Зеленоградское управление образования Департамента образования г. Москвы
Московский центр непрерывного математического образования
Лицей 1557 ∘ Школа Мастеров

Учим математике

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва ∘ 2006

Учим математике

(материалы открытой *школы-семинара* учителей математики)

под редакцией *А.Д. Блинкова*, *И.Б. Писаренко*, *И.В. Ященко*

Издательство МЦНМО
Москва ∘ 2006

В предлагаемом сборнике представлены избранные материалы открытой школы-семинара для преподавателей математики г. Зеленограда и г. Москвы, проходившей с 29 апреля по 9 мая 2006 г. Сборник содержит расширенные тексты докладов участников семинара по проблемам школьного преподавания, внеурочной и олимпиадной деятельности. Брошюра адресована учителям математики, методистам и всем тем, кто интересуется проблемами математического образования школьников.

УЧИМ МАТЕМАТИКЕ

(материалы открытой школы-семинара учителей математики)

Под редакцией *А. Д. Блинкова*, *И. Б. Писаренко*, *И.В. Ященко.*

Технический редактор *Е. С. Горская* Рисунки *Е. С. Горская*

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г. Подписано в печать 15.07.2006 г.
Формат 60 × 88 $^{1}/16$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Объем 8 печ. л.
Тираж 1000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. 241-05-00.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП «Полиграфические ресурсы».

Введение

В этом сборнике представлены избранные материалы открытой школы-семинара для преподавателей математики г. Зеленограда и г. Москвы, проходившей с 29 апреля по 9 мая на базе отдыха «Флуераш» на берегу Черного моря (с. Коблево, Николаевская область, Украина). Семинар был организован Зеленоградским Окружным Управлением Образования совместно с Московским Институтом Открытого Образования и Московским Центром Непрерывного Математического Образования.

В нем приняли участие учителя математики А.Н. Андреева (школа №91 РАО), А.Д. Блинков, Ю.А. Блинков (оба — ЦО №218), А.А. Волкова (школа №174), А.В. Иванищук (лицей №1511), О.Н. Кисунина (школа №1740), А.Г. Мякишев (лицей №1303), М.В. Овчинников, Е.И. Пенушкина, И.Б. Писаренко, Л.И. Чухиль (все — лицей №1557), Ю.О. Пукас (гимназия г. Троицка), А.И. Сгибнев (школа-интернат «Интеллектуал»), М.Б. Скобелева (школа №1 пос. Менделеево), Н.И. Утина, М.В. Харина (обе — школа №853), Л.Е. Федулкин (школа №40), Е.А. Чернышева (школа №17), П.В. Чулков (школа №2007), Е.Ф. Шершнев (школа №5), научный сотрудник Российской Академии Наук Н.Н. Андреев и сотрудник МЦНМО Е.С. Горская. Отметим, что на семинар приглашались прежде всего учителя, активно ведущие внеклассную работу со школьниками и участвующие в проведении математических олимпиад, а также учителя — победители II творческого конкурса учителей математики (сентябрь 2005 г.).

Организатором и руководителем прошедшего семинара являлся преподаватель лицея №1557 Игорь Борисович Писаренко, научным руководителем — заведующий кафедрой математики МИОО, исполнительный директор МЦНМО, учитель школы №57 Иван Валерьевич Ященко, его заместителем — научный сотрудник МИОО, начальник отдела МЦНМО, заместитель директора Центра образования №218 Александр Давидович Блинков.

Выражаем огромную благодарность начальнику Зеленоградского окружного управления образования Департамента образования города Москвы Гагину Сергею Ильичу и его заместителю Черненко Галине Михайловне, которые обеспечили проведение школы-семинара.

В официальную программу семинара, приведенную ниже, помимо учебных занятий вошли экскурсии в Николаев и Одессу. За рамками этой программы остались многие часы неформального общения учителей, которые также были посвящены обмену педагогическим опытом, и по мнению всех участников школы-семинара в значительной степени способствовали профессиональному росту участников.

Программа открытой школы-семинара

Дата	**Пара**	**Форма**	**Тема**	**Докладчик (координатор)**
30.04	1	Лекция	Многообразие внеурочной деятельности учителя математики	А.Д. Блинков
	2	Семинар	Кружковая работа в 5 – 6 классах	Е.С. Горская, Е.А. Чернышева
	3	Семинар	Кружковая работа в 5 – 6 классах	П.В. Чулков, Е.Ф. Шершнев
1.05	1	Семинар	Кружковая и факультативная работа в 7 – 9 классах	А.Н. Андреева
	2	Семинар	Проблемы мотивации школьников 7 – 9 классов. Использование программы «Живая геометрия»	А.А. Волкова, А.Н. Андреева
	3	Круглый стол	Олимпиады: какие они есть и какие нужны?	А.Д. Блинков
2.05	1	Лекция	О некоторых прямых, связанных с четырехугольником	А.Г. Мякишев
	Экскурсия в г. Николаев			
3.05	1	Лекция	Геометрические этюды	Н.Н. Андреев
	2	Семинар	Кружковая и факультативная работа в 10 – 11 классах	А.В. Иванищук
	3	Круглый стол	Система внеурочной деятельности в различных школах (из опыта работы)	А.Д. Блинков
4.05	1	Лекция	Геометрические этюды (продолжение)	Н.Н. Андреев
	Экскурсия в г. Одесса			
	1	Семинар	Проблемы изучения школьной геометрии	Л.Е. Федулкин, Ю.А. Блинков

5.05	2	Семинар	Система развития исследовательских навыков школьников	А.И. Сгибнев
	3	Круглый стол	Проектно-исследовательская деятельность школьников	А.Д. Блинков
6.05	1	Лекция	Развитие метода Пойя на уроках и математических кружках	И.Б. Писаренко
	2	Семинар	Решение олимпиадных задач	И.Б. Писаренко
	3	Круглый стол	Выездные математические школы (из опыта работы)	А.Д. Блинков
7.05	1	Семинар	Памятные задачи	Ю.О. Пукас
	2	Семинар	Использование современных компьютерных технологий в работе со школьниками. Школа мастеров.	И.Б. Писаренко, М.В. Овчинников
	3	Круглый стол	Подведение итогов, обсуждение материалов сборника по итогам проведенного семинара	А.Д. Блинков

Математический кружок для школьников 5 класса

Е.С. Горская

преподаватель филиала МММФ (ЦО № 218)

Часто бывает так, что в 5-м классе дети еще хотят решать задачи, с удовольствием учатся, а к концу 7-ого класса — уже нет. Интерес куда-то исчезает, школа (и уроки, и кружки) воспринимаются ими как тяжелая повинность: отмучался — домой. Понятно, что большой прогресс в обучении при таком отношении ребенка невозможен.

Как сделать так, чтобы этого не происходило? Как поддержать природный интерес к решению задач? Ведь неважно, какой наукой будет в будущем заниматься ребенок (и будет ли вообще). Развивать любознательность, умение решать любые задачи важно для каждого человека.

Обдумав эти вопросы, мы решили организовать кружок для самых обычных пятиклассников (сразу замечу, что на занятия ходили не только пятиклассники, но и четвероклассники, и даже третьеклассник).

Но как сделать так, чтобы маленьким детям было не скучно решать задачи? Как на кружке создать для каждого ситуацию успеха, сделать так, чтобы обязательно у каждого хоть что-нибудь получалось?

Первый вопрос благополучно решился в сотрудничестве с детьми: мы старались подбирать интересные и доступные задачи, от них же требовалось только желание. Хочешь заниматься — занимайся, не хочешь — уходи, мы никого не заставляем.

Занятия кружка проходили один раз в неделю (в двух группах) и длились 1,5 часа (45 минут — перерыв — 45 минут). Каждое занятие было посвящено одной теме (например, одним из первых был такой кружок: "Пути и переправы"). Темы мы придумали до начала учебного года и условно разделили их на четыре группы: арифметика, логика, геометрия и комбинаторика. Таким образом, занятия разбивались на блоки из 5 кружков: занятие по арифметике, занятие по логике, занятие по геометрии, занятие по комбинаторике и игра. Игровым занятием могла быть математическая карусель, регата, матдрака, устная олимпиада или мини-турнир Архимеда (который детям понравился больше всех остальных).

К каждому занятию нами подготавливались три листочка: первый — из шести задач, второй — из двух задач и третий — из одной (в зависимости от сложности темы эти количества могли меняться). Первые 3–4

задачи первого листочка подбирались так, чтобы их могли решить все (как ни решай, все равно решатся), следующие были чуть посложнее. Второй листочек выдавался решившим первый и содержал еще более сложные задачи, и, наконец, третий листочек — самая сложная задача этого занятия — для "лидеров" кружка. После того, как ребенок решал какую-нибудь задачу, он рассказывал ее решение одному из преподавателей. (Самыми сложными для нас были первые 15 минут кружка, когда все решили первую задачу и все хотят ее немедленно рассказать). В конце занятия нерешенные задачи из первого листочка разбирались.

Также хочу отметить, что даже самые сложные задачи мы старались подбирать так, чтобы для их решения не требовалось никаких специальных знаний (знаю "факт" — решу, не знаю — нет). Делался упор на "естественную" логику решения: задача поддавалась, если ее решали "естественно"; подумали, придумали "логичную" идею, она и решилась.

Задачи для каждого занятия изначально подбирались одним из преподавателей, ответственным за данную тему. После этого происходило общее обсуждение, и, возможно, что-то менялось или дополнялось.

Все занятия кружка опубликованы на сайте Малого Мехмата: `http://mmmf.math.msu.su/circles/z5`.

Помимо занятий, было еще домашнее задание (использовались материалы П.В. Чулкова). Домашнее задание — дело сугубо добровольное, кто хочет приносит, кто не хочет — не приносит.

Технически это выглядело так: домашнее задание представляет собой набор из 30 циклов, в каждом цикле — 5 задач. В начале учебного года каждый ребенок заводит отдельную теград для д/з. В конце каждого занятия всем детям выдаются листочки с очередными пятью задачами. Дома ребенок решает задачи, листочек с условиями разрезает позадачно и наклеивает в тетрадь (каждое условие — на новой странице). Затем после условия записывает решение так подробно, как может. На следующем занятии кружка тетрадь сдавалась, мы ее проверяли (каждая задача оценивалась в 4 балла) и в конце занятия выдавали обратно. Таким образом, на кружке дети учились рассказывать решения устно, а дома — их записывать.

В конце года каждому ребенку был выдан красивый диплом о том, что он "успешно обучался математике на кружке Малого Мехмата".

В качестве иллюстрации ниже приведены два занятия кружка, по темам, которым уделялось особое внимание: логика и пространственное воображение.

Задачи про рыцарей и лжецов

На острове живут рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят только правду, лжецы — всегда лгут.

1. В чашке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что вода и молоко не в чашке; сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом; в банке не лимонад и не вода; стакан стоит около банки и сосуда с молоком. В какой сосуд налита каждая из жидкостей?

2. Путник встретил троих островитян и спросил каждого: «Сколько рыцарей среди твоих спутников?» Первый ответил «Ни одного», второй ответил: «Один». Что сказал третий?

3. Малыш спрятал от Карлсона банку с вареньем в одну из трех разноцветных коробок. На коробках Малыш сделал надписи: на красной — «Здесь варенья нет»; на синей — «Варенье — здесь»; на зеленой — «Варенье в синей коробке». Только одна из надписей правдива. В какой коробке Малыш спрятал варенье?

4. На остров рыцарей и лжецов приехал путешественник и нанял себе проводника. Однажды, увидев вдали туземца, путешественник сказал проводнику: «Пойди и спроси у того человека: рыцарь он или лжец». Вскоре проводник вернулся и сказал: «Этот человек сказал, что он лжец». Кем был проводник, рыцарем или лжецом?

5. Федя всегда говорит правду, а Вадим всегда лжёт. Какой вопрос надо им задать, чтобы они дали на него одинаковые ответы (оба ответили «да» или оба ответили «нет»)?

6. На дверях двух комнат висят таблички. Известно, что надписи на них либо одновременно истинны, либо одновременно ложны. На первой сказано «Либо в этой комнате тигр, либо принцесса в другой», а на второй «Принцесса в другой комнате». В какой из комнат принц найдет принцессу?

7. В Стране Чудес проводилось следствие по делу об украденном бульоне. На суде Мартовский Заяц заявил, что бульон украл Болванщик. Соня и Болванщик тоже дали показания, но что они сказали, никто не запомнил, а запись смыло Алисиными слезами. В ходе судебного заседания выяснилось, что бульон украл лишь один из подсудимых и что только он дал правдивые показания. Так кто же украл бульон?

8. Однажды на лестнице была найдена странная тетрадь. В ней было записано сто утверждений:

«В этой тетради ровно одно неверное утверждение»;
«В этой тетради ровно два неверных утверждения»;
«В этой тетради ровно три неверных утверждения»;
...
«В этой тетради ровно сто неверных утверждений».
Есть ли среди этих утверждений верные, и если да, то какие?

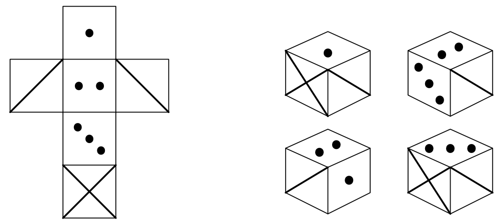
9. Путешественник, попавший на остров рыцарей и лжецов, встретил четырех людей и задал им вопрос: «Кто вы?»Он получил такие ответы:

Первый: «Все мы лжецы».
Второй: «Среди нас один лжец».
Третий: «Среди нас два лжеца».
Четвертый: «Я ни разу не соврал и сейчас не вру».

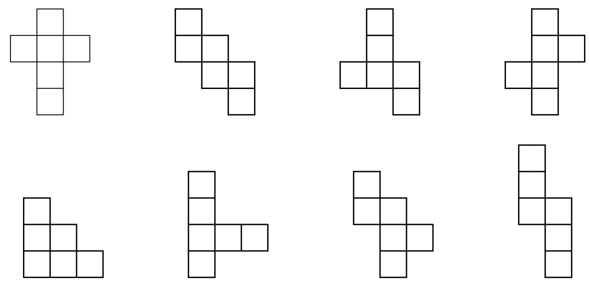
Путешественник быстро сообразил, кем является четвертый житель. Как он это сделал?

Куб и его развертки

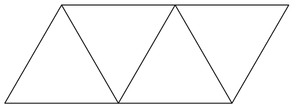
1. Выберите кубик, соответствующий данной развертке.

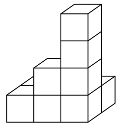


2. Из фигур на рисунке к задаче выберите те, которые являются развертками куба. Вырежьте их и покажите, как из них склеить куб.



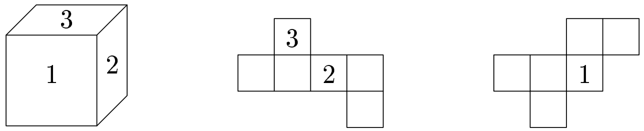
3. У Буратино была бумага, с одной стороны оклеенная полиэтиленом. Он сделал заготовку, изображенную на рисунке слева, чтобы склеить из нее пакет для молока. Лиса Алиса сказала, что может сделать другую заготовку и склеить такой же пакет. Какую?



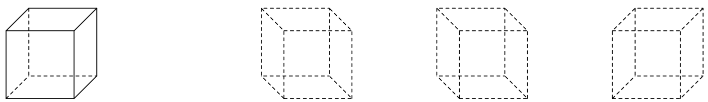


4. Изображенная на рисунке (справа и выше) фигура состоит из кубиков. Сколько их?

5. На видимых гранях куба проставлены числа 1, 2 и 3. А на развертках – два из названных чисел или одно. Расставьте на развертках куба числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, чтобы сумма чисел на противоположных гранях была равна 7.



6. Пунктирными линиями на рисунке обозначены невидимые ребра куба, сплошными линиями показаны видимые ребра. Мы смотрели на этот куб справа сверху. На рисунках а, б, в проведите сплошные линии так, чтобы куб был виден: а) справа снизу; б) слева сверху; в) слева снизу.



а б в

---

7. Деревянный куб покрасили снаружи синей краской. После этого каждое ребро поделили на 5 частей и распилили данный куб на маленькие с ребром в 5 раз меньше. Сколько получилось маленьких кубиков? У скольких из них окрашены: а) три грани? б) две грани? в) одна грань? г) ни одной?

---

8. Отрезок, соединяющий две наиболее удаленные друг от друга вершины куба, называется его диагональю. Как измерить диагональ непустого куба, используя линейку и имея в наличии три таких куба?

Нестандартные задачи и обучение математике

П.В. Чулков

учитель математики ФМШ №2007

В настоящей публикации рассматриваются вопросы организации творческой деятельности учащихся 5 – 6 классов по решению нестандартных задач.

Постановка проблемы. В современной школе, как правило, учащиеся решают стандартные задачи с помощью заранее известного стандартного метода.

Это неудивительно. В условиях сокращения времени, отводимого на математику, трудно найти время на решение нестандартных задач. В лучшем случае их включают в необязательные домашние задания для наиболее сильных учащихся и затем разбирают некоторые из задач на уроке. Что же касается кружков, то там занимаются учащихся, которые уже успели заинтересоваться математикой, а таких сравнительно немного. Остальным приходится туго: они встречаются с нестандартными задачами уже на вступительных экзаменах, не имея необходимых навыков творческой работы, что равносильно провалу.

Как следствие бытует мнение, что большое количество детей — «гуманитарии», что понимается именно неспособность изучать математику.

Конкурс по решению задач — это математическая олимпиада, которая проводится в течение всего учебного года по системе: каждую неделю — пять задач (в дальнейшем — «пятерка»).

Задачи ученики решают дома, что не исключает возможности консультаций с родителями, обсуждения задач с товарищами, заимствование решений из книг и т. д.

Идеально, когда ребенок решает конкурсные задачи самостоятельно, но что делать, когда учитель вдруг обнаруживает, что ребенку помогают родители? Если такой помощи слишком много, то это означает, что предлагаемые задачи чересчур трудны, и трудность предлагаемых задач следует несколько снизить.

Итоги олимпиады подводятся: вначале каждую неделю, затем — раз в месяц, затем — раз в четверть и т. д. При подведении итогов учитывается количество и качество решенных задач, но проводятся и другие "мини" — конкурсы: на лучшую тетрадь, на самое красивое решение задач, на лучший рисунок к задаче и т. д. Призы — книги по математике, грамоты, конфеты и т. д. выдаются регулярно.

Но конкурс — это не только олимпиада с призами, но и обязательное для всех учебное задание! Каждую неделю за него выставляется оценка, а в конце четверти подсчитывается средний балл, существенно влияющий на итоговую оценку за четверть. Итоговый результат можно повысить, решив несколько дополнительных задач или получив баллы успешно выступив на той или другой олимпиаде.

Задачи (вместе с решением) ученики записывают в отдельную тетрадь — по одной задаче на странице (для нерешенных задач оставляют место). Кроме задач конкурса в эту тетрадь можно записывать и другие нестандартные задачи: различных математических олимпиад, взятые из учебников, сборников задач и т. д.

Учитель разбирает задачи на уроке — недостающие и неполные решения учащиеся должны дописать и исправить. При этом важно обратить внимание на собственные (пусть неполные) решения и выделить все ценное, что в них содержится.

Таким образом, в конце учебного года у каждого школьника — свой собственный сборник нестандартных задач по математике с решениями (не менее 150 задач).

Методика работы с задачами.

Основа конкурса — система задач, объединяющая несколько серий взаимосвязанных друг с другом задач. Серия — это последовательность задач, идейно связанных друг с другом. Задачи в серии могут быть объединены:

- *сюжетно*, например, задачи «про Ивана-царевича»;
- *тематически*, например, задачи на тему «признаки делимости»,
- *логически*, например, задачи на опровержение с помощью контрпримера, доказательство от противного, построение алгоритма и так далее;
- *психологически*, например, задачи-ловушки.

Задачи каждой серии встречаются в конкурсе постоянно, в течение всего года. Повторяемость идей, растянутая во времени («редко, но долго!»), обеспечивает лучшее усвоение этих идей, поскольку «подсказывает» школьникам ответ на вопрос: какая задача из числа решенных ранее похожа на ту, что решается сейчас?

Понятно, что одна и та же задача может принадлежать разным сериям.

При подборе задач желательно руководствоваться следующими требованиями:

1) Задачи в «пятерках» должно быть подобраны так, чтобы 2–3 из них были доступны большинству школьников. Одна из задач в «пятерке» — более трудная, обычно связана с новой темой.

2) Постоянно встречаются задачи, для решения которых не требуется немного сообразительности, смекалки, желания преодолевать трудности; это шанс начать «новую жизнь» для тех учеников, кто еще не начал учиться по настоящему.

3) Присутствуют задачи «на пропедевтику», подготавливающие школьников к систематическому изучению того или другого программного материала.

4) Много логических задачи и задач на составление алгоритмов (переливания, разрезания, взвешивания) — важность таких задач — недооценивается.

5) Дополнительные задачи обычно похожи на уже разобранные задачи основного курса, — это позволяет и не слишком сильным, но старательным ученикам добиваться хороших оценок (большинство учеников 5 – 6 класса хочет учиться на 4 или 5).

6) Задачи первого полугодия 5 класса сравнительно просты, — дело в том, что дети должны научиться записывать их решения, грамотно оформлять свои мысли, что для 10 – 11 летних детей не просто.

7) Каждый учебный год учащимся предлагается новый набор задач, сохраняя при этом общую направленность курса.

Важнейший этап работы — разбор задач.

При разборе задач с учащимися желательно:

1) ссылаться на уже решенные задачи. Материал лучше усваивается, если в сознании он связан с другим материалом;

2) В первоначальном обучении математике слишком много уравнений и слишком мало логики, что сказывается в дальнейшем, поэтому там, где возможно решение без уравнений — желательно показывать такое решение. Воспроизведение материала в словесной форме требует от учеников больших логических усилий, и поэтому лучше развивает их мышление. Умение излагать материал в словесной форме, является важнейшим показателем уровня развития математического мышления.

3) Показывать различные способы решения задач. Так почти в большинстве текстовых задач, кроме "арифметического", можно рассмотреть решение "алгебраическое" (уравнение). Роль учителя — дать сравнительный анализ таких способов;

4) Анализировать собственные (пусть неполные) решения учеников, выделять то ценное, что в них содержится.

На начальном этапе работы (обычно соответствует первому полугодию 5 класса, но может продолжаться и дольше) систематическое решение и обсуждение нестандартных задач становится деятельностью привычной для школьников, дети начинают верить в свои силы, так как их участие в конкурсе трудоемко, но успешно.

Затем появляются первые "внешние успехи" — дети начинают побеждать на олимпиадах, конкурсах, интеллектуальных марафонах. Но главный успех, в том, что они уже больше не сдают на олимпиадах "пустых" работ, — уж одну-две задачи им удается решить практически всегда.

Данная методика применяется автором с 1983 года (школы №№5, 109, 629, 2007).

Автор благодарен за сотрудничество и полезную критику: В.Н. Лебедеву, А.В. Егорову, Ф.А. Пчелинцеву (шк. №5), М.Г. Потаповой, М.А. Резниковой (шк. №150), Н.В. Васюк, О.Ф. Хачатуровой, Е.Н. Симагиной (шк. №109), А.Д. Блинкову, К.П. Кочеткову, Т.П. Барановой (шк. №218) и многим другим.

Литература.

[1] Чулков П.В. Математика: Школьные олимпиады: Методическое пособие. 5 – 6 кл. — М., Изд.-во ЭНАС, 2003.

[2] Чулков П.В. Олимпиады и "обычная" школа // Сборник докладов участников III региональной научно-практической конференции "Профессиональная ориентация и методика преподавания в системе школа-вуз", 26 марта 2002 года, том 2. — М., МИРЭА, 2002.

[3] Пчелинцев Ф.А., Чулков П.В. Математика. 5 – 6 класс. Задачи на развитие математического мышления с решениями и ответами. 2 изд. испр. — М.: 2001.

[4] Потапова М.Г., Чулков П.В. Нестандартные задачи для пятиклассников // Математика. Приложение к газете "Первое сентября" №28 – 29. 1996.

[5] Потапова М.Г., Резникова М.А., Чулков П.В. Нестандартные задачи для шестиклассников // Математика. Приложение к газете "Первое сентября" №38 – 40. 1996.

Кружки Малого Мехмата для младших школьников

Е.А. Чернышева

учитель математики гимназии 1543

учитель математики и информатики школы №17,

руководитель параллели 6 *классов Малого Мехмата МГУ*

Кружок при мехмате МГУ «Малый мехмат» является открытым и бесплатным для всех школьников 6 – 11 классов, интересующихся математикой.

Цели кружка первого года:

- дать возможность реализовать свои потребности детям, интересующимся решением задач;
- показать школьникам красоту и разнообразие математических идей, с которыми они никогда не сталкивались в школе;
- развивать логическое мышление.

Задачи преподавателя кружка первого года:

- научить школьника понимать, что значит «решить задачу»;
- развить и сохранить интерес школьника к занятиям математикой.

При этом преподавателю надо обратить внимание на то, что разнообразие формулировок, цветные иллюстрации, игры способствуют развитию интереса, но нужно донести до детей ценность и красоту самой математики, а не внешней канвы. Кроме того, поскольку кружок открытый, в нём участвуют дети разных способностей, но интересно должно быть каждому.

Занятия (продолжительность которых 1,5 – 2 часа) проходят по следующей схеме. Каждому школьнику выдаётся листочек с заданием. Дети решают задачи и сдают их устно преподавателям. Если решение неверное, преподаватель делает подсказки, задаёт воспросы, и оставляет школьника размышлять над задачей дальше. В любом случае, учитель всегда старается помочь более аккуратно и грамотно рассказать решение. Самые интересные задачи преподаватели обычно разбирают в начале занятия. При этом рассказ решений длится не более 20 минут. Нерешённые задачи школьник имеет возможность сдать на следующем занятии в письменном виде. Преподаватели отмечают в ведомости результаты детей, и дети, как правило, соревнуются друг с другом — с соседом по парте, с друзьями. Но общий итог никогда не подводится, и результаты каждого ребёнка могут быть известны другим, только если он сам этого хочет. Задачи подбираются так, чтобы первые две-три из них были решены основной частью группы, а последние две — одним или двумя школьниками из двухсот.

Задачи одного занятия, как правило, не объединяются одной темой. При этом основные математические идеи, которые обычно принято рассказывать на кружке первого года (чётность, принцип Дирихле, делимость, раскраски, комбинаторика и т. д.), встречаются в качестве вкраплений в занятия, иногда очень существенных, но не называются. Таким образом, впоследствии, когда ребёнок на кружке или на факультативе столкнётся со структурированными тематическими занятиями, его восприятие сформулированной преподавателем математической идеи будет подкреплено опытом решения задач.

В качестве иллюстрации ниже приведены два занятия. Одно из них было проведено в начале учебного года, другое — во второй половине. Задачи каждого из них объединены нематематическим сюжетом. В первом занятии все задачи разнообразны по математическому содержанию. Более того, первые две из них скорее на здравый смысл, чем на знание математики. Большинство задач второго занятия решаются с помощью раскраски, но эта идея возникает у школьника естественно (в первых задачах шахматная раскраска уже существует и нужно ей просто воспользоваться). При этом наиболее сильные дети про себя сформулируют принцип решения подобных задач, и некоторые из них смогут им впоследствии воспользоваться. Большая часть детей на данном этапе в каждой задаче заново будет открывать для себя эту идею.

Ах, время, время...

Те часы, которые стоят, лучше тех, что всегда спешат на 1 *минуту — ведь они показывают точное время дважды в сутки*!

1. В 4 часа дня с первого до последнего удара часов прошло 6 секунд. Сколько времени пройдет с первого до последнего удара в полдень?

2. На часах, которые ходят точно, оторвались все цифры, и на часах остались только деления без подписей. Как узнать, куда нужно прикрепить цифры на циферблат? (Других часов у Вас нет.)

3. Катя на выполнение домашнего задания тратит на 10% больше времени, чем Лена, а Маша тратит на 10% меньше времени, чем Катя. Кто из девочек быстрее всего делает домашнее задание?

4. Есть двое песочных часов: на 5 минут и на 8 минут. Как можно с их помощью засечь 7 минут?

5. Сколько раз в сутки стрелки часов образуют прямой угол?

6. Разрежьте циферблат на две части так, чтобы а) сумма чисел в каждой части была одинаковой; б) сумма цифр в каждой части была одинаковой.

7. Водитель дальнобойного грузовика взглянул на приборы своей машины и увидел, что спидометр показывает 25952. «Какое красивое число я проехал. Наверное, не скоро выпадет следующее красивое число», подумал он. Однако через час двадцать минут на спидометре высветилось следующее красивое число. С какой скоростью ехал грузовик?

8. Петин будильник испорчен: он спешит на 4 минуты в час. В 7 часов вечера Петя установил на нем точное время и еще поставил звонок на 7 часов утра. Во сколько Петя проснётся?

Шахматы и доски

1. Шахматный конь стоит в левом нижнем углу доски. Может ли он через а) 4; б) 5; в) 1803 хода вернуться на исходное поле?

2. Из шахматной доски вырезали две противоположные угловые клетки. Можно ли разрезать оставшуюся часть на доминошки?

3. В каждой клетке треугольной доски размером $7 \times 7 \times 7$ сидит жук. Одновременно каждый жук переполз на соседнюю по стороне клетку.
а) Докажите, что хотя бы одна клетка оказалась при этом свободной.
б) Какое наименьшее число клеток могло оказаться свободными?
в) Задача-конкурс. Придумайте такое «переползание» жуков, чтобы как можно больше клеток оказались пустыми.

4. Какое наибольшее число а) ладей; б) королей можно расставить на шахматной доске, чтобы они не били друг друга?

5. Можно ли разрезать шахматную доску на доминошки так, чтобы никакие две доминошки не образовали квадрат 2×2?

6. На каждом поле доски 11×11 стоит шашка. Настя и Лена играют в такую игру. За один ход можно убрать одну шашку или любую «полоску» из шашек (несколько шашек, расположенных подряд без пропусков в столбце или строке). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Может ли одна из девочек ходить так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни старалась её победить соперница?

7. Можно ли разрезать шахматную доску на 15 вертикальных и 17 горизонтальных доминошек?

Проблемы мотивации школьников 7 – 9 классов

А.А. Волкова

учитель математики школы №174

с углубленным изучением химии

Если пятиклассники, вырвавшись из строгих рамок начальной школы, еще полны всяческих желаний и интересов в области учебы, то к концу седьмого класса часто все интересы, связанные со школой, угасают, накапливается учебная усталость, начинает казаться, что ничего интересного в школе уже не будет. В этот же период родители начинают задумываться о будущем своих чад. Если ребенок более или менее прилично учится, то его пытаются определить в класс с углубленным изучением математики. Математика — одна из ранних специализаций (в языковую школу уже поздно). Кроме того, математику надо сдавать в большую часть вузов, да и вообще, «ум в порядок приводит». Это мысли родителей, а ребенок ни таких мыслей, ни желаний порой не имеет.

Таким образом, очень часто в восьмой класс с углубленным изучением математики попадают абсолютно не мотивированные на напряженную работу и не очень подготовленные дети. Программа восьмого класса достаточно серьезная, объемная и технически трудная (одни только преобразования дробных выражений в первой четверти чего стоят). И дети начинают «увядать». До восьмого класса они учились без троек, а здесь появляются двойки, на уроке тяжело, домашние задания большие, ради чего все эти мучения не понятно. Как сделать учебу этих детей более привлекательной для них? Как сделать, чтобы им хотелось приходить в класс, на урок математики, хотелось работать, хотелось преодолевать трудности?

Прежде всего, пытаюсь сделать так, чтобы именно с математикой были связаны положительные эмоции в школе. Чтобы класс стал коллективом единомышленников, чтобы ученикам было приятно, комфортно работать вместе. Одному ребенку часто бывает трудно справиться с задачей, поэтому именно в восьмом классе на уроках и во внеурочной деятельности я стараюсь применять групповые (командные) формы работы. Например, промежуточные зачеты по темам провожу в форме математической регаты. Причем команды формирую по силам — сильные ученики с сильными, слабые со слабыми. Задания составляю так, чтобы в каждом туре были задачи разных уровней. Таким образом,

слабым или ленивым ученикам не удается отсидеться за спинами более сообразительных и подготовленных, но и последними быть, самолюбие не позволяет. Можно применять на уроках командное решение и защиту задач. Здесь команды формируются уже по-другому, так, чтобы они были равны по силам. А того, кто будет защищать задачу и оппонировать, выбирает учитель. То есть, по задаче должен быть готов отвечать каждый член команды, значит, более сильный ученик должен объяснить всем остальным решение так, чтобы они могли его отстоять.

