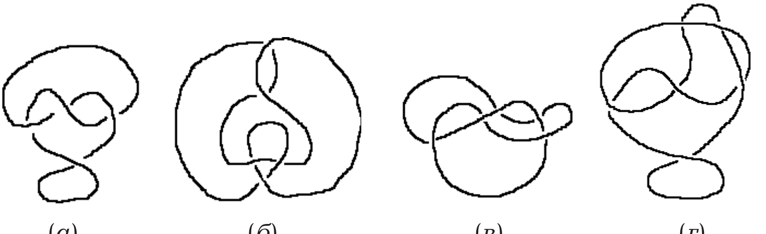
(д) (е) (ж) (з)

(и) (к) (л) (м)

Рис. 46

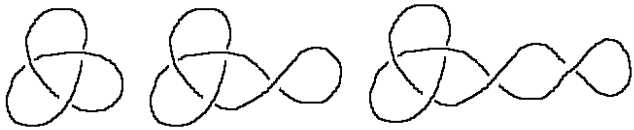
§ 5.7. Занятие 19. Индекс пересечения — инвариант

На этом занятии ученики на примере трилистника познакомятся с понятием «индекс пересечения». Сначала попросите школьников сделать трилистник и посчитать количество пересечений в нем. Спросите их, можно ли получить из трилистника узел с двумя или одним пересечением. Учителю надо дать время ученикам, чтобы они убедились, что это не удается сделать. На начальном уровне в этом достаточно убедиться на опыте, без математических доказательств (сам учитель может найти математические доказательства в [2],[3]). В результате этого можно (интуитивно) предположить, что превратить трилистник в тривиальный узел невозможно. На самом деле трилистник — самый простой из всех нетривиальных узлов. На следующем шаге спросите учеников, можно ли получить из трилистника узел с четырьмя пересечениями? С пятью? И т. д. На рис. 47 мы дали несколько ответов, которые учитель может использовать на занятии. Далее на рис. 48 даны упорядоченные ответы.

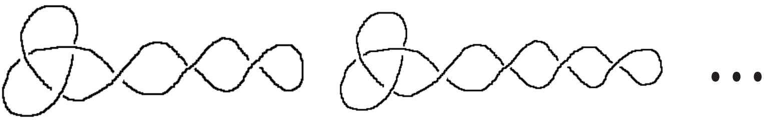


(а) (б) (в) (г)

Рис. 47 (узлы, получаемые из трилистника с 4, 5, 5 и 6 пересечениями)



(*а*) (*б*) (*в*)



(*г*) (*д*)

Рис. 48 (трилистник и узлы,
получаемые из трилистника с 4, 5, 6, 7 и ... пересечениями)

Поэтому можно сказать, что из трилистника можно получить узел с любым количество пересечений (кроме одного и двух). Теперь надо дать самый важный вопрос: *Каково наименьшее количество пересечений среди всех узлов, которые можно получить из узла трилистника? Конечно, школьники отвечают «три».*

Далее учитель может показать школьникам, что можно получить из тривиального узла, узел с одним, двумя и т. д. пересечениями. Несколько подходящих диаграмм даны на рис. 49 .

(*а*) (*б*) (*в*) (*г*) ...

Рис. 49 (диаграммы, получаемые из тривиального узла
с 1, 2, 3, 4 и ... пересечениями)

Еще раз можно задать вопрос: *Каково наименьшее количество пересечений среди всех диаграмм, которые можно получить из тривиального узла*? Конечно, школьники отвечают «нуль». Учитель суммирует все, что школьники сделали на этом занятии и выражает результаты:

А) Из любого узла возможно получить узлы с любым большим количеством пересечений.

После этого учитель вводит понятие «индекс пересечения»:

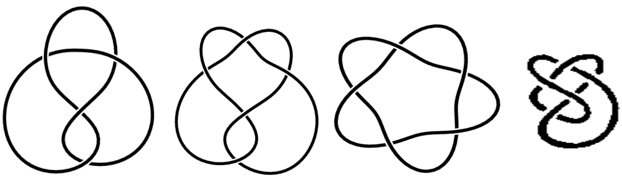
Б) Наименьшее количество пересечений, которое можно получить для некоторого узла путем различных его деформаций называется «индексом пересечения» этого узла.

Индекс пересечения для трилистника и всех узлов, которые можно получить из него, оказывается, в соответствии с введенным определением, равным трем. Индекс пересечения тривиального узла и всех узлов, которые можно получить из него, равен нулю.

Кроме того можно определить понятие «индекс пересечения» с помощью понятия эквивалентности. Наименьшее количество пересечений, которое можно получить для совокупности всех узлов, которые эквивалентны друг другу называется «индексом пересечения» этого узла. Второй вариант определения считается более «математическим», поскольку мы отделяем свойство, получаемое путем преобразования узла в эквивалентный ему, от самой «техники» таких преобразований. Это отделение дает нам удивительную возможность: мы можем рассуждать о свойствах эквивалентных узлов, даже не зная, как именно один узел преобразуется в другой.

Домашнее задание

(а) Каков индекс пересечения узлов, изображенных на рис. 50.



(*а*) (*б*) (*в*) (*г*)

Рис. 50

(б) Сколько узлов с 1, 2, 3, 4, 5 и 6 пересечениями вы знаете? (нари суйте таблицу)

Глава 6. Пространственная геометрия узлов

В литературе концепция пространственного мышления используется для описания способностей, связанных с использованием пространства. Вообще можно описывать пространственное мышление как способность взаимодействовать с пространственной окружающей средой и работать с пространственными образами. Пространственное мышление является существенной составляющей и естественно — научной мысли: оно используется, чтобы в изучении и решении различных проблем представлять информацию в удобной компактной форме и оперировать ею.

При изучении узлов в школе можно очень хорошо взаимодействовать с пространственной окружающей средой и работать с пространственными образами. В этой части сначала мы рассмотрим две важных вещи: вращение узлов и взгляд на узел с разных сторон. Затем поработаем с программным обеспечением "KnotPlot" и наконец представим ещё одну характеристику узла — «число звеньев».

Осознание своих наблюдений окружающего мира опирается, прежде всего, на геометрическое воображение: чтобы понять какое-то явление, мы должны представить, как оно будет выглядеть с той или с другой стороны. Главный механизм формирования геометрического воображения — это соотнесение изображения и пространственного расположения того или иного объекта (в нашем случае — узла). Поэтому данная глава является ключевой с точки зрения развития пространственного воображения, во всем цикле занятий. Кроме того, рассмотрение одного и того же объекта с разных точек зрения помогает школьникам понимать лучше и точнее структуру узлов.

§ 6.1. Занятие 20. Вращение и представление узлов с разных сторон

Предварительные замечания

На этом занятии школьники, работая с узлами, изучают их структуру при вращении в плоскости, а также с помощью представления узлов с разных сторон.

