Геометрия в 7 классе

Л.Е. Федулкин

учитель математики школы №40

В 7 классе при изучении геометрии учащиеся испытывают очень серьезные затруднения, впервые сталкиваясь со строгими математическими рассуждениями.

Традиционный вопрос: «Что надо сделать?» становится как бы второстепенным, уступая главное место вопросу: «Почему надо сделать именно это?»

Аксиоматический подход к изучению геометрии подразумевает строгое доказательство каждого утверждения. Именно это и вызывает наибольшие трудности у учащихся. Им не понятно, почему они должны доказывать то, что и так очевидно им, исходя из их жизненного опыта, или почему они должны обосновывать каждое свое действие, если, они правильно выполняли правильные действия и в результате получили правильный ответ. Поэтому основной задачей учителя на первых уроках геометрии является задача приучить учащихся после каждого высказывания задавать себе вопрос «почему?» и отвечать на него. Причем, учащиеся должны точно знать, что ответ на вопрос «почему?» следует искать или среди определений, или среди основных свойств (аксиом), или среди ранее доказанных утверждений (теорем).

Рассмотрим некоторые конкретные проблемы, которые возникают при изучении геометрии в седьмом классе по учебному пособию «Геометрия 7–11» под редакцией А.В. Погорелова.

В первую очередь хотелось бы заметить, что большинство учащихся сразу не понимают смысла аксиом, а если и понимают их смысл, то не понимают для чего они нужны. Все это приходит позже, после многократного применения аксиом для решения задач и доказательства теорем. Поэтому, предложенное в учебнике и в примерном планировании расположение аксиом и учебного материала, оказывается нерациональным. Учащиеся выучивают аксиому, не понимая ее, так как она не подкреплена соответствующей практической базой, а к тому моменту, когда необходимо ее практическое применение, они ее уже забывают, и учитель вынужден терять лишнее время на ее повторное изучение. Например, аксиомы откладывания отрезков и углов, в соответствии с примерным планированием, изучаются на уроках 8 и 9 соответственно, а непосредственное применение их для доказательства теорем впервые встречается на уроке 19 «Перпендикулярные прямые», и на уроке 23 «Первый признак равенства треугольников», то есть соответственно через 5 и 7,5 учебных недель, после изучения соответствующей аксиомы. Аналогично, аксиома существования треугольника, равного данному, изучается на уроке 11, а впервые используется на уроке 23 и так далее. Поэтому представляется целесообразным не изучать все аксиомы сразу, единым блоком, а разнести их по всему курсу, изучая их непосредственно перед теми темами, в которых они будут использоваться.

Аксиоматический подход требует четкости и строгости, но именно этого, к сожалению, часто не хватает учебнику. Изложение материала дается с расчетом на то, что все учащиеся хорошо владеют ранее изученным материалом, и обладают хорошо развитым логическим мышлением, то есть в состоянии самостоятельно додумать не детализированные моменты доказательства. Кроме того, в учебнике имеются, мягко говоря, «некорректности». Многие определения сформулированы так, что учащиеся не в состоянии понять их самостоятельно, не говоря уже о том, что само слово «определение» впервые встречается только в §2, а до этого отрезок, луч (полупрямая), угол и т. д. «называются», но не «определяются».

Рассмотрим подробнее конкретные утверждения, данные в учебнике.

В п. 4 и п. 7 даются аксиомы измерения отрезков и углов, соответственно. Каждая из этих аксиом содержит два, не зависящих друг от друга утверждения: 1) существует положительная мера отрезка (угла); 2) мера отрезка (угла) равна сумме мер его частей. Ни в одной задаче оба эти утверждения одновременно не используются. Но если мы требуем от учащихся формулировку аксиомы, то они должны формулировать её полностью, в том числе и ту её часть, которая не нужна для решения (доказательства) задачи. Поэтому кажется более рациональным разбить каждую из этих аксиом на две: аксиому измерения (существует положительная мера) и аксиому разбиения (мера целого равна сумме мер его частей).

В п. 3 дается «определение» отрезка: «*Отрезком* называется часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих между двумя данными ее точками. Эти точки называются *концами отрезка*». То есть, в соответствии с этим определением, концы отрезка не принадлежат ему. Таким образом, автор называет отрезком то, что в скором времени в курсе алгебры будут называть «интервалом» (точнее — числовым интервалом), а не то, что будет называться «отрезком» (числовым отрезком). Аналогично даётся определение полупрямой в п. 6: «*полупрямой* или *лучом* называется часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих по одну сторону от данной ее точки, эта точка называется *начальной точкой* полупрямой». Из определения опять-таки следует, что начальная точка не принадлежит полупрямой. В п. 7 дается понятие луча, проходящего между сторонами угла: «Луч *проходит между* сторонами данного угла, если он исходит из его вершины и пересекает какой-нибудь отрезок с концами на сторонах угла». При этом, для развернутого угла делается исключение: «В случае развернутого угла мы считаем, что любой луч, исходящий из его вершины и отличный от его сторон, проходит между сторонами угла». Как понимать это «мы считаем?» Если это определение, то его так и следует сформулировать: «Любой луч, выходящий из вершины развернутого угла и отличный от его сторон, проходит между сторонами развернутого угла», а если это следует из общего определения луча, проходящего между сторонами угла (что более логично), то это утверждение надо доказать. Но, при данном определении луча, ни один отрезок с концами на сторонах развёрнутого угла не имеет общих точек ни с одним лучом, исходящим из вершины развёрнутого угла. Если бы определение луча включало бы в луч его начальную точку, то доказательство было бы тривиальным.