Можно придумывать разные командные формы работы на уроках. Главная цель — создать рабочую обстановку в классе, придать уверенности ученикам.

Очень полезным в плане сплочения коллектива на почве математики является профильный лагерь. В нашей школе профильные лагеря проводятся один раз в год в учебное время в одном из пансионатов Подмосковья. В восьмом классе лучше всего его проводить в первой четверти. Желательно, чтобы поехали все ученики класса. 3 – 5 дней учащиеся занимаются по специальному плану. Каждый день в таком лагере должен быть расписан от подъема до отбоя. Занятия математикой (физикой, астрономией и др. профильными предметами) перемежаются с активным (спланированным) отдыхом. Обязательно в расписание включаются психологические тренинги на взаимодействие. Если в школе есть заинтересованный психолог, то можно проконсультироваться у него или почитать психологическую литературу. Психологический тренинг на взаимодействие — по сути, это любое задание (спортивное, математическое или любое другое), выполнение которого требует участия и взаимодействия всех членов команды. Проводить их можно на воздухе, например, математическое ориентирование, полоса препятствий и т. п. В полосе препятствий этапы должны быть такими, чтобы их нельзя было преодолеть в одиночку — только с помощью остальных членов команды. Можно проводит эти занятия в помещении. Задания не должны быть сложными. Математические задания можно взять из командного турнира Архимеда для шестых классов. А можно давать такие задания командам:

- за две минуты составить тематическую скульптурную композицию;
- у членов команды завязаны глаза. Команде дается лента или веревка со связанными концами, длиной около 4 м. Команде надо за 4 минуты изобразить правильный треугольник (любой заданный многоугольник). Предварительно дается время на обсуждение выполнения задания не вслепую;

- команда становится в шеренгу, у каждых двух соседей связываются две ноги (левая одного человека с правой другого). Перед командой ставятся легко сбиваемые препятствия (две планки на расстоянии около 1 м). Команда должна его преодолеть туда и обратно (не разворачиваясь);
- Из листа бумаги А4 вырезать дырку так, чтобы все члены команды по очереди могли через нее пролезть;
- команде дается набор предметов (произвольный). Например: лист бумаги А4, два пластиковых стаканчика, две трубочки для сока скрепка, булавка. Необходимо за ограниченное время построить «мост» через заданное препятствие (стол, стул и т. д.), чтобы оно продержалось не менее 30 секунд (например, чтобы успеть сфотографировать).

Таких заданий можно придумать много, да и в литературе найти, но самое главное — в обязательном последующем обсуждении. Членам команды надо задать вопросы: довольны ли они своими результатами; что можно было сделать лучше; что бы изменили в следующий раз и т. п. Вопрос о том, в чем причины неудачи можно задавать, если чувствуете, что обсуждение не перейдет в межличностные разборки. При обсуждении работы одной команды можно давать слово и членам других команд, если они присутствовали при работе команды. В ходе таких обсуждений дети учатся анализировать и контролировать свое поведение, работать в коллективе, считаться с другими членами коллектива, прятать свои излишние амбиции в интересах общего дела. Все это очень сплачивает детей, отношения в классе становятся более доверительными, снимается напряженность. А улучшение психологического климата ассоциативно связывается с занятиями математикой. Им становится интересно — тут-то и можно начинать их учить. Проблема немотивированности почти исчезает.

Первое знакомство с классом

А.Н. Андреева

учитель математики школы №91

Когда я прихожу первый раз в новый класс, меня естественно интересует вопрос: с кем мне предстоит работать? Какова реакция детей, каков их интерес к предмету, какова их наблюдательность. Первый урок я посвящаю очень простым занимательным задачам и смотрю на глаза детей.

Вот образцы задач и вопросов первого урока.

Задача 1. Как подсчитать число ступенек эскалатора?

Ответ, который дают сразу несколько детей: на ступеньках есть номера (через каждую пятерку) и надо только дождаться когда появятся ступеньки с начальными номерами и посмотреть самое большое число перед ним. Причем я тоже не знаю другого решения этого вопроса, и не стесняюсь сказать им об этом.

Задача 2. Найти тройку натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению $28x + 30y + 31z = 365$.

Замечание: реакция всех детей вначале (особенно пятиклашек): мы не умеем решать уравнения с тремя неизвестными.

И вдруг кто-то видит идею: 365 — это число дней в году, а числа 28, 30, 31 — это число дней в разных месяцах. И сразу находится ответ. Ясно, что $x = 1$ — это соответствует февралю. Считаем месяца по 30 дней (апрель, июнь, сентябрь, ноябрь) и получаем $y = 4$. Окончательно, $z = 7$, что соответствует оставшимся месяцам: январь, март, май, июль, август, октябрь и ноябрь. На этом с «пятиклашками» и «шестиклашками» задачу считаем решенной.

Если работаем с учениками старших классов, то имеет смысл сразу говорить и приучать их к аккуратности. Да, мы получили один ответ подбором, но их может быть несколько. Если ответ угадан подбором, то надо доказать, что мы угадали все решения, чтобы считать задачу полностью решенной.

Решение: во-первых, докажем, что переменные удовлетворяют еще одному уравнению: $x+y+z = 12$ (идея подсказана числами, связанными с числом дней в году и числом дней в месяце). Докажем это, используя метод от противного. Допустим, что $x+y+z \neq 12$, тогда возможно два случая: или $x+y+z>12$, или $x+y+z<12$. Если учесть, что искомые числа натуральные, то эти условия можно записать более точно следующим образом: $x+y+z\geq 13$ или $x+y+z\leq 11$. Рассмотрим случай, когда сумма не меньше 13. Запишем соотношения $28x+30y+31z>$ $>28x+28y+31z>28x+28y+28z=28(x+y+z)\geq 28\cdot 13=364$. Между левой и правой частью неравенства стоит два строгих неравенства, следовательно, $28x+30y+31z\geq 366>365$. Получили противоречие.

Рассмотрим случай, когда сумма не больше 11. Тогда $28x+30y+$ $+31z<31x+31y+31z=31(x+y+z)\leq 31\cdot 11=361<365$, следовательно, и в этом случае получаем противоречие. Обратите внимание, что мы существенно использовали числа 13 и 11, и более грубые оценки не дали бы результата. Итак, мы получили, что натуральные искомые числа удовлетворяют на самом деле системе (второе условие мы вначале угадали, исходя из «житейских» соображений, а потом его доказали):

$$\begin{cases} 28x+30y+31z=365, \\ x+y+z=12 \end{cases}$$

Умножая второе уравнение на 28, и вычитая из первого уравнения, получим равносильную систему

$$\begin{cases} 0\cdot x+2y+3z=29, \\ x+y+z=12 \end{cases}$$

Система из двух уравнений с тремя переменными. Будем решать подбором, постараемся, это сделать как можно проще, Из первого уравнения следует, что z нечетное число и $z\leq 9$. При $z=9$, получим $y=1$ и $x=2$. Если $z=7$, то $y=4$ и $x=1$. При $z=5$, получаем $y=7$ и $x=0$, что не является решением, так как 0 не натуральное число. Если же $z=3$ или $z=1$, то получим, что $x<0$, то есть не является натуральным числом.

Ответ: $(1,4,7)$; $(2,1,9)$.

Задумаемся над вопросами: такая задача единственная в своем роде или мы можем придумать похожую. Кто составляет задачи? Или все задачи имеют тысячелетнюю историю? Или только «боги горшки обжигают»? Оказывается, наши современники — математики, и не только математики, придумывают задачи. Предлагаю детям придумать аналогичную задачу, и почти тут же получаю ответ: *найти тройку натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению* $29x+30y+31z=$ $=366$. Дети вспомнили о високосном годе.

Так можно говорить, обыгрывать и обобщать почти любую задачу.

В следующей задаче я описываю случай, который произошел со мной.

Задача 3. Подходя к дому и думая, что на этаже шесть квартир, я подсчитала, что мне надо быть на четвертом этаже. Когда я поднялась, то оказалось, что на этаже семь квартир, но этаж я выбрала верно. В какую квартиру я шла?

Решение. Если бы на этаже было бы по шесть квартир, то на четвертом этаже были бы квартиры с номерами 19, 20, 21, 22, 23 и 24. Если бы на этаже было бы по семь квартир, то на четвертом этаже были бы квартиры с номерами 22, 23, 24, 25, 26, 27 и 28. Следовательно, я могла идти в квартиру с номером 22, или 23, или 24.

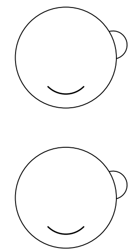
Задумаемся над вопросом: А если ли этаж, на котором только одна квартира удовлетворяет условию?

Да, такой этаж есть. Это шестой этаж. Если бы на этаже было бы по шесть квартир, то на шестом этаже были бы квартиры с номерами 31, 32, 33, 34, 35 и 36. Если бы на этаже было бы по семь квартир, то на шестом этаже были бы квартиры с номерами 36, 37, 38, 39, 40, 41 и 42. Условию удовлетворяет квартира с номером 36.

Даже по такой простой задаче можно придумать еще вопросы.

Вот пример задачи, в которой трудно найти решение, хотя решение и легко понять.

Задача 4. Два друга стоят на балконах, друг под другом. Они одновременно вскрикнули, кто раньше услышит другого? Предполагаем, что звук во все стороны распространяется равномерно.



Подсказка. После того как дети долго думают, можно предложить нарисовать чертеж. Эта подсказка их очень удивляет. Они пробуют зачем-то рисовать балконы, волосы друзей и много что другое, хотя достаточно нарисовать простую схему, из которой ясно, что нижний услышит друга быстрее, так как расстояние ото рта верхнего до его ушей меньше, чем расстояние от его рта до ушей верхнего.

Уже в шестом классе, где дети знают пропорции, можно впервые детям дать задачу на бесконечные суммы.

Задача 5. Мама с сыном едят шоколадку. Сын откусывает половину и отдает маме, мама откусывает половину остатка и передает сыну и так далее. Какую часть шоколадки съест сын?

Замечание. Приведен пример задачи, где математическая модель — пример бесконечного процесса — заведомо отличается от жизненной ситуации.

Решение. Почти сразу дети записывают две бесконечные суммы $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\ldots$ — это часть шоколадки, съеденная сыном и $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+$

$+\dfrac{1}{64}+\ldots$ — часть шоколадки, съеденная мамой. Затем почти все дети сразу замечают, что каждое слагаемое в первой сумме в два раза больше соответствующего слагаемого во второй сумме, следовательно, шоколадка съедена в отношении $2:1$. И тогда получаем равенство $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{32}+\cdots=\dfrac{2}{3}$.

Ответ: сын съест $\dfrac{2}{3}$ шоколадки.

Цель таких уроков:

- знакомство с классом;
- заинтересовать математикой учеников; заманить детей в мир математики, а затем уже играть с ними в серьезную математику;
- показать детям, что математика не застывшая наука и жизнь ставит свои задачи;
- самое главное — это научить детей думать, видеть разные закономерности;
- как можно раньше приучать детей к занимательным задачам;
- решая занимательные задачи, нужно обязательно подчеркивать, что знание основ математики обязательно;

Я не предлагаю задачи для самостоятельного решения, как это было принято раньше. Я назову сайт в Интернете, где таких задач тысячи: *www.mccme.ru* — это сайт Московского центра непрерывного математического образования.

Применение программы «Живая геометрия»

А.Н. Андреева, А.А. Волкова

Покажем примеры того, как можно использовать эту программы на уроках и во внеклассной деятельности.

Проиллюстрируем некоторые известные задачи по темы «Площади».

Задача 1. Докажите, что треугольники с общим основанием и вершиной на прямой, параллельной основанию, равновелики.

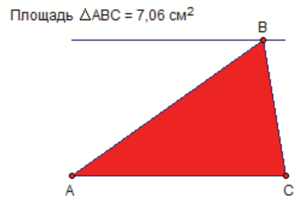


Рис. 1а

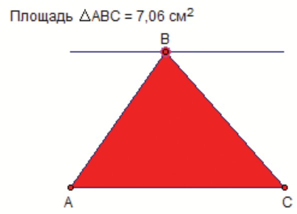


Рис. 1б

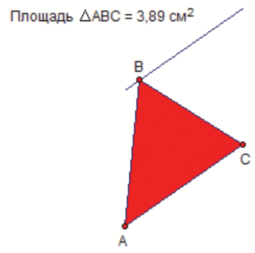


Рис. 1в

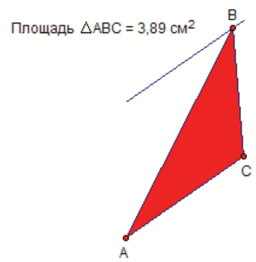


Рис. 1г

Используя программу «Живая геометрия», можно двигать на экране вершину треугольника по заданной прямой и следить за тем, что площадь не меняется (см. рис. 1а–б). Затем можно двигать любую из вершин основания и следить за изменением площади (см. рис. 1в–г).

Можно заранее не формулировать утверждение, а предложить учащимся сделать это самостоятельно после проделанных операций.

Задача 2. На стороне AB параллелограмма $ABCD$ взята произвольная точка K и соединена с точками C и D. Найдите отношение площади треугольника KCD к площади параллелограмма.

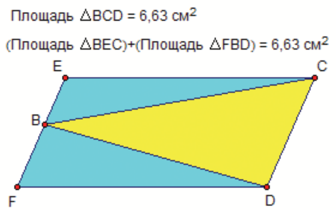


Рис. 2а

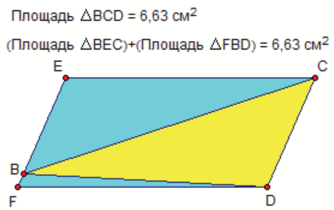


Рис. 2б

Включая анимацию точки K по AB (см. рис. 2а–б), можно наглядно убедиться, что отношение площадей не меняется.

Задача 3. Внутри параллелограмма $ABCD$ взята произвольная точка M. Докажите, что сумма площадей треугольников AMD и BCM равна сумме площадей треугольников AMB и DMC.

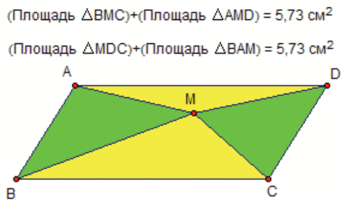


Рис. 3а

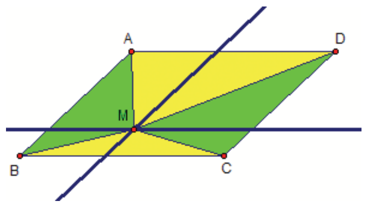


Рис. 3б

Включая анимацию точки M (см. рис. 3а), можно убедиться в верности доказываемого утверждения; а дополнительные построения на рис. 3б помогают строго доказать утверждение.

Задача 4. В трапеции проведены диагонали. Докажите, что площади треугольников, содержащих боковые стороны трапеции, равны.

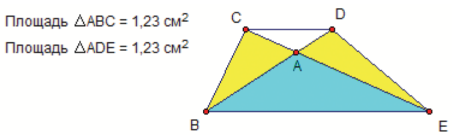


Рис. 4

Равновеликие треугольники BCE и BDE, изображенные на рис. 4, имеют общую часть — треугольник BAE (смотри задачу 1), отсюда следует нужное утверждение.

Рассмотрим примеры применения «Живой геометрии» на внеклассных занятиях.

Задача 5. Стороны произвольного треугольника разделены на три равные части и точки деления соединены с противоположными вершинами треугольника. Найти отношение площади треугольника к площади получившегося внутреннего шестиугольника.

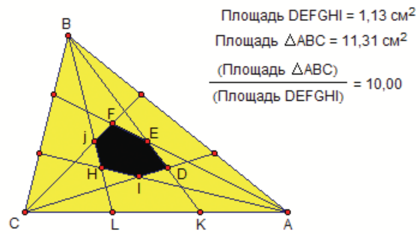


Рис. 5

Ресурсы программы позволяют убедиться, что это отношение остается неизменным для любого треугольника и равно 10. Попробуйте это доказать.

Задача 6. Дан параллелограмм $KLMN$, у которого $KL = 8$, $KN = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$ и $\angle LKN = 45°$. На стороне KL взята такая точка A, что $KA : AL = 3 : 1$. Через точку A параллельно LM проведена прямая, на которой внутри параллелограмма выбрана точка B. На стороне KN выбрана точка C так, что $KC = AB$. Прямые LC и MB пересекаются в точке D. Найдите величину угла LAD.

Обдумываем условие. Читая внимательно условие задачи, обратим внимание на то, что точка B — произвольная точка на отрезке AF параллельном LM. Означает ли это, что величина угла LAD не зависит от положения точки B? Если да, то точка D принадлежит некоторой фиксированной прямой. Какой? Рассмотрим "крайние" положения точки B. Если точку B совместить с точкой A, то мы не получим угла, так как в этом случае точка D совпадет с точкой A. Интереснее совместить точки B и F, тогда MB совпадет с MN, LC совпадет с LN, а тогда точка D совпадет с точкой N. Делаем предположение, что точка D находится на прямой AN.

Теперь займемся анимацией точки B (см. рис. 6а–б) и действительно увидим, что D перемещается по прямой AN. Интересно отметить еще, что если анимировать точку M, то есть заставить ее двигаться, то, по-прежнему точка D двигается по прямой AN.

Интересен вопрос, что же остается неизменным при указанной анимации точки B? Это выбор точки A, то есть пропорция $KA : AL$ и острый угол параллелограмма.

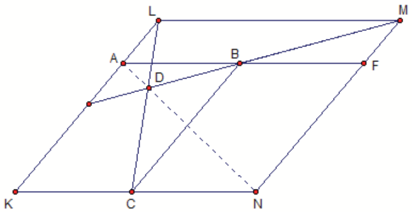


Рис. 6а

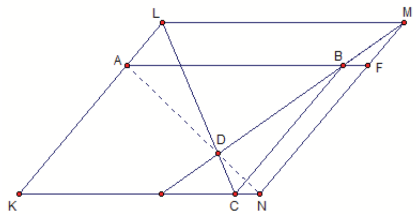


Рис. 6б

С помощью "Живой геометрии" мы сделали вывод, что точка D принадлежит отрезку AN (следовательно, надо найти угол LAD, равный углу $\angle LAN$, что не составляет труда), но теперь надо строго доказать этот факт, чтобы иметь право им пользоваться.

Решение. Решим эту задачу, применяя вектора.

I. Докажем вначале, что точка D принадлежит отрезку AN.

1. Введем вектора $\overline{KL} = \overline{a}$, $\overline{KN} = \overline{b}$, тогда $\overline{AN} = \overline{b} - \dfrac{3}{4}\overline{a}$.

2. $\overline{AB} = \overline{KC} = \gamma\overline{b}$ $(0 \le \gamma \le 1)$; $\overline{LC} = \gamma\overline{b} - \overline{a}$. Пусть точка T принадлежит прямой AN, тогда $\overline{LT} = \alpha\overline{LC} = \alpha(\gamma\overline{b} - \overline{a})$; $\overline{MT} = \overline{ML} + \overline{LT} = -\alpha\overline{a} + \overline{b}(\alpha\gamma - 1)$. Также, $\overline{MB} = \overline{ML} + \overline{LT} = -\dfrac{1}{4}\overline{a} + \overline{b}(\gamma - 1)$.

3. Подберем α так, чтобы MB была параллельна MT (если это возможно). Используя пропорциональность соответствующих коэффициентов, получим $\alpha = \dfrac{1}{4 - 3\gamma}$.

4. Поскольку $\overline{AT} = \overline{AL} + \overline{LT} = \dfrac{\gamma}{4 - 3\gamma}(\overline{b} - \dfrac{3}{4}\overline{a}) = \dfrac{\gamma}{4 - 3\gamma}\overline{AN}$, то $\overline{AT} || \overline{AN}$, следовательно, точка T принадлежит AN, а точки T и D совпадают, так как обе являются точками пересечения прямых LC и MB.

II. Найдем нужный нам угол:

$$\cos LAN = \frac{\overline{AN} \cdot \overline{AL}}{|\overline{AN}| \cdot |\overline{AL}|} = \frac{(\overline{b} - \frac{3}{4}\overline{a}) \cdot \frac{\overline{a}}{4}}{\sqrt{(\overline{b} - \frac{3}{4}\overline{a})^2} \cdot \frac{|\overline{a}|}{4}}.$$

Осталось использовать данные задачи: $|\overline{a}| = 8$, $|\overline{b} - \dfrac{3}{4}\overline{a}| = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$, $\overline{a} \cdot \overline{b} = 8(3\sqrt{2} + \sqrt{6})\cos 45^\circ$ и получить ответ $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3} - 2$ или $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\alpha = 105^\circ$.

Геометрия в 7 классе

Л.Е. Федулкин

учитель математики школы №40

В 7 классе при изучении геометрии учащиеся испытывают очень серьезные затруднения, впервые сталкиваясь со строгими математическими рассуждениями.

Традиционный вопрос: «Что надо сделать?» становится как бы второстепенным, уступая главное место вопросу: «Почему надо сделать именно это?»

Аксиоматический подход к изучению геометрии подразумевает строгое доказательство каждого утверждения. Именно это и вызывает наибольшие трудности у учащихся. Им не понятно, почему они должны доказывать то, что и так очевидно им, исходя из их жизненного опыта, или почему они должны обосновывать каждое свое действие, если, они правильно выполняли правильные действия и в результате получили правильный ответ. Поэтому основной задачей учителя на первых уроках геометрии является задача приучить учащихся после каждого высказывания задавать себе вопрос «почему?» и отвечать на него. Причем, учащиеся должны точно знать, что ответ на вопрос «почему?» следует искать или среди определений, или среди основных свойств (аксиом), или среди ранее доказанных утверждений (теорем).

Рассмотрим некоторые конкретные проблемы, которые возникают при изучении геометрии в седьмом классе по учебному пособию «Геометрия 7–11» под редакцией А.В. Погорелова.

В первую очередь хотелось бы заметить, что большинство учащихся сразу не понимают смысла аксиом, а если и понимают их смысл, то не понимают для чего они нужны. Все это приходит позже, после многократного применения аксиом для решения задач и доказательства теорем. Поэтому, предложенное в учебнике и в примерном планировании расположение аксиом и учебного материала, оказывается нерациональным. Учащиеся выучивают аксиому, не понимая ее, так как она не подкреплена соответствующей практической базой, а к тому моменту, когда необходимо ее практическое применение, они ее уже забывают, и учитель вынужден терять лишнее время на ее повторное изучение. Например, аксиомы откладывания отрезков и углов, в соответствии с примерным планированием, изучаются на уроках 8 и 9 соответственно, а непосредственное применение их для доказательства теорем впервые встречается на уроке 19 «Перпендикулярные прямые», и на уроке 23 «Первый признак равенства треугольников», то есть соответственно через 5 и 7,5 учебных недель, после изучения соответствующей аксиомы. Аналогично, аксиома существования треугольника, равного данному, изучается на уроке 11, а впервые используется на уроке 23 и так далее. Поэтому представляется целесообразным не изучать все аксиомы сразу, единым блоком, а разнести их по всему курсу, изучая их непосредственно перед теми темами, в которых они будут использоваться.

Аксиоматический подход требует четкости и строгости, но именно этого, к сожалению, часто не хватает учебнику. Изложение материала дается с расчетом на то, что все учащиеся хорошо владеют ранее изученным материалом, и обладают хорошо развитым логическим мышлением, то есть в состоянии самостоятельно додумать не детализированные моменты доказательства. Кроме того, в учебнике имеются, мягко говоря, «некорректности». Многие определения сформулированы так, что учащиеся не в состоянии понять их самостоятельно, не говоря уже о том, что само слово «определение» впервые встречается только в §2, а до этого отрезок, луч (полупрямая), угол и т. д. «называются», но не «определяются».

Рассмотрим подробнее конкретные утверждения, данные в учебнике.

В п. 4 и п. 7 даются аксиомы измерения отрезков и углов, соответственно. Каждая из этих аксиом содержит два, не зависящих друг от друга утверждения: 1) существует положительная мера отрезка (угла); 2) мера отрезка (угла) равна сумме мер его частей. Ни в одной задаче оба эти утверждения одновременно не используются. Но если мы требуем от учащихся формулировку аксиомы, то они должны формулировать её полностью, в том числе и ту её часть, которая не нужна для решения (доказательства) задачи. Поэтому кажется более рациональным разбить каждую из этих аксиом на две: аксиому измерения (существует положительная мера) и аксиому разбиения (мера целого равна сумме мер его частей).

В п. 3 дается «определение» отрезка: «*Отрезком* называется часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих между двумя данными ее точками. Эти точки называются *концами отрезка*». То есть, в соответствии с этим определением, концы отрезка не принадлежат ему. Таким образом, автор называет отрезком то, что в скором времени в курсе алгебры будут называть «интервалом» (точнее — числовым интервалом), а не то, что будет называться «отрезком» (числовым отрезком). Аналогично даётся определение полупрямой в п. 6: «*полупрямой* или *лучом* называется часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих по одну сторону от данной ее точки, эта точка называется *начальной точкой* полупрямой». Из определения опять-таки следует, что начальная точка не принадлежит полупрямой. В п. 7 дается понятие луча, проходящего между сторонами угла: «Луч *проходит между* сторонами данного угла, если он исходит из его вершины и пересекает какой-нибудь отрезок с концами на сторонах угла». При этом, для развернутого угла делается исключение: «В случае развернутого угла мы считаем, что любой луч, исходящий из его вершины и отличный от его сторон, проходит между сторонами угла». Как понимать это «мы считаем?» Если это определение, то его так и следует сформулировать: «Любой луч, выходящий из вершины развернутого угла и отличный от его сторон, проходит между сторонами развернутого угла», а если это следует из общего определения луча, проходящего между сторонами угла (что более логично), то это утверждение надо доказать. Но, при данном определении луча, ни один отрезок с концами на сторонах развёрнутого угла не имеет общих точек ни с одним лучом, исходящим из вершины развёрнутого угла. Если бы определение луча включало бы в луч его начальную точку, то доказательство было бы тривиальным.

Многие определения сформулированы без учёта возрастных особенностей учащихся и трудны для понимания. Рассмотрим как пример определение дополнительных полупрямых. «Различные полупрямые одной и той же прямой, имеющие общую начальную точку, называются *дополнительными*». Попробуйте попросить учащихся после прочтения этой формулировки, объяснить вам, что такое дополнительные полупрямые. В лучшем случае вы получите ответ, что это две полупрямые, которые вместе образуют прямую (что, кстати, не верно, т. к. их общая начальная точка данной фигуре не принадлежит). А если вы попросите выделить те условия, которые должны выполняться, чтобы две полупрямые были дополнительными, то только наиболее развитые и сильные учащиеся смогут вам ответить, что эти полупрямые:

1) должны быть различны;
2) иметь общую начальную точку;
3) лежать на одной прямой.

Рассмотрим §2. В п. 14 автор доказывает теорему 2.1 : «Сумма смежных углов равна 180°», и делает из нее три вывода (следствия). Рассмотрим второе следствие: «Если угол не развернутый, то его градусная мера меньше 180°». Но, во-первых, нет никакого объяснения, почему это следует из теоремы, а, во-вторых, из этой теоремы следует совсем другое утверждение: «Если для какого-либо угла существует смежный ему угол, то градусная мера такого угла меньше 180°». Согласитесь, что эти утверждения отнюдь не равнозначны. Для их равнозначности должно быть истинным еще одно утверждение: «Для любого угла, кроме развернутого, существует смежный ему угол». Но такого утверждения в учебнике нет, хотя его и нетрудно доказать.

К сожалению, подобные «недосмотры» в учебнике встречаются регулярно. Изложение материала в учебнике скорее рассчитано на человека знавшего геометрию, но забывшего, чем на ученика, впервые ее изучающего, да, к тому же, привыкшего все, что говорит учитель или написано в учебнике, принимать на веру, без доказательств. Как следствие этого, часто приходится встречаться с тем, что учащиеся просто зазубривают доказательства теорем, будучи не в состоянии понять их.

В п. 21 написано: «Как мы знаем, при доказательстве теорем **разрешается** пользоваться аксиомами и доказанными ранее теоремами. Обычно, **в доказательстве ссылаются не на номер аксиомы по списку, а на ее содержание**».

РАЗРЕШАЕТСЯ. Хочется задать вопрос, а чем же еще тогда пользоваться, если не аксиомами и теоремами. Не разрешается, а ТРЕБУЕТСЯ. Говоря о том, что обычно ссылаются не на номер, а на содержание, сам автор постоянно ссылается на номера аксиом и теорем.

Несколько слов хочется сказать и об оформлении учебника. Учебник должен давать возможность учащимся самостоятельно изучать пропущенный в школе материал и служить образцом оформления решаемых задач и доказываемых теорем, а именно этим требованиям он не отвечает. Ни одна из доказанных теорем или решённых в учебнике задач не отвечает традиционным требования к оформлению геометрических задач, таких, как «дано», «чертёж», «решение», «доказательство» и «ответ». При самостоятельном изучении геометрии по данному учебнику учащийся, скорее всего, научится писать сочинения на тему геометрической задачи, чем записывать правильное математическое решение или доказательство.

О недостаточности и неполноте учебных заданий в учебнике говорилось уже так много, что не хочется повторяться, тем более что сегодня уже вполне достаточно дидактических материалов восполняющих этот пробел.

Анализировать просчеты можно было бы и далее, но и приведенных выше примеров достаточно, чтобы сделать вывод, что перечисленные выше недостатки затрудняют (а для целой группы учащихся делают просто невозможной) самостоятельную работу с учебником.

Кроме того, хотелось бы обратить внимание на один, достаточно важный момент, о котором не упоминается не только в учебнике, но

и в большинстве дидактических материалов. Речь идёт о задачах на нахождении углов, получившихся при пересечении двух прямых. И в учебнике, и в большинстве дидактических материалов подразумевается, что рассматриваются только четыре угла, не являющиеся развёрнутыми. Но при пересечении двух прямых получается шесть углов — два развёрнутых и четыре неразвёрнутых. Поэтому стандартная задача «Один из углов, получившихся при пересечении двух прямых на 20° больше другого. Найдите все образовавшиеся углы». Имеет два различных решения (изложу их кратко):

1) Если один из этих углов развёрнутый, то второй равен 160°. Далее получаем ответ: два угла по 180°, два угла по 160° и два угла по 20°.

2) Если ни один из этих двух углов не является развёрнутым, то (стандартное решение) получаем ответ: два угла по 100°, два угла по 80° **и два угла по** 180° (вот этих то двух углов, получившихся при пересечении двух прямых, нет в ответе 99,9% учащихся).

Следовательно, необходимо либо разбирать с учащимися оба решения, либо формулировать задачу следующим образом: «Один из углов, получившихся при пересечении двух прямых и не являющийся развёрнутым, на 20° больше другого. Найдите все образовавшиеся углы, не являющиеся развёрнутыми».

Попыткой исправить некоторые из указанных недостатков явилось вспомогательное пособие и разноуровневые дидактические материалы, разработанные учителями математики школы №40 г. Москвы Федулкиным Л.Е. и Федулкиной Е.М. и используемые ими с 1996 года.

Желающие ознакомиться с этими материалами подробнее могут обратиться к Л.Е. Федулкину, e-mail: `lfedulkin@rambler.ru`.

Проблемы преподавания геометрии в 8 – 9 классе

Ю.А. Блинков

учитель математики ЦО №218

1) *Первая проблема*, возникающая при изучении геометрии — это проблема логики.

1. **Проблема логических понятий.**

Перечислю то, что должны понимать учащиеся к концу 7-го класса:

(а) Аксиома — утверждение, которое мы принимаем без доказательства (чтобы доказать нужно что-то принять на веру).

(б) Что такое определение объекта, чем оно отличается от других утверждений и как им пользоваться (многие школьники не понимают, что определение содержит два взаимно обратных утверждения).

(в) Отличие свойства объекта от его признака (работа с данными логическими понятиями продолжается в начале 8-го класса, при изучении темы «Параллелограмм»).