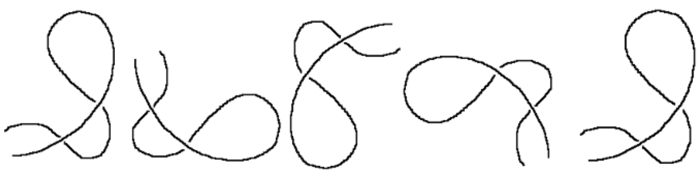
Ход занятия

Попросите школьников взять кусок проволоки и сделать фигуру, как показано на рис. 1(*а*). Спросите школьников, как эта фигура (1(*а*)) будет выглядеть, если повернуть её на 90 градусов по часовой стрелке? Попросите школьников изобразить её диаграмму (рис. 1(*б*)). Какие диаграммы получается, если поворот на 90 градусов (по часовой стрелке) повторять? Нужно сказать, что школьникам надо сначала создать фигуру, потом выполнить поворот, а затем нарисовать её диаграмму. Спросите школьников, через сколько вращений появляется первая фигура? Нужные диаграммы изображены на рис. 1.

(*а*) (*б*) (*в*) (*г*) (*g*)

Рис. 1

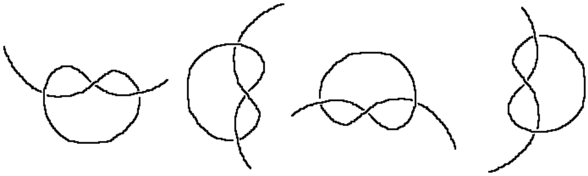
Учитель может организовать и другие аналогичные действия (например, вращение против часовой стрелки, вращение на 180 и 360 градусов, вращение диаграмм и т. д.). Попросите школьников, чтобы они повторили те же действия с фигурой, изображенной на рис. 2(*а*), но только теперь надо сначала нарисовать диаграмму, получающуюся в результате поворота, а затем уже сделать поворот реальной фигуры и проверить правильность полученной диаграммы.



(*а*) (*б*) (*в*) (*г*) (*g*)

Рис. 2

На рис. 3 мы дали ещё несколько диаграмм, получаемых при вращении. Можно использовать и другие узлы соответственно способностям учеников.



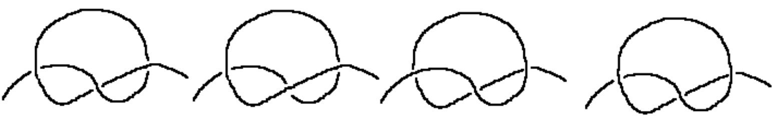
(*а*) (*б*) (*в*) (*г*)

Рис. 3

Задание

Попросите школьников завязать одинарный узел и изобразить его диаграмму (рис. 4 (*а*)), покажите им четыре диаграммы, данные на рис. 4(*б*, *в*, *г*, *д*). Спросите школьников, какая из диаграмм на рис. 4(*б*, *в*, *г*, *д*) изображает диаграмму с рис.4(а), повернутую на 180 градусов? Почему сразу можно сказать, что рис. 4(*в*) и рис. 4(*г*) не являются ответом?

(*а*)



(*б*) (*в*) (*г*) (*д*)

Рис. 4

Затем попросите школьников взять кусок проволоки, завязать одинарный узел, положить его на столе и повернуть его на 180 градусов и нарисовать диаграмму полученного узла.

Взгляд с разных сторон

Попросите школьников взять кусок проволоки и сделать фигуру, как показано на рис. 5. Каркас помогает школьникам лучше почувствовать пространственную ориентацию фигуры. Учитель может использовать сделанный заранее каркас с фигурой и затем попросить школьников, сидя с четырех разных сторон, нарисовать то, что они видят.

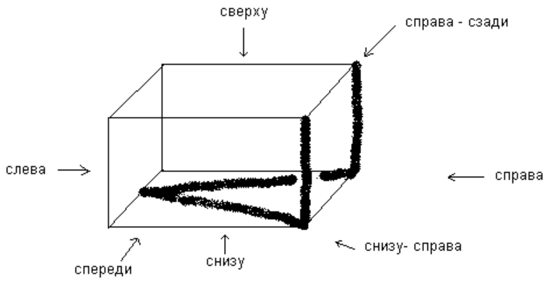
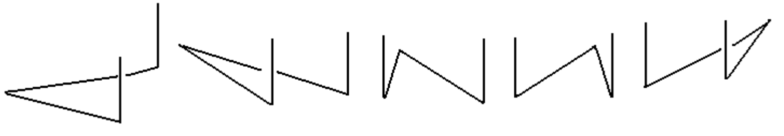


Рис. 5

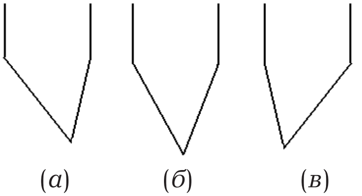
Затем покажите школьникам, фигуры, изображенные на рис. 6. Школьникам надо выразить, с какой стороны, каждая фигура нарисована.



(*а*) (*б*) (*в*) (*г*) (*g*)

Рис. 6

На рис .7, изображено три фигуры с точки зрения школьника, который находится слева. Как показано на рис. 7, ни в одной из фигур нет пересечений, а на рис. 6(*а, б, g*) пересечения есть. Как школьники видели ранее, при изображении узлов, некоторые пересечения можно упростить. Рассмотрение пространственных движений помогает объяснить, что упрощения диаграмм можно рассматривать и как результат поворачивания узлов в пространстве и изображения их с разных сторон.

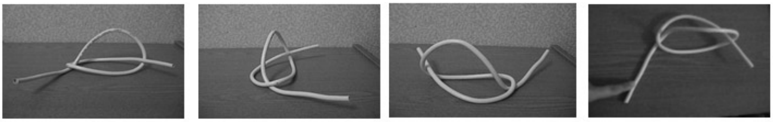


(*а*) (*б*) (*в*)

Рис. 7

Одинарный узел с разных сторон

Попросите школьников взять кусок проволоки и связать одинарный узел. Затем попросите их посмотреть на неё с разных сторон и нарисовать то, что они видят. Фигуры, изображенные на рис. 8, показывают некоторые из возможных вариантов, созданные из проволоки. Все эти фигуры изображают одинарный узел. Он сфотографирован с разных сторон.



(*а*) (*б*) (*в*) (*г*)

Рис. 8

Если считать, что на рис. 8(*а*) одинарный узел виден спереди, то рис. 8(*б*) показывает, как он выглядит слева, рис. 8(*в*) сзади, а рис. 8(*г*) — сверху. Попросите школьников нарисовать соответствующие диаграммы. На рис. 9 мы привели эти диаграммы. На рис. 9(*в*) видно четыре пересечения, а на других — три. Спросите школьников, какие действия нужно произвести с рис. 9(*в*) так, чтобы в нем стало видно только три пересечения. С помощью третьего движения Рейдемейстера можно упростить рис. 9(*в*) и получить три пересечения.

(*а*) (*б*) (*в*) (*г*)

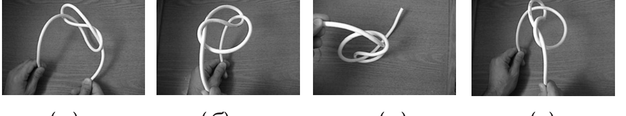
Рис. 9

На рис.8 мы рассматривали только четыре возможных варианта. Кроме того, можно создать, например, фигуру, показанную на рис.8(б) и затем попросить школьников сесть вокруг неё с разных сторон и нарисовать то, что они видят.

