Памятные задачи

Ю.О. Пукас

учитель математики

гимназии г. Троицка

Памятные задачи. Почему именно они запомнились из тысяч других? Яркость формулировок, красота идеи, а иногда и сам извилистый процесс решения берегут их в нашей памяти. Разбор таких задач с учениками бывает необычайно полезен. Они не только знакомятся с новыми идеями, но и видят, как непросто дается иногда решение той или иной задачи. «С постоянством прибоя мозг маэстро добивается тайны лучшего хода», — писал в двадцатых годах прошлого века шахматный гроссмейстер Савелий Тартаковер. Как не хватает такой настойчивости большинству современных школьников!

Бывает, что решению трудной задачи способствует посторонний фактор. Что-то попавшее в поле зрения, или случайно услышанная фраза могут затронуть слой памяти с нужной информацией. Когда Николай Николаевич Андреев рассказал, как смертельно больной Константин Симонов назвал себя «еле живым классиком», я сразу вспомнил живого Симонова, которого я видел единственный раз на грандиозном вечере поэзии в Лужниках в ноябре 1976 года. Симонов вел этот вечер. Сам он прочитал только одно стихотворение, мне хорошо знакомое. Оно очень подходит если и не к самому моему сегодняшнему выступлению, то к нашему пребыванию на семинаре:

Все в звёздах небо. С моря дует ветер.
Мы встретим со стаканами зарю.
Не говорю: «Забудем все на свете!»
Согреемся немного», — говорю.

Пусть длится ночь. Пусть запоздает утро.
В объятьях дум сижу я у огня.
Пусть то, что я скажу, не так уж мудро,
Но мудрость друга — выслушать меня.

Заручившись поддержкой классика, перехожу к задачам. За несколько дней до этого участники семинара получили листочки с восемью задачами. Вот они:

1. Вычислите без помощи таблиц и калькулятора число $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{7}\operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{7}\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{7}$.

2. Сравните два числа: $\dfrac{2\pi}{5}$ и $\arccos\dfrac{3}{10}$.

3. Сравните два числа: $\dfrac{3\pi}{10}$ и $\arcsin\dfrac{4}{5}$.

4. Сравните два числа: $\cos\dfrac{3\pi}{11}$ и 0,67.

5. Пусть α, β и γ — углы остроугольного треугольника. Докажите, что $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma>2$.

6. Докажите, что сумма длин медиан треугольника не менее чем в девять раз превосходит радиус вписанной в этот треугольник окружности.

7. Докажите, что для любых положительных a, b, c не могут одновременно выполняться неравенства: $a(1-b)>\dfrac{1}{4}$, $b(1-c)>\dfrac{1}{4}$, $c(1-a)>\dfrac{1}{4}$.

8. Найдите минимальное значение выражения $(x+y)(y+z)$, если x, y, z — положительные числа и $xyz(x+y+z)=9$.

1. Первая задача была опубликована в справочнике «МГУ — 2002» (стр. 163) и привлекла внимание многих решателей. Весной 2002 года меня спросил о ней Игорь Иванушенков (заканчивает четвертый курс ВМК), он по пустякам не обращался. Знаю, что осенью того же года эту задачу пыталась решить группа мехматовцев, собравшаяся на 20-летие своего выпуска; предложили подумать над ней и одиннадцатиклассникам второй школы (так как решение с ними не разобрали, то можно предположить, что учителя его не нашли). Знаменатель оценить легко:

$$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}=-\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}=$$

$$=-\frac{8\sin\frac{\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}=-\frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{8}.$$

Найти, чему равен числитель, чему равно произведение соответствующих синусов, долго не удавалось. Помог случай: взятая в руки книга Мордковича и Литвиненко (я не прикасался к ней лет шесть), упав на пол, открылась на странице, где в номере 1327 я увидел и ответ, и подсказку. Надо возводить в квадрат! Оказывается, всё очень просто:

1327. $\sin^2\Big(\frac{\pi}{7}\Big)\sin^2\Big(\frac{2\pi}{7}\Big)\sin^2\Big(\frac{3\pi}{7}\Big)=\frac{7}{64}$.