2. **Проблема решения задач, использующих конкретный факт.**

Например, если объявить, что сегодня мы решаем задачи на свойство средней линии треугольника, то задача будет решена, а если дать задачу не указывая тему, то при решении возникнут затруднения. Поэтому иногда полезно при изучении новой темы предложить решить задачу с уже известной конструкцией. Пусть мы решили проблему «одношаговых» задач и переходим к более сложным задачам.

3. **Проблема решения «многошаговых» задач.**

Стандартная ситуация: детям предлагается дома решить задачу, они над ней честно думали, но не решили. Приходится разбирать задачу самому. Конечно же, задача разбирается в диалоге, то есть, все шаги решения дети, с моей помощью, делают сами. Предположим, все логические переходы им понятны, а все факты, которые используются в решении, — известны. Но после разбора мне задают вопрос: «Как до этого додуматься?». На мой взгляд, выход здесь такой: в каждой задаче заставлять учеников анализировать условие, то есть, выяснять, что из него следует и заключение, то есть, что нам достаточно будет доказать (найти), чтобы доказать (найти) то, что требуется в задаче. Раскручивая таким образом цепочки утверждений с начала и с конца до момента их «встречи», (что следующее из условия нам достаточно для того, чтобы доказать заключение), задача будет решена.

2) *Вторая проблема* — это проблема содержания школьного курса геометрии.

1. **Логическое построение курса.**

Например, в 8-м классе, если следовать учебнику Погорелова, сначала изучается тема «Декартовы координаты на плоскости», потом тема «Преобразования», а в 9-м классе тема «Векторы». Понятно, что темы векторы и координаты связаны между собой, поскольку относятся к одному разделу геометрии — аналитической.

Также очевидно, что понятие преобразования тесно связано с понятием функции, которое изучается в начале 9-го класса. Поэтому у нас в школе последнее время изучают векторы и координаты в 8-м классе, а преобразования — в 9-м. Нельзя не отметить, что, решив таким образом, одну проблему (логическую) мы приобретаем другую.

2. **Проблемы изучения темы «векторы и координаты на плоскости».**

В конце 8-го класса ученикам очень часто недостает техники, чтобы решать задачи векторным или координатным методом. Поэтому к данным методам необходимо возвращаться на протяжении всего обучения геометрии.

3. **Проблемы изучения темы «Преобразования».**

Здесь возникают следующие проблемы:

(а) Понятие преобразования.

(б) Применение свойств преобразований для решения элементарных задач.

(в) Неумение выделить класс задач, при решении которых нужно использовать данное преобразование.

Первая проблема возникает от отсутствия логической связи между понятиями преобразования в геометрии и функции в алгебре, и влечет за собой проблемы связанные со способами задания преобразования, с обратимостью преобразования и его координатными формулами. Частично это проблема решается изучением определений и свойств преобразований в геометрии параллельно с изучением определения и свойств функций в алгебре.

Вторая проблема связана с излишне формальным подходом к свойствам преобразований, то есть, они сообщаются, но не обсуждается, для каких преобразований это свойство выполняется, а для каких — нет.

Также хочется отметить отсутствие заданий на применение свойств преобразований в общеобразовательных учебниках. В результате, ученик, добросовестно выучив свойства, не понимает, как ими пользоваться и не может решить даже простейшую задачу. Отдельно стоит сказать про свойство взаимно однозначных преобразований, которое применяется при решении большинства задач: «Образ пересечения есть пересечение образов». То есть, если прямая a переходит в прямую a_1, а прямая b — в прямую b_1, то точка пересечения прямых a и b переходит в точку пересечения прямых a_1 и b_1. Если ученик, (хотя бы на интуитивном уровне), этого не понимает, то решать задачи методом преобразований он не сможет.

Решение же третьей проблемы достигается, если к данным задачам возвращаться при изучении других тем планиметрии.

4. **Проблемы применения метрических теорем.**

(а) Теоремы не запоминаются из-за непонимания, откуда они следуют и что означают.

(б) Непонимание того, в каких геометрических конструкциях их использовать, а в каких — нет.

Первая проблема возникает из-за отсутствия логической связки между данной темой и задачами на построение. Вторая же из желания не думать, а использовать готовые рецепты (теоремы косинусов и синусов в равнобедренных и прямоугольных треугольниках).

5. Многие из вышеперечисленных проблем помогает решить **тема площади**, которая изучается в конце 9-го класса, так как она содержит много задач, повторяющих материал предыдущих тем.

3) *Третья проблема*: проблема формирования интереса к геометрии.

Проблема очень важная, так как хорошо научиться решать задачи по геометрии можно только одним способом: их решать. Ну а кто же будет решать то, что неинтересно?

К сожалению, содержание общеобразовательного учебника таково, что, изучив его, ученик так и не понимает, что это за наука, не говоря уже об интересе к ней.

Выход здесь один: предлагать ученикам задачи, иллюстрирующие красоту геометрии. Одной из таких «вкусных» тем является тема вписанные углы, которой, по-моему, в школе уделяется недостаточно внимания.

Поскольку задач и красивых фактов на эту тему очень много и они не вмещаются даже в программу углубленного изучения математики, то задачи на эту тему можно давать на кружках. Одной из возможных тем кружка на вписанные углы является точка Микеля.

Математический кружок

Точка Микеля

Данное занятие ориентировано на учеников 9 – 10 класса. Для того, чтобы решать подобные задачи, ученикам необходимо знать основные факты, связанные с вписанными углами и иметь опыт в решении элементарных задач.

Первые три задачи достаточно простые и являются вспомогательными к задаче №8. Задача №4 помогает вспомнить метод доказательства того, что несколько окружностей имеют общую точку. Задачи №5 и №6 во-первых «освежают» в памяти конструкцию, связанную с прямой Симсона, а во-вторых помогают при решении задачи №7б.

Задачи № 7а, б связаны с одной из замечательных точек — точкой Микеля. И, наконец, задача №8 иллюстрирует применение результата задачи №7а.

1. *Две равные окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Точки M и K принадлежат данным окружностям, причем A является серединой отрезка MK. Докажите, что*: а) *прямые AB и MK перпендикулярны*; б) $AM = O_1O_2$.

Решение. а) Поскольку радиусы окружностей равны (см. рис. 1), то равные хорды AM и AK стягивают равные дуги, то есть, $\angle MBA = \angle KBA$. Следовательно, треугольник MBK — равнобедренный и прямая AB перпендикулярена прямой MK. б) Так как прямые AB и MK перпендикулярны, то MB и BK являются диаметрами окружностей, следовательно, O_1O_2 — средняя линия треугольника MBK.

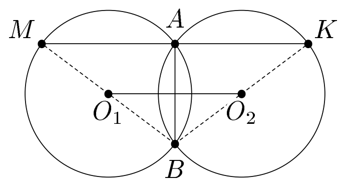


Рис. 1

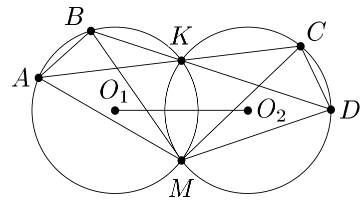


Рис. 2

2. *Две равные окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках M и K. Через точку K проведены две прямые, пересекающие первую окружность в точках A и B, а вторую — в точках C и D соответственно. Докажите, что*: а) $AB = CD$; б) *треугольники AMC и BMD равнобедренные*; в) *треугольники ABM и CDM равны*; г) $\angle AMC = \angle BMD = \angle O_1MO_2$.

Решение. а) Так как радиусы окружностей равны (см. рис. 2), то равные углы AKB и CKD опираются на равные дуги, которые стягивают равные хорды.

б) Дуги окружностей, стягиваемые хордой MK — равны.

в) Следует из предыдущих пунктов.

г) При повороте с центром в точке M на $\angle AMC$ окружность с центром O_1 переходит в окружность с центром O_2.

3. *Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках M и K. На одной окружности взяты точки A и B, а на другой — C и D так, что треугольники ABM и CDM оказались равными (точки B и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой AD). Докажите, что точки A, K и C лежат на одной прямой и точки B, K и D лежат на одной прямой.*

Решение. Углы $\angle MBA$ и $\angle CDM$ равны как соответственные углы равных треугольников (см. рис. 2). Из того, что $\angle AKM = \angle MBA$ (вписанные, опирающиеся на одну дугу) и что $\angle CKM = 180° - \angle CDM$ (вписанные, опирающиеся на дуги, дополняющие друг друга до окружности) следует, что точки A, K и C лежат на одной прямой. Для точек B, K и D доказательство аналогично. *Отметим, что утверждение* 3 *является обратным к утверждению* 2.

4. *На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников AB_1C_1, BC_1A_1 и CA_1B_1 пересекаются в одной точке.*

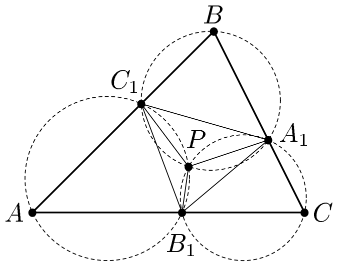


Рис. 3

Решение. 1) Очевидно, что из углов треугольника хотя бы два угла — острые, например, углы A и B.

2) Пусть P — точка пересечения окружностей, описанных около треугольников AB_1C_1 и BC_1A_1, отлична от C_1 и лежит внутри треугольника ABC (см. рис. 3). Тогда сумма углов B_1AC_1 и B_1PC_1 равна $180°$ (вписанные, опирающиеся на дуги, дополняющие друг друга до окружности). Аналогично, сумма углов C_1BA_1 и C_1PA_1 равна $180°$. Следовательно, сумма углов B_1CA_1 и B_1PA_1 равна $180°$, причем точки C и P лежат в разных полуплоскостях относительно прямой A_1B_1 (углы A и B — острые), то есть, окружность, описанная около треугольника CA_1B_1 проходит через точку P.

3) Если точка P лежит вне треугольника, например, в разных полуплоскостях с точкой C относительно прямой AB, то углы B_1AC_1 и

B_1PC_1 будут опираться на одну дугу и поэтому будут равны. Аналогично, будут равны углы C_1BA_1 и C_1PA_1. Следовательно, сумма углов B_1CA_1 и B_1PA_1 равна $180°$, причем точки C и P лежат в разных полуплоскостях относительно прямой A_1B_1, то есть, окружность, описанная около треугольника CA_1B_1 проходит через точку P.

5. (Утверждение, обратное теореме о прямой Симсона) *Основания перпендикуляров, опущенных из некоторой точки P на стороны треугольника или на их продолжения, лежат на одной прямой. Докажите, что точка P лежит на описанной окружности треугольника.*

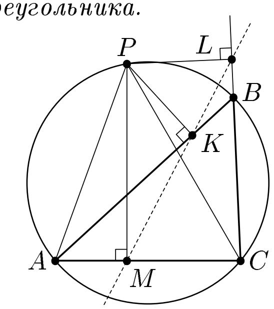


Рис. 4

Решение. Заметим, что метод доказательства данного утверждения ничем не отличается от метода доказательства самой теоремы. Пусть точки M, K и L — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые AC, AB и BC, соответственно (см. рис. 4). Тогда четырехугольники $AMKP$ и $MPLC$ — вписанные. Поэтому $\angle APM = \angle AKM$ и $\angle CPM = \angle CLM$ (вписанные, опирающиеся на одну дугу). Так как точки M, K и L лежат на одной прямой, то $\angle AKM = \angle BKL$ как вертикальные. То есть, $\angle APC = \angle APM + \angle CPM = \angle BKL + \angle CLM = \angle ABC$, откуда и следует утверждение задачи.

6. *Точки A, B и C лежат на одной прямой, точка P — вне этой прямой. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ABP, BCP, ACP и точка P лежат на одной окружности.*

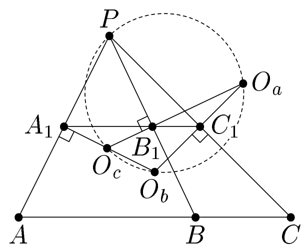


Рис. 5

Решение. Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины отрезков PA, PB и PC; O_a, O_b и O_c — центры описанных окружностей треугольников BCP, ACP и ABP. Точки A_1, B_1 и C_1 являются основаниями перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны треугольника $O_aO_bO_c$ (или на их продолжения). Точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой, следовательно, точка P лежит на описанной окружности треугольника $O_aO_bO_c$ (см. рис. 5).

7. *Четыре прямые образуют четыре треугольника. а) Докажите, что описанные окружности этих треугольников имеют общую точку (точка Микеля). б) Докажите, что центры описанных окружностей* *этих треугольников лежат на одной окружности, проходящей через точку Микеля.*

Решение. а) Пусть AD, DF, AE и BF — данные прямые (см. рис. 6). Пусть окружности, описанные около треугольников DAE и DBF пересекаются в точке P, отличной от D. Тогда $\angle ADP = \angle BDP = \angle BFP$ (вписанные, опирающиеся на одну дугу). С другой стороны, $\angle ADP = \angle AEP$ (вписанные, опирающиеся на одну дугу). Следовательно, $\angle CEP = \angle AEP = \angle BFP = \angle CFP$, то есть, точки C, P, E и F лежат на одной окружности. Для точек B, A, C и P доказательство аналогично. б) Согласно пункту а) описанные окружности треугольников ABC, ADE и BDF проходят через точку P, поэтому их можно рассмотреть как описанные окружности треугольников ABP, ADP и BDP. Тогда их центры лежат на окружности, проходящей через точку P (см. №6). Аналогично доказывается, что центры любых трех из данных окружностей лежат на одной окружности, проходящей через точку P. Следовательно, все четыре центра лежат на одной окружности, проходящей через точку P.

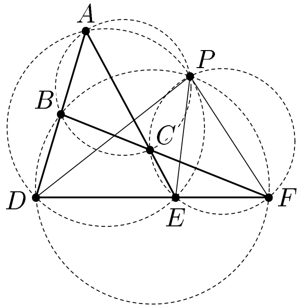


Рис. 6

8. *Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, стороны BC и AD которого равны, но не параллельны. Пусть E и F — внутренние точки отрезков BC и AD соответственно такие, что $BE = DF$. Прямые AC и BD пересекаются в точке P, прямые BD и EF пересекаются в точке R, прямые EF и AC пересекаются в точке Q. Рассмотрим треугольники PQR, получаемые для всех таких точек E и F. Докажите, что окружности, описанные около всех таких треугольников, имеют общую точку, отличную от P.*

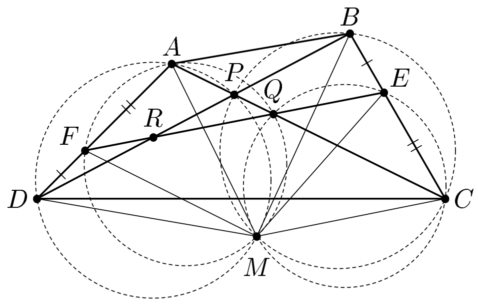


Рис. 7

Решение. Переформулируем условие задачи в удобном для нас виде. Рассмотрим прямые AD, AC, BD и EF (см. рис. 7). Они образуют четыре треугольника и следовательно, описанные окружности этих треугольников имеют общую точку (см. №7). Аналогично для прямых BC, BD, AC и EF. То есть, требуется доказать, что точки Микеля у двух данных конструкций совпадают. Поскольку треугольники APD и BPC (а, следовательно и описанные около них окружности) фиксированы, то достаточно будет доказать, что окружности, описанные около треугольников AFQ и CEQ проходят через точку пересечения окружностей, описанных около треугольников APD и BPC, отличную от P. Пусть M — точка пересечения окружностей, описанных около треугольников APD и BPC, отличная от P. Тогда $\triangle AMD = \triangle BMC$ (см. №2), а значит $\triangle AMF = \triangle CME$. Рассмотрим окружности, описанные около треугольников AFM и CEM. Пусть они пересекаются в точке Q'. Но так как окружности имеют одинаковый радиус и $\triangle AMF = \triangle CME$, то точки A, C и Q' лежат на одной прямой и точки E, F и Q' лежат на одной прямой (см. №3), то есть, Q' совпадает с Q.

Итак, окружности, описанные около треугольников AFQ и CEQ проходят через точку M, то есть, точка M является точкой Микеля для обоих семейств прямых. Следовательно, окружности, описанные около всех треугольников PQR, имеют общую точку, отличную от P.

Доказанное утверждение позволяет дать другое определение точки Микеля: если дан четырехугольник с равными, но не параллельными противолежащими сторонами, то точкой Микеля называется центр поворота, при котором одна из равных сторон переходит в другую.

О некоторых прямых, связанных с четырехугольником

А.Г. Мякишев

учитель математики лицея №1303

Настоящая публикация представляет собою расширенную и дополненную версию лекции, прочитанной автором на Семинаре Учителей. Сама лекция являлась попыткой ознакомить присутствующих с тем, каким образом соединенными усилиями «Железного друга» (компьютер + программа «Живая геометрия»), любознательного ученика (в данном случае в этой роли выступал учащийся 11 класса лицея №1511 Ярослав Ганин) и более-менее разбирающегося в предмете наставника можно получать новые и не всегда очевидные факты в области элементарной геометрии.

1. Предварительные замечания: вспомним классику!

Каждому любителю элементарной геометрии наверняка известны две замечательные прямые в треугольнике: прямая *Эйлера* ([3]:5.116, 5.117; [4]:444) и прямая *Нагеля* ([2]; [3]:5.79; [4]:489). На всякий случай все же напомним, что на первой из них лежат точки H (ортоцентр треугольника), M (его центроид) и O (центр описанной окружности), причем $HM : MO = 2 : 1$, а также E — центр окружности, описанной около серединного треугольника (так называемой окружности *Эйлера* или *девяти точек*). Последняя точка является серединой отрезка HO.

На второй прямой расположены точки N (точка *Нагеля*: в этой точке пересекаются прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания вневписанных окружностей с противоположными сторонами; каждая из них делит периметр треугольника пополам), M (центроид треугольника) и I (центр вписанной окружности), так что $NM : MI = 2 : 1$, а также S — центр окружности, вписанной в серединный треугольник. Эту точку называют точкой *Шпикера* — она является серединой отрезка NI, и, кроме того, служит центром тяжести полого треугольника с проволочными ребрами.

И с четырехугольником связаны многие замечательные прямые. Пожалуй, возглавляет этот своеобразный «хит-парад» следующая тройка:

- прямая *Гаусса* ([3]:4.55; [4]:350), на которой расположены середины диагоналей четырехугольника, а также середина отрезка, соединяющего точки пересечения противоположных сторон (предполагаем, что противоположные стороны непараллельны);
- прямая *Ньютона* ([3]:6.5; [4]:541), содержащая в описанном четырехугольнике середины диагоналей и центр вписанной окружности (можно сказать, прямая Гаусса описанного четырехугольника: знаменательная перекличка славных имен!);
- прямая *Штейнера* ([3]:6.36; [4]:558), на которой лежат ортоцентры четырех треугольников, образованных прямыми, проходящими через противоположные стороны четырехугольника (опять же, считаем, что противоположные стороны пересекаются).

И еще один факт из серии «и звезда с звездою говорит»: прямые Гаусса и Штейнера *перпендикулярны*.

Однако совсем мало известно об аналогах прямых Эйлера и Нагеля для четырехугольника. (Во всяком случае, автору этих строк удалось обнаружить в доступных ему источниках только один: *Пусть четырехугольник $ABCD$ можно вписать в окружность и H_a — ортоцентр треугольника BCD. Таким же образом определим точки H_b, H_c, H_d. Тогда прямые AH_a, BH_b, CH_c, DH_d пересекаются в точке H и M (центроид) является серединой OH, где O — центр описанной около четырехугольника окружности — см.* [5]).

Настоящая статья как раз и призвана в какой-то мере восполнить этот пробел.

2. Прямая Эйлера четырехугольника — аналогия первая.

Пусть P — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, M — точка пересечения прямых, соединяющих середины его противоположных сторон (центроид четырехугольника), O — точка пересечения серединных перпендикуляров к диагоналям («квазицентр»[1] *описанной окружности), H — точка пересечения прямых, соединяющих ортоцентры треугольников APD и BCP, APB и CPD («квазиортоцентр»). Тогда M — середина OH.*

Доказательство: Пусть O_1 — середина AC, а O_2 — середина BD (см. рис. 1). Несложно показать, что точка M — середина отрезка O_1O_2 (понятно, что M — центр масс системы $1A$, $1B$, $1C$, $1D$. Рассмотрим подсистемы $1A$, $1C$ и $1B$, $1D$, эквивалентные подсистемам $2O_1$, $2O_2$.

[1]Точнее бы сказать, вероятно, «квазицентр квазиописанной окружности», но звучит это уж как-то слишком тяжеловесно. А вот английское словцо «quasi-circumcenter» явно уместнее. Замечу кстати (отнюдь не являясь каким-нибудь русофобом, а скорее наоборот), что геометрическая терминология (и, возможно, математическая вообще) английским языком описывается более лаконично, чем русским. Опять же, сравним: «Circumcenter» и «Центр описанной окружности».

Все необходимые сведения по геометрии масс, необходимые для понимания этого и некоторых последующих утверждений, можно найти в [1], [2], [3]: *глава* 14).

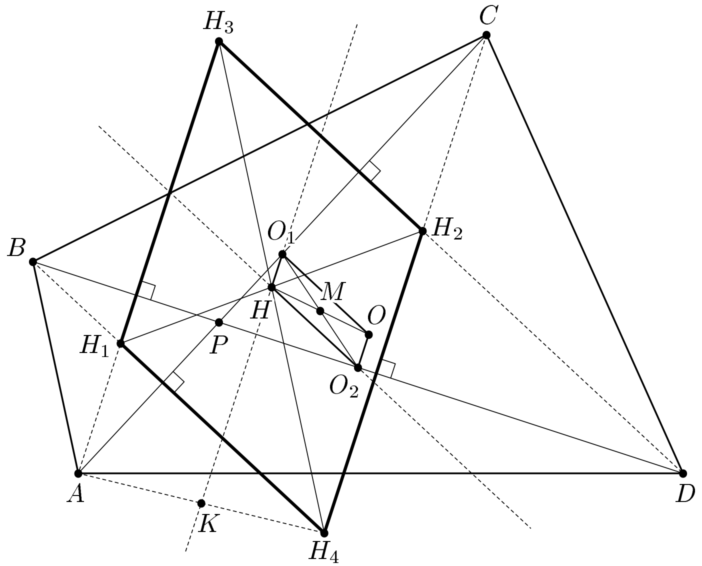


Рис. 1

Очевидно, что четырехугольник, образованный ортоцентрами, есть параллелограмм, стороны которого лежат на перпендикулярах, проведенных из вершин четырехугольника к соответствующим диагоналям. Поэтому H — точка пересечения диагоналей этого параллелограмма и делит их пополам.

Докажем, что прямая HO_1 параллельна OO_2, или, иначе говоря, перпендикулярна диагонали BD. Рассмотрим прямую, перпендикулярную этой диагонали и проходящую через H и покажем, что она проходит и через точку O_1. Пусть наша прямая пересекает отрезок AH_4 в точке K. Тогда она является средней линией в треугольнике AH_3H_4, и потому K — середина AH_4. А следовательно, наша прямая будет средней линией и в треугольнике AH_4C, и потому пройдет через O_1.

Рассуждая совершенно аналогично, убеждаемся в том, что прямая HO_2 параллельна OO_1, т. е. HO_1OO_2 — *параллелограмм*, причем M — точка пересечения его диагоналей. Отсюда следует, что точки O, M, H лежат на одной прямой, и $\dfrac{OM}{MH} = 1$.

Заметим, что задача допускает очевидное обобщение:

Пусть M — точка пересечения прямых, соединяющих середины противоположных сторон четырехугольника $ABCD$(см. рис. 2), O — точка пересечения некоторых двух прямых, проходящих через середины диагоналей, H — точка пересечения диагоналей параллелограмма, полученного при пересечении прямых, проходящих через вершины четырехугольника, и соответственно параллельных указанным двум «серединным» прямым. Тогда M — середина OH.

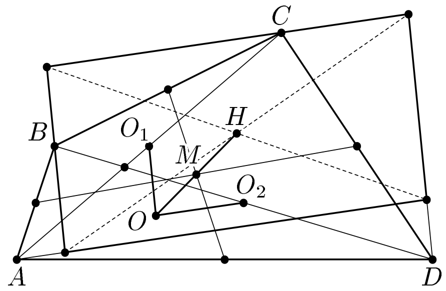


Рис. 2

Следующая прямая, являющаяся частным случаем только что построенной, была уже ранее известна ([5]).

Пусть четырехугольник $ABCD$ можно вписать в окружность и H_a — ортоцентр треугольника BCD. Аналогично определим точки H_b, H_c, H_d. Тогда прямые AH_a, BH_b, CH_c, DH_d пересекаются в точке H, и M (центроид) является серединой OH (O — центр описанной около четырехугольника окружности).

Доказательство: Если четырехугольник вписан в окружность, то O совпадает с центром этой окружности, которая также будет описана около каждого из четырех треугольников. Пусть, например, M_a — точка пересечения медиан треугольника BCD. Несложно показать, что точка M делит отрезок AM_a в отношении $3:1$ (рассмотрим подсистемы $1A$ и $1C$, $1B$, $1D$, которые эквивалентны подсистемам $1A$, $3M_a$). С другой стороны, точки H_a, M_a, O лежат на одной прямой (*прямой Эйлера* треугольника BCD), причем $\dfrac{H_aM_a}{OM_a} = \dfrac{2}{1}$. Отсюда немедленно следует (проще всего из геометрии масс), что прямая AH_a пересекает прямую OM в такой точке H', что $\dfrac{OM}{H'M} = 1$. Из предыдущей теоремы теперь следует, что точки H' и H совпадают. Точно также доказывается, что и три другие прямые пройдут через точку H.

Описанные в этом параграфе аналоги прямой Эйлера страдают одним недостатком, бросающимся в глаза: $\dfrac{OM}{MH} = 1$ в четырехугольнике, а в треугольнике — $\dfrac{OM}{MH} = \dfrac{1}{2}$. Следующие аналогии в этом смысле будут более удачными.

3. Прямые Эйлера и Нагеля четырехугольника — аналогия вторая.

Как известно, в треугольнике центр единичных масс, помещенных в его вершины и центр тяжести всего треугольника, как однородной пластины — совпадают. В четырехугольнике это уже не так. Рассматривая центр тяжести четырехугольника, как однородной пластины, автору удалось получить еще некоторые любопытные обобщения прямых Эйлера и Нагеля на четырехугольник.

Итак, рассмотрим $ABCD$ — выпуклый четырехугольник и точку G — его центр тяжести как однородной пластины (т. е. точка пересечения двух прямых, каждая из которых соединяет центроиды треугольников, имеющих общую диагональ).

а) *Пусть около $ABCD$ можно описать окружность с центром в O. Точку H определим аналогично G, взяв вместо центроидов ортоцентры. Тогда точки H, G, O лежат на одной прямой и $HG : GO = 2 : 1$.*

б) *Оказывается, предыдущее утверждение остается справедливым и в случае произвольного четырехугольника $ABCD$, если в качестве O взять «квазицентр» описанной окружности — точку пересечения серединных перпендикуляров к диагоналям.*

в) *Пусть в $ABCD$ можно вписать окружность с центром в I. Точкой Нагеля N описанного четырехугольника назовем точку пересечения двух прямых, каждая из которых проходит через точки на противоположных сторонах четырехугольника, симметричные точкам касания вписанной окружности относительно середин сторон. (Эти прямые делят периметр четырехугольника пополам). Тогда точки N, G, I лежат на одной прямой и $NG : GI = 2 : 1$.*

Доказательство: а) Пусть G_a и H_a — соответственно центроид и ортоцентр треугольника BCD (см. рис. 3). Центроиды и ортоцентры остальных трех треугольников обозначим буквами G_b, H_b, G_c, H_c, G_d, H_d. Все треугольники имеют общую описанную окружность с центром в точке O. Рассмотрев прямые Эйлера этих треугольников, заметим, что четырехугольник $G_aG_bG_cG_d$ переходит в четырехугольник $H_aH_bH_cH_d$ при гомотетии с центром в O и коэффициентом 2. Соответственные элементы должны переходить в соответственные, в частности, точки пересечения диагоналей этих четырехугольников переходят друг в друга.

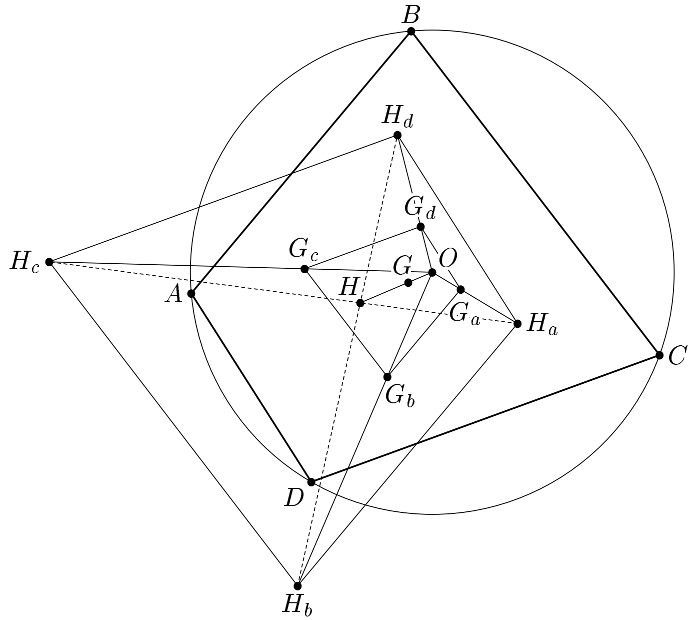


Рис. 3

б) Конструкция, рассмотренная в предыдущем пункте, естественным образом обобщается на случай произвольного четырехугольника. Первым этот факт обнаружил[2], по-видимому, Ярослав Ганин.

[2] Замечательные программы «The Geometer's Scetchpad» (Канада) и «Cabri Geometry» (Франция) позволяют проверять справедливость тех или иных геометрических гипотез непосредственно на компьютере. То есть, выдвинув какое-либо предположение, мы можем узнать, верно оно или нет, не затратив при этом никаких умственных усилий. Конечно, тем самым математические доказательства не отменяются (открытый на компьютере красивый факт неизбежно взывает, если не сказать, вопиет — к душам Геометров: докажи меня! и докажи красиво!) — но в каком-то смысле все же отодвигаются на второй план. (Если факт имеет место, то, рано или поздно, доказательство будет найдено). Другое дело, что человек, привыкший работать с бумагой и ручкой и не спешащий засесть за компьютер для проверки плодотворной и содержательной идеи всякий раз, когда она ему приходит в голову, скорее всего, будет награжден большим количеством таких идей. И то сказать, великое множество теорем (порой весьма замысловатых), вошедших в Золотой Фонд Геометрии, открыты были задолго до появления компьютеров. Остается только восхищаться величием Старых Мастеров.

Если ввести еще точки O_a, O_b, O_c O_d (где O_a — центр окружности, описанной около треугольника BCD и т. д.), то O — точка пересечения серединных перпендикуляров к диагоналям четырехугольника $ABCD$, очевидно, совпадает с точкой пересечения диагоналей четырехугольника $O_aO_bO_cO_d$ (например, O_a и O_c лежат на серединном перпендикуляре к BD и т. д.)

Поэтому задачу можно переформулировать так:

Рассмотрим произвольный четырехугольник $ABCD$ и еще три порожденных им четырехугольника: $O_aO_bO_cO_d$, $G_aG_bG_cG_d$, $H_aH_bH_cH_d$. Пусть точки пересечения диагоналей этих четырехугольников — O, G, H соответственно. Тогда эти точки коллинеарны, причем $HG : GO = 2 : 1$. Ниже мы приведем изящное доказательство этой теоремы, идея которого принадлежит Francois Rideau (см. [6]).