Восьмерка с разных сторон

Попросите школьников взять кусок проволоки и связать восьмерку. Затем попросите их посмотреть на неё с разных сторон и нарисовать то, что они видят. На рис. 10 изображены некоторые из возможных вариантов. Попросите школьников повернуть свои фигуры так, чтобы получить восьмерку с как можно большим количеством пересечений.

Рис. 10



(*а*) (*б*) (*в*) (*г*)

После рисования диаграммы нужно, упростить её так, чтобы количество пересечений стало минимальным. Например, на рис. 11(*а*) изображена восьмерка с пятью пересечениями. Рис. 11(*б*, *в*, *г*, *д*) показывают её диаграмму и процесс упрощения диаграммы.

(*а*)

(*б*) (*в*) (*г*) (*д*)

Рис. 11

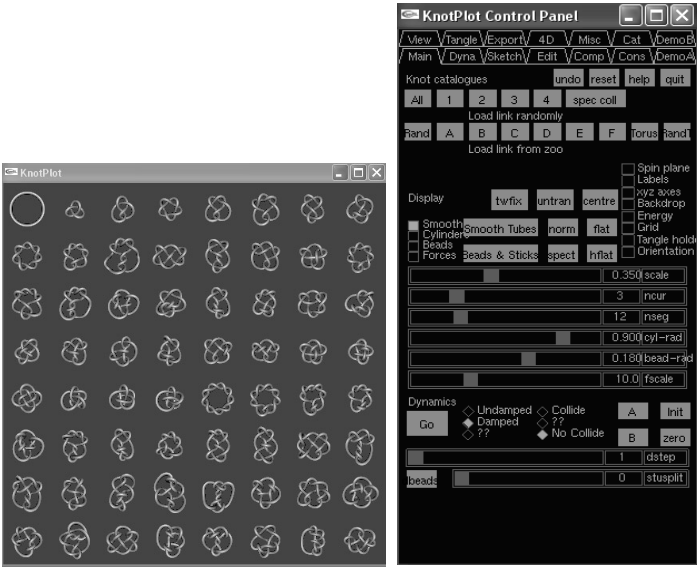
Домашнее задание

Попросите школьников завязать: «узел булинь», «бабий узел» «рифовый узел», посмотреть на них с разных сторон и нарисовать то, что они видят.

§ 6.2. Занятие 21. Программное обеспечение

Существуют много программных систем, позволяющих хорошо оперировать с узлами. Примером такой системы является "KnotPlot" — очень интересная программа со многими возможностями. Одна из возможностей — это возможность увидеть один и тот же узел с разных сторон в пространстве.

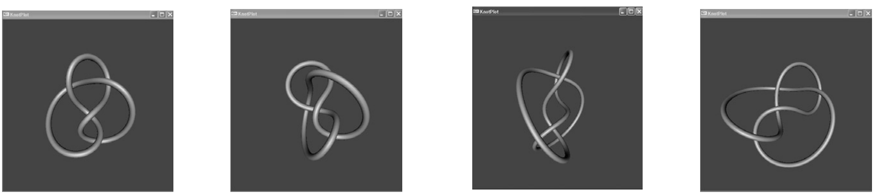
После старта программы Вы видите три окна: главное окно представлений, пульт управления и командное окно. Для начального знакомства можно использовать только маленькую часть этой программы. В верхней части пульта управления (см. рис. 12(*б*)) — ряд кнопок, которые Вы можете нажимать, чтобы загрузить некоторые узлы произвольным образом. Например, чтобы загрузить узел восьмерку, сначала нажмите кнопку A вверху пульта (рис.12(а)) а затем, когда появился совокупность узлов (рис. 12(*а*)), используете левую клавишу мыши в окне представления для загрузки восьмерки (рис. 13(*а*)). Когда узел загружен (в нашем случае — восьмерка), Вы можете вращать его в разных сторон, используя левую клавишу мыши в окне представления (см. рис. 13 (*б*, *в*, *г*)).



(*а*) (*б*)

Рис. 12

С помощью регулятора "cyl — rad", которая находится в средней части пульта, можно менять толщину линии выбранного узла. Для этого достаточно двигать горизонтально синий квадрат.

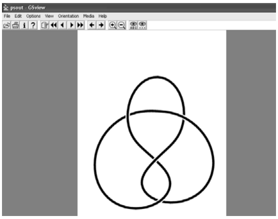


(*а*) (*б*) (*в*) (*г*)

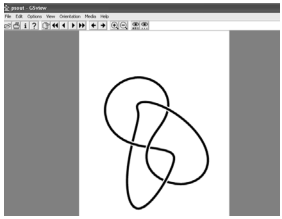
Рис. 13

Как показано на рис. 13(*в*) можно повернуть узел так, чтобы количество наблюдаемых пересечений было больше, чем индекс пересечения этого узла. Индекс пересечения восьмерки — четыре, а на рис. 13(*в*) изображена восьмерка с семью пересечениями. На самом деле можно получить бесконечно много вариантов для каждого узла в этой программе. Попросите школьников с помощью манипулирования и вращения левой клавишей мыши постараться получить восьмерку с как можно большим количеством пересечений. Попросите школьников, нарисовать на бумаге диаграммы узлов, которые они сами получили.

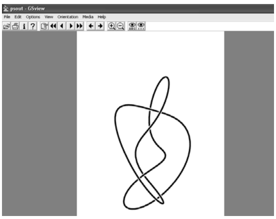
С помощью "KnotPlot" можно изобразить и диаграммы выбранных узлов. Для этого сначала нажмите кнопку "export" вверху пульта, а затем в новой панели пульта нажмите кнопку "psout" (рис. 12(*б*)). Вы получите диаграмму узла в форме "postscript". На рис. 14 изображены диаграммы узлов, изображенных на рис. 13, полученные с помощью этой программы.



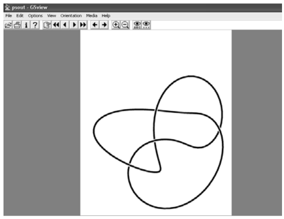
(*а*)



(*б*)



(*в*)



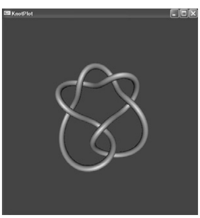
(*г*)

Рис. 14

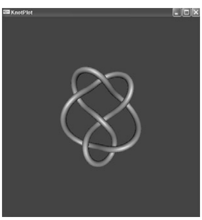
Школьники могут сравнить своими диаграммы с аналогичными диаграммами, которые получаются с помощью этой программы.

Задание

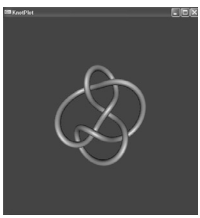
Попросите школьников нажать кнопку А вверху пульта, а затем, когда появится совокупность узлов (рис. 12(*а*)), выбрать узлы, которые они уже изучали. Например, выбирать узлы с шестью пересечениями. На рис. 15 даны ответы с помощью этой программы.