$$\begin{gathered}8\sin^2\Big(\frac{\pi}{7}\Big)\sin^2\Big(\frac{2\pi}{7}\Big)\sin^2\Big(\frac{3\pi}{7}\Big)=\Big(1-\cos\frac{2\pi}{7}\Big)\Big(1-\cos\frac{4\pi}{7}\Big)\Big(1-\cos\frac{6\pi}{7}\Big)=\\ =\Big(1-\cos\frac{2\pi}{7}\Big)\Big(1+\cos\frac{3\pi}{7}\Big)\Big(1+\cos\frac{\pi}{7}\Big)=1-\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7}+\\ +\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}=\\ =1-\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}-\\ -\frac{1}{2}\Big(\cos\frac{5\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7}\Big)-\frac{1}{2}\Big(\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7}\Big)+\frac{1}{2}\Big(\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\Big)=\\ =1-\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{7}{8}.\end{gathered}$$

2–3. Две следующие задачи предлагались в 2001 году поступающим на географический факультет МГУ. Решение их несложно, так как значения $\cos\frac{2\pi}{5}$ и $\sin\frac{3\pi}{10}$ легко вычисляются (рассказывая об этих задачах, можно показать несколько путей, как это сделать).

Авторское же решение основано на идее сравнения с нулем. Так, в задаче 2 увеличим сравниваемые числа в 5 раз. Поскольку $\sin 2\pi=0$, сравним с нулем $\sin\Big(5\arccos\Big(\frac{3}{10}\Big)\Big)$. Он равен $\frac{31\sqrt{91}}{6250}>0$, следовательно, $\arccos\frac{3}{10}>\frac{2\pi}{5}$.

Остальные пять задач предлагались абитуриентам в апреле 2003 года на устном экзамене ВМК.

4. Будем сравнивать с нулем, увеличив соответствующие углы в 11 раз. Заподозрив, что авторы придумывали задачу для числа $\frac{2}{3}\sim 0,67$, можно предугадать ответ и упростить вычисления, подтверждающие эту гипотезу: $0,67>\frac{2}{3}>\cos\Big(\frac{3\pi}{11}\Big)$.

5. Эта задача для меня самая памятная из рассматриваемых. Утром 20.04.03 её предложили Андрею Маркову из Троицка (учится на физфаке МГУ, заканчивает третий курс), опустив слово "остроугольный". Когда он привел пример невыполнения данного неравенства (хотя бы для $\alpha=\frac{5\pi}{6}$), экзаменаторы предложили Андрею исследовать, для каких углов треугольника это верно. Задача у меня долго не получалась. Целенаправленный поиск в книгах чего-нибудь похожего, дал результат. Оказывается, для углов любого треугольника выполняется соотношение: $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

Доказать это легко, ещё проще применить в нашем случае: $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma>\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma$, а это больше двух, так как косинусы острых углов положительны.

6. Решая эту задачу, я не догадался заменить медианы высотами, чья сумма не превосходит суммы длин медиан. Подсказку нашел на первой же странице очень памятной для меня книги Э.Г. Готмана "Уравнения, тождества и неравенства при решении геометрических задач", которую получил 40 лет назад за успех на олимпиаде в Северной Осетии:

$m_a+m_b+m_c\ge h_a+h_b+h_c=2S\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big)\ge 9r$, где $r=\frac{2S}{a+b+c}$.

7. Красивое решение этой задачи было найдено А.Н. Андреевой; А.Д. Блинков и П.В.Чулков предложили еще один очень простой путь: перемножить все три неравенства. Мне же почему-то сразу пришла в голову идея замены $a=\sin^2 A$, $b=\sin^2 B$, $c=\sin^2 C$, после чего я сложил все три неравенства и получил противоречие. Думаю, что этот путь я подсознательно выбрал благодаря задачам 1 и 5, где встречались квадраты синусов.

8. Выразим из второго соотношения не $(x+y)$ и не $(y+z)$, а $(x+z)$: $x+z=\frac{9}{xyz}-y$, тогда $(x+y)(y+z)=\dots=y(x+z)+y^2+xz=\frac{9}{xz}+xz\ge 6$.

Минимальное значение достигается, если $xz=3$. Например, $x=3$, $y=-2+\sqrt{7}$, $z=1$.

Эта изящная задача запомнилась мне в первую очередь тем, что шла в одном списке с четырьмя предыдущими. Кроме того, в ней, как и в шестой задаче, есть цифра 9. Бывает, что и такая мелочь помогает найти решение.

Благодаря моему рассказу (в такой необычной обстановке) эти восемь задач теперь запомнятся и вам, и, возможно, пригодятся когда-нибудь.