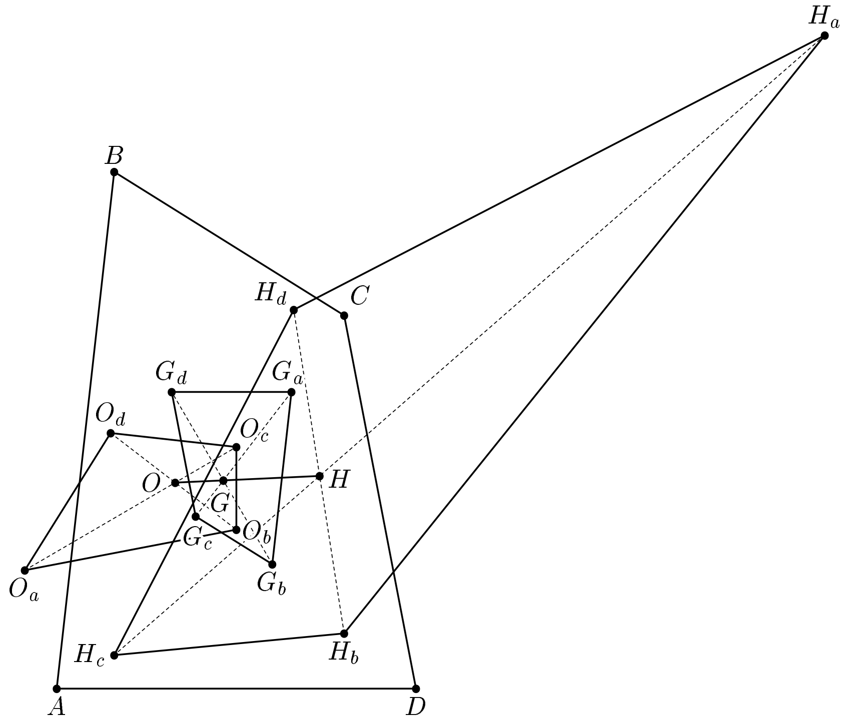


Рис. 4

Итак, на языке векторов, нужно показать, что $2\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{GH}$. Сначала мы предъявим сразу всю цепочку утверждений, ведущих к достижению этой цели, а потом обсудим каждое звено в отдельности.

1°. Рассмотрим три *аффинных* преобразования F_G, F_O и F_H, такие что: F_G — переводит треугольник ABC в треугольник $G_aG_bG_c$, F_O — ABC в $O_aO_bO_c$ и F_H — ABC в $H_aH_bH_c$.

2°. Тогда для произвольной точки плоскости P справедливо равенство: $\overrightarrow{F_G(P)} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{F_O(P)} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{F_H(P)}$. Это равенство равносильно тому, что $2\overrightarrow{F_O(P)F_G(P)} = \overrightarrow{F_G(P)F_H(P)}$.

3°. Исходный четырехугольник и порожденные им три четырехугольника *аффинно-эквивалентны*, т. е. $F_G(D) = G_d$, $F_O(D) = O_d$ и $F_H(D) = H_d$.

4°. При аффинном преобразовании, переводящем четырехугольник в четырехугольник, точка пересечения диагоналей переходит в точку пересечения диагоналей.

Воспользуемся теперь 2°, взяв в роли точки P точку пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$. Теорема доказана.

Теперь перейдем к деталям.

1°. Напомним определение и некоторые свойства аффинных преобразований (подробности см. в [3], глава 29).

Аффинное преобразование плоскости — это такое преобразование, которое любую прямую переводит в прямую же. При этом, разумеется, точка пересечения прямых переходит в точку пересечения образов. В частности, любое подобие есть аффинное преобразование.

В сущности, аффинное преобразование есть параллельная проекция одной плоскости на другую (плоская фигура, освященная параллельным потоком лучей, переходит в ее тень).

Некоторые свойства:

1. Сохраняется отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой.

2. Сохраняется отношение площадей фигур.

3. Параллельные прямые переходят в параллельные.

4. Существует ровно одно аффинное преобразование, переводящее произвольный треугольник ABC в произвольный треугольник $A_1B_1C_1$ (так, что $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$). При этом любая точка P и ее образ P_1 имеют *одинаковые барицентрические координаты* (относительно треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно).

При аффинном отображении F треугольника в треугольник можно рассматривать вместо точек также и вектора — под записью $\overrightarrow{P_1} = \overrightarrow{F(P)}$ подразумеваем вектор $\overrightarrow{A_1P_1} = F(\overrightarrow{AP})$. Треугольник ABC определяет аффинную систему координат, в которой координаты (β, γ) любой точки P (или соответствующего вектора с началом в A и с концом в P) определяются равенством $\overrightarrow{AP}=\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}$. Образом точки P будет такая точка P_1, что $\overrightarrow{AP_1}=\beta\overrightarrow{A_1B_1}+\gamma\overrightarrow{A_1C_1}$ (т. е. имеющая *те же* самые аффинные координаты в базисе с началом в A_1 и векторами A_1B_1 и A_1C_1).

Отсюда вытекает еще одно свойство аффинных преобразований — *линейность*: $\forall P,\ Q\ \overrightarrow{F(\beta P+\gamma Q)}=\beta\overrightarrow{F(P)}+\gamma\overrightarrow{F(Q)}$.

5. Пусть имеется некоторый треугольник ABC и точка P. Рассмотрим *подерный* (или *педальный*) треугольник точки P — треугольник $A_1B_1C_1$, образованный основаниями перпендикуляров, опущенных из P на прямые, содержащие стороны исходного треугольника (так, A_1 — основание перпендикуляра на (BC) и т. д.) Пусть, далее, Q —точка, *изогонально сопряженная* точке P относительно треугольника ABC (проведем прямую через вершину A и точку P и рассмотрим прямую, симметричную проведенной относительно биссектрисы угла A. Поступим аналогично с другими вершинами. Новая тройка прямых пересечется в точке Q — см. [3]:5.87). Тогда аффинное преобразование, переводящее ABC в $A_1B_1C_1$, отображает точку Q в точку P.

Докажем это свойство, ограничившись случаем внутренней точки P (для внешней доказательство аналогично). Нужно показать, что точка Q относительно треугольника ABC имеет такие же координаты, как и точка P относительно треугольника $A_1B_1C_1$. Введем обозначения: h_a, h_b, h_c — где, например, h_a — расстояние от точки P до отрезка BC (длину которого обозначим a; см. рис. 5) и т. д.

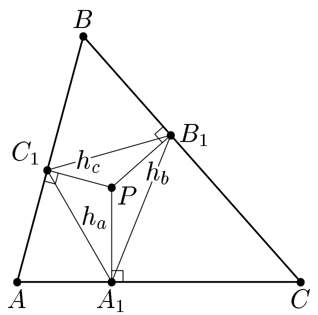


Рис. 5

Тогда, как известно, барицентрические координаты точки P (относительно треугольника ABC) имеют вид: $P(ah_aA, bh_bB, ch_cC)$, а точки, изогонально ей сопряженной — $Q=\left(\dfrac{a}{h_a}A, \dfrac{b}{h_b}B, \dfrac{c}{h_c}C\right)$.

Относительно же треугольника $A_1B_1C_1$ координаты точки P выражаются через площади соответствующих треугольников: $P_{A_1B_1C_1}=$

$=(S_{PB_1C_1}A_1, S_{PC_1A_1}B_1, S_{PA_1B_1}C_1)$. Однако, $S_{PB_1C_1}=\dfrac{1}{2}h_bh_c\sin(\pi-\angle A)=\dfrac{1}{4}\dfrac{h_ah_bh_c}{R}\dfrac{a}{h_a}$ (мы воспользовались тем, что $\sin(\pi-\angle A)=\sin\angle A$, а также теоремой синусов: $a=2R\sin\angle A$, где R — радиус описанной около ABC окружности). Аналогично выражаются и две другие координаты. После сокращения на общий множитель свойство доказано.

2°. Сначала покажем, что $\overrightarrow{F_G(A)}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{F_O(A)}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{F_H(A)}$, $\overrightarrow{F_G(B)}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{F_O(B)}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{F_H(B)}$, $\overrightarrow{F_G(C)}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{F_O(C)}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{F_H(C)}$.

Например, рассмотрим второе из этих соотношений. Понятно, что оно эквивалентно равенству $\overrightarrow{G_aG_b}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{O_aO_b}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{H_aH_b}$.

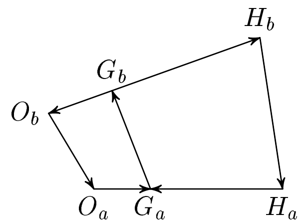


Рис. 6

Поскольку $\overrightarrow{G_aG_b}+\overrightarrow{G_bO_b}+\overrightarrow{O_bO_a}+\overrightarrow{O_aG_a}=\overrightarrow{0}$ и $\overrightarrow{G_aG_b}+\overrightarrow{G_bH_b}+\overrightarrow{H_bH_a}+\overrightarrow{H_aG_a}=\overrightarrow{0}$ (см. рис. 6), то $\dfrac{2}{3}\overrightarrow{O_aO_b}=\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{G_aG_b}+\overrightarrow{G_bO_b}+\overrightarrow{O_aG_a})$ и $\dfrac{1}{3}\overrightarrow{H_aH_b}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{G_aG_b}+\overrightarrow{G_bH_b}+\overrightarrow{H_aG_a})$. Сложим эти два равенства: $\dfrac{2}{3}\overrightarrow{O_aO_b}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{H_aH_b}=\overrightarrow{G_aG_b}+\dfrac{1}{3}(2\overrightarrow{G_bO_b}+\overrightarrow{G_bH_b})+\dfrac{1}{3}(2\overrightarrow{O_aG_a}+\overrightarrow{H_aG_a})$.

Выражения в скобках равны нулевому вектору в силу основного свойства прямой Эйлера.

Теперь равенство $\overrightarrow{F_G(P)}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{F_O(P)}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{F_H(P)}$ (для произвольной точки P) вытекает из того, что соответствующие вектора образуют базис и из линейности аффинного преобразования (1°.4.) То, что оно эквивалентно равенству $2\overrightarrow{F_O(P)F_G(P)}=\overrightarrow{F_G(P)F_H(P)}$, доказывается совершенно аналогично только что проведенному рассуждению.

3°.

1. Аффинная эквивалентность четырехугольников $ABCD$ и $G_aG_bG_cG_d$ является следствием их *гомотетичности*: первый переходит во второй при гомотетии с центром в точке M пересечения прямых, соединяющих середины противоположных сторон $ABCD$ и коэф-

фициентом $-\dfrac{1}{3}$ (в самом деле, $M = 1A, 1B, 1C, 1D = 1A, 3G_a$ и т. д.). Гомотетичность этих четырехугольников приводит к появлению еще одной интересной прямой:

Следствие 1. Пусть Q — точка пересечения диагоналей произвольного четырехугольника $ABCD$. *Тогда точки Q, M, G лежат на одной прямой и $QM : MG = 3 : 1$.*

2. Если удастся показать, что $F_O(D) = O_d$, то равенство $F_H(D) = H_d$ вытекает из соотношения $\overrightarrow{F_G(D)} = \dfrac{2}{3}F_O(D) + \dfrac{1}{3}F_H(D)$ (верного в силу 2°: положим $P = D$) и из основного свойства прямой Эйлера. Стало быть, чтобы «расставить все точки над i», нам остается доказать аффинную эквивалентность четырехугольников $ABCD$ и $O_aO_bO_cO_d$.

3. Будем говорить, что треугольник ABC *ортологичен* треугольнику $A_1B_1C_1$ ($\triangle ABC \perp \triangle A_1B_1C_1$), если перпендикуляры из A на прямую B_1C_1, из B на A_1C_1 и из C на A_1B_1 пересекаются в одной точке (ортологический центр).

Верно следующее утверждение:

Если дан некоторый треугольник ABC и точка P, треугольник $A_1B_1C_1$ — подерный треугольник этой точки, и Q —точка, изогонально сопряженная точке P относительно треугольника ABC (см. 1°. 5), то $\triangle ABC \perp \triangle A_1B_1C_1$ с центром ортологии в Q.

Это почти очевидно: рассмотрим прямую, изогональную прямой AP (см. рис. 7). (Опять же, не ограничивая общности, считаем точку P внутренней).

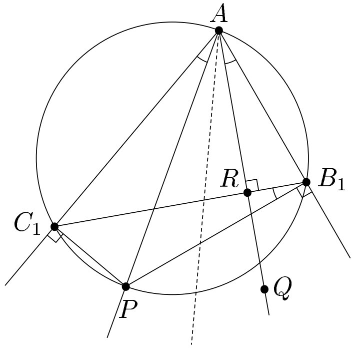


Рис. 7

Треугольники AC_1P и AB_1P — прямоугольные, с общей гипотенузой, поэтому около четырехугольника AB_1PC_1 можно описать окружность. Пусть изогональ AQ пересекает B_1C_1 в точке R. Изогональ-

ные прямые образуют с соответствующими сторонами угла равные углы, и углы, опирающиеся на одну дугу, равны. Поэтому $\angle RB_1P = \angle C_1B_1P = \angle C_1AP = \angle QAB_1 = \angle RAB_1$. Но $\angle AB_1R + \angle RB_1P = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle AB_1R + \angle RAB_1 = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$ треугольник ARB_1 — прямоугольный.

4. *Ключевое утверждение*: Если $\triangle ABC \perp \triangle A_1B_1C_1$ с центром ортологии в точке Q, $\triangle A_1B_1C_1 \perp \triangle ABC$ с центром ортологии в точке P и F — аффинное преобразование, отображающее треугольник ABC в треугольник $A_1B_1C_1$, то $F(Q) = P$.

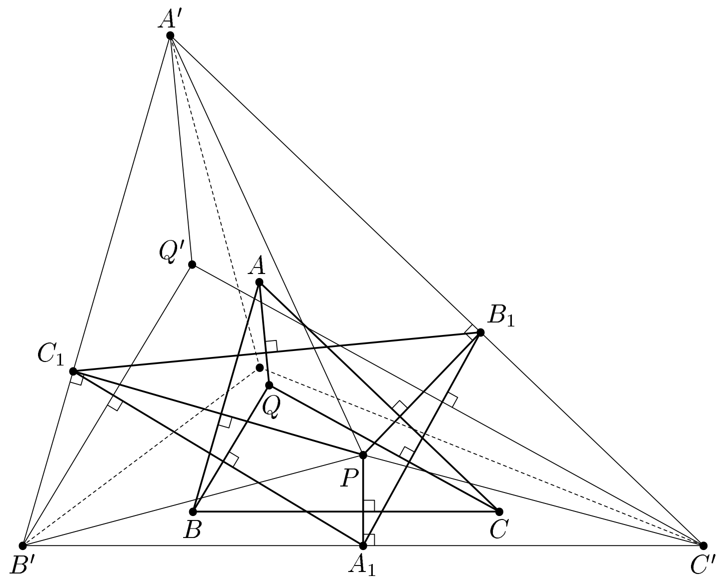


Рис. 8

Проведем через A_1 прямую, параллельную BC, через B_1 — параллельную AC и через C_1 — параллельную AB. Точки пересечения этих прямых образуют треугольник $A'B'C'$, *подобный* (и даже гомотетичный) треугольнику ABC. Треугольник $A_1B_1C_1$ — подерный относительно треугольника $A'B'C'$ и точки P. Q' — точка, изогонально сопряженная P (относительно треугольника $A'B'C'$).

Согласно 3°. 3, $A'Q' \perp B_1C_1$, $B'Q' \perp A_1C_1$ и $C'Q' \perp B_1A_1$. Через точки A, B и C проведем прямые, соответственно параллельные прямым $A'Q'$, $B'Q'$ и $C'Q'$. Эти прямые также будут перпендикулярны соответствующим сторонам подерного треугольника. Значит, они пересекутся в точке Q — и точка эта (рассмотренная относительно треугольника ABC) соответствует точке Q' (относительно $A'B'C'$)[3].

Наше утверждение теперь следует из того, что в подобных треугольниках *соответственные точки имеют одинаковые барицентрические координаты* (каждая — в «своем» треугольнике), а также из свойства $1^\circ.\,5$.

5. Однако также понятно (можно сказать, «бросается в глаза»), что $\triangle ABC \perp \triangle O_aO_bO_c$ с центром ортологии в D и $\triangle O_aO_bO_c \perp \triangle ABC$ с центром ортологии в O_d, т. е., в соответствии с $3^\circ.\,4$, $F_O(D) = O_d$.

в) Отрезки ка сательных, проведенные из одной точки, равны между собой. Введем обозначения: $AT_1 = AT_4 = p$, $BT_1 = BT_2 = q$, $CT_3 = CT_2 = r$, $DT_3 = DT_4 = t$.

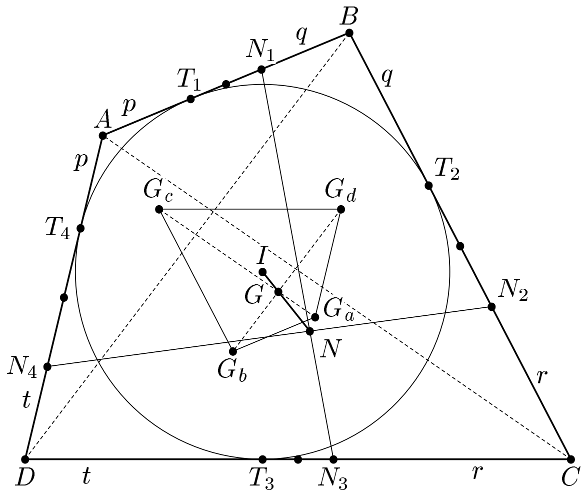


Рис. 9

Оказывается, точки N, I, G являются центрами масс следующих систем:

$N = pA, qB, rC, tD;$

$I = (q+t)A, (p+r)B, (q+t)C, (p+r)D;$

$G = (p+q+t)A, (p+q+r)B, (q+r+t)C, (p+r+t)D,$

причем первое из этих трех утверждений очевидно. Далее мы докажем справедливость остальных двух, а пока заметим, что из них сразу вытекает нужный нам факт. Действительно, рассмотрим систему $G = (p+q+t)A, (p+q+r)B, (q+r+t)C, (p+r+t)D$.

[3] На самом деле, если исходные прямые пересекались в одной точке, то и соответственные им должны пересекаться в одной точке и мы попутно доказали *теорему Штейнера*: $\triangle A_1B_1C_1 \perp \triangle ABC \Leftrightarrow \triangle ABC \perp \triangle A_1B_1C_1$.

Ее можно разбить на две подсистемы: $N = pA, qB, rC, tD$ с суммарной массой $s = p+q+r+t$ (полупериметр четырехугольника) и $I = (q+t)A, (p+r)B, (q+t)C, (p+r)D$ с суммарной массой $2(p+q+r+t) = 2s$. Воспользовавшись правилом рычага, получим , что точки N, G, I лежат на одной прямой, причем $NG : GI = 2 : 1$.

Более того, если рассмотреть еще точку G_5 — центр масс «проволочного» четырехугольника, то понятно, что $G_5 = (2p+q+t)A, (2q+p+r)B, (2r+q+t)C, (2t+r+p)D$ (нужно нагрузить середину каждой стороны длиной этой стороны, затем «растащить» эту массу по вершинам и т. д.). Отсюда следует, что G_5 — середина отрезка NI, т. е. имеем полную аналогию с треугольником, где в роли G_5 выступает точка Шпикера — центр окружности, вписанной в серединный треугольник.

Точку G_5 можно построить следующим образом:

Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 — середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. A_1 — точка пересечения биссектрисы AI и отрезка O_1O_4, а G_1 — точка, симметричная A_1 относительно середины O_1O_4. Аналогично определим B_1 и G_2, C_1и G_3, D_1и G_4. Тогда G_5 является точкой пересечения отрезков G_1G_3 и G_2G_4.

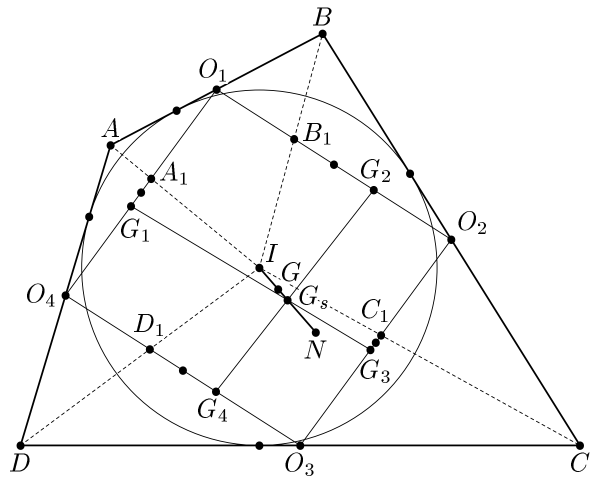


Рис. 10

Лемма 1: $I = (q+t)A, (p+r)B, (q+t)C, (p+r)D$.

Предположим, что в нашем четырехугольнике найдется пара непараллельных противоположных сторон (иначе четырехугольник является ромбом и все три точки N, G, I совпадают с точкой пересечения диагоналей). Пусть это будут, например, стороны AD и BC, а их продолжения за точки A и B соответственно пересекутся в точке E (см. рис. 11). Пусть $a = EB$, $b = EA$. Тогда, с одной стороны, $I = (t+r)E, (a+q+r)D, (b+p+t)C$, как центр окружности, *вписанной* в треугольник EDC. С другой же стороны, $I = (p+q)E, -aA, -bB$ — как центр *вневписанной* в EAB окружности. Наконец, поскольку $\dfrac{EC}{EB} = \dfrac{a+q+r}{a}$ и $\dfrac{ED}{EA} = \dfrac{b+p+t}{b}$, то система $(p+q+r+t)E$ эквивалентна разбиению на подсистемы $(a+q+r)B, -aC, (b+p+t)A, -bD$.

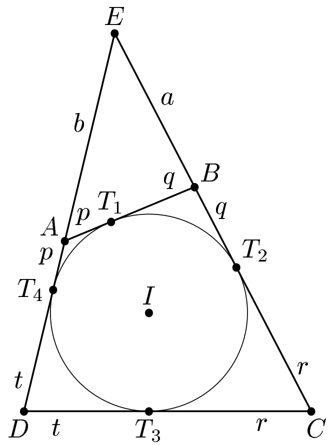


Рис. 11

Таким образом, $I = (-a+b+p+t)A, (-b+a+q+r)B, (-a+b+p+t)C, (-b+a+q+r)D$. Осталось заметить, что $b+p = a+q$ (как отрезки касательных, проведенных из одной точки).

Следствие 2 — *прямая Ньютона.* Если в четырехугольник можно вписать окружность, то ее центр и середины диагоналей лежат на одной прямой.

Следствие 3. В описанном четырехугольнике нагрузим каждую точку касания длиной стороны, содержащей эту точку. Центр масс такой системы есть центр вписанной окружности.

И правда, $I = (q+t)A, (p+r)B, (q+t)C, (p+r)D = T_1(p+q), T_2(q+r), T_3(r+t), T_4(t+p)$. Действительно, поскольку $I = (q+t)A, (p+r)B, (q+t)C, (p+r)D$, то подсистема $(q+t)A, (q+t)C$ имеет центром масс середину AC, а подсистема $(p+r)B, (p+r)D$ — середину BD.

Лемма 2: $G = (p+q+t)A, (p+q+r)B, (q+r+t)C, (p+r+t)D$.

Пусть P — точка пересечения диагоналей четырехугольника (см. рис. 12). Отметим, что если в него можно вписать окружность, то $\dfrac{AP}{CP} = \dfrac{p}{r}$; $\dfrac{BP}{DP} = \dfrac{q}{t}$. Действительно, как следует из теоремы Брианшона ([3]: 30.34, 30.36), прямые T_1T_3 и T_2T_4 также проходят через точку P, поэтому $P = \dfrac{1}{p}A, \dfrac{1}{q}B, \dfrac{1}{r}C, \dfrac{1}{t}D$, а значит, $P = \dfrac{1}{q}B, \dfrac{1}{t}D$ и $P = \dfrac{1}{p}A, \dfrac{1}{r}C$ (отрезок P_1P_2 с концами на пересекающихся прямых должен проходить через точку пересечения этих прямых, т. е. концы отрезка совпадают с точкой пересечения).

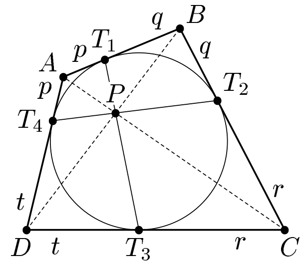


Рис. 12

Кроме того, четырехугольник $G_aG_bG_cG_d$ гомотетичен четырехугольнику $ABCD$ (см. 3°. 1.)

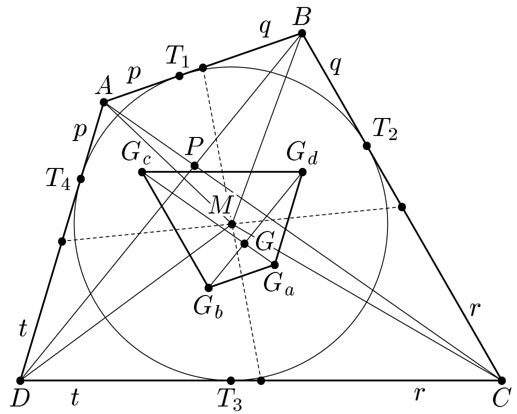


Рис. 13

Значит, $\dfrac{G_aG}{G_cG} = \dfrac{AP}{CP} = \dfrac{p}{r}$; $\dfrac{G_bG}{G_dG} = \dfrac{BP}{DP} = \dfrac{q}{t}$. Поэтому $G = rG_a$, $pG_c = pA, (r+p)B, rC, (r+p)D$. Аналогично, $G = tG_b\ qG_d = (q+t)A, qB, (q+t)C, tD$. Сложив массы при одинаковых вершинах, завершим доказательство[4].

[4]Увы, найти аналог прямой Нагеля для произвольного четырехугольника автору не удалось. Во всяких схожих с б) конструкциях аффинной эквивалентности не возникает. Впрочем, судя по доказательству в), довольно содержательному и использующему важные свойства вписанной в четырехугольник окружности, усилить эту теорему будет нелегко.

Литература:

[1] М. Балк, В. Болтянский. Геометрия масс. (Библиотечка «Квант», выпуск 61). М., «Наука», 1987 г.

[2] А. Мякишев. Элементы геометрии треугольника. (Библиотека «Математическое просвещение», выпуск 19). М., МЦНМО, 2002 г.

[3] В. Прасолов. Задачи по планиметрии. М., МЦНМО, 2001 г.

[4] И. Шарыгин. Геометрия 9 – 11. Задачник. М., «Дрофа», 1996 г.

[5] А. Богомольный. Remarkable Line in Cyclic Quadrilateral.
На сайте:
`http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/InscribedQuadri.shtml`

[6] Hyacinthos messages №№12400, 12402 — 26.03. 2006
На сайте:
`http://www.groups./yahoo.com/group/Hyacinthos`

Исследуем на уроке и на проекте

А.И. Сгибнев

учитель математики
школы-интерната "Интеллектуал"

Чтобы сформулировать цели проектно-исследовательской деятельности, необходимо теоретическое введение, которое имеет и общее значение.

Умения и навыки, которым мы учим детей, можно условно разбить на две группы: базовые навыки и исследовательские умения. К первой относятся способность узнавать знакомые ситуации, применять в них известные методы решения. Ко второй — успешность действий в незнакомых ситуациях, в которых нет известных методов решения (или есть, но глубоко спрятаны).

С первой группой всё более-менее ясно. Мы понимаем, **как обучать** базовым навыкам: их содержание описано в подробных программах, им посвящены многочисленные дидактические **материалы**. Мы знаем, **как оценивать** их наличие: процент успешно решённых на контрольной работе задач — вот тебе и оценка. «Разбуди ночью — отвечу». Их не так много, и средний школьник при известной старательности ими овладевает.

Со второй группой, напротив, ничего не ясно.

Во-первых, **как обучать** исследовательским умениям? Рассказывать ученикам готовые решения — значит опять работать на воспроизведение. Давать самим — «авось решат» — так и не решат, только время потеряешь.

Во-вторых, **чему** собственно учить, на каком материале развивать эти умения? Базовые темы входят в требования базовых навыков, тут рисковать нельзя. Остаётся сложный факультативный материал (а времени не остаётся). Ставится знак равенства между сложными задачами и исследовательскими, чем отсекаются средние и слабые ученики.

В-третьих, как **оценивать** исследовательские умения? Если ты несколько раз успешно находил требуемое на уроках, это совсем не значит, что в новой ситуации — на контроле — тоже найдёшь. Вероятность успеха выше, но гарантии никакой нет.

Итак, проблема исследовательских умений: как и на каком материале учить, как оценивать?

Прежде всего обозначим внутреннюю сторону проблемы. Исследование означает свободный поиск: идёшь куда хочешь, но рискуешь ничего не найти. Исследование — это творчество в науке. Творчество появляется лишь там, где есть свобода, и необходимо связано с риском, с отсутствием гарантий. Заставить творить нельзя. Поэтому исследование, как и всякое творчество, слабо поддаётся формализации — и в обучении и в проверке.

Давайте уточним, о какой свободе в математике идёт речь. В.И. Арнольд, цитируя Пуанкаре, говорит, что задачи бывают двух видов: бинарные и интересные. Бинарные предполагают только два ответа: «да» и «нет», интересные допускают продвижения, вспомогательные задачи, уточнения, обобщения. Иначе говоря, интересны те задачи, в которых решающий имеет пространство выбора:

Задачи интересные = исследовательские = есть выбор.

Представьте себе детектив, в котором на первой же странице сообщают имя преступника, а потом всю книгу его судят. Читатель разочарован: ему не пришлось ломать голову, теряться в догадках вместе со следователем. Всё уже известно, осталась скучная юридическая процедура. То же происходит с учеником, когда мы ему даём *задачу с готовым утверждением* (таковы почти все традиционные задачи на доказательство).

Чтобы разобраться здесь как следует, надо со всей чёткостью разделить два действия:

(1) «следствие» — рассмотрение математической ситуации («преступления»), завершающееся выдвижением гипотезы («обвинения»);

(2) «суд» — доказательство или опровержение готовой гипотезы.

(А есть ещё и третье, вернее "нулевое": сначала находят интересную ситуацию — "труп".)

То, что мы называем исследовательскими умениями, развивается в основном «на следствии» — в (1). Именно здесь решающему задачу предоставлена свобода, здесь развивается интуиция — искусство *угадывать* решение по нескольким частным случаям, по аналогии [1]. И вот как раз всего этого мы лишаем учеников, когда даём задачу с готовым утверждением![5]

Итак, традиционные формулировки школьных задач по математике, содержащие готовые утверждения, неоправданно сужают пространство выбора. Задачи, поставленные таким образом, развивают исследовательские умения гораздо меньше, чем могли бы.

[5]Говоря образно, живую задачу разрезают на две мёртвые части, и ученику обычно достаётся только вторая — доказать неизвестно откуда взявшееся утверждение. Говоря методологически, знание искусственно отсекается от методов его получения, и ученику их не сообщают.

Дело здесь именно в формулировках. Я утверждаю, что почти всякую школьную задачу на доказательство (и простую и сложную!) можно сформулировать так, что в решении появится (понадобится!) элемент исследования. См. приложение 1А, где собран ряд приёмов, позволяющих превращать обычные бинарные и унарные задачи в интересные, исследовательские.

Вот пример «из жизни» (курсивом выделены соображения, которые я добавил позже). Возьмём обычную «унарную» задачу на доказательство. «Доказать, что если фигура имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии, то точка их пересечения является центром симметрии фигуры».

Слегка изменим утверждение задачи: «Если у фигуры на плоскости есть две оси симметрии, то есть и центр симметрии». $(*)$

Спросим: «Верно ли утверждение? Если да, докажите, попробуйте обобщить. Если нет, приведите контрпример, попробуйте уточнить. Постройте утверждение, обратное исходному. Выполните с ним те же задания. *Как можно разумно поставить аналогичную задачу для пространства*?» $(**)$

Я дал эту задачу в домашнем задании 9 классу, два ученика независимо нашли и доказали (в сумме) следующее: «У правильного треугольника три оси симметрии, пересекающиеся в одной точке, а центра симметрии нет. Значит, утверждение $(*)$ нуждается в уточнении. Если есть две оси и они взаимно перпендикулярны, то центр симметрии есть. Если у фигуры ровно две оси симметрии, то они автоматически взаимно перпендикулярны, тогда есть и центр симметрии». *Хочется найти более общее утверждение. Может быть, достаточно чётного числа осей симметрии? Правильные многоугольники не опровергают этого...* «Теперь разберёмся с обратным утверждением. Из наличия центра симметрии не следует наличие двух осей, например, буква Z. Попробуем уточнить. Можно потребовать наличия центра и одной оси, тогда должна быть и вторая, ей перпендикулярная. Возможны и другие уточнения».