(*а*)



(*б*)

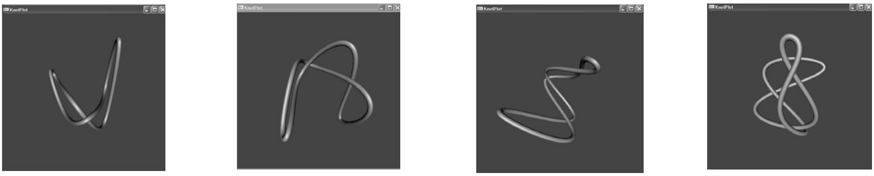


(*в*)

Рис. 15

Задание

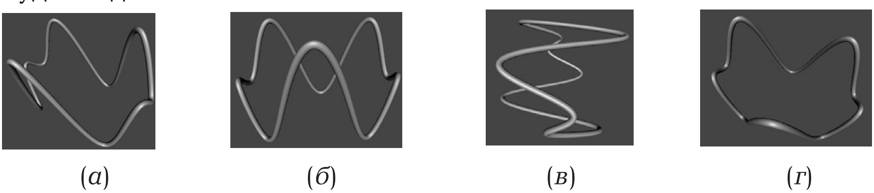
Ещё одна возможность этой программы — это изображение узлов, у которых вообще нет пересечений, т. е. тривиальных узлов. Попросите школьников нажать кнопку "DemoA" вверху пульта, затем в новой панели пульта нажать кнопку "lissajous". Каждый раз, когда они нажимают кнопку "lissajous", появляется новая фигура. На рис. 16 изображены разные варианты одного из таких несложных узлов. Они изображают тривиальный узел с одним, двумя, тремя и девятью пересечениями. Попросите школьников выбрать самостоятельно одну из фигур из этой программы и затем постараться с помощью левой клавиши мыши показать, что это — тот же тривиальный узел, но только с дополнительными пересечениями. Далее попросите их нарисовать диаграммы этих фигур на бумаге и упростить полученные диаграммы с помощью движений Рейдемейстера.



(*а*) (*б*) (*в*) (*г*)

Рис. 16

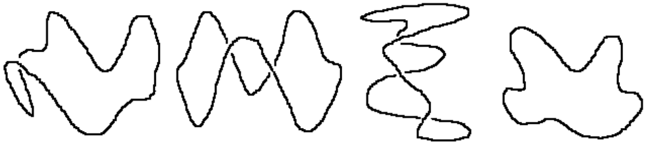
Кроме того, учитель может показать школьникам, фигуру (с помощью этой программы), похожую на изображенную на рис. 17(*б*). На этой фигуре видно два пересечения. Спросите школьников, с какой стороны надо посмотреть на неё, чтобы было видно одно или три пересечения? И как надо посмотреть, чтобы не было видно пересечений. Возможные ответы даны на рис. 17 (*а*, *в*, *г*) Например, если смотрим на эту фигуру сверху (рис. 17(*г*)), то пересечений не будет видно.



(*а*) (*б*) (*в*) (*г*)

Рис. 17

На рис. 18 даны диаграммы фигур, изображенных на рис. 17. Нетрудно с помощью движений Рейдемейстера упростить каждую диаграмму (Рис. 18(*а*, *б*, *в*)) и получить узел без пересечений.



(*а*) (*б*) (*в*) (*г*)

Рис. 18

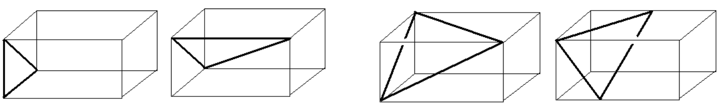
§ 6.3. Занятие 22. Число звеньев

Предварительные замечания

На этом занятии школьники завязывают узел не на веревке, а с помощью палочек, связанных в цепочку. С помощью такого объекта школьники лучше начинают чувствовать различие между плоскостью и пространством, кроме того, они изучают еще один способ для различения узлов. Нужно сказать, что понятие «число звеньев» помогает химикам при изучении структуры молекул.

Ход занятия

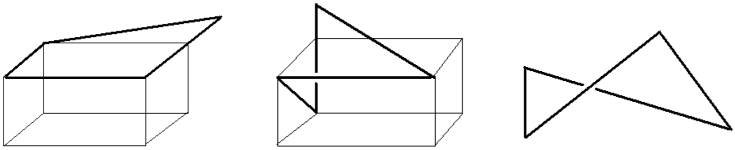
Попросите школьников взять несколько прямых палочек и соединить их последовательно непрерывной цепью, чтобы получился узел. Палки могут быть любой длины. Сколько палок нужно взять, чтобы сделать узел трилистник? Попросите школьников попробовать поработать с палочками, чтобы увидеть, что получается. Каркас помогает школьникам лучше представить пространственное расположение этих палочек. Конечно, из двух палочек узел не получится. Попросите школьников начать с трех палочек. Для формирования узла трилистника трех палочек оказывается не достаточно, поскольку они могут образовать только треугольник, который находится в плоскости. На рис. 19 мы дали некоторые из возможных вариантов.



(*а*) (*б*) (*в*) (*г*)

Рис. 19

Как видно на рис. 19, из трех палочек создается узел без пересечений. Теперь возьмем четыре палочки. Спросите школьников, какие варианты получаются? Вообще у нас два варианта. Первый вариант — когда в получаемой фигуре нет пересечений (рис. 20(*а*)) и второй — когда видно пересечение (рис. 20(*б*, *в*)).

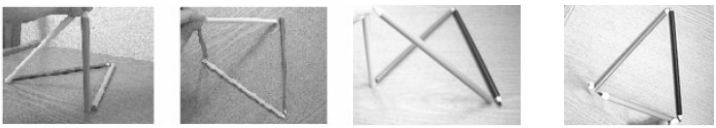


(*а*) (*б*) (*в*)

Рис. 20

Спросите школьников, что мы видим, если смотреть сверху на фигуру, которая изображена на рис. 20(*б*). Мы видим узел без пересечений. Ещё раз обратите внимание, что поскольку горизонтальная и вертикальная палки находится не в одной плоскости, они не пересекают друг друга, и пересечение, которое мы видим на рис. 20(*в*), в реальном (в пространстве) не существует. Мы его видим только, когда нарисуем диаграмму этой фигуры на плоскости.

Школьникам надо сначала практически убедится в том, что невозможно создать узел из четырех звеньев, а затем постараться это теоретически обосновать. На рис. 21(*а*, *б*) изображен один вариант (в роли палочек использованы карандаши) с двух разных сторон.



(*а*) (*б*) (**в**) (*г*)

Рис. 21

Теоретический взгляд

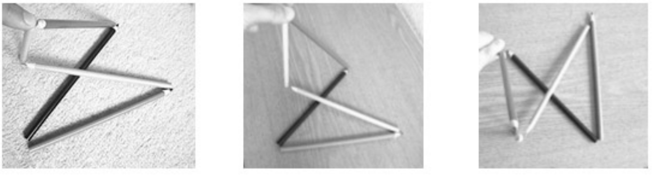
Если две из палочки примыкают друг к другу своими концами (мы будем называть их *смежными*), то они не могут пересекать друг друга в диаграмме. Тогда в диаграмме узла из четырех палочек, каждая палочка может пересекать только одну палочку, не смежную с ней. Поскольку, из четырех палочек только две пары не являются смежными, в диаграмме может быть не более двух пересечений. Напомним, что школьники раньше изучали все узлы с двумя или меньшим количеством пересечений, и убедились, что все они превращаются в тривиальный узел.