Многие определения сформулированы без учёта возрастных особенностей учащихся и трудны для понимания. Рассмотрим как пример определение дополнительных полупрямых. «Различные полупрямые одной и той же прямой, имеющие общую начальную точку, называются *дополнительными*». Попробуйте попросить учащихся после прочтения этой формулировки, объяснить вам, что такое дополнительные полупрямые. В лучшем случае вы получите ответ, что это две полупрямые, которые вместе образуют прямую (что, кстати, не верно, т. к. их общая начальная точка данной фигуре не принадлежит). А если вы попросите выделить те условия, которые должны выполняться, чтобы две полупрямые были дополнительными, то только наиболее развитые и сильные учащиеся смогут вам ответить, что эти полупрямые:

1) должны быть различны;

2) иметь общую начальную точку;

3) лежать на одной прямой.

Рассмотрим §2. В п. 14 автор доказывает теорему 2.1 : «Сумма смежных углов равна 180°», и делает из нее три вывода (следствия). Рассмотрим второе следствие: «Если угол не развернутый, то его градусная мера меньше 180°». Но, во-первых, нет никакого объяснения, почему это следует из теоремы, а, во-вторых, из этой теоремы следует совсем другое утверждение: «Если для какого-либо угла существует смежный ему угол, то градусная мера такого угла меньше 180°». Согласитесь, что эти утверждения отнюдь не равнозначны. Для их равнозначности должно быть истинным еще одно утверждение: «Для любого угла, кроме развернутого, существует смежный ему угол». Но такого утверждения в учебнике нет, хотя его и нетрудно доказать.

К сожалению, подобные «недосмотры» в учебнике встречаются регулярно. Изложение материала в учебнике скорее рассчитано на человека знавшего геометрию, но забывшего, чем на ученика, впервые ее изучающего, да, к тому же, привыкшего все, что говорит учитель или написано в учебнике, принимать на веру, без доказательств. Как следствие этого, часто приходится встречаться с тем, что учащиеся просто зазубривают доказательства теорем, будучи не в состоянии понять их.

В п. 21 написано: «Как мы знаем, при доказательстве теорем **разрешается** пользоваться аксиомами и доказанными ранее теоремами. Обычно, **в доказательстве ссылаются не на номер аксиомы по списку, а на ее содержание**».

РАЗРЕШАЕТСЯ. Хочется задать вопрос, а чем же еще тогда пользоваться, если не аксиомами и теоремами. Не разрешается, а ТРЕБУЕТСЯ. Говоря о том, что обычно ссылаются не на номер, а на содержание, сам автор постоянно ссылается на номера аксиом и теорем.

Несколько слов хочется сказать и об оформлении учебника. Учебник должен давать возможность учащимся самостоятельно изучать пропущенный в школе материал и служить образцом оформления решаемых задач и доказываемых теорем, а именно этим требованиям он не отвечает. Ни одна из доказанных теорем или решённых в учебнике задач не отвечает традиционным требования к оформлению геометрических задач, таких, как «дано», «чертёж», «решение», «доказательство» и «ответ». При самостоятельном изучении геометрии по данному учебнику учащийся, скорее всего, научится писать сочинения на тему геометрической задачи, чем записывать правильное математическое решение или доказательство.

О недостаточности и неполноте учебных заданий в учебнике говорилось уже так много, что не хочется повторяться, тем более что сегодня уже вполне достаточно дидактических материалов восполняющих этот пробел.

Анализировать просчеты можно было бы и далее, но и приведенных выше примеров достаточно, чтобы сделать вывод, что перечисленные выше недостатки затрудняют (а для целой группы учащихся делают просто невозможной) самостоятельную работу с учебником.

Кроме того, хотелось бы обратить внимание на один, достаточно важный момент, о котором не упоминается не только в учебнике, но и в большинстве дидактических материалов. Речь идёт о задачах на нахождении углов, получившихся при пересечении двух прямых. И в учебнике, и в большинстве дидактических материалов подразумевается, что рассматриваются только четыре угла, не являющиеся развёрнутыми. Но при пересечении двух прямых получается шесть углов — два развёрнутых и четыре неразвёрнутых. Поэтому стандартная задача «Один из углов, получившихся при пересечении двух прямых на 20° больше другого. Найдите все образовавшиеся углы». Имеет два различных решения (изложу их кратко):

1) Если один из этих углов развёрнутый, то второй равен 160°. Далее получаем ответ: два угла по 180°, два угла по 160° и два угла по 20°.

2) Если ни один из этих двух углов не является развёрнутым, то (стандартное решение) получаем ответ: два угла по 100°, два угла по 80° **и два угла по** 180° (вот этих то двух углов, получившихся при пересечении двух прямых, нет в ответе 99,9% учащихся).

Следовательно, необходимо либо разбирать с учащимися оба решения, либо формулировать задачу следующим образом: «Один из углов, получившихся при пересечении двух прямых и не являющийся развёрнутым, на 20° больше другого. Найдите все образовавшиеся углы, не являющиеся развёрнутыми».

Попыткой исправить некоторые из указанных недостатков явилось вспомогательное пособие и разноуровневые дидактические материалы, разработанные учителями математики школы №40 г. Москвы Федулкиным Л.Е. и Федулкиной Е.М. и используемые ими с 1996 года.

Желающие ознакомиться с этими материалами подробнее могут обратиться к Л.Е. Федулкину, e-mail: `lfedulkin@rambler.ru`.