Составляя задание $(**)$, я просто выбрал те вопросы из списка, которые подходили к задаче $(*)$. Давать готовые утверждения — лишь один из способов формулировать задачи, способ со своими достоинствами и недостатками. Главный недостаток — он мало развивает исследовательские умения. Но этот способ почему-то получил количественный перевес, несоответственный его достоинствам. Предлагаемый мною подход — в том, чтобы ставить задачи *разными способа-*

ми, притом такими, которые *дают ученику пространство выбора* (см. приложение 1А).

Ограничиваясь готовыми утверждениями, мы лишаем задачи одного из измерений, глубины. Задачи составляются «с конца», с известного решения. Происходит своеобразное *состязание* составителя задачи и ученика. Усложнение происходит в одной плоскости, за счёт увеличения числа промежуточных шагов, отчего задачи становятся всё более искусственными и вычурными[6]. Двигаясь по этой линии, мы рискуем получить «бойкого решателя заковыристых задач» (выражение В.И. Рыжика).

Предлагаемый способ вопрошания существенно *изменяет отношение к ученику*. Делясь этими вопросами с учеником, мы открываем ему свою исследовательскую «кухню». Мы перестаём удивлять его гипотезами, до которых неизвестно как можно додуматься, честно показываем, как мы это сделали, и ожидаем ответных гипотез, диалога. Тем самым мы признаём за ним право и способность не только доказывать готовые утверждения известными способами, но думать наравне с нами. Вместо состязания — *сотрудничество*. См. приложение 1Б, где собран сравнительно полный перечень вопросов, которые отражают типовые ходы исследовательской мысли.

Итак, вот предлагаемые мною ответы.

Как учить исследовать?

Надо 1) изменить способ вопрошания, 2) показывать, из каких соображений выдвигают гипотезы и ставят задачи.

На каком материале учить? На том же самом.

Как оценивать исследовательские умения? Лучше всего избегать формальных оценок[7], потому что этим умениям нельзя гарантированно научить, а значит, нельзя их и уравнительно оценивать.

На уроках далеко не всегда можно приблизиться к изображённому идеалу. Обычно не хватает времени, недостаточно мотивации. А вот жанр *проектной работы* даёт ученику возможность, которой не даёт никакая другая учебная деятельность: решать исследовательские задачи в свободном режиме. Теперь мы готовы, наконец, сформулировать цели проектно-исследовательской деятельности. *Цель проектной работы — научить ребёнка исследовать*. Главный и уникальный результат проектной работы — это исследовательские умения ученика. Всё остальное (овладение новой темой, получение нового научного результата) — это побочные продукты, если есть — хорошо, если нет — ничего страшного[8].

[6]Как ни странно звучит, задачи олимпиад высокого уровня часто требуют лишь владения несколькими базовыми навыками (пусть и «олимпиадными»).

[7]Если избежать не удаётся, можно давать несколько исследовательских задач на выбор и ставить «отлично» за хотя бы одну решённую. А других оценок не ставить.

Я попробую описать стиль психологических отношений между руководителем проекта и исполнителем как своего рода образец для всякой учебной деятельности:

Свобода мышления, соответствующая исследованиям, должна сказываться и в их организации. Проектами занимаются только по желанию. Тему ученик выбирает сам (а учитель вправе отказаться, если не чувствует к ней сил или интереса — свобода обоюдная!). Учитель сотрудничает с учеником: делится своими соображениями и выслушивает ученика на равных, точнее как более опытный коллега. Учитель должен уметь отказываться от своего замысла в пользу идей ученика. Это приходится иногда делать, даже если учитель уверен в бесплодности этих идей, но не может убедить в этом ученика иначе как «попробуй — увидишь» (насилие тут недопустимо). Никаких наказаний («двоек») за медлительность или отказ ставить нельзя. Награды допускаются, но лучше внеучебные — похвалить, поделиться результатами с коллегами. Настоящей наградой будет радость от хорошо сделанной совместной работы.

Все мы хотим, чтобы ученики в результате учёбы «доросли» до нас. Большинство согласно, что лучшее средство для этого — доверять ученикам и сотрудничать с ними. Но тогда, обучая математике, надо учить ставить задачи и выдвигать гипотезы.

Литература

[1] Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. — М.: Изд-во Иностр. Лит. — 1957.

Приложение 1

А. Как ставить задачи, не давая готовых утверждений

- Попросим сформулировать гипотезу на данных примерах.
- Попросим «доказать или опровергнуть» утверждение вместо однозначного «доказать», «опровергнуть».
- Наведём на факт, который надо открыть, не высказывая его прямо.

[8]Новой теме можно научить на уроке и на кружке, особенность проектов не в этом. За новым научным результатом не надо гнаться, он может получиться сам собой — в тех редких случаях, когда «совпали» ребёнок, руководитель и тема.

- Перевернём задачу: дадим в готовом виде идею доказательства и попросим по ней сформулировать утверждение. (Фактически «Сформулируй условие по решению»!)
- Дадим в готовом виде лишь часть утверждения.
- Разобъём сложную задачу на несколько более простых. (Дадим план доказательства).
- Зададим такой частный вопрос, что ученик сам будет вынужден обобщить его. (Иногда общую задачу решить легче, чем частную).
- Позволим ученику самому разбирать простые частные случаи.
- Попросим вывести формулу, не давая её прямо, а описывая косвенно.
- Позволим ученику выбирать данные.
- Дадим готовое утверждение и попросим угадать аналогичное.
- Дадим готовое рассуждение и спросим, истинно оно или ложно. Фактически нужно выяснить: (1) верно ли утверждение; (2) верно ли доказательство.

Б. Какие вопросы помогают выдвигать гипотезы и ставить задачи

- Верно ли аналогичное утверждение?
- Верно ли более общее утверждение?
- Как можно обобщить данное утверждение?
- Какие ещё задачи можно решить этим методом?
- Нельзя ли ослабить условия? Нельзя ли усилить утверждение?
- Верно ли обратное утверждение?
- Как можно продолжить последовательность утверждений (задач)?
- Нельзя ли уточнить (исправить) неверное утверждение?
- На какие утверждения опирается наше рассуждение?
- В каком пункте доказательства срабатывает это условие? Насколько оно существенно (что изменится, если его отбросить или заменить другим)?
- Не работает ли это доказательство для другого случая?
- Почему это доказательство не работает для другого случая?
- Верно ли утверждение в предельном случае? Если да, то работает ли доказательство для предельного случая или его надо разбирать отдельно?
- Можно ли построить эту теорию на другом основании?

Приложение 2

Пример тематической подборки задач,
сформулированных в исследовательском стиле
Автор Д.Э. Шноль

Тема «Площадь. Теорема Пифагора».

1. Выведите формулы площади известных вам фигур (параллелограмма, треугольника, трапеции, дельтоида, не забудьте про понятие средней линии).
2. Выберите какую-либо фигуру и постройте равновеликий ей прямоугольник
3. Медиана разбивает треугольник на два треугольника. Каким свойством они обладают?
4. Диагонали разбивают параллелограмм на четыре треугольника. Каким свойством они обладают?
5. Сформулируйте утверждение, обратное тому, которое получилось у вас в задаче 4. Верное ли оно?
6. Стороны треугольника равны b и c. В каких границах может меняться его площадь?
7. Пусть точка P делит сторону треугольника в отношении $m : n$. Придумайте и решите задачу, связанную с понятием площадь.
8. Даны два равновеликих треугольника. Равенство каких элементов нужно задать дополнительно, чтобы треугольники были равны?
9. На сторонах угла с вершиной A взяты точки B и C. На плоскости берется произвольная точка M. Сравните площади треугольников ABM и ACM в зависимости от положения точки M.
10. Используя решение задачи 9 и понятие ГМТ, докажите новым способом теорему о медианах треугольника (медианы треугольника пересекаются в одной точке ...).
11. Придумайте и докажите признак трапеции (если в четырехугольнике ..., то он является трапецией), использующий понятие площади.
12. Диагонали разбивают трапецию на четыре треугольника. Какими свойствами они обладают?
13. Биссектриса разбивает треугольник на два треугольника. Как относятся их площади?
14. Треугольник задан своими сторонами. В каком отношении делит биссектриса угла A противолежащую сторону? Можно ли найти не только отношение этих отрезков, но и их длины?
15. В многоугольник можно вписать окружность радиуса r. Как связана площадь многоугольника и этот радиус?

16. На основании равнобедренного треугольника взята точка. Из нее опущены перпендикуляры на боковые стороны. Что можно сказать о сумме длин этих перпендикуляров? Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для равностороннего треугольника.
17. Диагонали разбивают выпуклый четырехугольник на четыре треугольника. Что можно сказать про площади этих треугольников?
18. Противоположные стороны шестиугольника параллельны. Задайте минимальное количество параметров, необходимых, чтобы можно было найти его площадь. Найдите формулу для вычисления этой площади.
19. При доказательстве теоремы о медианах треугольника (задача 10) получено свойство точки пересечения медиан, связанное с площадями. Сформулируйте аналогичную задачу для n-угольника. Попробуйте ее решить для четырехугольника.
20. Два треугольника имеют общий угол. Задайте необходимые элементы этих треугольников, чтобы найти отношение их площадей. Получите формулу для вычисления этого отношения.
21. Аналогом прямоугольника в пространстве является прямоугольный параллелепипед. Его объем равен произведению трех ребер, выходящих из одной вершины. Выведете формулы объема для некоторых многогранников, аналогичные формулам площадей для плоских фигур.
22. Сформулируйте утверждение, обратное теореме Пифагора. Верно ли оно? Если верно — докажите, если неверно — приведите опровергающий пример.
23. Треугольник задан двумя сторонами. Угол между ними начинают увеличивать. Что происходит с третьей стороной? Сформулируйте и докажите соответствующее утверждение. Как выяснить есть ли в треугольнике тупой угол, если известны длины его сторон?
24. Две окружности радиусов R и r касаются внешним образом. Проведите их общие касательные. Сформулируйте задачу по этой конструкции и решите ее.
25. В квадрат со стороной b вписан другой квадрат, вершины которого делят стороны первого квадрата в отношении $m : n$. Сформулируйте задачу по этой конструкции и решите ее.
26. Найдите связь между квадратами сторон параллелограмма и квадратами его диагоналей.
27. Треугольник задан тремя сторонами. Найдите его высоту и медиану, проведенные к одной из сторон.

28. (Формула Герона). Треугольник задан тремя сторонами, найдите его площадь. Какие ограничения и почему нужно наложить на длины сторон, чтобы формула имела смысл?
29. Трапеция задана своими сторонами. Найдите формулу ее площади, выраженной через ее стороны. Какие ограничения и почему нужно наложить на длины сторон, чтобы формула имела смысл?
30. Теорему Пифагора можно сформулировать, используя понятия: прямоугольник, его стороны и диагональ. Обобщите теорему Пифагора для объемного случая — для прямоугольного параллелепипеда.

Приложение 3

Темы самостоятельных исследовательских работ по математике, предлагавшихся в школе «Интеллектуал» в 2003-06 годах

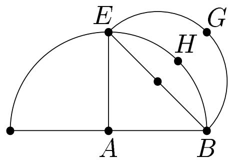
После номера задачи указан **рекомендуемый** возраст

1. (5 – 7 класс) Разбойники поймали мудрецов, выстроили их в колонну, надели на каждого чёрный или белый колпак и спрашивают каждого: какого цвета колпак на нём? Если ответил правильно — отпускают, если ошибся — убивают. Как надо действовать мудрецам, чтобы их спаслось как можно больше? (Мудрец видит только колпаки тех, кто перед ним).
2. (5 – 6 класс) Можно ли квадрат 8×8 с вырезанной угловой клеткой разрезать на полоски 1×3? Обобщите задачу на квадрат $n \times n$.
3. (5 – 6 класс) Дана таблица 4×4. Можно ли так расставить в её клетках 7 звёздочек, чтобы при вычёркивании любых двух строк и любых двух столбцов хотя бы одна звёздочка оставалась?
4. (5 – 6 класс) Сколькими способами можно раскрасить бесцветные грани куба (можно несколько граней в один цвет), если красок: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7? Тот же вопрос для тетраэдра, октаэдра. Сколько красок тут имеет смысл рассматривать?
5. (5 – 6 класс) Цепь скована из звеньев. Как наименьшим числом распилов разбить её на отдельные звенья? Рассмотреть ветвящиеся цепи.
6. (5 – 6 класс) Замостить плоскость правильными многоугольниками 1) одного типа, 2) двух разных типов. Замостить плоскость полуправильными многоугольниками. «Замостить» пространство правильными многогранниками.
7. (5 – 6 класс) Вычеркнуть из данного числа три цифры, так чтобы новое число было наименьшим (наибольшим). Сформулировать алгоритм. А если вычёркивать четыре цифры?

8. (5 – 6 класс) В кубе некоторые вершины покрашены в чёрный цвет, некоторые в белый. При этом можно повернуть куб вокруг какой-либо оси так, чтобы вершины одного цвета переходили друг в друга. Сколько существует таких различных раскрасок? Тот же вопрос для октаэдра, икосаэдра.
9. (5 – 6 класс) У вас есть 15 шаров, из них какие-то четыре — радиоактивные, и прибор, который показывает, есть среди выбранных шаров радиоактивные или нет. Как за наименьшее число проб узнать все радиоактивные шары?
10. (5 – 6 класс) По кругу расположены точки с номерами от 1 до n. Точки начинают вычёркивать через одну, считая от первой. Как узнать номер точки, которая останется последней?
11. (6 – 7 класс) Есть 5-этажный дом и 2 кокоса, которые можно сбрасывать с любого этажа и можно подбирать. Помогите обезьяне определить, с какого этажа кокосы начинают разбиваться. Учтите, что обезьяна ленивая и хочет бросать кокосы как можно меньше. Обобщить на n этажей и m кокосов.
12. (6 – 7 класс) Один из игроков загадал число, меньшее 100. Другой задает ему вопросы, на которые первый может отвечать только "да" или "нет". Один раз отвечающий может соврать. Как правильно задавать вопросы, чтобы быстрее отгадать число? Обобщите задачу.
13. (6 – 7 класс) $13^2 = 12^2 + 3^2 + 4^2$. При этом $3^2 + 4^2$ является полным квадратом, а $12^2 + 3^2$ нет. Можно ли найти такую тройку чисел, чтобы каждая пара квадратов в сумме была полным квадратом? Иначе тот же вопрос: бывает ли прямоугольный параллелепипед, у которого рёбра, диагональ и диагонали граней целые?
14. (6 – 7 класс) (Трапецеидальные числа). Число 15 можно тремя способами представить в виде суммы последовательных натуральных чисел: $15 = 7 + 8 = 4 + 5 + 6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$. А сколько таких способов для числа 101? Как найти количество способов для произвольного числа?
15. (6 – 7 класс) (Многоугольные числа). Назовём число m треугольным, если из m камней можно выложить треугольник (т. е. если оно представимо в виде $m = 1 + 2 + \cdots + k$). Найти формулу для треугольных чисел. Найти все квадратные числа, которые одновременно являются треугольными. Найти общую формулу для n-угольных чисел.
16. (6 – 7 класс) Какие суммы можно уплатить монетами по 3 и 5 рублей? Обобщение: какие числа выражаются комбинацией $ax + by$, где a, b — данные натуральные числа, x, y — произвольные целые неотрицательные числа.
17. (6 – 7 класс) Придумать *общую для игроков* стратегию игры в шашки, при которой игра закончится как можно быстрее. Можно ставить другие *общие цели*.
18. (7 – 8 класс) Назовём *элементами* многоугольника его стороны и углы. По скольким элементам можно построить правильный треугольник? Равнобедренный треугольник? Произвольный треугольник? Любые ли элементы подходят? Обобщить на четырёхугольники и пятиугольники.
19. (7 – 8 класс) Вывести неравенство, связывающее периметр многоугольника и сумму его диагоналей. Вывести соотношение между суммами диагоналей двух многоугольников, если один находится внутри другого.
20. (7 – 8 класс) Придумать игру типа «пятнашек» или «месяцев» (12 шариков ходят по кругу, один может уезжать в центр, надо расставить в определённом порядке). Построить компьютерную модель, а затем механизм.
21. (8 – 9 класс) Построить многочлен с целыми коэффициентами, имеющий корень $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Построить многочлен наименьшей степени, обладающий этим свойством. Обобщить на случай суммы трёх корней.
22. (8 – 9 класс) Как восстановить многоугольник по серединам его сторон? Единственно ли решение? А если рассматривать также невыпуклые многоугольники? А если поделить его стороны в отношении $1 : a$?
23. (8 – 9 класс) Найти центр тяжести: треугольника, в вершинах которого тяжёлые шарики; проволочного треугольника; картонного треугольника. Обобщить на многоугольники.
24. (8 – 9 класс) Параллелограмм разбивается диагоналями на 4 равновеликих треугольника. Верно ли обратное? Тот же вопрос для ромба и периметров. Обобщить на шестиугольники.
25. (8 – 9 класс) Последовательность $a_{n+2} = -a_n - a_{n+1}$ ($a_1 = 1$, $a_2 = 1$) является периодической. При каких ещё коэффициентах для последовательности $a_{n+2} = ka_n + ma_{n+1}$ получается периодичность? Какой длины может быть период?
26. (8 – 9 класс) Тетраэдр — пространственный аналог треугольника. Найти для тетраэдра аналоги биссектрис, медиан, высот треугольника. Изучить их свойства.
27. (8 – 9 класс) Сколько осей симметрии может быть у n-угольника? Может ли многоугольник иметь: две параллельные оси симме-

трии; ровно две пересекающиеся оси; конечное число осей симметрии; бесконечно много осей симметрии; конечное число центров симметрии; бесконечно много центров симметрии; центр симметрии и ровно одну ось симметрии? Как связано наличие у многоугольника двух осей симметрии с наличием центра симметрии? Какие ответы изменятся, если вместо многоугольников рассматривать общий случай *фигур* на плоскости? Обобщить на пространство (центры, оси и плоскости симметрии; многогранники и объёмные фигуры).

28. (8 – 9 класс) Гиппократовы луночки. На рисунке площадь фигуры $EHBG$ равна площади треугольника ABE. При каком ещё положении точки E площадь $EHBG$ рационально выражается через площадь ABE?



29. (8 – 10 класс) При каких a, b, c корни уравнения $x^4+ax^2+bx+c=0$ записываются через квадратичные иррациональности.
30. (8 – 10 класс) Исследовать в трёхмерном пространстве параметров a, b, c количество корней уравнения $x^4+ax^2+bx+c=0$ (можно начать с квадратного и кубического уравнений).
31. (9 – 10 класс) На плоскости заданы три неколлинеарных направления и шаги по каждому из них. Как дойти до данной точки при этих условиях за наименьшее число шагов?
32. (10 класс) Исследовать возможные варианты взаимного расположения двух прямых в пространстве (трёх, четырёх, ...). Сколько у них может быть общих точек, общих плоскостей?
33. (10 класс) Какими свойствами обладает тетраэдр, если его грани — равные треугольники (подобные треугольники, равновеликие, равного периметра)? То же для октаэдра.
34. (10 – 11 класс) Если (a_n) — арифметическая прогрессия, то, зная только a_2, можно найти $a_1+a_2+a_3$, зная 3-й член, можно найти сумму первых пяти, и т. д. Оказывается, для последовательности Фибоначчи (u_n) (т. е. $u_{n+2}=u_n+u_{n+1}$) тоже есть такие свойства. А именно, сумма первых десяти членов однозначно выражается через седьмой член: $u_1+u_2+\dots+u_{10}=11u_7$ $(*)$, причём равенство верно для последовательностей с любыми начальными членами u_1, u_2. Вопросы: а) нельзя ли найти другие равенства типа $(*)$ (т. е. с другими числами вместо 1, 10, 7, 11), верные для всех последовательностей Фибоначчи; если можно, то как связаны эти параметры; б) нельзя ли построить подобные равенства для других рекуррентных последовательностей (хотя бы вида $u_n=ku_{n-1}+lu_{n-2}$); если можно, то как.

35. (10 – 11 класс) Последовательность задана рекуррентным соотношением $u_{n+1}=u_n/2$ если u_n чётно, $u_{n+1}=3u_n+1$, если u_n нечётно. Если начать с числа $u_0=1$, то мы попадём в цикл $1\to4\to2\to1$. Выяснить, попадём ли мы в 1, начиная с любого натурального числа. (Компьютерные расчёты подтверждают эту гипотезу). Придумать другие последовательности, обладающие этим свойством.

«Парадная» подборка 2005 года

36. **Разложение средних.** Дано натуральное число, надо понять, для скольких пар натуральных чисел оно является а) средним арифметическим, б) средним геометрическим, в) средним квадратичным, г) средним гармоническим. Методы: *упорядоченный перебор*, *комбинаторика*, *численный эксперимент*.
37. **Минимумы в многоугольниках.** Дан четырёхугольник, надо понять, для какой точки в его плоскости сумма расстояний до вершин будет наименьшей. Обобщить на треугольники, пятиугольники и т. д. Методы: *неравенство треугольника*, *геометрический эксперимент*, *вычислительная математика + программирование*.
38. **Цепные дроби.** Дана обыкновенная дробь, надо разложить её в цепную, понять свойства приближений, зависимость длины цепной дроби от числителя и знаменателя. Методы: *вычислительная математика + программирование*, *арифметика*.
39. **Суммы.** Надо научиться получать явные формулы для рекуррентных последовательностей вида $x_{n+1}=x_n+P_k(n)$, где $P_k(n)$ — многочлен степени k от переменной n; применить эти формулы для решения задачи о делении плоскости прямыми, находящимися в общем положении. Методы: *алгебра*, *индукция*.
40. **Симметрии восьмигранников.** Придумывать восьмигранники и смотреть, переходят ли они в себя при вращении вокруг каких-то прямых. Методы: *ножницы*, *клей*, *созерцание*.
41. **Классификация дробно-квадратичных функций.** Исследовать какие типы графиков могут получиться, если в числителе и в знаменателе — квадратичные функции. Методы: *теорема Виета*, *построение графиков*.

Метод вспомогательной задачи

И.Б. Писаренко

учитель математики лицея №1557

Можно было бы, конечно, выбрать примеры и пострашнее, но усваивать идеи лучше на простых.

В.А. Уфнаровский. Математический аквариум.

Метод был разработан венгерским математиком Д. Пойа в середине двадцатого века, и описан в книгах: «Как решать задачу» (КРЗ), «Математика и правдоподобные рассуждения» (МПР), «Математическое открытие» (МО).

Для того чтобы решить нестандартную задачу этим методом, нужно сделать три вещи:

1. Придумать вспомогательную задачу.
2. Решить вспомогательную задачу.
3. Использовать вспомогательную задачу для решения основной.

Далее я кратко раскрою содержание трех основных этапов, но для начала хочу сделать весьма важное замечание. Дело в том, что метод Пойа не относится к числу алгоритмических методов, это не метод деления уголком, и не алгоритм Евклида. Метод Пойа я отношу к интуитивным методам.

Их отличие от алгоритмических заключается в том, что тут нет формальных правил и определений, они не могут быть запрограммированы на компьютере, но обучать им людей возможно. Все основные правила и трюки согласовываются на некотором количестве интуитивных примеров, доказать тут ничего нельзя, но экспериментальный факт заключается в том, что согласовать все друг с другом возможно. Образно говоря, метод Пойа (как и все остальные интуитивные методы) — это полный бред, но мы можем бредить согласованно, выходя независимо на одни и те же контрольные решения. Да это бред, но этот бред имеет свою структуру, и я полагаю, что он весьма полезен.

Приведем несколько примеров решения задач методом Пойа.

Пойа 1.

Червяк ползет по столбу, начав путь от его основания. Каждый день он проползает вверх на 5 см, а каждую ночь сползает вниз на 4 см. Когда он достигнет верхушки столба, если его высота равна 75 см?

Обсуждение: Задача сложная, потому что высота столба большая. Уменьшим ее.

Вспомогательная: Червяк ползет по столбу, начав путь от его основания. Каждый день он проползает вверх на 5 см, а каждую ночь сползает вниз на 4 см. Когда он достигнет верхушки столба, если его высота равна 5 см?

Решение: Если высота столба 5 см, то червяку понадобится день (12 часов), потому что достигнув верхушки столба он вниз сползать не будет. А основная задача через 70 суток сведется к вспомогательной. Поэтому всего червяку потребуется 70 суток и один день (половина суток).

Пойа 2.

За десять дней пират Ерема способен выпить бочку рома, а у пиратушки Емели ушло б на это две недели. За сколько дней прикончат ром пираты, действуя вдвоем?

Обсуждение: Трудность задачи заключается в том, что за десять дней Емеля выпивает нецелое число бочек, а за две недели — Ерема. Пусть пираты пили 140 дней. Тогда Ерема выпьет 14 бочек, а Емеля — 10 бочек, всего 24 бочки. А одну бочку они выпьют за $\frac{140}{24}=\frac{35}{6}$ дней.

Итак, вернемся к трем основным шагам метода вспомогательной задачи.

Придумать полезную вспомогательную задачу наиболее сложно технически, мне известны около двух десятков техник генерации вспомогательных задач. Я Вам расскажу только об одной из них, но это чуть позже, давайте начнем с более простых, но не менее важных вещей.

Как решить вспомогательную задачу?

По своему определению вспомогательная задача — это игрушечная модель основной. Она на порядок и более проще, чем основная, поэтому вспомогательную задачу Вы решаете своим обычным методом, как Вы решали и все остальные задачи. Решение вспомогательной задачи должно быть видно с первого взгляда, ну, в крайнем случае, со второго. Более пока не буду говорить о втором шаге, а перейду к третьему.

Вспомогательную задачу для решения основной можно использовать двумя принципиально разными способами: используя Метод или используя Результат.

Представьте себе, что Вы поручили решение вспомогательной задачи младшему брату, он Вам ее решил. Далее, если для решения основной задачи, Вас интересует только ответ, и Вы спрашиваете: «Что у тебя получилось?», значит, Вы используете Результат. Если Вам ответ не важен, а важно знать как он ее решал, Вы используете Метод. Иногда (в задачах на математическую индукцию, например) Вам важен и ответ и способ решение, в этом случае Вы используете и Метод и Результат. В интуитивных техниках общие слова без примеров не несут никакой полезной информации. Поэтому перейдем к примерам.

В нижеследующих примерах мы используем Результат решения вспомогательной задачи.

Результат 1.

Купец на 540 рублей купил 138 аршинов сукна (черного и синего). Сколько купил он черного сукна и сколько синего, если синее стоило 5 рублей за аршин, а черное 3 рубля?

Обсуждение: Трудность в том, что есть сукно двух цветов, тогда вспомогательная задача может звучать примерно так: "Купец купил 138 аршинов синего сукна по 5 рублей за аршин, сколько он заплатил?"

Ответ: 690 рублей.

Вспомогательную задачу мы решили, но в основной сукно двух цветов, как быть?

Надо взять ведро черной краски и начать перекрашивать синее сукно в черное. Если перекрасить один аршин, суммарная стоимость сукна уменьшиться на 2 рубля, а нам надо ее уменьшить на $690-540 = 150$ рублей, для этого надо перекрасить 75 аршинов. В итоге у нас получится 75 аршинов черного сукна, и $138 - 75 = 63$ аршина синего.

Результат 2.

Кузнец подковывает одно копыто за 5 минут. Сколько времени потребуется 48 кузнецам, чтобы подковать 60 лошадей? (При ковке лошадь не умеет стоять на двух ногах.)

Обсуждение: В основной задаче слишком много кузнецов и слишком много лошадей.

Вспомогательная: Кузнец подковывает одно копыто за 5 минут. Сколько времени потребуется 4 кузнецам, чтобы подковать 5 лошадей? (При ковке лошадь не умеет стоять на двух ногах).

Нетрудно понять, что, так как надо всего подковать 20 копыт, а за пять минут мы можем подковать только 4 копыта, то меньше, чем за 25 минут, мы не управимся. Теперь надо организовать работу без простоев, для этого поставим пять лошадей по кругу, а четыре кузнеца будут обходить их по часовой стрелке, каждый раз сдвигаясь на одну лошадь. Вспомогательную задачу мы решили.

Для того, чтобы решить основную, разобьем лошадей на 12 табунов по 5 лошадей, а кузнецов на 12 бригад по 4 кузнеца и сведем основную задачу к вспомогательной.

Результат 3.

Какое число больше: 2^{300} или 3^{200}?

Обсуждение: Трудность задачи в слишком больших степенях.

Вспомогательная: Какое число больше: 2^3 или 3^2?

Нетрудно понять, что $2^3 < 3^2$.

Вспомогательная задача решена. Для того, чтобы решить основную, умножим неравенство $2^3 < 3^2$ само на себя 100 раз и получим решение основной задачи.

Результат 4.

Квадратная площадь размером 100×100 выложена квадратными плитами 1×1 четырех цветов: белого, красного, черного и серого так, что никакие две плиты одного цвета не соприкасаются ни сторонами, ни вершинами. Сколько может быть красных плит?

Обсуждение: Трудность задачи в размерах площадки.

Вспомогательная: Квадратная площадь размером 2×2 выложена квадратными плитами 1×1 четырех цветов: белого, красного, черного и серого так, что никакие две плиты одного цвета не соприкасаются ни сторонами, ни вершинами. Сколько может быть красных плит?

Ответ для вспомогательной задачи очевиден — ровно одна плита.

Для того, чтобы решить основную, разобьем площадь 100×100 на 2500 площадок 2×2, так как в каждой из них ровно одна красная плита, то на большой площадке ровно 2500 красных плит.

Результат 5.

Петя и Вася выписывают двенадцатизначное число, ставя цифры по очереди, начиная со старшего разряда. Вася начинает. Сможет ли Петя добиться, чтобы полученное число делилось на 9?

Обсуждение: Число слишком длинное.

Вспомогательная: Петя и Вася выписывают двузначное число, ставя цифры по очереди, начиная со старшего разряда. Вася начинает. Сможет ли Петя добиться, чтобы полученное число делилось на 9?

Простым перебором $(18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90)$ можно убедиться, что Петя своего добьется.

Для решения основной задачи разобьем двенадцатизначное число на шесть двузначных. Тут надо отследить два момента, во-первых появляется новая пара чисел (09), во-вторых, надо убедиться, что при таком разбиении свойство делимости на 9 сохраняется.

Замечание: Признак делимости на 9 мы не использовали, и решали маленькую задачу перебором.

Если бы для решения маленькой задачи мы использовали признак делимости на 9, а потом применяли так или иначе признак делимости на 9 для решения большой задачи, это было бы уже использование Метода.

Сделаем еще несколько замечаний по Результату. Во-первых, вспомогательные задачи у нас получились очень простыми, они решались либо в лоб, либо небольшим перебором, в то время как основную задачу решить перебором было бы затруднительно. Во-вторых, основная задача выступала у нас как одна или несколько копий вспомогательной (**Результат 1** — 1 копия, **Результат 2** — 12 копий, **Результат 3** — 100 копий, **Результат 4** — 2500 копий, **Результат 5** — 6 копий).

В третьих, если мы используем результат вспомогательной задачи, нам совершенно не важно каким методом (может быть совершенно некорректным) она решалась, главное, чтобы был правильный ответ.

Далее приведу несколько примеров на Метод.

Метод 1.

Квадратный торт и круглую шоколадку на нем разрезать пополам одни разрезом.

Обсуждение: Трудность в том, что фигуры разные.

Вспомогательная: Круглый торт и круглую шоколадку на нем разрезать пополам одни разрезом.

Понятно, что искомый разрез надо провести через центры двух кругов.

Перенесем метод решения вспомогательной на основную задачу, проведя разрез через центр квадратного торта и центр круглой шоколадки, нетрудно понять, что данный разрез удовлетворяет условиям задачи.

Метод 2.

Может ли каждый из 77 телефонов быть соединенным ровно с 7 другими?

Обсуждение: Соединений много.

Вспомогательная: Может ли каждый из 77 телефонов быть соединенным ровно с одним другим?

Понятно, что не может, т. к. телефоны должны разбиться на пары, а один останется без пары.

Но это рассуждение на основную задачу не переносится. Попытаемся его модифицировать.

Так как связаны два телефона, число соединений должно быть четным, а так как каждый из 77 телефонов соединен ровно с одним другим — оно нечетное (равно 77), чего быть не может. Перенесем это рассуждение на основную задачу:

Так как связаны два телефона, число соединений должно быть четным, а так как каждый из 77 телефонов соединен ровно с семью другим — оно нечетное (равно $77 \cdot 7 = 539$), чего быть не может.

Метод 3.