Выбор направления проекции

Попросите школьников взять четыре палочки и соединить их последовательно непрерывной цепью (например, как показано на рис. 21(*в*)). Затем попросите их посмотреть на полученную конструкцию вдоль одной из палочек. На рис. 21(*г*) мы смотрели вдоль желтой палочки. Если нарисовать диаграмму получающегося узла, то палочка, вдоль которой мы смотрим, будет выглядеть на диаграмме как одна — единственная точка. И тогда на нашей диаграмме будет видно только три оставшихся палочки, и диаграмма окажется треугольником.

Далее попросите школьников, попробовать создать узел (трилистник) из пяти звеньев. Попросите школьников сделать в парах из карандашей (или деревянных палочек) узел из пяти звеньев и нарисовать их диаграммы. Один вариант дан на рис. 22(*б*). Если нарисовать соответствующую диаграмму, то в ней имеется только одно пересечение и собственно узла не получается.

На рис. 22(*в*) изображен тот же узел, но когда мы смотрим на него вдоль одной из палочек. Если нарисовать диаграмму получающегося узла, то палочка, вдоль которой мы смотрим, будет выглядеть на диаграмме как одна — единственная точка. И тогда на нашей диаграмме будет видно только четыре оставшихся палки. Поэтому наша диаграмма будет похожа на одну из тех, что были изображены на рис. 20, и снова наш узел окажется тривиальным.



(*а*) (*б*) (*в*)

Рис. 22

Сложить руки узлом

Если мы хотим практически продемонстрировать, что из пяти палок не удается сделать узел, мы можем попробовать это с пятью «палками», с которыми мы были рождены (рис. 23). В качестве «среднего» звена выступает линия, соединяющая два плечевых сустава (она образована двумя ключицами). К этой «палке» примыкают ещё две — плечи, а к ним — предплечья. Если Вы сможете завязать ваши руки узлом так, чтобы можно была соединить ваши руки вместе, то Вы сделаете узел от пяти палок. После нескольких попыток школьники практически убедятся в невозможности создать узел из пяти звеньев.

Рис. 23

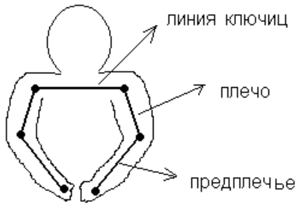


Диаграмма узла из пяти звеньев

Попросите школьников нарисовать возможные диаграммы, получаемые из пяти звеньев. На рис. 24 мы дали некоторые возможных вариантов. Затем попросите школьников реализовать полученные изображения. Конструкции, изображенные на диаграммах 24(*а*, *б*, *в*, *г*) создать легко. Во всех этих диаграммах у нас число пересечений меньше трех и поэтому наш узел будет снова тривиальным.

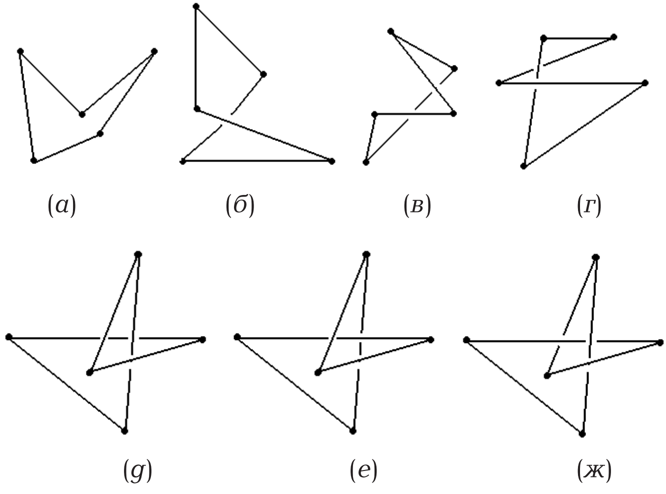


Рис. 24

На рис. 24(*g*, *е*, *ж*) — по три пересечения. Школьники в парах могут, помогая друг другу, создать конструкции, изображенные на рис. 24(*g*, *е*).Однако не каждая диаграмма, которая рисуется в двухмерной плоскости, может быть реализована в трехмерном пространстве с помощью прямых палочек. Например, невозможно реализовать в трехмерном пространстве рис. 24(*ж*). Конечно, это надо доказать. Для этого нам понадобится предварительное обсуждение.

Школьникам надо обратить внимание на то, что картинка — плоская, и не захватывает третье измерение, т.е. точка, которая изображена на плоскости бумаги, может на самом деле соответствовать точке, которая лежит фактически ниже или выше плоскости. Прямая линия на диаграмме может в реальности быть изогнутой (изгиб не обнаруживается на рисунке, если плоскость, содержащая изгиб, параллельна направлению проектирования). Попросите школьников проанализировать рис. 24(*g*, *e*, *ж*). Для того, чтобы это сделать, надо ввести один важный принцип. Пусть точки **A** и **B** лежат в некоторой плоскости, а **C** и **D** — под этой плоскостью. Спросите школьников, как **CD** и **AB** будет изображены, если смотреть на них сверху этой плоскости? В самом деле, **CD** находится под **AB**. А если **A** и **B** находиться в плоскости, а **C** и **D** — выше этой плоскости? А если **A** и **B** — над плоскостью, а **C** и **D** — под плоскостью?

Воспользуемся этим принципом при анализе рис. 24 (*g*, *e*, *ж*). Проанализируем рис. 24(*g*). Будем строить звенья этой диаграммы последовательно. Можно всегда выбрать плоскость проектирования так, чтобы она содержала два смежных звена. Пусть точки **A**, **B**, и **C** (рис. 25(*а*)) лежат на плоскости. Тогда точка **D** должна лежать выше плоскости, потому что линия, соединяющая **B** и **D** лежит над линией соединяющей **A** и **C**.

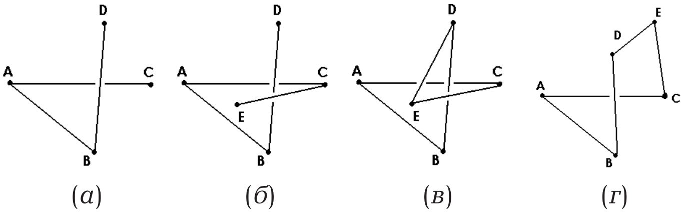


Рис. 25

Точка **E** тоже должна лежать выше плоскости, потому что линия, соединяющая **E** и **C** лежит над линией, соединяющей **B** и **D**. Теперь на последнем шаге с помощью одной прямой линии можно соединить точки **E** и **D** (рис. 25(*в*)). Проведенное выше рассуждение показывает, что рис. 24(*g*) не образует узел. Рис. 25(*г*) показывает другой вариант для рис. 24(*а*) (получаемый путем манипулирования) и, как видно, у нас опять нет собственно узла. Для рис. 24(*е*) также можно дать похожее рассуждение.