Можно ли из 36 первых простых чисел составить магический квадрат 6×6?

Обсуждение: Квадрат большой.

Вспомогательная: Можно ли из 4 первых простых чисел составить магический квадрат 2×2?

Решение: Простым перебором можно убедиться, что из чисел 2, 3, 5, 7 магического квадрата не получится. Однако переборное решение на квадрат 6×6 не переносится.

Попытаемся теоретически обосновать, почему задача 2×2 не имеет решения. Мы замечаем, что 2 — единственное простое число, поэтому сумма всех чисел квадрата 2×2 равна $2 + 3 + 5 + 7 = 17$ — число нечетное, а так как в магическом квадрате суммы чисел в строках равны, общая сумма должна делиться на 2, получили противоречие. Перейдем к основной задаче.

Так как в магическом квадрате 6×6 суммы чисел в строках должны быть одинаковыми, сумма чисел в квадрате должна делиться на 6, а значит и на 2. С другой стороны сумма двойки и 35 нечетных чисел будет числом нечетным. Получили противоречие.

Заметим, что не всякий метод решения вспомогательной задачи может быть перенесен на основную задачу, метод перебора, например, практически никогда не переносится. В этом заключается недостаток использования Метода по сравнением с использованием Результата.

Поэтому в первую очередь надо попытаться использовать Результат, хотя не во всех задачах это возможно.

Для того, чтобы подчеркнуть различия между двумя способами использования вспомогательной задачи, приведем еще ряд задач.

Метод — Результат 1.

Основная: Найти последнюю цифру числа 2^{100}.

Вспомогательная: Найти последнюю цифру числа 2^{10}.

Решение вспомогательной: Понаблюдаем за последними цифрами степеней двойки: $2^1 - 2$, $2^2 - 4$, $2^3 - 8$, $2^4 - 6$, $2^5 - 2$, $2^6 - 4$ и далее с периодом 4. Так как $10 = 2 \cdot 4 + 2$, то 2^{10} оканчивается на 4.

Решение основной (Метод): Так как последние цифры степеней двойки имеют период $2 - 4 - 8 - 6$ (длины 4), а $100 = 4 \cdot 25$, то 2^{100} оканчивается на 6.

Решение основной (результат): Мы знаем, что 2^{10} оканчивается на 4. А $2^{100} = (2^{10})^{10}$. Поэтому 2^{100} оканчивается на тоже, что 4^{10}, а $4^{10} = 2^{10} \cdot 2^{10}$, значит 2^{100} оканчивается так же, как 4×4, т. е. на 6.

Метод — Результат 2.

Основная: Парламент состоит из двух равных по численности палат. На совместном заседании присутствовали все, и никто не воздержался при голосовании. Когда было объявлено, что некоторое решение было принято большинством в 23 голоса, оппозиция закричала "Это обман!" Почему?

Вспомогательная 1 (*Метод*):

Парламент состоит из двух равных по численности палат. На совместном заседании присутствовали все, и никто не воздержался при голосовании. Когда было объявлено, что некоторое решение было принято большинством в один голос, оппозиция закричала "Это обман!" Почему?

Решение 1: Так как парламент состоит из двух равных палат, то в нем четное число депутатов. Если присутствовали все, никто не воздержался, и решение было принято большинством в один голос, в парламенте нечетное число депутатов, получается противоречие.

Это рассуждение дословно (лишь заменой 1 на 23) переносится на основную задачу.

Вспомогательная 2 (*Результат*):

Парламент состоит из двух равных по численности палат. На совместном заседании присутствовали все, и никто не воздержался при голосовании. Может ли некоторое решения набрать равное число голосов за и против?

Решение 2: Да, может, половина депутатов проголосовали за, а половина против. Вспомогательную задачу мы решили, но в основной задаче у нас большинство в 23 голоса. Пусть депутат, голосовавший против изменит свое мнение и проголосует за, при это разность голосов за и против увеличится на 2, а начиная с нуля и добавляя двойки 23 получить нельзя. Основная задача решена.

Итак, мы составили некоторое начальное представление о третьем шаге метода Пойа, и пора перейти к первому, к техникам генерации продуктивных вспомогательных задач. Я Вам расскажу только об одной из них, технике Таблиц.

Часто, мы встречаемся с задачами, где в условии есть два натуральных числа, которые либо равноправны, либо простым образом связаны друг с другом. Такие задачи будем называть задачами с таблицами. Полагая первое число ее длиной, а второе — шириной. Длину и ширину

будем называть параметрами таблицы. Для таблиц можно ввести два оператора фантазии, позволяющих создавать плодотворные вспомогательные задачи. Прежде всего, это оператор сжатия. Один параметр таблицы мы оставляем неизменным, а второй уменьшаем до минимально возможного значения. Далее применяется оператор деления. Оба параметра таблицы мы одновременно уменьшаем в целое число раз, так чтобы получившиеся значения были минимальными из всех возможных.

Мы также будем использовать определенную форму записи:

Таблица: 27×6.

Сжимаем: 27×1 или 1×6.

Делим: 9×2.

А теперь перейдем к примерам.

Таблица 1.

По длинному узкому каналу один за другим идут три парохода. Навстречу им — еще 3 парохода. Канал такой узкий, что два парохода в нем разъехаться не могут, но в нем есть залив, где может поместиться один пароход. Как им разъехаться?

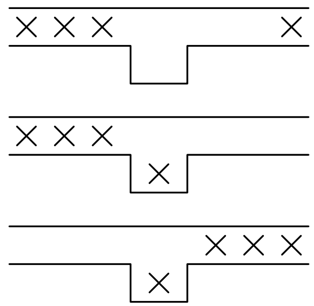
Решение:

Таблица: 3×3.

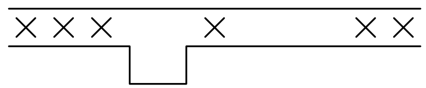
Сжимаем: 3×1 или 1×3.

Делим: 1×1.

Решение начнем с задачи 3×1. Т. е. с одной стороны у нас три парохода, с другой — один. Решение почти очевидно:



Решив вспомогательную задачу вернемся к основной. Как случай 3×3 свести к случаю 3×1? Да отогнать два парохода куда подальше.



Если учесть, что пароходы могут двигаться в обе стороны, то решение задачи 3×3 сводится к решению трех задач 3×1.

Таблица 2.

Можно ли из 36 первых простых чисел составить магический квадрат 6×6?

Решение:

Таблица: 6×6.

Сжимаем: нельзя.

Делим: 2×2.

Напомним, что простые числа — это натуральные числа, отличные от единицы, которые делятся только на самих себя и единицу. В магических квадратах сумма чисел по вертикалям, горизонталям и двум главным диагоналям должна быть одинакова.

Задачи 6×1 и 1×6 смысла не имеют. Мы будем говорить, что оператор сжатия в данном случае не допускается задачей.

Рассмотрим задачу 2×2. Простым перебором мы можем убедиться в том, что из чисел 2, 3, 5, 7 составить магический квадрат 2×2 невозможно. Однако применить полный перебор для задачи 6×6 представляется трудным. Кроме того, отрицательный Результат задачи 2×2 использовать для решения задачи 6×6 тоже не выйдет, потому что из того, что нельзя составить 9 маленьких 2×2 не вытекает, что нельзя составить большой 6×6. Мы будем в таких случаях говорить что **Нет-решение** маленькой задачи не допускает перенос по результату.

Контрольный вопрос: А **Да-решение** нашей задачи 2×2 допускает перенос по результату?

Поищем другое решение задачи 2×2, не переборное, а теоретическое.

Нетрудно заметить, что 2 отличается от всех остальных простых чисел тем, что оно четное. В строке, где будет стоять 2, сумма чисел будет нечетная, а в остальных — четная. Данное решение дословно переносится на случай таблицы 2×2.

Контрольный вопрос: А что мы сейчас использовали — Метод или Результат?

Решение второго примера вызывает некоторые дополнительные вопросы. Почему мы рассматривали таблицу 2×2, а не 1×1? Для того, чтобы ответить на этот вопрос, разобьем вспомогательные задачи на три класса: простейшие, примитивные, бессмысленные.

Бессмысленные задачи — это те, которые не имеют смысла. Например $(-1) \times 3$ в первом случае, 6×1 и 0×0 во втором. Сразу за бессмысленными задачами следуют примитивные задачи.

Примитивные задачи — это те, решение которых безальтернативно, задачи, которые как бы решают сами себя. Например 3×0 в первом случае, 1×1 во втором. Действительно, если слева три парохода, а справа ни одного, то им очень легко разминуться. Очень легко составить магический квадрат из одного простого числа.

Сразу за примитивными задачами следуют простейшие. Простейшие задачи — это те, которые мы можем решить с помощью небольшого перебора.

Например, 3×1 в первом случае и 2×2 во втором. Так вот операторы фантазии необходимо применять до простейших задач. В задаче о магическом квадрате случай 1×1 — примитивен, поэтому мы выбрали 2×2.

Таблица 3.

Какое максимальное число королей можно поставить на шахматную доску так, чтобы ни не били друг друга?

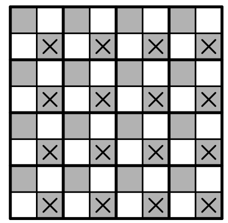
Решение:

Подход 1.

Таблица: 8×8.

Сжимаем: 8×1 или 1×8.

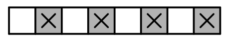
Делим: 2×2.



Решение 1. Простым перебором можно убедиться, что в случае таблицы 2×2 можно поставить только одного короля. Разобьем квадрат 8×8 на 16 квадратиков 2×2. И убедимся, что всего можно поставить 16 королей, а 17 — нельзя, потому что, если поставить 17 королей на большую доску, то минимум двое из них окажутся на маленькой, а это запрещено.

В данном случае мы использовали Результат задачи 2×2 для решения задачи 8×8.

Решение 2. Рассмотрим задачу 8×1. Простым перебором можно убедиться, что в такую полоску можно поставить не более 4 королей.



Попытаемся найти теоретическое объяснение этому факту. Полоску из восьми клеток можно разрезать на 4 кирпичика из двух клеток. Ясно, что в одном кирпичике может быть только один король, поэтому пять королей в полоску из восьми клеток поставить нельзя (иначе в каком-то кирпичике появилось больше одного короля, что запрещено).

По аналогии разобьем квадрат 8×8 на 16 квадратиков 2×2, а дальше смотри первое.

Контрольный вопрос: Мы использовали метод или результат решения задачи 8×1 для решения задачи 8×8?

Подход 2.

Мы могли посчитать, что сжатие до 8×1 чрезмерно, и задача допускает сжатие только до 8×2. Тогда мы получили бы:

Таблица: 8×8.

Сжимаем: 8×2 или 2×8.

Делим: 2×2.

Упражнение: Получите два решения задачи 8×8, на основании решения задачи 8×2. Сначала по Результату, потом по Методу. Сравните их с предыдущими решениями.

Таблица 4.

Дана таблица чисел 9×6, сумма чисел в каждой строке меньше нуля. Может ли быть так, что в каждом столбце сумма чисел будет больше нуля?

Решение:

Таблица: 9×6.

Сжимаем: 9×1 или 1×6.

Делим: 3×2.

Рассмотрим строку 1×6. Могут ли все числа в строке быть больше нуля, а их сумма меньше нуля? Конечно нет. Как превратить таблицу 9×6 в строку 1×6 с нужными свойствами? Необходимо разрезать таблицу на девять строк 1×6 и просуммировать строки. Тогда, если в первоначальной таблице сумма чисел в каждой строке меньше нуля, а сумма чисел в каждом столбце больше нуля, то мы получим строку 1×6 в которой все числа больше нуля, а сумма их меньше нуля, что невозможно.

Контрольный вопрос: А что мы использовали здесь: Метод или Результат?

Упражнение: Опираясь на задачу 1×6, и используя другой способ сведения, получите новое решение задачи 9×6.

Таблица 5.

За круглым столом сидят несколько мальчиков и девочек. Докажите, что число пар соседей разного пола четно.

Решение: С первого взгляда не видно, где здесь таблица, однако, внимательнее прочитав условие задачи, видим, что таблица задана неявно. За столом у нас сидят m мальчиков и n девочек.

Таблица: $m \times n$.

Сжимаем: $m \times 1$ или $1 \times n$.

Делим: нельзя.

Итак, за столом у нас несколько мальчиков и одна девочка, тогда число пар соседей разного пола равно двум и является четным. Остальных девочек будем подсаживать по одной, а место, куда садиться, они выбирают сами. Возможны два случая: если очередная девочка скромная, то она сядет рядом с другой девочкой, и число пар соседей разного пола не изменится. Нескромная девочка сядет между двумя мальчиками, в этом случае число пар соседей разного пола увеличится на два. Итак, в начале искомое число было четным, далее либо не менялось, либо увеличивалось на два, понятно, что и в конце оно будет четным.

Мораль этой задачи: слово "несколько" в условии заменяйте неизвестными, и вообще надо внимательно приглядываться к условия задачи, таблица в нем может присутствовать неявно.

Замечание: Данная задача допускает сжатие и до нуля, что соответствует полному отсутствию мальчиков или девочек поначалу.

Контрольный вопрос: Что мы использовали?

Таблица 6.

Хулиганы Петя и Вася рвут стенгазету на мелкие кусочки. Вася рвет каждый попавшийся ему кусок на 4 кусочка, а Петя — на 7. Может ли в результате получиться 1997 кусочков?

Решения: чисел много в задаче слишком, но можно заметить, что 4 и 7 равноправнее. Таким образом, стоит рассмотреть таблицу 4×7.

Таблица: 4×7.

Сжимаем: 4×1 или 1×7.

Делим: нельзя.

Решение 1. Начнем с задачи 4×1. Один хулиган отдыхает, а второй рвет на четыре части. Что может получиться? $1, 4, 7, 10, 13, \ldots$ каждый раз число частей увеличивается на три, а уравнение $1 + 3\kappa = 1997$ решений в натуральных числах не имеет. Поэтому в этой задаче ответ "не может".

Рассмотрим задачу 1×7. Теперь работает первый хулиган, разрывая газету на шесть частей, у него может получиться $1, 7, 13, 19, 26, \ldots$. Каждый раз число частей увеличивается на шесть, а уравнение $1 + 6\kappa = 1997$ решений в натуральных числах не имеет. Первый тоже не справится. Если теперь они заработают оба, то число частей будет увеличиваться на три или на шесть, а уравнение $1 + 3\kappa + 6p = 1997$ решений в натуральных числах не имеет, значит, не может.

Решение 2. После Васи число кусочков газеты увеличивается на 3, а после Пети — на 6. Мы выяснили, что один Вася получить 1997 кусочков не может. Пусть теперь работают оба хулигана, и Петя ввел дедовщину, когда приходит время рвать ему, он два раза посылает Васю. Таким образом, задача с двумя хулиганами сводится к одному работающему Васе, а он получить 1997 кусочков не может.

Контрольный вопрос: В каком решении мы использовали метод, а в каком результат?

Я познакомил Вас кратко с методом вспомогательной задачи, а теперь хочу поговорить о его достоинствах.

1. Все примеры были элементарными, однако и некоторые шестые задачи Московской математической олимпиады легко решаются методом Пойа. Моя статистика по 8 – 10 классам примерно такая: четыре из шести задач можно решить методом вспомогательной задачи. Следует отметить, что чем длиннее условие основной задачи, тем труднее ее решить методом Пойа.

2. Я никогда не говорил, что с помощью любого решения любой вспомогательной задачи можно решить основную. Но моя статистика примерно такова: для очень многих задач можно придумать не более трех разумных вспомогательных, каждая из вспомогательных имеет не более трех различных решений, и одно из решений одной из вспомогательных задач является ключом для решения основной задачи.

3. Метод Пойа является естественным развитием арифметического метода решения задач (смотри **Пойа 2**, **Результат 1**). Помимо этого метод вспомогательной задачи является развитием метода перебора. Вместо того, чтобы решать большую задачу, которую перебором решить нельзя, мы конструируем маленькую, которая перебором легко решается, а потом сводим большую к маленькой (смотри **Результат 4**, **Результат 5**, **Таблица 3**). Большой перебор по данным в основной задаче мы размениваем на небольшой перебор по решениям вспомогательной задачи.

4. Д. Пойа как-то заметил, что хорошая классификация предполагает разбиение задач на такие типы, что тип задачи предопределяет метод ее решения. Стандартная классификация олимпиадных задач: задачи на четность, задачи на индукцию, задачи на принцип Дирихле, задачи на инвариант — это классификация по решениям. Но в начале у нас нет решения, у нас есть только условие.

Техники придумывания вспомогательных задач (смотри технику Таблиц) ориентированы на работу с условием задачи.

5. Метод вспомогательной задачи выводит только на универсальные решения. Дело в том, что вспомогательная задача на порядок проще основной, и имеет намного меньше различных решений, чем основная. Выживают только самые сильные решения, которые подходят для целой серии задач (смотри **Результат 2**, **Результат 3**, **Результат 4**, **Результат 5**, **Метод 2**, **Метод 3**, **Таблица 1**, **Таблица 2**).

Не замечая этого, мы решаем не две задачи (основную и вспомогательную), а целую серию задач. При этом, так как решение игнорирует мелкие детали, свойственные индивидуальным задачам в серии, оно получается кратким и изящным. Кроме того, по двум задачам мы можем легко и однозначно провести обобщение. Переведя неявное знание в явное.

6. Метод вспомогательной задачи хорошо взаимодействует с классическими методами решения олимпиадных задач. Дело в том, что классические методы — это методы, наиболее часто встречающиеся в решении задач, можно сказать, самые живучие методы. А когда мы переходим к вспомогательной задаче, мы естественным образом производим их отбор. Мы сами выходим на эти методы в ситуациях, где они наиболее обозримы и очевидны (смотри **Таблицу 3**). Мы применяем метод Дирихле не зная, что это метод Дирихле. Скажу больше, если какая-нибудь теория используется для решения вспомогательной и основной задач, или для перехода от вспомогательной задачи к основной, то основная задача, решаемая методом Пойа вынуждает нас построить эту теорию (смотри **Результат 5**). Решая эту задачу, мы можем обнаружить и доказать признак делимости на 9. При этом теория возникает не сама по себе, а вместе с задачей, которую с ее помощью можно решить.

7. Метод интуитивно прозрачен, основан на вере в то, что похожие задачи имеют похожие решения. Неявно, подсознательно, люди решают задачи с помощью упрощения. Иллюстрацией этого факта является то, что очень часто учащиеся неправильно понимают условие, решая другую, упрощенную задачу. Они незаметно для себя генерируют вспомогательную задачу.

Метод Пойа позволяет эти неявные вещи сделать явными, оптимизировать их, а потом автоматизировать.

8. Является одной из реализаций метода моделирования. Вспомогательные (игрушечные) задачи служат моделями различных черт основной задачи. Работая с игрушечными задачами, мы постепенно готовимся к решению основной.

9. Метод открыт. У ученика есть выбор вспомогательной задачи из нескольких разумных, выбор в решении вспомогательной задачи, и выбор в способе использования. К счастью, этот выбор обозрим. Но его наличие приводит к нескольким возможным контрольным решениям. И новые решения порой находишь там, где все казалось бы знаешь.

10. Решая задачу методом Пойа мы многие полезные вещи выполняем не замечая этого. Например, решение вспомогательной задачи служит проверкой для решения основной, мы выполняем проверку решения еще до того как решили задачу! При этом проверка выполняется в более простом случае. Многие ошибки интуиции в большой задаче для малой задачи исключены (смотри **Пойа 1**).

11. Весь курс школьной математики может быть изложен с помощью метода вспомогательной задачи. При этом не возникает эффекта рояля из кустов, а у учащегося возникает иллюзия, что он сам догадался до новой теории. Может быть использован для самостоятельного повторения и закрепления пройденного материала (в классе учитель дает лемму о точной верхней границе, дома просит сформулировать и доказать лемму о точной нижней границе, используя Метод или Результат первой леммы). Метод Пойа может быть использован как эффективное мнемоническое средство. Он позволяет восстанавливать забытые решения и доказательства. «Объясняет» откуда взялись решение задачи, доказательство теоремы, новая теория или метод.

12. Метод позволяет решение сложной задачи разложить на ряд простых шагов. Каждый шаг понятен и обозрим. Многие из них могут выполняться независимо друг от друга. Например, мы можем сначала решить вспомогательную задачу, а потом попытаться ее использовать. А можем сначала попытаться использовать гипотетически решенную вспомогательную задачу.

Метод позволяет избежать логических ошибок.

13. Метод достаточно компактен. Имеет техники разных уровней, можно постепенно улучшать свои умения. Даже не полное следование методу приносит пользу. Действуя по протоколу, в любой момент времени мы можем оценить, как далеко мы продвинулись в решении данной задачи. Не дает ощущения тупика. Если есть небольшие продвижения в решении, учащийся это понимает.

14. Развивает разумную фантазию. Для сведения одной задачи к другой требует введения новых понятий и новых теоретических фактов. Позволяет «уточнять» некорректно сформулированные задачи. Если задача методом Пойа не решается, это также дает некоторую информацию о задаче.

Памятные задачи

Ю.О. Пукас

учитель математики

гимназии г. Троицка

Памятные задачи. Почему именно они запомнились из тысяч других? Яркость формулировок, красота идеи, а иногда и сам извилистый процесс решения берегут их в нашей памяти. Разбор таких задач с учениками бывает необычайно полезен. Они не только знакомятся с новыми идеями, но и видят, как непросто дается иногда решение той или иной задачи. «С постоянством прибоя мозг маэстро добивается тайны лучшего хода», — писал в двадцатых годах прошлого века шахматный гроссмейстер Савелий Тартаковер. Как не хватает такой настойчивости большинству современных школьников!

Бывает, что решению трудной задачи способствует посторонний фактор. Что-то попавшее в поле зрения, или случайно услышанная фраза могут затронуть слой памяти с нужной информацией. Когда Николай Николаевич Андреев рассказал, как смертельно больной Константин Симонов назвал себя «еле живым классиком», я сразу вспомнил живого Симонова, которого я видел единственный раз на грандиозном вечере поэзии в Лужниках в ноябре 1976 года. Симонов вел этот вечер. Сам он прочитал только одно стихотворение, мне хорошо знакомое. Оно очень подходит если и не к самому моему сегодняшнему выступлению, то к нашему пребыванию на семинаре:

Все в звёздах небо. С моря дует ветер.
Мы встретим со стаканами зарю.
Не говорю: «Забудем все на свете!»
Согреемся немного», — говорю.

Пусть длится ночь. Пусть запоздает утро.
В объятьях дум сижу я у огня.
Пусть то, что я скажу, не так уж мудро,
Но мудрость друга — выслушать меня.

Заручившись поддержкой классика, перехожу к задачам. За несколько дней до этого участники семинара получили листочки с восемью задачами. Вот они:

1. Вычислите без помощи таблиц и калькулятора число $\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{7}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{7}$.

2. Сравните два числа: $\frac{2\pi}{5}$ и $\arccos\frac{3}{10}$.

3. Сравните два числа: $\frac{3\pi}{10}$ и $\arcsin\frac{4}{5}$.

4. Сравните два числа: $\cos\frac{3\pi}{11}$ и 0,67.

5. Пусть α, β и γ — углы остроугольного треугольника. Докажите, что $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma>2$.

6. Докажите, что сумма длин медиан треугольника не менее чем в девять раз превосходит радиус вписанной в этот треугольник окружности.

7. Докажите, что для любых положительных a, b, c не могут одновременно выполняться неравенства: $a(1-b)>\frac{1}{4}$, $b(1-c)>\frac{1}{4}$, $c(1-a)>\frac{1}{4}$.

8. Найдите минимальное значение выражения $(x+y)(y+z)$, если x, y, z — положительные числа и $xyz(x+y+z)=9$.

1. Первая задача была опубликована в справочнике «МГУ — 2002» (стр. 163) и привлекла внимание многих решателей. Весной 2002 года меня спросил о ней Игорь Иванушенков (заканчивает четвертый курс ВМК), он по пустякам не обращался. Знаю, что осенью того же года эту задачу пыталась решить группа мехматовцев, собравшаяся на 20-летие своего выпуска; предложили подумать над ней и одиннадцатиклассникам второй школы (так как решение с ними не разобрали, то можно предположить, что учителя его не нашли). Знаменатель оценить легко:

$$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}=-\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}=$$
$$=-\frac{8\sin\frac{\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}=-\frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{8}.$$

Найти, чему равен числитель, чему равно произведение соответствующих синусов, долго не удавалось. Помог случай: взятая в руки книга Мордковича и Литвиненко (я не прикасался к ней лет шесть), упав на пол, открылась на странице, где в номере 1327 я увидел и ответ, и подсказку. Надо возводить в квадрат! Оказывается, всё очень просто:

1327. $\sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right)\sin^2\left(\frac{2\pi}{7}\right)\sin^2\left(\frac{3\pi}{7}\right)=\frac{7}{64}$.

$$8\sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right)\sin^2\left(\frac{2\pi}{7}\right)\sin^2\left(\frac{3\pi}{7}\right)=\left(1-\cos\frac{2\pi}{7}\right)\left(1-\cos\frac{4\pi}{7}\right)\left(1-\cos\frac{6\pi}{7}\right)=$$
$$=\left(1-\cos\frac{2\pi}{7}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{7}\right)\left(1+\cos\frac{\pi}{7}\right)=1-\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7}+$$
$$+\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}=$$
$$=1-\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}-$$
$$-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7}\right)-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7}\right)+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\right)=$$
$$=1-\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{7}{8}.$$

2–3. Две следующие задачи предлагались в 2001 году поступающим на географический факультет МГУ. Решение их несложно, так как значения $\cos\frac{2\pi}{5}$ и $\sin\frac{3\pi}{10}$ легко вычисляются (рассказывая об этих задачах, можно показать несколько путей, как это сделать).

Авторское же решение основано на идее сравнения с нулем. Так, в задаче 2 увеличим сравниваемые числа в 5 раз. Поскольку $\sin 2\pi=0$, сравним с нулем $\sin\left(5\arccos\left(\frac{3}{10}\right)\right)$. Он равен $\frac{31\sqrt{91}}{6250}>0$, следовательно, $\arccos\frac{3}{10}>\frac{2\pi}{5}$.

Остальные пять задач предлагались абитуриентам в апреле 2003 года на устном экзамене ВМК.

4. Будем сравнивать с нулем, увеличив соответствующие углы в 11 раз. Заподозрив, что авторы придумывали задачу для числа $\frac{2}{3}\sim 0,67$, можно предугадать ответ и упростить вычисления, подтверждающие эту гипотезу: $0,67>\frac{2}{3}>\cos\left(\frac{3\pi}{11}\right)$.

5. Эта задача для меня самая памятная из рассматриваемых. Утром 20.04.03 её предложили Андрею Маркову из Троицка (учится на физфаке МГУ, заканчивает третий курс), опустив слово "остроугольный". Когда он привел пример невыполнения данного неравенства (хотя бы для $\alpha=\frac{5\pi}{6}$), экзаменаторы предложили Андрею исследовать, для каких углов треугольника это верно. Задача у меня долго не получалась. Целенаправленный поиск в книгах чего-нибудь похожего, дал результат. Оказывается, для углов любого треугольника выполняется соотношение: $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

Доказать это легко, ещё проще применить в нашем случае: $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma > \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$, а это больше двух, так как косинусы острых углов положительны.

6. Решая эту задачу, я не догадался заменить медианы высотами, чья сумма не превосходит суммы длин медиан. Подсказку нашел на первой же странице очень памятной для меня книги Э.Г. Готмана "Уравнения, тождества и неравенства при решении геометрических задач", которую получил 40 лет назад за успех на олимпиаде в Северной Осетии:

$$m_a+m_b+m_c \geq h_a+h_b+h_c = 2S\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9r, \text{ где } r = \frac{2S}{a+b+c}.$$

7. Красивое решение этой задачи было найдено А.Н. Андреевой; А.Д. Блинков и П.В.Чулков предложили еще один очень простой путь: перемножить все три неравенства. Мне же почему-то сразу пришла в голову идея замены $a = \sin^2 A$, $b = \sin^2 B$, $c = \sin^2 C$, после чего я сложил все три неравенства и получил противоречие. Думаю, что этот путь я подсознательно выбрал благодаря задачам 1 и 5, где встречались квадраты синусов.

8. Выразим из второго соотношения не $(x+y)$ и не $(y+z)$, а $(x+z)$: $x+z = \dfrac{9}{xyz}-y$, тогда $(x+y)(y+z) = \cdots = y(x+z)+y^2+xz = \dfrac{9}{xz}+xz \geq 6$.

Минимальное значение достигается, если $xz = 3$. Например, $x = 3$, $y = -2+\sqrt{7}$, $z = 1$.

Эта изящная задача запомнилась мне в первую очередь тем, что шла в одном списке с четырьмя предыдущими. Кроме того, в ней, как и в шестой задаче, есть цифра 9. Бывает, что и такая мелочь помогает найти решение.

Благодаря моему рассказу (в такой необычной обстановке) эти восемь задач теперь запомнятся и вам, и, возможно, пригодятся когда-нибудь.

Математические бои в лицее 1511

А.В. Иванищук

учитель математики лицея №1511 при МИФИ

В Лицее 1511 (ранее физико-математическая школа 542) математические бои проводятся по данным правилам уже более 20 лет. Что же заставило нас отойти от правил классического математического боя? Большая учебная нагрузка не позволяет занимать единственный выходной день. В наших математических боях, основная цель которых состоит в развитии математического кругозора, участвуют дети с различным уровнем подготовки, разной скоростью мышления, разных математических пристрастий. Проведение боя по нашим правилам позволяет учесть большинство этих особенностей. Поскольку бой состоит из двух частей, то могут проявить себя как ученики с более высокой скоростью мышления при решении не очень сложных задач в основной аудитории, так и дети, которым для решения задач требуется более длительное время. Конкурсы требуют от участников проявления как индивидуальных способностей, так и умения работать в команде.

Классы в Лицее разбиваются на большинстве предметов на половинки, и каждая половинка выставляет на бой команду от 4 до 8 человек в каждой. Чаще всего бои проходят в субботу. Для проведения одного боя необходимы три аудитории и, как минимум, двое судей. Судьями являются преподаватели Лицея и студенты-выпускники. Проведение всего боя занимает 3 – 4 часа, из которых «довыездная» часть занимает 2 – 2,5 часа. Турнир математических боев в Лицее проходит в каждой учебной параллели чаще всего по системе выбывания двух худших проигравших команд или по олимпийской системе. При небольшом количестве команд можно организовать круговой турнир. Для встреч команд из разных параллелей рекомендуется давать различное время на обдумывание при одинаковом количестве баллов за задачу. У нас в Лицее проводились завершающие бои параллелей 10-х и 11-х, причем в них не всегда побеждали 11-е. Были бои школьников И.В. Ширстовой с выпускниками и даже с учителями. (Выпускники проиграли, а учителя победили).

Подготовка к бою состоит в подборе задач, обсуждении критериев выставления баллов. Задачи подбираются самого разного уровня сложности, тематика их и олимпиадная и учебная. Количество баллов за задачи конкурсов в основной аудитории к количеству баллов за выездной конкурс относятся приблизительно как 3 : 2.

Далее приводятся правила и задачи математических боев параллелей 10-х и 11-х классов.

Основные правила *математического боя*[9]

1. В математическом бое участвуют две команды от 4 до 8 человек в каждой.
2. Математический бой состоит из четырех частей:
   - ***конкурс командного решения задач***;
   - ***экспресс-конкурс***;
   - ***конкурс капитанов***;
   - ***выездной конкурс***.
3. Вначале две группы не более чем по четыре игрока от каждой команды переходят в другие аудитории, где им сообщаются условия задач выездного конкурса и время, отведенное на их решение. При решении задач команда может использовать любую литературу, но не имеет права общаться по поводу решения задач ни с кем, кроме жюри. Капитаны команд в эти группы не входят.
4. После того, как в каждой команде останется по 4 человека, жюри проводит конкурс ***командного решения задач***. Командам одновременно предлагается задача для решения и сообщается время, за которое необходимо решить эту задачу. Максимальное количество баллов, которое может присудить жюри команде за решение задачи, равно числу минут, отведенному на ее решение.
5. В решении задачи могут принимать участие все члены команды. Когда указанное время заканчивается, каждая из команд одновременно рассказывает свое решение жюри. После недолгого совещания жюри объявляет количество баллов, присуждаемое каждой команде. Конкурс командного решения состоит из двух задач.
6. Далее проводится ***экспресс-конкурс***. Для решения каждой задачи, которую предлагает жюри, от обеих команд к доске одновременно выходит по одному человеку. Участники находятся за крыльями доски, команда не должна видеть подготовку члена своей команды к ответу. Участники получают задания на карточках, для команд и болельщиков жюри зачитывает условия. Экспресс-конкурс состоит не более чем из шести задач. Каждый игрок решает не более двух задач. Порядок выхода к доске определяет капитан, который сам к доске не выходит. Ответы заслушиваются одновременно, оцениваются так же, как и в командном конкурсе, за досрочный ответ баллы не добавляются.
   Если были выставлены нулевые оценки игрокам обеим команд, то жюри разрешает помощь команды. Оценки выставляются из расчета половины баллов по задаче.
7. После экспресс-конкурса начинается ***конкурс капитанов***. Капитаны обеих команд выходят к доске и решают три задачи. Оценки выставляются аналогично командному конкурсу. Помощь команды не разрешается.
   Баллы, присуждаемые жюри за решения задач в конкурсе капитанов, идут в общий зачет команды и, кроме того, служат для определения победителя отдельно в конкурсе капитанов. Если после решения предложенных задач победитель не выявлен, то жюри может дать дополнительные задачи, либо определить победителя жребием.
8. По окончании конкурса капитанов в основную аудиторию приглашаются члены команд, решавшие задачи ***выездного конкурса***. Командам предоставляется двухминутный перерыв для определения тактики проведения выездного конкурса.
9. Победитель конкурса капитанов имеет право вызвать другую команду на одну из выездных задач, либо передать право вызова другой команде, либо отказаться от права вызова.
10. Если команда принимает вызов соперников, то она выдвигает отвечающего, а другая оппонента. Отвечающий (докладчик) и оппонент выдвигается только из числа участников выездного конкурса. Каждый может быть выдвинут докладчиком или оппонентом не более двух раз (в сумме). Все выдвижения делает капитан.
11. Если команда не принимает вызов, то другая команда обязана предоставить решение. В этом случае команда, не принявшая вызова, выдвигает оппонента. Если при этом оппонент докажет, что у команды, которая вызывала, нет решения задачи, то вызов считается некорректным. Оппонент в этом случае получает 5 баллов, а перемена ролей (см. далее) невозможна.
12. Если оппонент доказал, что у докладчика нет решения (вопрос об этом решает жюри), то оппонент получает право (но не обязан) рассказать свое решение. Если оппонент взялся рассказывать

[9] Классические правила математического боя существенно отличаются от изложенных в статье.

свое решение, то происходит полная перемена ролей: бывший докладчик становится оппонентом и может зарабатывать баллы за оппонирование. Если же оппонент не доказал, что у докладчика нет решения, но выявил в предложенном решении некоторые конкретные недостатки, то оппонент получает право (но не обязан) устранить все (или некоторые) из этих недостатков ("залатать дыры"). Такое же право оппонент получает, если он доказал, что у докладчика нет решения, но отказался рассказывать собственное решение. Если оппонент взялся "залатывать дыры", то происходит частичная перемена ролей: оппонент обязан сформулировать предварительно, что именно он будет делать (например, разбирать такой-то неразобранный докладчиком случай, доказывать такое-то недоказанное докладчиком утверждение или что-либо еще), а бывший докладчик становится оппонентом и может зарабатывать баллы за оппонирование сформулированных утверждений.

Обратной перемены ролей ни в каком случае не происходит!

13. Капитан команды, рассказывавшей только что решение задачи или сделавшей некорректный вызов, получает право вызова и может либо вызвать команду соперников на одну из оставшихся задач, либо отказаться вызывать.
14. Если команда отказывается вызывать, то другая команда может по своему желанию рассказать решение тех задач, которых еще не обсуждались. В этом случае она выдвигает докладчика, а противоположная команда оппонента. После отказа от вызова не может происходить ни полной, ни частичной перемены ролей (см. далее).
15. Во время ответа по задаче говорить могут только отвечающий и оппонент с разрешения жюри. Докладчик и оппонент обязаны вести дискуссию в вежливой, корректной форме, критикуя действия противника, не допускать критики его личности, обращаться к нему только на "Вы". Докладчик и оппонент могут обращаться к своим капитанам с просьбой о перерыве для консультации. Другое общение между командой и докладчиком (оппонентом) допускается только во время перерыва. Другие разговоры и подсказки караются штрафом (до 10 баллов).
16. В процессе ответа оппонент может задавать вопросы докладчику только с разрешения жюри. Жюри вправе отвести вопросы оппонента, если они не касаются существа дела или явно затягивают ответ. В процессе ответа оппонент не должен высказывать свое отношение к ответу.

17. Отвечающий заканчивает свой ответ по задаче словами: «Я закончил». После этого оппонент говорит все, что он хочет сказать по поводу ответа докладчика. Жюри вправе прервать оппонента, если он говорит не по существу. Оппонент заканчивает словами: «Я закончил». Если в течение минуты оппонент не задал вопрос, то считается, что у него вопросов нет. Если докладчик после истечения минуты не начал отвечать на вопрос, то считается, что у него ответа нет.
18. Жюри дает оценку выступлений докладчика и оппонента и приводит свои соображения по данной задаче.
19. Максимальное число баллов, которое могут получить докладчик и оппонент в сумме — 10.
20. Выигрывает команда, набравшая в сумме наибольшее количество баллов. Если команды набрали равное количество баллов, а победитель должен быть обязательно определен, то командам предлагаются дополнительные задачи, количество которых определяет жюри. Преимущество в два балла не считается победой. Жюри также имеет право назначить блиц.
21. Каждая команда имеет право на два двухминутных таймаута (либо на 8 полуминутных — по договоренности команд). Таймауты команда может взять в любой момент (кроме конкурса капитанов). При этом соперники тоже могут пользоваться этим временем). Во время таймаута команда имеет право совещаться, не покидая аудитории.
22. Верховным толкователем правил математического боя является жюри.

Задачи математических боев

10 класс

Коллектив

1. (7) В треугольнике центры вписанной и описанной окружности симметричны относительно одной из сторон. Найдите величины углов этого треугольника.

2. (7) Представьте число 3 в виде произведения наименьшего количества рациональных множителей, сумма которых равно нулю.

Экспресс

1. (5) Дано множество из семи ненулевых комплексных чисел, в котором произведение любых двух чисел из данного множества принадлежит данному множеству. Докажите, что хотя бы одно из чисел данного множества равно единице.

2. (5) Изобразите на плоскости график функции $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$, если известно, что $\dfrac{b}{2a} = \dfrac{2c}{b}$.

3. (5) На плоскости даны две непересекающиеся окружности. Укажите все точки плоскости, из которых можно провести касательную к одной из окружностей и которая имела бы общие точки с другой окружностью.

4. (5) Все натуральные числа от 1 до 1000 разбили на две группы: четные и нечетные. В каждой группе посчитали суммы цифр, использованных для записи этих чисел. Какая сумма больше и насколько?

5. (5) В ряд лежат 19 шишек. Играют два игрока, делая ходы по очереди. За один ход можно забрать одну или две шишки, лежащие рядом. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

6. (5) В выпуклом четырехугольнике проведены диагонали. Площади трех образовавшихся треугольников равны 3, 5 и 6. Найдите площадь четырехугольника.

Капитаны

1. (5) Дана математическая последовательность букв: О, Д, Т, Ч, П, Ш, ... Какая буква стоит на 26 месте этой последовательности?

2. (5) Докажите, что при всех $a > 1$ значение выражения $\dfrac{1}{1+a} + \dfrac{2}{1+a^2} + \dfrac{4}{a+a^4} + \dfrac{8}{a+a^8} + \dfrac{16}{a+a^16} + \dfrac{1}{1-a}$ отрицательно.

3. (6) В треугольнике из разных вершин проведены биссектриса, высота и медиана. Могут ли они в пересечении образовывать равносторонний треугольник?

Дополнительная задача (5): Сколькими нулями заканчивается число $100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100$.

Выездной

1. Придумайте уравнение (в виде одной формулы), графиком которого являются два различных непересекающихся квадрата, с непараллельными сторонами, и окружность.

2. В качестве доказательства того, что правильный ответ еще не означает правильность решения, учитель привел следующий пример. Возьмем дробь $\dfrac{19}{95}$. После зачеркивания 9 в числителе и знаменателе («сокращения» на 9) получаем верный ответ — дробь $\dfrac{1}{5}$. Точно так же дробь $\dfrac{1999}{9995}$ можно «сократить» на три девятки и получить верный результат. А возможно ли, чтобы в результате подобного сокращения также получился правильный ответ, равный $\dfrac{1}{3}$? (Рассматриваются дроби вида $\dfrac{1a}{a3}$. Здесь буквой a обозначено несколько цифр, следующих в одинаковом порядке в числителе после 1, а в знаменателе перед 3. «Сокращаем» на a).

3. Три окружности радиуса R проходят через одну точку. Докажите, что оставшиеся точки попарных пересечений лежат на окружности того же радиуса.

4. Докажите, что $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c)$.

11 класс

Коллектив

1. (7) Все коэффициенты многочлена целые и по модулю не превосходят 9. Докажите, что все действительные корни этого многочлена не превосходят по модулю 10.

2. (7) Найдите три таких многоугольника, чтобы было можно, прикладывая их друг к другу, получить квадрат 8×8 без любой его клетки.

Экспресс

1. (6) При каких натуральных p существует плоский невыпуклый p-угольник, при вращении которого вокруг некоторой прямой в его плоскости, можно получить прямой круговой конус.

2. (6) На плоскости (x, y) укажите все точки, координаты которых удовлетворяют неравенству $\operatorname{tg}(\ln[\cos x]) \geq 2^{|y|} + |2^{|y|} - 2| - 2$ ([ ] – целая часть).

3. (6) Могут ли у двух последовательных натуральных чисел суммы цифр делиться на 5?

4. (6) Найдите действительные корни уравнения: $x^3 + x^2 + x = -\dfrac{1}{3}$.

5. (5) В какое наименьшее количество цветов надо раскрасить доску 100×100, чтобы никакие две соседние клетки (по горизонтали, вертикали или диагонали) не были окрашены в одинаковый цвет?

Капитаны

1. (4) Незнайка сложил число, записанное с помощью единицы, двойки и тройки с числом, записанным с помощью двух единиц, двух двоек и двух троек и получил число, записанное с помощью одной единицы, двух двоек и трех троек. Докажите, что Незнайка ошибся.

2. (5) При каких действительных значениях параметра c уравнение $(5x^2 + \cos 3cx)^3 - c\sqrt{\operatorname{tg}^4 6x + 1} + c^2 + 3 - \sqrt[4]{81 - x^4} = 0$ имеет ровно три различных решения.

3. (6) В треугольной пирамиде все грани — равные треугольники. Докажите, что в такой пирамиде центры вписанной и описанной сфер совпадают.

Выездной

1. Множество шести различных ненулевых комплексных чисел обладает следующим свойством: произведение любых двух из них, а также любая натуральная степень каждого из них принадлежит данному множеству. Докажите, что данное множество содержит число -1.

2. Докажите, что в правильном восемнадцатиугольнике $A_1A_2\ldots A_{18}$ диагонали A_1A_9, A_3A_{13} и A_5A_{16} пересекаются в одной точке.

3. Найдите все значения a, при каждом из которых ровно пять различных наборов натуральных чисел (x, y, z) удовлетворяют системе

$$\begin{cases} 12x^2 - 4x - 2xy + 3y - 9 = 0, \\ ayz + axz + axy > xyz. \end{cases}$$

4. В треугольной пирамиде $ABCD$ на ребрах AC и AB выбраны соответственно точки L и K так, что $LK||BC$. Точки M, N, P, R — середины ребер BC, AD, BD, CD соответственно. Докажите, что объемы треугольных пирамид $BKPR$ и $CLMN$ равны.

Решения

10 класс

Коллектив

1. *Ответ*: $36°$, $36°$, $108°$.

Решение: пусть O и I — центры описанной и вписанной окружностей, симметричные относительно стороны AC. Легко доказать, что треугольник ABC — тупоугольный равнобедренный (см. рис. 1). Пусть $\angle BAI = \beta$. AI — биссектриса угла BAC, то есть, $\angle IAP = \beta = \angle PAO$

из симметрии точек O и I относительно стороны AC. Треугольник ABO — равнобедренный, откуда $\angle OBA = \angle OAB = 3\beta$. В прямоугольном треугольнике APB сумма острых углов BAP и ABP равна 5, откуда $\beta = 18°$.

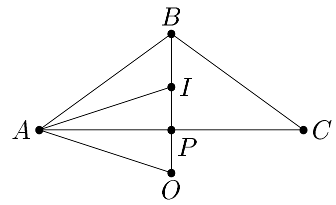


Рис. 1

2. *Ответ*: $3 = \dfrac{363}{70} \cdot \dfrac{20}{77} \cdot \left(-\dfrac{49}{110}\right) \cdot (-5)$.

Решение: меньшим количеством множителей обойтись нельзя. Приведенное разложение и доказательство минимальности принадлежит М.А. Цфасману. Оценивалось приближение к «идеалу». Школьники приводили разложение: $3 = \left(-\dfrac{3}{2}\right) \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 4$.

Экспресс

1. *Доказательство*: результат перемножения всех этих чисел, по условию, равен одному из чисел данного множества. Сократив на получившееся ненулевое число, получаем, что произведение оставшихся равно 1, и она принадлежит рассматриваемому множеству.

2. *Ответ*: при $a < 0$ — точка с координатами $\left(\sqrt{\dfrac{c}{a}}, 0\right)$. При $a > 0$ $y = \sqrt{a}\left|x + \sqrt{\dfrac{c}{a}}\right|$.

Решение: равенство дробей означает, что под корнем полный квадрат с коэффициентом.

3. *Решение*: а) Одна из окружностей лежит внутри другой. В этом случае решением являются все точки вне большей окружности, включая ее.

б) Ни одна из окружностей не лежит внутри другой. Граница искомой области состоит из частей общих касательных к окружностям. Ответом является объединение части плоскости между общими внешними касательными, содержащая окружности, с частью плоскости, между общими внутренними касательными, содержащая окружности.

4. *Ответ*: сумма цифр нечетных чисел на 499 больше суммы цифр четных чисел.

Решение: разобьем все числа на пары: 2 и 3, 4 и 5, 6 и 7, 8 и 9, 10 и 11, ... , 998 и 999, 1000 и 1. В паре 1000 и 1 суммы цифр равны, в остальных 499 парах сумма цифр нечетного числа на 1 больше суммы цифр четного.

5. *Ответ*: выигрывает первый.

Решение: первый забирает одну центральную шишку, после чего отвечает ходам второго симметрично в другой половине шишек.

6. *Ответ*: 24, или 17,6, или 16,5.

Решение: используя формулу для площади треугольника $\frac{1}{2}ab\sin\gamma$, легко показать, что произведения площадей пар треугольников с вертикальными углами равны для любого выпуклого четырехугольника, в котором проведены диагонали.

Капитаны

1. *Ответ*: буква Д или буквы ДШ.

Решение: данная последовательность: Один, Два, Три, Четыре, Пять, Шесть, ...

2. *Решение*: $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1-a}=\dfrac{1-a+1+a}{1-a^2}=\dfrac{2}{1-a^2}$. Аналогично, $\dfrac{2}{1-a^2}+\dfrac{2}{1+a^2}=\dfrac{1}{1-a^4}$. Продолжая далее, приведем всю сумму к $\dfrac{32}{1-a^{32}}<0$ при $a>1$.

3. *Ответ*: нет.

Решение: пусть в треугольнике ABC проведены медиана BD, высота CE и биссектриса AF, которые образуют в пересечении равносторонний треугольник VGK (см. рис. 2). Треугольник AKE — прямоугольный с углом EKA равным 60°, следовательно, угол EAK равен 30° и угол BAC равен 60°. В треугольнике AGD угол AGD равен 60° (как вертикальный к углу VGK), угол GAD равен 30°, откуда, угол GDA — прямой. Значит, медиана BD в треугольнике ABC является высотой, и треугольник ABC — равносторонний, в котором проведенные отрезки BD, CE и AF пересекаются в одной точке.

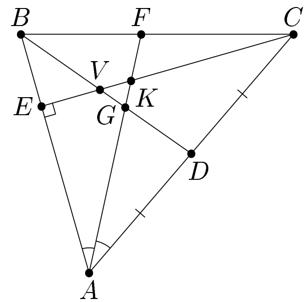


Рис. 2

Дополнительная задача.

Ответ: 24.

Решение: ноль в конце числа получается при произведении 2 и 5. Причем множитель 2 входит в разложение 100! в степени большей, чем степень множителя 5. Посчитаем степень 5: в каждом десятке есть 2 числа, кратные 5, причем числа 25, 50, 75 и 100 имеют в своем разложении вторую степень 5.

(*Дополнительная задача была заготовлена, так как бой не мог закончиться вничью. Она должна была быть выдана в конце боя, если разница очков была бы не более трех*).

Выездной

1. *Ответ*: $(|x|+|y|-3)(x^2+y^2-4)\sqrt{400-x^2}\sqrt{400-y^2}=0$.

2. *Ответ*: да, возможно. Например, для $a=428571$.

Решение: пусть искомое a n-значное число. По условию $\dfrac{10^n+a}{10a+3}=\dfrac{1}{3}$. Откуда $3\cdot 10^n+3a=10a+3$, то есть $3\cdot10^n-3=7a$, $a=\dfrac{3(10^n-1)}{7}$. Подбором находим, что при $n=6$ a — натуральное число 428571. Существует бесконечное множество подходящих a.

3. *Доказательство*: пусть O_1, O_2, O_3 — центры окружностей, точка D — точка пересечения всех трех окружностей (см. рис. 3). Точки A, B, C — точки попарных пересечений этих окружностей. BO_3DO_2, O_1AO_2D — ромбы. O_3BAO_1 — параллелограмм, так как BO_3 и AO_1 параллельны и равны. Следовательно, $AB=O_3O_1$. Аналогично доказывается, что $BC=O_2O_1$ и $AC=O_2O_3$. То есть треугольник ABC равен треугольнику $O_1O_2O_3$ по трем сторонам. Поскольку вокруг треугольника $O_1O_2O_3$ описанная окружность имеет центр D и радиус R, то и окружность, описанная вокруг треугольника ABC имеет радиус R.

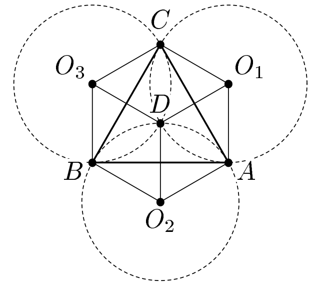


Рис. 3

4. *Доказательство*: если мы докажем справедливость неравенства для неотрицательных a, b и c, то для произвольных переменных оно будет справедливо. Будем предполагать в дальнейшем неотрицательность a, b и c. Известно соотношение: $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$ $(*)$ (один из способов доказательства состоит в умножении на 2, переносе всех слагаемых вправо и представления в виде трех квадратов разностей).

Возведем это неравенство в квадрат: $a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geq$ $\geq 2abc(a+b+c)$ $(**)$. Из неравенства $(*)$ следует неравенство $a^4+b^4+c^4\geq$ $\geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$. Сложив его с неравенством $(**)$ получим требуемое.

11 класс

Коллектив

1. *Доказательство*: пусть $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ — данный многочлен, в котором $a_I \leq 9$. Подставим в многочлен без старшего члена число x, по модулю превосходящее десять: $|a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0| \leq |a_{n-1}x^{n-1}| + |a_{n-2}x^{n-2}| + \dots + |a_2x^2| + |a_1x| + |a_0| \leq 9(|x^{n-1}| + |x^{n-2}| + \dots + |x^2| + |x| + 1) = 9\dfrac{|x|^n - 1}{|x| - 1} < |x^n| - 1$ (так как $|x| - 1 > 9$), что меньше модуля старшего члена даже при наименьшем возможном старшем коэффициенте. Таким образом, корень не может превосходить по модулю 10.

2. *Ответ*: искомые многоугольники изображены разными оттенками серого цвета на рис. 4.

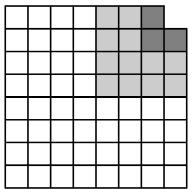


Рис. 4

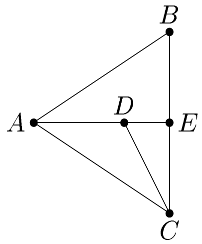


Рис. 5

Экспресс

1. *Ответ*: при любых натуральных $p \geq 4$.

Решение: нарисованный четырехугольник $ABCD$ при вращении вокруг прямой AE дает прямой круговой конус (см. рис. 5). Заменяя ломаную ADC на близкую к ней «большезвенную» ломаную, не выходящую за пределы треугольника AEC, получаем p-угольник, где $p \geq 4$.

2. *Ответ*: $x = 2\pi n$, $n \in Z$, $y \in [-1; 1]$.

Решение: целая часть от $\cos x$ может быть только 0, 1 и -1. Подходит только 1. Подставив это значение в неравенство, найдем, что $y \in [-1; 1]$.

3. *Ответ*: могут.

Решение: например, 49999, 50000.

4. *Ответ*: $x = \dfrac{-1}{1 + \sqrt[3]{2}}$.

Решение: уравнение преобразуется к виду $3x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$, откуда, $(\sqrt[3]{2}x)^3 + (x+1)^3 = 0$, что раскладывается на множители по формуле суммы кубов.

5. *Ответ*: 4 цвета.

Решение: каждая клетка имеет не менее 3 соседей. То есть цветов должно быть не менее 4. Если раскрасить квадрат 2×2 в четыре цвета и этими квадратами замостить полосы 2×100, то получится раскраска, удовлетворяющая условию задачи.

1	2
4	3

Рис. 6

Капитаны

1. *Решение*: оба слагаемых делятся на 3, а сумма — не делится.

2. *Ответ*: ни при каких.

Решение: если x_0 является решением уравнения, то и $-x_0$ тоже является решением. Значит, необходимым условием существования только одного решения является то, что $x_0 = 0$ должно быть решением. При подстановке $x = 0$ получаем уравнение $1 - c + c^2 = 0$, которое не имеет действительных решений.

3. *Доказательство*: известно, что вокруг любой треугольной пирамиды можно описать сферу. Плоскости, содержащие грани пирамиды, будут пересекать описанную сферу по окружностям, описанным вокруг граней, которые являются равными треугольниками. Радиусы этих окружностей будут равны. Окружности равного радиуса, лежащие на сфере, находятся в плоскостях равноудаленных от центра сферы, и расстояния до этих плоскостей (граней пирамиды) равны радиусу вписанной сферы. Отсюда следует, что центры вписанной и описанной сфер совпадают.

Выездной

1. *Доказательство*: возьмем произвольный элемент z_0 этого множества и будем рассматривать его последовательные натуральные степени. Поскольку количество возможных результатов конечно, то какие-то степени будут равны, то есть $z_0^k = z_0^p$ $(k < p)$. Откуда, $z_0^{p-k} = 1$. Таким образом, все эти числа — корни некоторой степени (может быть и первой, но не более шестой) из 1. Если какое-либо число не равное единице в четной степени $2m$ будет равно 1, то в степени m оно будет равно -1. Если же единица получается только при возведении в нечетную степень, то это корни либо степени 3, либо 5, но их меньше шести, либо степени 7, но их больше шести. Если есть корень степени 3 и корень степени 5, то их произведение дает корень степени 15, которых

слишком много. Следовательно, все эти числа — корни шестой степени из 1, а среди них есть -1.

2. *Доказательство*: в треугольнике $A_1A_5A_{13}$ указанные диагонали являются биссектрисами.

3. *Ответ*: $a \in \left[\frac{5}{11}; \frac{62}{95}\right)$.

Решение: из первого уравнения $y = 6x + 7 + \dfrac{12}{2x-3}$. Из условия, что x и y — натуральные числа, следует, что 12 должно быть кратно $2x - 3$. Находим пары: $(1;1)$; $(2;31)$; $(3;29)$. Из второго неравенства $a > \dfrac{xyz}{xy+yz+zx}$. При $a \geq \dfrac{5}{11}$ пара $(1;1)$ дает пять троек натуральных чисел, причем если $a < \dfrac{62}{95}$, то пары $(2;31)$ и $(3;29)$ новых троек не дают, так как при $z = 1$ для второй пары $a = \dfrac{62}{95}$, а для третьей пары $a = \dfrac{87}{119}$, и $\dfrac{87}{119} > \dfrac{62}{95}$. При $a \geq \dfrac{62}{95}$ пара $(1;1)$ дает минимум пять троек решений, а вторая хотя бы одно при $z = 1$, отличное от первых пяти троек, то есть эти значения a не подходят.

4. *Доказательство*: пусть $\dfrac{KL}{BC} = p$, объем пирамиды $ABCD$ равен V (см. рис. 6). Тогда $\dfrac{KB}{BA} = 1 - p$, $S_{BKP} = \dfrac{1}{2}(1-p)S_{ABD}$, $H_R = \dfrac{1}{2}H_C$, где H_R и H_C — высоты пирамид $BKPR$ и $ADBC$ из точек R и C, соответственно. $V_{BKPR} = \dfrac{1}{3}S_{BKP}H_R = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2}(1-p)V$. Аналогично, $\dfrac{CL}{FC} = 1 - p$, $S_{CLM} = \dfrac{1}{2}(1-p)S_{ABC}$, $H_N = \dfrac{1}{2}H_D$, где H_N и H_D — высоты пирамид $NMLC$ и $DABC$ из точек N и D, соответственно. $V_{CLMN} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2}(1-p)V$, то есть $V_{BKPR} = V_{CLMN}$.

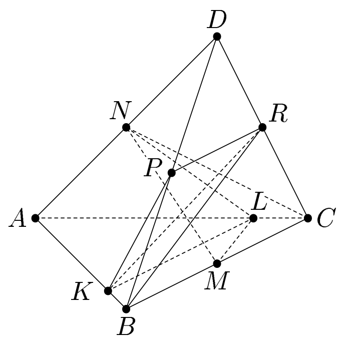


Рис. 6

Летняя математическая школа

А.Д. Блинков

учитель математики ЦО №218
руководитель филиала МММФ (ЦО №218)

Проведение летних математических школ является давней образовательной традицией. В таких школах, организуемых для школьников во многих регионах России, традиционно используется лекционно-семинарская форма проведения занятий.

Опыт, которым я хочу поделиться, — проведение учебных занятий по несколько иной технологии, многократно апробированной в летнем математическом лагере, который ежегодно проводится для учащихся различных параллелей школы № 218 г. Москвы в Архангельской области. Цель этих занятий — приобретение навыков решения олимпиадных задач, и, посредством этого, — углубление знаний учащихся в некоторых разделах математики.

При разработке описанной ниже технологии учитывалось, что участниками нашей летней школы могут являться ученики, существенно различающиеся как по уровню знаний и мотивации, так и по «олимпиадному опыту». Кроме того, существенной является возможность проведения занятий одним преподавателем (без ассистентов), в отличие от традиционной семинарской формы проведения занятий часто применяемой в математических кружках.

Исходя из вышесказанного, и была придумана групповая соревновательная форма проведения ежедневных тематических занятий, каждое из которых продолжается примерно 2,5 – 3 часа. Кроме этих занятий в течение смены проводятся также математические регаты и математический бой.

На все время проведения занятий учащиеся разбиваются на постоянные команды по 4 – 5 человек, максимально равноценные по своим математическим возможностям. Таких команд обычно бывает три или четыре. В каждой команде назначается или выбирается капитан.

После объявления темы занятия и, если это необходимо (по усмотрению преподавателя), краткой вступительной беседы (не более пятнадцати минут), каждая команда получает лист — задание, который содержит семь задач: 5 для «классной» и 2 для «домашней» работы.

По каждой теме задачи подбираются так, чтобы в процессе их решения и в последующем обсуждении можно было затронуть наиболее существенные аспекты данной темы, а также продемонстрировать приемы, «типичные» для решения задач данной тематики. Задачи одного листа должны быть максимально разнообразны по трудности и содержанию. Условная «ценность»задач отмечается в баллах. Это позволяет членам команды распределить задачи между собой так, чтобы каждый решал то, что соответствует его реальным возможностям.

На решение задач командам отводится 75 – 90 минут, по истечении которых каждый капитан подает «заявку» с номерами тех задач, которые его команда решила и готова рассказывать. Исходя из поданных заявок, преподаватель определяет для каждой команды задачи, на которые она имеет приоритет в изложении решения, стараясь предоставить всем максимальные возможности для выступления. На разбор остальных задач каждая команда имеет право выставить оппонента. В функции оппонента, как обычно, входит возможность задавать вопросы докладчику из другой команды, а также возможность опровергать неверные решения. Если одна и та же задача решена разными командами и способы решения принципиально различаются, то заслушиваются представители всех решивших её команд с сохранением за другими командами права на оппонирование. Как за рассказ решения задачи, так и за оппонирование, команда может получить баллы, исходя из объявленной ценности задачи. Если же задача не была решена ни одной из команд, то ее решение разбирает учитель, но и в этом случае командам могут быть начислены какие-то баллы за высказанные верные идеи.

В отличие от похожей процедуры на математическом бое, сумма баллов, полученных командами за одну задачу может превышать ее «ценность»: например, если задача «стоит» пять баллов, то одна команда может получить 4 балла за верное решение с некоторым недочетом, другая — 5 баллов за другой способ решения, а третья команда — 2 балла за грамотно поставленные вопросы, даже если на какие-то из них докладчики сумели ответить. Кроме того, на тематических занятиях жестко не ограничивается количество раз, которое один и тот же член команды может выступать в качестве докладчика или оппонента.

Решения домашних задач сдаются в письменном виде до начала следующего занятия, проверяются учителем по критериям письменной олимпиадной работы, и за них также начисляются баллы. Перед началом каждого занятия подводится итог соревнования по предыдущей теме, то есть объявляется и награждается команда, набравшая наибольшее количество баллов. Аналогичные итоги подводятся по прошествии

каждой недели и по окончании лагерной смены (перед проведением итогового математического боя).

Математическая регата проводится после каждых пяти — шести занятий, завершая учебную неделю. Математический бой проводится по «классическим» правилам. Правила проведения математической регаты и математического боя неоднократно публиковались на страницах приложения и в других изданиях.

Составы команд для проведения математического боя формируются по итогам смены. В регату и математический бой, наряду с прочими, обязательно включаются задания по изученным темам.

Ниже приведены некоторые материалы летней математической школы 2001 года (занятие и матбой), участниками которой были школьники, закончившие семь классов и поступившие в 8 класс с углубленным изучением математики.

Соответствия и графы

Рассмотрим два множества A и B с конечным количеством элементов. Соответствие между ними называется взаимно-однозначным, если каждому элементу из A соответствует ровно один элемент из B и наоборот, каждому элементу из B соответствует ровно один элемент из A. Иначе говоря, можно составить пары вида $(a; b)$ так, чтобы $a \in A$ и $b \in B$, причем, использовать каждый элемент ровно один раз. Например, взаимно-однозначным является соответствие между вами и вашими кроватями. В случае, если между двумя множествами может быть установлено взаимно-однозначное соответствие, понятно, что эти множества содержат одинаковые количества элементов.

Пример 1. Как установить кого больше на балу, дам или кавалеров, не пересчитывая их?

Объявить танец с условием, что должно танцевать максимально возможное количество пар и посмотреть, кто останется.

Если элементы множеств изобразить точками, а связи между ними линиями, то получится объект, который называется «граф» (показать!). Точки — вершины графа, линии — ребра графа. Если задать соответствие, которое не является взаимно — однозначным, то граф будет иметь более сложный вид (показать!).

Вершину графа принято называть четной либо нечетной в зависимости от количества выходящих из нее ребер. Если существует путь по ребрам графа из любой его вершины в любую другую, то граф *называется связным. Обход графа называется правильным, если можно обойти все его вершины, пройдя по каждому ребру ровно один раз. Полезно знать, что если граф содержит более двух нечетных вершин, то его правильный обход невозможен. Докажите.*

С помощью графов удобно объяснять решение некоторых задач. В частности, в виде графов можно изображать сеть дорог или проводов, расписание турниров и др.

Пример 2. Может ли муха пройти по всем ребрам проволочного куба, побывав на каждом ровно один раз?