Попросите школьников исследовать, возможно ли реализовать рис. 24(*ж*). Как и в предыдущем случае пусть точки **A**, **B**, и **C** (рис. 26(*а*)) лежат в некоторой плоскости. Тогда точка **D** должна лежать выше плоскости, а точка **E** — ниже плоскости. Поскольку **EC** находится над **BD**, то **EC** не может быть прямой линией. Другими словами движение от **E** до **C** идет из — под плоскости, проходит над **BD** выше плоскости и наконец возвращается на плоскость в точке **C** (рис. 26(*б*)).

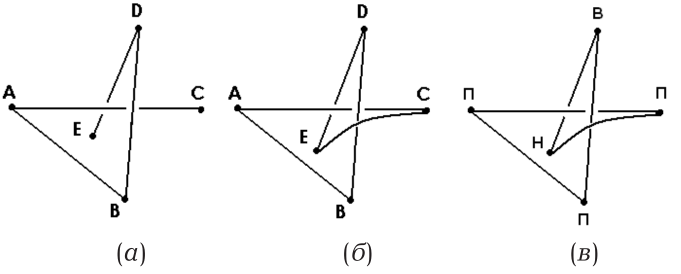


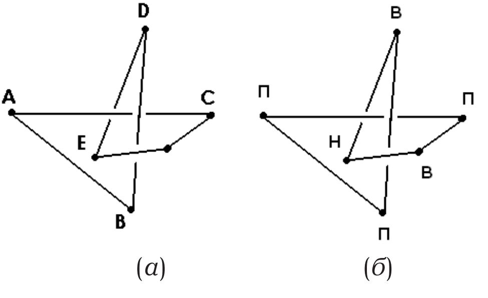
Рис. 26

Общий способ состоит в том, чтобы пометить буквой **П** вершины, находящиеся на плоскости, **В** — выше плоскости и **Н** — ниже плоскости (рис. 26(*в*)). Это позволяет разобраться, реализуем ли узел из прямых линий в пространстве с данной диаграммой.

Трилистник из шести звеньев

Теперь попросите школьников попробовать сделать трилистник из шести звеньев. Спросите их, как можно решить эту проблему с помощью рис. 26(*б*). Как видно на рис. 27(*а*), заменяя одно звено между точками **E** и **C** двумя, можно получить трилистник. Рис. 27(*б*) показывает, какая точка находится на плоскости, какая ниже и какая выше.

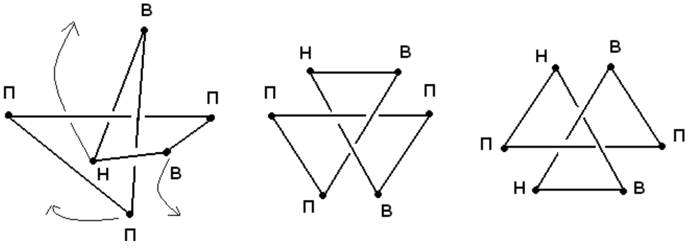
Рис. 27



Конечно, картинки самой по себе не достаточно, чтобы продемонстрировать, что узел из прямых палочек фактически может быть построен в пространстве в данном виде. Однако, разметка вершин на картинке буквами **П**, **В**, **Н** уже помогает нам в этом убедиться самим и, более того, убеждать в этом других людей.

Поскольку узел «трилистник» может быть сделан от шести палок, шесть — минимальное число звеньев, необходимых, чтобы сделать нетривиальный узел. Далее попросите школьников в парах (вместе) создать из карандашей (или кусков дерева или еще чего-то) узел, изображенный на рис. 27(*б*), чтобы они убедились в возможности реализовать этот узел и чтобы они увидели пространственное расположение каждой точки.

Спросите школьников, как можно изобразить диаграмму на рис. 27(*б*) симметричнее и красивее. На рис. 28(*а*) мы показали, как это можно сделать, и получаемый узел изображен на рис. 28(*б*). На рис. 28(*в*) изображен другой вариант трилистника, создаваемый из шести звеньев.

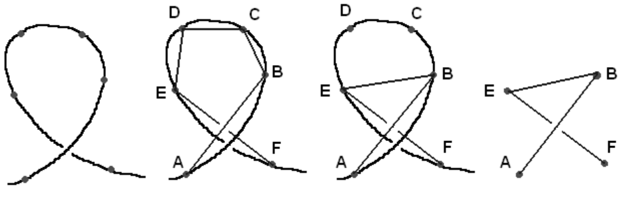


(*а*) (*б*) (*в*)

Рис. 28

От трилистника к числу звеньев

Спросите школьников, как можно получить число звеньев трилистника с помощью самого узла (его диаграммы или веревочной линии). Попросите школьников сначала рассмотреть простую ситуацию, как на рис. 29(*а*). Спросите школьников, как можно заменять фигуру прямыми линиями, чтобы сохранить структуру фигуры (самое важное — это пересечение)? Первый шаг — это выбрать несколько точек на фигуре. Конечно, можно выбрать бесконечно точек. Но мы выбрали шесть точек и соединили их последовательно (рис. 29(*б*)). Спросите школьников, какие из прямых линий можно убрать без изменения структуры фигуры?

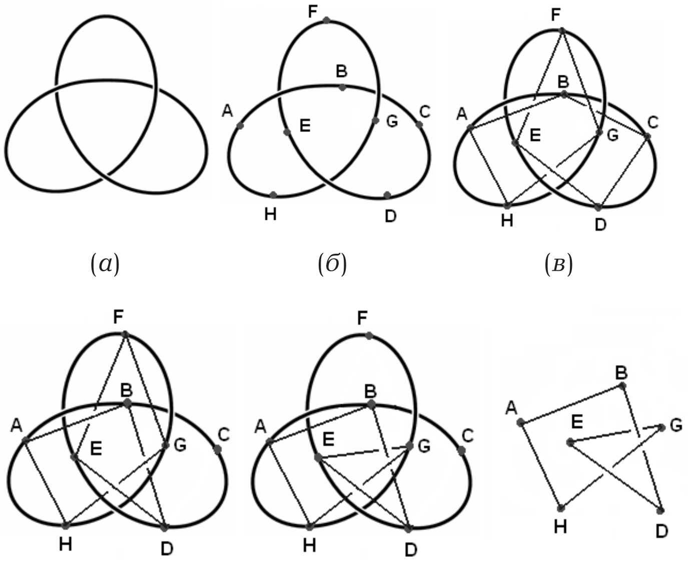


(*а*) (*б*) (*в*) (*г*)

Рис. 29

Как видно на рис. 29(*в*, *г*), можно убрать **BC**, **CD**, **DE**, и добавить новую линию **BE** без изменения структуры фигуры.

Далее попросите школьников нарисовать диаграмму трилистника (рис. 30(*а*)) и затем выбрать несколько точек на диаграмме. На рис. 30(*б*) мы выбрали восемь точек (если нужно — можно выбрать больше). У получаемого узла (рис. 30(*в*)) восемь отрезков. Рис. 30(*г* *g*) показывают как можно сократить количество отрезков(звеньев).