Нет, так как такой куб является связным графом с восемью вершинами, каждая из которых нечетна (степени 3), то есть, его правильный обход невозможен.

1. [3] **3 балла**
На некотором острове расположено 15 государств. Для каждого из них хотя бы одно соседнее государство — дружественное. Докажите, что найдется государство, у которого четное количество дружественных соседей. (Два государства называются соседними, если у них имеется целый кусок общей границы).

2. [5] **4 балла**
В городе отличников от каждой площади отходит ровно пять улиц, причем каждая улица соединяет ровно две площади. Докажите, что количество площадей в этом городе — четно, а количество улиц кратно пяти.

3. [4] **5 баллов**
Требуется подключить к сети люстру с 15 лампочками так, чтобы можно было зажигать любое количество лампочек (в том числе, и ни одной). Можно ли это сделать, если разрешить использовать только четыре выключателя?

4. [1] **6 баллов**
На окружности расположены 1999 белых и одна красная точка. Рассмотрим все выпуклые многоугольники с вершинами в этих точках. Каких многоугольников больше: тех, у которых есть красная вершина или тех, у которых её нет?

5. [2] **7 баллов**
Кучку из N спичек произвольным образом разбили на две кучки, подсчитали количество спичек в каждой кучке и записали их произведение. Затем, одну из новых кучек опять разбили на две, опять подсчитали количество спичек в каждой и записали новое произведение. Этот процесс продолжали до тех пор, пока не получили N кучек по одной спичке в каждой. Тогда, все полученные произведения сложили и получили число S. Найдите S.

6. [3] **6 баллов**
Можно ли «занумеровать» все ребра куба целыми числами так, чтобы суммы «номеров» ребер, сходящихся в каждой вершине, были одинаковыми, если это числа: а) $1; 2; \ldots; 12$; б) $-6; -5; \ldots; -1; 1; 2; \ldots; 6$?

7. [8] **6 баллов**
В школьной олимпиаде по математике участвовало 100 человек, по физике — 50 человек, по информатике — 48 человек. Когда каждого из учеников спросили, в скольких олимпиадах он участвовал, ответ «по крайней мере в двух» дали в два раза меньше человек, чем ответ «не менее, чем в одной», а ответ «в трех» — втрое меньше человек, чем ответ «не менее, чем в одной». Сколько всего учеников приняло участие в этих олимпиадах?

Математический бой

1. [10] Каждый зритель, пришедший на спектакль «Королевский жираф», принес с собой либо *одну* дохлую кошку, либо два кочана гнилой капусты, либо *три* тухлых яйца. Стоявший у входа Гекльберри Финн подсчитал, что кошек было 64 штуки. После спектакля оба артиста — король и герцог — были с ног до головы закиданы припасами, причем на долю каждого досталось поровну предметов (а промахов жители Арканзаса не делают). Правда, король принял на себя лишь *пятую* часть всех яиц и *седьмую* часть капусты, но все дохлые кошки полетели именно в него. Сколько зрителей пришло на представление?

2. [Фольклор] Постройте треугольник если даны точки пересечения описанной около этого треугольника окружности с продолжениями медианы, биссектрисы и высоты, проведенными из одной вершины.

3. [6] Пусть a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_{2001} — некоторые целые числа. b_1, b_2, b_3, $\ldots$, b_{2001} — те же числа, записанные в другом порядке. Докажите, что произведение $(a_1 - b_1) \cdot (a_2 - b_2) \cdot \cdots \cdot (a_{2001} - b_{2001})$ является четным числом.

4. [9] Из точки A проведены касательные AB и AC к окружности с центром O. Через точку X отрезка BC проведена прямая KL, перпендикулярная XO (точки K и L лежат на лучах AB и AC). Докажите, что X — середина отрезка KL.

5. [11] Двое играют с кучей из N камней. Первый делит ее на две произвольные кучи. Каждым следующим ходом каждая куча, которая содержит более одного камня, разбивается на две меньшие. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет?

6. [7] У продавца имеется моток веревки длиной 1024 метра. Никаких измерительных инструментов нет, поэтому продавец может лишь резать любой из имеющихся кусков веревки пополам. В магазин по одному приходят покупатели за кусками веревки, длина которых выражается степенью двойки (1 м или 2 м, или 4 м, или 8 м, ..., 1024 м). Известно, что сумма всех запросов покупателей за день не превышает 1024 метра, но в каком порядке идут покупатели и сколько метров будет просить каждый из них — неизвестно. Как нужно действовать продавцу, чтобы обслужить всех покупателей?

7. [7] Покрасьте максимальное количество вершин куба в красный цвет так, чтобы среди красных вершин нельзя было выбрать три, образующие равносторонний треугольник.

8. [12] Переднее колесо велосипеда изнашивается через 2000 км, а заднее — через 3000 км. Какое максимальное расстояние можно проехать на одной паре колес?

Решения

Соответствия и графы

1. Предположим, что у каждого государства нечетное количество дружественных соседей, тогда, сложив 15 нечетных чисел, получим нечетное число. С другой стороны, если государство A дружественно государству B, то и B дружественно A (отношение «дружбы» между государствами обладает свойством симметричности). Следовательно, найденная нами сумма должна быть четной. Из полученного противоречия следует, что наше предположение не верно и хотя бы у одного государства — четное количество дружественных соседей, ч. т. д.

В данном случае рассматривается граф с нечетным количеством вершин. В таком графе степень хотя бы одной вершины должна быть четной, так как каждое ребро должно соединять две вершины.

2. Пусть количество площадей (вершин графа) — n, а количество улиц (ребер графа) — m, тогда, количество улиц, соединяющих все площади должно быть равно $\frac{5n}{2}$. Получим уравнение в натуральных числах: $5n = 2m$. Так как НОД$(2; 5) = 1$, то n кратно двум, а m кратно пяти, ч. т. д.

3. Да, можно. Для доказательства достаточно подсчитать сколько различных состояний можно обеспечить четырьмя выключателями. Каждый из них имеет два состояния: включен или выключен (0 или 1). Значит, занумеровав выключатели, мы имеем $16 = 2^4$ всевозможных комбинаций их состояний (количество различных чисел в двоичной системе счисления, имеющих не более четырех знаков). Количество состояний люстры также равно 16, то есть, мы сможем установить взаимно-однозначное соответствие между множеством состояний выключателей и множеством состояний люстры.

Задачу легко обобщить: N выключателей смогут «обслужить» люстру, в которой не более, чем $2^N - 1$ лампочек.

4. Если к многоугольнику, все вершины которого белого цвета, «добавить» красную вершину, то получится многоугольник с красной вершиной. То есть, для всех n, таких что $3 < n \leq 2000$ каждому выпуклому $(n-1)$ — угольнику, все вершины которого — белые, соответствует выпуклый n-угольник с красной вершиной. Но, кроме того, существуют треугольники, имеющие красную вершину. Значит, многоугольников с красной вершиной больше, чем многоугольников без красной вершины.

Ответ: многоугольников, имеющих красную вершину, больше.

Можно подсчитать, на сколько больше: на столько, сколько существует отрезков с белыми концами, то есть на $\frac{1998 \cdot 1999}{2}$.

5. *Первый способ.* Свяжем все спички попарно нитками. Каждый раз, разбивая одну из кучек на две, будем разрезать все нитки, соединяющие спички из разных кучек. Если мы разбиваем кучку из $m + k$ спичек на кучки по m и k спичек, то разрезано будет $m \cdot k$ ниток, то есть, в точности столько, какое число будет записано на этом шаге. Таким образом, сумма S всех записанных чисел равна общему количеству разрезанных ниток. Так как сначала все спички были соединены попарно, то было использовано $\frac{N(N-1)}{2}$ ниток. По окончании процесса все нитки будут разрезаны, значит, $S = \frac{N(N-1)}{2}$.

Второй способ. Заметим, что $m \cdot k = \frac{(m+k)^2 - (m^2 + k^2)}{2}$. То есть, если на каком-то шаге мы разбиваем кучку из $m + k$ спичек на кучки по m и k спичек, то вместо произведения $m \cdot k$ можно записать такую дробь. Так как каждую кучку, в которой больше одной спички, мы обязательно разделим на две, то, записав сумму всех таких дробей, можно заметить, что все «промежуточные» числа взаимно уничтожатся. Значит, искомую сумму можно найти следующим образом: из квадрата количества спичек вначале вычесть сумму квадратов количеств спичек в конце (N слагаемых) и разделить на 2, то есть, $S = \frac{N^2-(1^2+1^2+\cdots+1^2)}{2} = \frac{N^2-N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$

6. а) Нет. Предположим, что это возможно и сумма «номеров» ребер, сходящихся в каждой вершине, равна x. Тогда, сумма чисел на всех восьми ребрах куба равна $8x$. С другой стороны, так как каждый «номер» вошел в эту сумму дважды, то эта же сумма равна: $(1+2+\cdots+11+12)\cdot 2 = (1+12)\cdot 12 = 156$. Уравнение $8x = 156$ в целых числах решения не имеет, поэтому наше предположение не верно.

б) Да, например, см. рис. 1. Сумма «номеров» ребер, сходящихся в каждой вершине, равна 0.

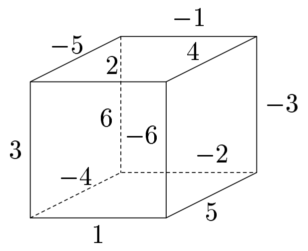


Рис. 1

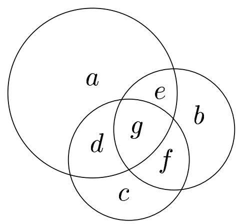


Рис. 2

7. *Первый способ.* Ситуацию, описанную в условии задачи, удобно изобразить с помощью «кругов Эйлера» (см. рис. 2). Обозначим: $x = a+b+c$ — количество человек, участвовавших ровно в одной олимпиаде; $y = d+e+f$ — количество человек, участвовавших ровно в двух олимпиадах. Составим системы уравнений:

$$\text{а)} \begin{cases} 2y+2g = x+y+g, \\ 3g = x+y+g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3g = 2x, \\ g = 2y \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} a+d+e+g = 100, \\ b+e+f+g = 50, \\ c+d+g+f = 48 \end{cases} \Rightarrow \quad x+2y+3g = 198,$$

откуда $g = 36$; $x = 54$; $y = 18$.

Второй способ. (Р.М. Кузнец) Пусть N — общее количество участников. Тогда, по крайней мере в двух олимпиадах участвовало $\frac{N}{2}$ человек («двустаночники»), а в трех — $\frac{N}{3}$ («трехстаночники»). Сложив

числа, данные в условии, мы дважды посчитаем «двустаночников» и трижды «трехстаночников». Таким образом, получим уравнение: $N = (100+50+48) - \frac{N}{2} - \frac{N}{3}$, решением которого является $N = 108$.

Ответ: 108 человек.

Математический бой

1. Пусть в короля попало x яиц, y кочанов и 64 кошки. Тогда, герцогу досталось $4x$ яиц и $6y$ кочанов. Так как предметов, угодивших в них, равное количество, то составляем уравнение: $x+y+64 = 4x+6y$, которое равносильно уравнению $3x+5y = 64$. Из условия задачи следует, что общее количество яиц делится на 3, а общее количество кочанов — на 2. Следовательно, $5x$ кратно *трем*, а $7y$ кратно *двум*. С учетом того, что числа 5 и 3, а также числа 7 и 2 образуют пары взаимно простых чисел, имеем, что $x = 3k$, а $y = 2n$, где $k \in N$ и $n \in N$. Подставляя в исходное уравнение, получаем: $9k + 10n = 64$. Перебором находим, что его решением в натуральных числах является только $n = 1$; $k = 6$. То есть, $x = 18$; $y = 2$. Значит, на представление было принесено $5x = 90$ (яиц), $7y = 14$ (кочана) и 64 кошки. Следовательно, количество зрителей, пришедших на представление, равно: $90:3+14:2+64 = 101$.

Ответ: 101.

2. Пусть ABC — искомый треугольник; BM, BL и BH — его медиана, высота и биссектриса; K, P и Q — их точки пересечения с описанной окружностью с центром O (см. рис. 3). Треугольник KPQ вписан в ту же окружность; P — середина дуги AC, значит, $(OP)||(BQ)$ и $M \in (OP)$. Следовательно, задача сводится к построению окружности, описанной около $\triangle KPQ$ и восстановлению вершин треугольника. Вершина B получится при пересечении этой окружности с прямой, параллельной (OP) и проходящей через точку Q. $M = (OP) \cap (BK)$. Точки A и C получатся при пересечении окружности с прямой, проходящей через точку M и перпендикулярной (OP).

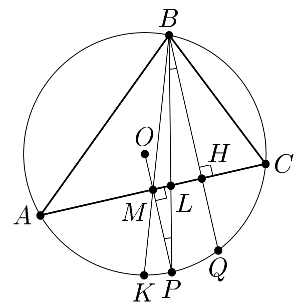


Рис. 3

3. Каждый из множителей — целое число. Предположим, что произведение не является четным числом, тогда все множители должны быть нечетными. Так как количество множителей также нечетно, то их сумма должна быть нечетным числом, но эта сумма, очевидно, равна нулю. Полученное противоречие доказывает ошибочность предположения, то есть, данное произведение является четным числом, ч. т. д.

4. Так как $\angle OXK = \angle OBK = 90°$, то точки X и B лежат на окружности с диметром OK (см. рис. 4). Следовательно, $\angle XKO = \angle XBO$ (вписанные углы, опирающиеся на дугу XO). Аналогично, точки X и C лежат на окружности с диметром OL, значит, $\angle XLO = \angle XCO$. Так как $|OB| = |OC|$, то $\angle XBO = \angle XCO$, значит, $\angle XKO = \angle XLO$, то есть, $\triangle KOL$ — равнобедренный и OX — его высота, проведенная к основанию, следовательно, она является медианой и X — середина отрезка KL, ч. т. д.

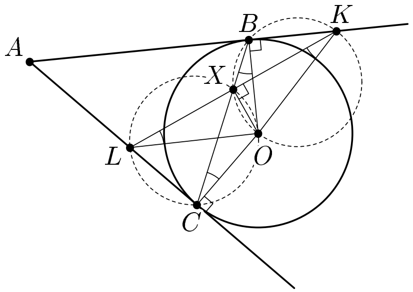


Рис. 4

5. Выигрышная стратегия состоит в том, чтобы после любого своего хода оставлять в наибольшей кучке количество камней, равное $2^k - 1$, где $k \in N$. Действительно, если в какой-то момент на столе нет ни одной кучки, в которой количество камней больше трех, но есть хотя бы одна кучка, в которой ровно три камня, то тот игрок, чья очередь ходить, проигрывает (своим ходом закончить игру он не может и вынужден оставить кучки, в которых не более двух камней). Аналогичная ситуация возникнет и ходом раньше, если на столе нет ни одной кучки, в которой больше, чем 7 камней, но есть хотя бы одна кучка, в которой их ровно 7, и т. д. Таким образом, если $N = 2^k - 1$, где $k \in N$, то выиграет второй, в других случаях выигрывает первый.

6. Стратегия продавца должна состоять в том, чтобы разрезать как можно меньше. Если кусок требуемой покупателем длины уже есть, то нужно продать его, если же его нет, нужно взять имеющийся кусок наименьшей длины, превышающей длину требуемого, и разрезать его пополам. Если получившиеся куски снова длиннее требуемого, нужно взять один из них и разрезать его пополам и так далее. Действуя таким образом, продавец когда-нибудь получит кусок требуемой длины и сможет продать его. Заметим, что при такой стратегии после каждой продажи у продавца не окажется двух или более кусков одинаковой длины. Покажем, что при такой стратегии продавец сможет последовательно удовлетворить запросы всех покупателей. Предположим, что это не так. Пусть продавец не может продать кусок, требуемый очередным покупателем. Это значит, что все куски, которые есть у продавца, короче того, который нужен покупателю. Но мы знаем, что среди них нет кусков одинаковой длины. Значит, даже если бы у продавца оставались все куски, имеющие меньшие длины, то сумма этих длин была бы меньше требуемой, так как $\forall n \in N\, 1 + 2 + \cdots + 2^n < 2^{n+1}$. Следовательно, сумма всех запросов покупателей за этот день превысила бы 1024 метра, что противоречит условию.

7. Докажем, что максимальное возможное количество красных вершин равно четырем. 1) Покрасить четыре вершины возможно, например, можно покрасить четыре вершины одной грани. В этом случае красные вершины образуют квадрат и среди них нет трех, образующих равносторонний треугольник.

2) Докажем, что покрасить пять вершин куба, удовлетворяющих условию, невозможно. Покрасим четыре вершины куба в синий цвет, а оставшиеся — в зеленый (см. рис. 5). Заметим, что между любыми двумя вершинами одного цвета одинаковое расстояние.

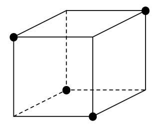


Рис. 5

Пусть мы смогли перекрасить пять вершин в красный цвет. Тогда какие-то три из них были покрашены в один цвет. Следовательно, они и образуют равносторонний треугольник.

<u>Ответ:</u> 4.

8. Для того, чтобы проехать наибольшее расстояние, необходимо в какой-то момент так поменять колеса местами, чтобы они израсходовали свой «ресурс» по возможности одновременно. Пусть это произойдет через x км, и мы сумеем проехать еще y км, тогда, «ресурс» первого колеса составит $\frac{x}{2000} + \frac{y}{2000}$ (км), а второго — $\frac{x}{3000} + \frac{y}{3000}$ (км). Следовательно, $\begin{cases} \frac{x}{2000} + \frac{y}{2000} \le 1, \\ \frac{x}{3000} + \frac{y}{3000} \le 1. \end{cases}$ Тогда, умножая почленно каждое неравенство на 6000 и складывая их, получим: $5x + 5y \le 12000 \Leftrightarrow x + y \le 2400$. Проверкой убеждаемся, что при $x = y = 1200$ оба «ресурса» достигают единицы.

<u>Ответ:</u> 2400 км.

Обратите внимание, что полученное число является средним гармоническим чисел 2000 *и* 3000 *и исходя из этого, подумайте о другом способе решения, не использующем неравенства.*

Литература

[1] А.Д. Блинков, А.В. Семенов. Турнир Архимеда. Московская математическая регата 9 классов. Приложение «Математика» к газете «Первое сентября», №17/01.

[2] А.Д. Блинков, О.Р. Горская, А.Г. Мякишев, А.В. Семенов, П.В. Чулков «Турнир Архимеда. Московская математическая регата 10 классов», приложение «Математика» к газете «Первое сентября», №34, 2001.

[3] В.О. Бугаенко. Турниры имени Ломоносова. Конкурсы по математике. – М.: 1993.

[4] Н.Б. Васильев, В.Л. Гутенмахер, Ж.М. Раббот, А.Л. Тоом. Заочные математические олимпиады. — М.: «Наука», Физматлит, 1987.

[5] А.Я. Канель-Белов, А.К. Ковальджи Как решают нестандартные задачи. М.: МЦНМО 2001.

[6] Материалы окружного тура 63 и 64 Московских математических олимпиад.

[7] Материалы VI Соросовской олимпиады.

[8] Московские математические регаты. / Сост. — А.Д. Блинков. – М.: МЦНМО, 2000.

[9] В.В. Прасолов. Задачи по планиметрии. — М.: «Наука», Физматлит, 1995.

[10] Сборник материалов пятого турнира «Математика 6 – 8» журнала «Квант» (составитель — Д.А. Калинин). — Кострома: РЦ НИТ «Эврика-М», 1999.

[11] Ю.Ф. Фоминых. Математические игры. «Математика в школе», №2/97.

[12] Ш. Цыганов. Кубок Уфы по математике. «Квант», №2/97.

О летних и зимних школах

А.И. Сгибнев

учитель математики

школы-интерната "Интеллектуал"

Феномен летних и зимних школ даёт много интересного материала для психологов, педагогов и социологов, но при этом ещё далеко не осмыслен. Я собрал материалы о трёх таких школах, в которых мне довелось участвовать в роли гостя, преподавателя и организатора соответственно.

ЗПШ

Зимняя Пущинская Школа по естественным и гуманитарным наукам (ЗПШ) проводится с 1990 года. Организаторы ЗПШ как правило — научные сотрудники, аспиранты и студенты Пущинского научного центра, МГУ, МФТИ и других ведущих вузов города Москвы.

Первая Школа данного цикла была организована в январе на зимних школьных каникулах 1990 года силами научных сотрудников города Пущино. По этой причине она и получила название "Зимняя". Среди организаторов этой Школы были Р.М. Борисюк, Н.Л. Лунина, Ю.Е. Елькин и другие. Начиная с ЗПШ-3 организация Школы осуществлялась студентами МГУ — бывшими учащимися первых ЗПШ. Последние годы прошлого десятилетия школы проходили под руководством молодых сотрудников Пущинского Научного Центра Г.В. Аглямовой и И.Л. Овчинникова. С 2001 года председателем оргкомитета является к.ф.-м.н. М.А. Ройтберг, член Оргкомитета ЗПШ-2000. Преемственность поколений и традиций — важное достоинство Пущинских Школ. Основную часть учеников Зимних Школ составляют ученики Пущинских средних школ. Программа учебных и культурных мероприятий составляется так, что практически все желающие школьники могли участвовать в работе школы. Но не только пущинцы, но иногородние ученики могли участвовать в работе школы. Как правило это были ученики, приезжавшие вместе с их преподавателями. Преподаватели ЗПШ работают в Школе бесплатно.

В задачи школы входит:

- повышение интереса школьников к науке;
- подготовка к обучению в высших учебных заведениях;
- помощь в выборе профессии;

- знакомство с мировой культурой;
- самореализация и личностный рост участников;
- создание условий для общения между всеми участниками — школьниками, студентами и аспирантами, опытными и молодыми учеными.

Школа разделена на 3 основных департамента: Физико-Информатико-Математический, Биолого-Химический и Гуманитарный. Программа Школы построена таким образом, чтобы каждый учащийся мог самостоятельно выбрать наиболее интересные для него курсы. В течение всей школы читаются научно-популярные лекции; проводятся курсы лекций, семинары и практикумы по различным темам; организуются научно-спортивные турниры. Каждый курс включает около 5 занятий, на которых последовательно разбирается одна из тем школьной программы на значительно более глубоком уровне, чем она изучается в школе, но часто такие темы не изучаются в школе вообще. В конце Школы проводится научная конференция, на которой учащиеся рассказывают о том, что они узнали за время школы. Последние несколько лет конференция организована в форме выставки-представления курсов, на которой участники школы оформляют стенд по пройденной тематике и на закрытии Школы рассказывают о пройденном материале всем желающим.

В ЗПШ школьники проводят свободное от занятий время в командах по 10 – 20 человек. В каждой команде работают 2 – 3 вожатых. Вожатые одновременно являются ведущими учебных курсов. Однако, команды абсолютно не соответствуют по составу предметным отделениям. Это дает возможность взаимодействовать на протяжении школы с гораздо большим количеством людей. С закрытием Школы связь преподавателей и школьников поддерживается весь год. Культурная программа Школы включает в себя вечера, посвященные живописи, литературе, музыке, а также творческие студии и осуществляется совместно школьниками и преподавателями. (Материал взят с сайта Зимней Пущинской школы: `http://zpsh.psn.ru`, автор Д.Э. Шноль).

МКШ

Международная компьютерная школа (МКШ) при Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша была основана группой единомышленников под руководством Петра Дмитриевича Ширкова в 1989 году. Её главная отличительная особенность — проектная система образования, при которой учитель и ученик (эти два слова были сразу же выброшены из лексикона МКШовцев за некорректность) занимаются одним делом — решают какую-то научную или техническую задачу,

причем ответ может быть неизвестен преподавателю заранее. По идее, участник проекта, движимый собственным интересом, должен куда лучше впитывать знания, которые руководитель выдает ему по мере надобности. Роль руководителя заключается главным образом в том, чтобы незаметно направлять исследование в нужную сторону. Такая система не только гораздо более привлекательна для детей, чем традиционная (с лекциями, контрольными работами и экзаменами), но и приводит к лучшему усвоению информации, как показывает опыт.

В течение учебного года проводятся занятия в вечерней школе (в ИПМ). А на летних каникулах организуется 3-недельная выездная школа, где проекты идут непрерывно, изо дня в день. Во время, свободное от проектов, участники занимаются купанием, футболом, экскурсиями и культовой психологической игрой «Мафия». Местом проведения школы обычно служит один из наукоградов Московской области. Иногда на зимних, весенних или (реже) осенних каникулах устраиваются выездные мини-школы (на 3 – 8 дней).

Число детей на летней школе доходило до 150. Среди них бывали гости из ближнего и дальнего зарубежья. За все время существования МКШ через нее прошло больше тысячи человек, у которых остались самые светлые воспоминания. После нескольких первых лет система вышла на самоподдерживающийся режим, когда большинство преподавателей Школы составляли её же бывшие выпускники, ставшие студентами ведущих московских вузов. МКШ отмечена в нескольких газетных публикациях и как минимум в двух репортажах по центральному телевидению. (Материал взят с сайта `http://neretin.ru`, автор И.С. Неретин)

Летняя школа «Интеллектуал»

Летняя школа интенсивного обучения Интеллектуал на базе одноимённой школы первый раз прошла в 2005 году. В ней было 30 московских детей и 30 детей из провинции (от Соловков до Севастополя и Иркутска). Участвовали школьники, окончившие 7 и 8 класс. Утром общая лекция приглашённого лектора (каждый день нового), затем две пары (математика и физика). Для пар дети разбиты на 4 группы по результатам входной олимпиады. После обеда — кружки по самым разным предметам, спорт, экскурсии. Для жизни дети разбиты на 4 команды, у каждой свои вожатые. В конце обучения каждому вручается диплом (с отличием или без), диск с учебными материалами и фотографиями. В 2006 году количество детей возросло до 80. Мы надеемся, что летняя школа будет жить и обретёт свои традиции. Главный смысл мы видим в возможностях, которые школа даёт детям из провинции. У нас есть сайт `http://summer-school.msk.ru.`

Математическое ориентирование

А.Д. Блинков

учитель математики ЦО №218

руководитель филиала МММФ (ЦО №218)

Для летних школ актуальным является вопрос организации свободного времени школьников. Наиболее полезными и интересными являются спортивные мероприятия, учитывающие профиль выездного лагеря. Одной из таких форм организации досуга школьников является «математическое ориентирование»: веселое командное соревнование, сочетающее в себе решение несложных математических задач и элементы спортивного ориентирования.

Для проведения подобных соревнований необходимо на пересеченной местности заранее создать контрольные пункты (сокращенно — КП), аналогичные тем, которые применяются в спортивном ориентировании, и для каждых двух КП измерить азимут (направление, в котором надо двигаться, чтобы попасть с одного КП на другой) и примерное расстояние между ними. Количество КП и их удаленность друг от друга можно варьировать в зависимости от возраста соревнующихся и их туристической «искушенности». Как правило, устанавливается 6 – 9 контрольных пунктов, расстояния между которыми 50 – 250 метров, причем КП либо нумеруются, либо каждому из них присваивается определенная буква. В составе каждой команды — 3 или 4 человека, причем они могут быть как одного, так и различного возраста, и иметь различную математическую подготовку. Для каждой команды организаторы устанавливают свой порядок прохождения КП, и исходя из него, составляют математические задачи. Эти задачи могут иметь различную тематику (соответствующую подготовке участников), но обязательно должны носить вычислительный характер, то есть, в результате их решения школьники должны получить два числа, одно из которых укажет им азимут (в градусах) на следующий ориентир, а другое — расстояние до него, выраженное в метрах. Текст каждой задачи маркируется номером команды, для которой эта задача предназначена, и эти тексты раскладываются по соответствующим контрольным пунктам.

Команды, взяв с собой компасы, ручки и блокноты, выходят на маршрут поочередно, с небольшим временным интервалом, чтобы не

мешать друг другу. Порядок выхода команд на маршрут, как правило, определяется жребием. На старте каждая команда получает одну из задач и, решив ее, определяет каким образом ей искать первый из предназначенных для нее КП. Найдя его, она выбирает среди лежащих там текстов задачу со «своим» номером, и решив ее, получает возможность двигаться к следующему КП и так далее. На финише каждая команда предъявляет список КП в порядке их прохождения (если каждому КП присвоена определенная буква, то сдается получившееся «слово»). Для того, чтобы стать победителем соревнования, необходимо пройти все КП в нужном порядке за наименьшее время, поэтому (также как и в спортивном ориентировании), успеха добиваются не те, кто быстрее бегают, а те, кто лучше думают!

Ниже приведены некоторые типовые задачи, составленные в различные годы для математического ориентирования (в одном и том же соревновании наборы задач для разных команд различались только числовыми ответами и порядком, в котором командам приходилось их решать).

Во всех случаях: r — расстояние (в метрах), α — азимут (в градусах); в фигурных скобках указан класс, который закончили большинство соревнующихся школьников.

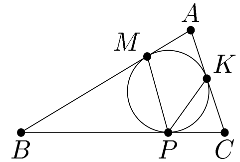
{7} Решите систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{r+\alpha}{2} = 190, \\ \dfrac{r-\alpha}{2} = 80. \end{cases}$

Ответ: $r = 270$; $\alpha = 110$.

{7} Найдите r и α, если известно, что НОК$(0,1\alpha; 0,1r) = 210$, причем $0,1\alpha$ и $0,1r$ — два последовательных натуральных числа, записанных в порядке возрастания.

Ответ: $r = 150$; $\alpha = 140$.

{7} В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся сторон треугольника в точках M, K и P (см. рис.) 1. Найдите периметр треугольника ABC, если $AK = 15$, $BP = 20$, $CM = 30$, и вы получите численное значение r.



2. Найдите $\angle BAC$, если $\angle MPK = 25°$ и вы получите значение α.

Ответ: $r = 130$; $\alpha = 130$.

{8} Подберите r и α, угадав числовую закономерность: $\frac{28}{49}$; $\frac{46}{81}$; $\frac{64}{121}$; $\frac{82}{169}$; $\frac{r}{\alpha}$.

Ответ: $r = 100$; $\alpha = 225$.

{8} Решите уравнение: $x^2 - 170x + 5200 = 0$. r — больший корень уравнения, α — меньший.

Ответ: $r = 130$; $\alpha = 40$.

{8} Основания трапеции имеют длины 70 и 280, а одна из боковых сторон — 140. В каких границах может изменяться длина другой боковой стороны? Нижняя граница численно равна значению α, верхняя — значению r.

Ответ: $r = 350$; $\alpha = 70$.

{9} Найдите r и α, если r — количество натуральных решений неравенства $8n+1 < 3203$, α — градусная мера вписанного угла, опирающегося на дугу в $\frac{\pi}{18}$ радиан.

Ответ: $r = 400$; $\alpha = 5$.

{9} Найдите r и α, если длина дуги окружности радиуса r, имеющей градусную меру α, равна 60π, а числовые значения r и α относятся, как $4 : 3$.

Ответ: $r = 120$; $\alpha = 90$.

{9} Найдите r и α, если α численно равна площади треугольника со сторонами 70, 125 и 55, а r — сумма длин этих отрезков.

Ответ: $r = 250$; $\alpha = 0$.

{9} Найдите положительные решения системы уравнений:

$$\begin{cases} \alpha^2 - 3r\alpha - 10r^2 = 0, \\ \alpha + r = 360. \end{cases}$$

Ответ: $r = 60$; $\alpha = 300$.

{9} Петя, проснувшись, обнаружил в своем мешке с чистыми носками ровно 11 носков.

1) Найдите, сколькими способами Петя может выбрать себе пару чистых носков и вы получите численное значение α.

2) Пока Петя считал количество возможных вариантов, Вася обнаружил у него под кроватью еще 9 носков и доложил их в Петин мешок, но Петя рассердился, сказав, что две пары носков (среди найденных Васей) — грязные. Найдите вероятность (в процентах) того, что Петя

с первого раза вытащит из мешка пару чистых носков, округлите ее до десятков, и вы получите численное значение r.

Ответ: $r = 60$; $\alpha = 110$.

Отмечу, что большинство из этих сравнительно простых задач составлены так, что применение рациональных способов вычисления существенно сокращает время их решения и уменьшает вероятность появления вычислительных ошибок, что является весьма существенным для достижения успеха в описанных соревнованиях.

Понятно, что подобные соревнования можно проводить не только в летнее время, их также можно сделать индивидуальными. По аналогии, можно составить и проводить «физическое» или «химическое» ориентирование и т. п.

Оглавление