(*а*) (*б*) (*в*)

(*г*) (*g*) (*е*)

Рис. 30

Последнюю фигуру (рис. 30(*е*)) уже невозможно упростить или сократить количество отрезков (звеньев) и, как видно, в этом узле — шесть звеньев. Попросите школьников, помечая каждую точку буквами **П**, **В**, **Н** на рис. 30(*е*), определить пространственное расположение каждой точки.

Задание

Попросите школьников взять несколько деревянных палочек (или карандашей или ручек) и сделать фигуру, приведенную на рис. 31(*а*). На рис. 31(*б*) мы показали, как это можно сделать. На самом деле варианты получаются разные, и это связано с нашем выбором плоскостей. Например, можно рассмотреть три вершины выше и три ниже выбранной плоскости

(*а*) (*б*) (*в*)

Рис. 31

Кроме того, учитель может создать сделать фигуру, как показано на рис. 32(*а*) и попросить школьников нарисовать её диаграмму (рис. 32(*б*)).

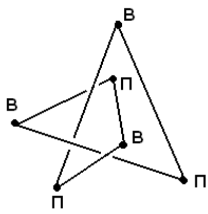


Рис. 32

(*а*) (*б*)

Домашнее задание

(а) Помечая каждую точку буквами **П**, **В**, **Н** на рис. 33, изучите разные варианты и определите пространственное расположение каждой точки.

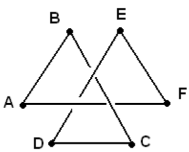


Рис. 33

(б) На рис. 34 изображен трилистник из шести звеньев (его можно создать в парах). Попросите школьников нарисовать его диаграмму и определить пространственное расположение каждой точки.

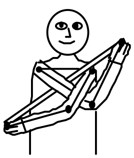


Рис. 34

(в) Сколько палок (звеньев) нужно, чтобы создать восьмерку? Создайте эту восьмерку и изобразите её диаграмму. Постарайтесь придать диаграмме наиболее симметричный, красивый вид.

(г) В таблице изображен список простейших узлов и соответствующие им число звеньев и индекс пересечения. Создайте эти узлы и нарисуйте их диаграммы. Какие из этих узлов вам уже известны? Как они называются?

узел	$\mathbf{0_1}$	$\mathbf{3_1}$	$\mathbf{4_1}$	$\mathbf{5_1}$	$\mathbf{5_2}$	$\mathbf{6_1}$	$\mathbf{6_2}$	$\mathbf{6_3}$
Индекс пересечение	0	3	4	5	5	6	6	6
Число звеньев	3	6	7	8	8	8	8	8

числа звеньев для узлов

Литература

[1] *Антропов Д. М.* Как завязывать узлы: 38 надежных испытанных узлов.— М.: Наука. Физматлит, 1995.— 32 с.

[2] *Мантуров В. О.* Лекции по теории узлов и их инвариантов. — М.: Эдиториал УРСС, 2001. — 304 с.

[3] *Сосинский А. Б.* Узлы и косы (Серия: «Библиотека "Математическое просвещение"») М.: МЦНМО, 2001. — 24 с.: ил.

[4] *Роджерс Л.* Историческая реконструкция математического знания, пер. с англ. // Матем. образование. 2001. № 1. С. 74—85.

[5] *Щетников А. И., Щетникова А. В.* Преподавание математики в историческом контексте // Матем. образование. 2001. № 3. С. 60—68.

[6] *Пиаже Ж.* Суждение и рассуждение ребенка. СПб.: СОЮЗ, 1997. 286 с.

[7] *Каплунович И. Я.* Развитие пространственного мышления школьников в процессе обучения математике. Новгород. 1996. 100 с.

[8] *Рейхани Э.* Система среднего образования в Иране // Ломоносовские Чтения: Научная конференция: Сборник статей и тезисов. Вып. 2 / Под ред. Н. Х. Розова.— М.: МАКС Пресс, 2004. с. 41—44.

[9] *Дарман П.* Учебник выживания в экстремальных ситуациях. — М.: ООО Изд-во Яуза, Формула-Пресс, 2000. — 352 с.

[10] *Прасолов В. В.* Наглядная топология. М.: МЦНМО, 1995

[11] *Ткачева М.В.* Вращающиеся кубики: Альбом заданий для развития пространственного воображения. — М.: Дрофа, 2002. — 168 с.

[12] Наглядная геометрия. 5—6 кл.: Пособие для общеобразовательных учебных заведений / И. Ф. Шарыгин, Л. Н. Ерганжиева. — 5-е изд. , стереотип. — М.: Дрофа, 2002. — 192 с.: ил.

[13] *Фоменко А. Т.* Наглядная геометрия и топология: Математические образы в реальном мире. — 2-е изд. — М.:Изд-во Моск.ун-та, Изд-во «Черо»,1998. — 416 с.

[14] *Clements, Douglas H., and Battista Michael T.* "Geometry and Spatial Reasoning." In Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, edited by Douglas A. Grouws pp. 420—464. New York: Macmillan and Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 1992.

[15] *Malkevitch J.* (1998) Finding room in the curriculum for recent geometry // Mammana, C. & Villani, V. (Eds.) Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century, 18—24. Dordrecht: Kluwer.

[16] *Douglas H. Clements, Swaminathan Sudha, Hannibal M. A. Z., Sarama J.* // Young children's concepts of shape. Journal for Research in Mathematics Education. Washington: Mar 1999. Vol. 30, Iss. 2; pg. 192, 21 pgs

[17] *Jones K.* Critical Issues in the Design of the School Geometry Curriculum. Invited paper // Bill Barton(Ed), Readings in Mathematics Education. Auckland, New Zealand: University of Auckland. 2000. http://www.soton.ac.uk/~dkj/geompub.html

[18] *Clausen-May T., Jones K., McLean A. and Rollands S.* Perspectives on the Design of the Geometry Curriculum, Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics. 2000. 20(1&2), 34—41.

[19] *Sinan O.* Improving Spatial Abilities with Engineering Drawing Activities International Journal of Mathematics Teaching and Learning April 2003. http://www.ex.ac.uk/cimt/ijmtl/ijabout.htm

[20] *Barr S.* Experiments in Topology. Dover Pubns; Reproduction edition, 1989.

[21] *Buck G.* Why Knots? http://www.knots.org/exhibit/whyknots.html

[22] A vision for the learning and teaching of school geometry. http://www.wcape.school.za/malati/Vision.pdf

[23] *Hopkins R.* Knots (Pocket Guide Series). Thunder Bay Press, 2003.

[24] *Bigon M. and Regazzoni G.* The Morrow Guide to Knots. 1982.

[25] *Adams C.* Why knot?: an introduction to the mathematical theory of knots. Key College Publishing, 2004.

[26] *Adams C.* The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots. American Mathematical Society (September, 2004).

[27] *McLeay H.* The Knots Puzzle Book, Grades 7—12. Key Curriculum Press, 2000.

[28] *Penn R.* The Everything Knots Book: Step-By-Step Instructions for Tying Any Knot (Everything Series) —. 2004.

[29] *Hopkins R.* Knots (Pocket Guide Series). Thunder Bay Press, 2003

[30] *Budworth G.* The Complete Book of Knots (Complete). — The Lyons Press, 1997.

[31] Des Pawson Handbook Of Knots. 1998.

[32]Why knot? Knot Tying. http://www.beworldwise.org/teachers/knot_tying.php

[33] Sailor's Knots, Bowline — "The Boater's King of Knots". http://www.downeastduck.com/knots.htm

[34] The Most Useful Rope Knots For The Average Person To Know. http://www.layhands.com/knots/Knots_Miscellaneous.htm

[35] Knot Knowledge, Single Loop Knots. http://www.iland.net/~jbritton/KnotPhoto/SingleLoop/Knots.html

[36] Mathematics problems, Arctic string tricks. http://www2.edc.org/mathproblems/problems/printProblems/ekArcticString.pdf

[37] *Sossinsky A.* Knots : Mathematics with a Twist. Harvard University Press, 2002.

[38] *Sina*n *O*. Making Connections: Improving Spatial Abilities with Engineering Drawing Activities // International Journal of Mathematics Teaching and Learning. April 2003. http://www.ex.ac.uk/cimt/ijmtl/ijabout.htm

[39] *McLeay H.* Some Knotty Problems // Australian Mathematics Teacher. Vol. 50, No 4. November 94.

[40] *McLeay H*, Mathematics and Knots // Mathematics in School, Vol. 20, No 1. January 1991.

[41] *Adams C., Furstenberg E., Li J., Schneider J.* Exploring Knots. // Mathematics Teacher, Vol. 90, No. 8, Nov. 1997, 640—646, 652.

[42] Mathematics and Knots. http://www.popmath.org.uk/exhib/knotexhib.html

[43] *Adams C.* Why knot: knots, molecules and stick numbers. http://pass.maths.org.uk/issue15/features/knots/

[44] *De Santi G*. An Introduction to the Theory of Knots. December 11, 2002. www-graphics.stanford.edu/courses/cs468-02-fall/projects/desanti.pdf

[45] Knot theory. A Fox's Quick Introduction to Knot Theory. http://www.cs.ubc.ca/nest/imager/contributions/scharein/knot-theory/fox-knot.html

[46] *Bennie K., Smit S.* Spatial sense // Translating curriculum innovation into classroom practice. http://academic.sun.ac.za/mathed/malati/Files/Geometry992.pdf

[47] Knots and Their Polynomials. http://www.ams.org/new-in-math/cover/knots1.html

[48] The KnotPlot Site. http://www.cs.ubc.ca/nest/imager/contributions/scharein/KnotPlot.html

[49] Equivalence of Knots and Links.
http://www.math.cuhk.edu.hk/publect/lecture4/knots.html

[50] Untangling the Mathematics of Knots.
http://www.c3.lanl.gov/mega-math/workbk/knot/knot.html

[51] *Strohecker C.* Understanding Topological Relationships through Comparisons of Similar Knots // TR96-06 March 1996, Published in AI&Society: Learning with Artifacts, Vol. 10, 1996, pp. 58—69.

[52] Knots on the Web. http://www.earlham.edu/~peters/knotlink.htm

[53] NCTM Standards and the Mathematics of Knots.
http://www.c3.lanl.gov/mega-math/workbk/knot/knnctm.html

[54] Overview: Standards for School Mathematics: Prekindergarten through Grade 12.
http://standards.nctm.org/document/chapter3/index.htm

[55] Steve Abbott's Computer Drawn 3D Knots with KnotTyer3D. http://www.abbott.demon.co.uk/knottyer3d.html

[56] *Whiteley W.* The Decline and Rise of Geometry in 20th Century North America. // To appear in the Proceedings of the 1999 CMESG Conference.
http://www.math.yorku.ca/Who/Faculty/Whiteley/cmesg.pdf

[57] Geometry Working Group. A report on the meeting at the King's College, University of London, 28't' February 1998 Convenor: Keith Jones, University of Southampton,UK,Theoretical Frameworks for the Learning of Geometrical Reasoning.
http://www.soton.ac.uk/~dkj/bsrlmgeom/reports/
K_Jones_Jan_Feb_1998.pdf

[58] *Mason M.* The van Hiele Levels of Geometric Understanding.
http://www.mcdougallittell.com/state/tx/corr/levels.pdf

[59] *van de Walle, John A*. Geometric Thinking and Geometric Concepts. In Elementary and Middle School mathematics : Teaching Developmentally , 4th ed.Boston :Allyn and Bacon. 2000.

[60] Crowley *Mary L* . The van Hiele Model of the Development of Geometric Thought // National Council of Teachers Mathematics, Yearbook Lerning and Teaching Geometry . K — 12.

[61] *Sutherland J., Trzinski-Becker D., Tsering D.* Teaching and Lerning Geometry C & I 811. May 1, 2001.
http://www.math.wisc.edu/~weinberg/MathEd/
Geometry_and_Space.doc

[62] Developing Geometric Concepts and Systems.
http://64.78.63.75/samples/
04EDKennedyGuidingChildrens10Ch9.pdf

[63] *Everett S.* Spatial Thinking Strategies. Science and Children, 2000. 37 (7), 36—39.

[64] *Way J.* The Development of Spatial and Geometric Thinking. http://nrich.maths.org/public/

[65] *Christman A.* Geometric Shapes // Math Molding For Teachers December 10, 2001.
http://myweb.loras.edu/dw078774/christman.pdf

[66] *Gutierrez A.* Exploring the links between Van Hiele Levels and 3-dimensional geometry.
http://www.uv.es/~gutierre/archivos1/textospdf/Gut92a.pdf

[67] *ReinHold S.* Topology in Elementary School Mathematics — A contribution the Improvement of Childrens Spatial Ability?
http://yerme2002.uni-klu.ac.at/papers/participants/sr_reinhold.pdf

[68] *Piaget J.& Inhelder B.* The Childs Conception of Space. New York:Norton. 1967.

[60] *Piaget J., Inhelder B.& Szeminski A.* The Childs Conception of Geometry. London:Routledge &Kegan Paul. 1960.

[70] Conceptualizing geometric objects: from doodles to deductions.
http://homepage.mac.com/davidtall/davidtallhome/mathematical-growth/7.geometric-objects.pdf

РОЗОВ Николай Христович
РЕЙХАНИ Эбрахим
БОРОВСКИХ Алексей Владиславович

УЗЛЫ В ШКОЛЕ
Уроки развития пространственного мышления

Методическое пособие по математике

Редактор
Корректор
Обложка

Подписано в печать 20.05.2006
Формат 60 × 90/16. Гарнитура «Балтика».
Бумага газетная. Печать офсетная.
Объем 8 печ. л. Тираж ? 000 экз.
Заказ №

ООО «ЧеРо»

Редакционно-издательский отдел
115230, Москва, Электролитный пр., д. 10
тел./факс (095)317-6633
тел.: (095)317-9454

Отдел реализации
119899, Москва, ул. Акад. Хохлова, д. 11,
тел./факс (095)939-3493,
тел.: (095)939-4190